

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ**  
**Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ**



**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы  
және механика-математика факультеті  
«Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуы аясында өтетін  
«МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» атты  
Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясы**

**БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ**

**Республиканской научно-методической конференции  
«АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ»,  
посвященной 20-летию Евразийского национального университета  
им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика»  
механико-математического факультета  
Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева**

**2016 жыл 14-15 қазан**

**Астана**

ӘОЖ 531:510 (063)

КБЖ 22

М 49

**В подготовке Сборника к печати принимали участие:**

Джайчибеков Н.Ж., Ибраев А.Г., Бургумбаева С.К., Бостанов Б.О.

**«Механика және математиканың өзекті мәселелері» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуына арналған = «Актуальные вопросы механики и математики», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилев. СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-методической конференции. Қазақша, орысша. – Астана, 2016, 292 б.**

**ISBN 998-601-301-808-9**

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік модельдеу, механика және математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методика преподавания механики и математики.

**Тексты докладов печатаются в авторской редакции**

ISBN 998-601-301-808-9

ӘОЖ 531:510 (063)

КБЖ 22

## ИСТОРИЧЕСКИЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОБЛЕМЫ ИЗУЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛА В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Сыздыкова М.А.

*uak.ablai@mail.ru*

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Математика предлагает общие и достаточно четкие модели для изучения окружающей действительности. Роль математических моделей, описывающих взаимосвязь количественных характеристик различных явлений и процессов, возрастает в связи с расширяющимися возможностями компьютерной обработки данных. Довольно часто и в повседневной практике используются математические знания. И это не только простые математические расчеты, но и элементы высшей математики. Таким образом, все более широкий спектр математических знаний становится сегодня обязательным элементом общей культуры современного человека.

Одной из тем школьного курса математики, которая вызывает много споров, является понятие интеграла. Интеграл появился в школе вследствие реформ школьного математического образования конца 60-х -начала 70-х годов XX века, введших в школе элементы математического анализа. Многие специалисты подчеркивали, что ознакомление учащихся с понятиями и методами математического анализа даже на уровне общих представлений имеет для них большое познавательное, развивающее, общекультурное значение. Такая точка зрения не утратила своей актуальности и в настоящее время. Специфика рассуждений, свойственная математическому анализу позволяет учащимся совершить следующий шаг в обобщении полученных ими знаний из курса элементарной математики, а также открывает перспективу дальнейшего расширения имеющихся знаний.

Вопросы содержания, методики изложения интеграла являлись объектом исследований математиков, начиная с момента введения этого материала в программу средней школы по математике. Практика показывает, что трудности, возникающие при изучении этой темы в средней школе, сохраняются. Причины трудностей – высокий уровень абстракции понятий, сложная логическая структура их определений, недостаточность времени для осмысления сложных вопросов и многое другое.

Целью данной статьи являются вопросы изучения исторических и теоретических основ преподавания в общеобразовательной школе темы «Интеграл», в частности, роль и место интеграла в методике преподавания математики в школе, анализ школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы.

Понятие интеграл непосредственно связано с интегральным исчислением – разделом математики, занимающимся изучением интегралов, их свойств и методов вычисления. Вместе с дифференциальным исчислением интегральное исчисление составляет основу математического анализа.

Символ  $\int$  введен Лейбницем (1675г.). Этот знак является изменением латинской буквы *S* (первой буквы слова сумма). Само слово интеграл впервые ввел Я. Бернулли (1690г.).

Другие термины, относящиеся к интегральному исчислению, появились значительно позднее. Употребляющееся сейчас название первообразная функция заменило более раннее “примитивная функция”, которое ввел Лагранж (1797г.). Латинское слово *primitivus* переводится как “начальный”:  $F(x) = \int f(x)dx$  – начальная (или первоначальная, или первообразная) для функции  $f(x)$ , которая получается из  $F(x)$  дифференцированием [1].

В современной литературе множество всех первообразных для функции  $f(x)$  называется также неопределенным интегралом. Это понятие выделил Лейбниц, который заметил, что все первообразные функции отличаются произвольную постоянную. А  $\int_a^b f(x)dx$  называют определенным интегралом. Обозначение ввел К. Фурье (1768-1830), но

пределы интегрирования указал уже Эйлер. Математики XVII столетия, получившие многие новые результаты, учились на трудах Архимеда. Активно применялся и другой метод - метод неделимых, который также зародился в Древней Греции. В XVII веке были сделаны многие открытия, относящиеся к интегральному исчислению [2]. Так, П. Ферма уже в 1629 году решил задачу квадратуры любой кривой  $y = x^n$ , где  $n$  - целое (то есть вывел формулу

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ), и на этой основе решил ряд задач на нахождение центров тяжести. Методы

математического анализа активно развивались в следующем столетии. В первую очередь следует назвать имена Л. Эйлера, завершившего систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли. В развитии интегрального исчисления приняли участие русские математики М. В. Остроградский (1801 - 1862 гг.), В. Я. Буняковский (1804 - 1889 гг.), П