ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы
және механика-математика факультеті
«Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуы аясында өтетін
«МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» атты
Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясы**

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

**Республиканской научно-методической конференции
«АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ»,
посвященной 20-летию Евразийского национального университета
им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика»
механико-математического факультета
Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева**

2016 жыл 14-15 қазан

Астана

ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника к печати принимали участие:
Джайчибеков Н.Ж., Ибраев А.Г., Бургумбаева С.К., Бостанов Б.О.

«Механика және математиканың өзекті мәселелері» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуына арналған = «Актуальные вопросы механики и математики», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилев. СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-методической конференции. Қазақша, орысша. – Астана, 2016, 292 б.

ISBN 998-601-301-808-9

Жинаққа студентердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік модельдеу, механика және математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методика преподавания механики и математики.

Тексты докладов печатаются в авторской редакции

ISBN 998-601-301-808-9 ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22

©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2016

формуласымен кескінделеді, мұндағы $\boldsymbol{x}$ - сызықтық қабыршыққа тиіс кез келген нүктенің радиус- векторы; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ сандары

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = 1, \tag{12}$$
$$\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_p \geq 0$$

шарттарын қанағаттандырады.

Қолданлыған әдебиеттер тізімі

1. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М., «Наука», 1966.
2. Щербаков Р.Н., Малаховский В.С. Краткий курс аналитической геометрии. Томск. 1964.
3. Яглом И. М., Ашкинузе В.Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч.1 М., Учпедгиз, 1962.
4. Комиссарук А.М. Основы аффинной геометрии на плоскости. Минск. «Вышейшая школа», 1967.
5. Комиссарук А.М. Аффинная геометрия. Минск. «Вышейшая школа», 1977.

ӘОЖ 514.124

АФФИНДІК КЕҢІСТІКТЕГІ КӨПӨЛШЕМДІ ЖАЗЫҚТЫҚТАР

Мусин А.Т., Бақытбек К.

kalima_bakytbek@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Нақты n-өлшемді аффиндік кеңістік, n-өлшемді сызықтық (векторлық) V_n кеңістігін анықтайтын *I .Векторларды қосу;II. Векторды санға көбейту;III. Өлшемділік* аксиомалар топтарына *IV Векторларды нүктеден салу,* атап айтқанда *IV_1 аксиомасы.* Кез келген M нүктесі және $\overline{u}$ векторы үшін $\overline{MN} = \overline{u}$ болатындай бірден бір N нүктесі бар болады. *IV_2 аксиомасы*. Кез келген M, N, K нүктелер үштігі үшін $\overline{MN} + \overline{NK} = \overline{MK}$ қатынасы орынды – атты аксиомаларын қосқаннан алынады. n-өлшемді нақты аффинді кеңістікті A_n арқылы белгілейміз. Векторлары A_n-нен алынған нүктелер жұптарына сәйкес қойылатын V_n кеңістігін A_n кеңістігімен *байланысқан* дейміз.

Аффинді кеңістік нүктелері мен онымен байланысқан векторлы кеңістік векторларының табиғаты алуан түрлі болуы мүмкін. Тек талап етілетіні, векторларды қосу, санға көбейту және векторды нүктеден салу амалдары жоғарыда I, II, III, IV топ аксиомаларында тұжырымдалған қасиеттерге ие болуы керек.

Бұл аксиомалар жүйесін ұсынған әйгілі неміс математигі Герман Вейль және оны Вейль аксиомалар жүйесі дейді. Біртектес емес

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \tag{1}$$

жүйесі берілсін, мұнда $i = 1, 2, \ldots, m$ және b_i сандары арасында нөлден өзгешесі бар. Жүйе үйлесімді, атап айтқанда $Rang\ A = Rang\ A_{кең} = k$ деп ұйғарамыз. $\{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ (1) жүйесінің кейбір шешімі болсын. Бұл шешімді (1) жүйесіне қойып

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 = b_i \tag{2}$$

тепе-теңдіктерін аламыз. (2) тепе-теңдіктерін (1) теңдеулерінен шегеріп нәтижесінде эквивалент

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0 \tag{3}$$

жүйесіне келеміз.

Әрі қарай (3)-те $x_j - x_j^0 = u_j$ деп ұйғарып біртектес

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = 0 \tag{4}$$

жүйесін аламыз. (4) теңдеулер жүйесіне шешімдердің

$$c_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \end{pmatrix}^T, \ldots, c_{n-k} = \begin{pmatrix} c_{n-k1} & c_{n-k2} & \ldots & c_{n-kn} \end{pmatrix}^T \tag{5}$$

іргелі жүйесі белгілі болсын. Онда (4) жүйесінің кез келген шешімі (5) векторларының сызықтық комбинациясы түрінде өрнектелетіні алгебрадан белгілі. Демек

$$u_j = c_{1j}t_1 + c_{2j}t_2 + \ldots + c_{n-kj}t_{n-k} \tag{6}$$

мұндағы $t_1, \ldots, t_{n-k}$ - кез келген сандар.

$u_j = x_j - x_j^0$ болғандықтан (6)-дан

$$x_j = x_j^0 + (c_{1j}t_1 + c_{2j}t_2 + \ldots + c_{n-kj}t_{n-k}), \quad j = 1, \ldots, n \tag{7}$$

$x_1^0, \ldots, x_n^0$ сандарын (1) жүйесінің *дербес шешімі* дейміз. (7) формуласының жақша ішіндегі қосындысы (4) жүйесінің *жалпы шешімін* кескіндейді.

(1) жүйесінен оның оң жақтарын нөлдермен ауыстырғаннан шыққан (4) жүйесін (1) жүйесіне сәйкес *біртектес жүйе* дейді. (7) формуласы мына бір ұйғарымның әділ екенін растайды.

1- *теорема. Біртектес емес* (1) теңдеулер *жүйесінің жалпы* шешімі осы жүйенің дербес шешімі мен сол жүйеге сәйкес біртектес жүйенің жалпы шешімінің қосындысы түрінде кескінделеді.

n- өлшемді A_n аффиндік кеңістігін қарастырып, онда қандай да бір аффиндік координаталар жүйесін белгілейік. Онда (4) жүйесінің әрбір $x_1, \ldots, x_n$ шешіміне A_n кеңістігінің $x_1, \ldots, x_n$ координаталы нүктесін сәйкес қоюға болады. Мына бір ұйғарым орынды.

2-*теорема*. (4) жүйесінің шешімдері A_n-де *(n-k)* өлшемді жазықтық түзейді.

Дәлелдеме. (4) жүйесінің барлық шешімдері (2) формулаларымен кескінделеді. (5) векторларының тәуелсіз болуынан бұл формула кейбір *n-k*-өлшемді жазықтықтың параметрлік теңдеулері болып табылады. 2-теорема дәлелденді.

3-*теорема*. A_n аффиндік кеңістігіндегі кез келген P_m жазықтығы кез келген аффиндік координаталарда (1) түріндегі және $r = n - m$ рангылы сызықтық теңдеулер жүйесімен берілуі мүмкін.

1. Жазықтықтың координаталар басынан өткенде және тек сонда ғана біртектес сызықтық теңдеулер жүйесімен беріледі.

2. *Маңызды дербес жағдай.* Гипержазықтықтың жалғыз

$$\grave{a}_1\tilde{o}_1 + \grave{a}_2\tilde{o}_2 + \ldots + \grave{a}_n\tilde{o}_n = b$$

сызықтық теңдеуімен беріледі.

3. (8) теңдеулерінің әрқайсысын кейбір гипержазықтықтың теңдеуі ретінде қарастыруға болады. Сондықтан әрбір m -өлшемді жазықтықты $n - m$ саны бар кейбір гипержазықтық-тардың қиылысуы ретінде қарастыруға болады.

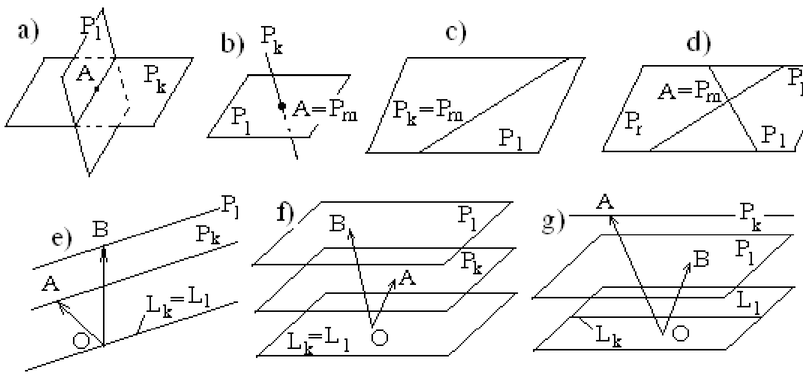
4. Егер сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді болмаса онда геометриялық тұрғыда ол, бірден барлық гипержазықтықтарға тиіс бірде-бір нүктенің жоқ екенін білдіреді.

Осы тармақта жазықтықтар және ішкі кеңістіктер өлшемді-лігі төменгі индекстермен белгіленеді.

A_n аффиндік кеңістігіндегі P_k және P_l жазықтықтарының ортақ A нүктесі болсын. Осы нүктені аффиндік координаталар жүйесінің басы етіп алайық. Онда ағымды M нүктесі P_k (немесе P_l) жазықтығын сызып өтсе, $\overline{AM}$ векторы L_k (сәйкесінше L_l) ішкі кеңістігін сызып өтеді. Сондықтан қиылысатын екі жазықтықтың өзара орналасуы жөніндегі сұрақ L_n векторлы кеңістігіндегі L_k және L_l ішкі кеңістіктерді қарастырумен орынды байланысады.

Ішкі кеңістіктердің қасиеттерін пайдалана келесі жәйттерді айқындау қиын емес.

1) P_k және P_l жазықтықтары қиылысса, онда олардың қиылысуы кейбір P_m жазықтығы болады. (1а-суретте $k = l = 2$, $m = 1$ деп алынған)



1-сурет

Ескерту 1. P_m жазықтығы бір нүктеден тұруы да мүмкін (m=0). Мұны қиылысатын қос түзу немесе түзу мен жазықтықтың қиылысу мысалы көрсетеді (1b-сурет). Жалпы жағдайда өлшемділіктерінің қосындысы кеңістік өлшемділігінен артпайтын екі жазықтық бір нүктеде қиылысады. Мәселен, екіөлшемді қос жазықтық төрт өлшемді кеңістікте бір нүктеде қиылысады.

Ескерту 2. Екі жазықтықтың бірі тұтастай екіншісіне тиісті болу жағдайы да мүмкін. Мәселен, $P_k \subset P_l$, $k < l$ болса, онда P_m=P_k (1с-сурет).

2) Егер P_k және P_l жазықтықтары P_m жазықтығы бойынша қиылысса, онда P_k және P_l жазықтықтарын қамтитын $r = k + l - m$ өлшемді жалғыз P_r жазықтығы бар, оның үстіне ешбір кіші өлшемді жазықтыққа P_k және P_l бір мезгілде сыймайды. P_r жазықтығының L_r бағыттаушы ішкі кеңістігі L_k және L_l бағыттаушы ішкі кеңістіктерінің қосындысы болып табылады. Бұл қосынды P_k және P_l бір нүктеде қиылысқанда (m = 0, 1d-сурет) және тек сонда ғана тура қосынды болып табылады.

$k + l - m = n$ болатын дербес жағдайда P_r жазықтығы ролін A_n аффиндік кеңістігі атқарады. ($r = n = 3$ болуында 1а-суретті қараңыз)

3) Егер қиылысатын P_k және P_l жазықтықтары қандай да P_r жазықтығына тиіс болса, онда олардың қиылысуының өлшемділігі $m \geq k + l - r$.

Дербес жағдайда A_n аффиндік кеңістігінен алынған кез келген қиылысатын қос жазықтығы үшін

$$m \geq k + l - n.$$

4) Егер P_k және P_l жазықтықтары A нүктесі арқылы сәйкесінше L_k және L_l ішкі кеңістіктер бағытында өтсе және $L_k \subset L_l$ болса (L_k ішкі бағыттаушы кеңістігі L_l –де жатса), онда $P_k \subset P_l$. Егер осының өзінде $k = l$ болса, онда P_k және P_l жазықтықтары (сол сияқты L_k мен L_l) беттеседі.

Енді P_k жазықтығы A нүктесі және L_k ішкі кеңістігімен, ал P_l жазықтығы B нүктесі және L_l ішкі кеңістігімен анықталсын. $k \leq l$ деп санаймыз.

Анықтама. P_k жазықтығы $L_k \subset L_l$ болуында P_l жазықтығы-на параллель делінеді. Мұндайда *P_l жазықтығын да P_k жазықтығына параллель* деп айтатын боламыз.

Ескерту 1. Осы анықтамаға сәйкес $P_k \subset P_l$ тиістілігі параллельдіктің дербес жағдайы болып табылады.

Ескерту 2. P_k жазықтығы мен P_l жазықтығы параллель болып $k = l$ болса, онда P_k жазықтығы мен P_l жазықтығы беттеседі.

Ескерту 3. $n = 3$ болуында $k = l = 1$, $k = l = 2$ және $k = 1$, $l = 2$ дербес жағдайлары элементар геометриядан белгілі түзулер мен жазықтықтардың параллельдік ұғымымен ұштасады (1*e,f,g*-сурет).

Бірдей өлшемді P және $P^{/}$ жазықтықтары кез келген аффиндік координаталар жүйесінде сызықтық теңдеулер жүйелерімен берілсін. Параллельдік анықтамасын қолдана, келесі пікірдің растығын айқындау қиын емес.

P және $P^{/}$ жазықтықтары параллель болуы үшін, сәйкес біртектес сызықтық теңдеулер жүйелері эквивалент болуы қажет және жеткілікті.

Дербес жағдайда

$$\grave{a}_1\tilde{o}_1 + \grave{a}_2\tilde{o}_2 + \ldots + \grave{a}_n\tilde{o}_n + b = 0, \tag{8}$$

$$\grave{a}_{1'}\tilde{o}_1 + \grave{a}_{2'}\tilde{o}_2 + \ldots + \grave{a}_{n'}\tilde{o}_n + b' = 0 \tag{9}$$

теңдеулерімен берілген қос гипержазықтық коэффициенттерінің

$$\frac{a_1}{a_1^{/}} = \frac{a_2}{a_2^{/}} = \ldots = \frac{a_n}{a_n^{/}}, \text{ сәйкесінше } \left(\frac{a_1}{a_1^{/}} = \frac{a_2}{a_2^{/}} = \ldots = \frac{a_n}{a_n^{/}} = \frac{b}{b^{/}} \right)$$

пропорцияда болуында олар бір-біріне параллель (беттеседі).

4-*теорема*. A_n аффиндік кеңістігінде P_k жазықтығы мен B нүктесі берілсін. Сонда B нүктесі арқылы P_k жазықтығына параллель k-өлшемді $P_k^{/}$ жазықтығы бар және ол жалғыз болады. Егер $B \in P_k$ болса, онда P және $P^{/}$ жазықтықтары беттеседі; ал егер B нүктесі P_k жазықтығынан тысқары жатса, онда P_k және $P_k^{/}$ жазықтықтары қиылыспайды.

Анықтама. Қиылыспайтын және параллель емес қос жазықтық *айқас* делінеді.

5-*теорема*. Егер $k + l - m < n$ болса, онда P_k жазықтығына параллель және P_r-де жатпайтын кез келген k-өлшемді жазықтық P_l-мен айқасады.

Салдар. Егер k, l, m, n бүтін сандары

$$0 \leq m < k, \; 0 \leq m < l, \; k + l - m < n$$

теңсіздіктерін қанағаттандырса, онда A_n –де L_k және L_l бағыттаушы ішкі кеңістіктеріне ие P_k және P_l айқас жазықтықтары табылып, $L_m = L_k \cap L_l$ жазықтықтығы m-өлшемді болады.

6-*теорема*. P_k мен P_l жазықтықтарын қамтитын $r + 1 = (k + l - m) + 1$ -өлшемді P_{r+1} жазықтығы жалғыз.

7-теорема. Егер P_k және P_l айқас жазықтықтары P_s жазықтығында жатса, онда

$$s \geq (k + l - m) + 1$$

(мұнда m - жоғарыдағыдай $L_k \cap L_l$ қиылысуының өлшемділігі)

Салдар. Егер A_n аффиндік кеңістігінде өлшемділіктері оң P_k және P_l айқас жазықтықтары бар болса, онда

$$k \leq \ n\text{-}2, \ \ l \leq n\text{-}2$$

Дербес жағдай. Гипержазықтық оң өлшемді қандай да жазықтықпен айқаса алмайды.

5-*теорема*. Егер A_n-де P_k, P_l және $L_m = L_k \cap L_l$ жазықтықтарының өлшемділіктері

$$k + l - m \geq \ \ n$$

шартына бағынса, онда P_k және P_l қиылысады; мұндағы L_k мен L_l - сәйкесінше P_k мен P_l –дің бағыттаушы ішкі кеңістіктері.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М., «Наука», 1966.
2. Щербаков Р.Н., Малаховский В.С. Краткий курс аналитической геометрии. Томск. 1964.
3. Яглом И. М., Ашкинузе В.Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч.1 М., Учпедгиз, 1962.
4. Комиссарук А.М. Основы аффинной геометрии на плоскости. Минск. «Вышейшая школа», 1967.
5. Комиссарук А.М. Аффинная геометрия. Минск. «Вышейшая школа», 1977.

ӘОЖ 514.123

ЕВКЛИД КЕҢІСТІГІНДЕГІ ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕЛЕРІ

МусинА.Т., Дәулетбақова Р.Б.

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Казақстан

n-өлшемді Евклид кеңістігін қарастырайық, оны төменде R^n арқылы белгілейтін боламыз және оған нүктенің координаталарын енгізіп бекітеміз: сонымен $M \in R^n$ нүктесінің орналасуы оның $x^1, x^2, ..., x^n$ координаталарымен бірмәнді анықталады.

Әрине бұл координаталар кеңістікте бекітілген $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ базисіне қатысты алынған.

Демек, кеңістікке декарт координаталарын енгізу дегеніміз кеңістіктің әрбір нүктесіне оның *координаталары* деп аталатын $x^1, x^2, ..., x^n$ нақты сандар бумасын сәйкестікке қою, сонымен бірге

a) кеңістіктің өзгеше нүктелеріне координаталардың да өзгеше бумалары сәйкес қойылады. Бұл мынаны білдіреді ($x^1, x^2, ..., x^n$), (y^1, ..., y^n) координаталарына ие P және Q нүктелері тек қана $x^i = y^i$, $i = 1, ...,\ n$ болғанда беттеседі;

b) керісінше, нақты x^i сандарының әрбір ($x^1, x^2, ..., x^n$) бумасына кеңістіктің белгілі бір нүктесі сәйкес.

Евклид кеңістігінің нүктелерін нақты сандар бумасымен сипаттау идеясы геометриялық есептерді алгебра әдістерімен шығаруға мүмкіндік беретін аналитикалық геометрия негізінде жатады. Бұл маңызды идеяны математикаға алғаш Декарт енгізген болатын, сондықтан да координаталар Декарт есімімен аталған.

Геометрияны алгебраландыру тек геометрия да ғана емес, бүкіл математикаға төңкеріс еңгізді. Мұнда біз Декарттың әдісінен шығатын белгілі мысалдардан бас тартып (есімізге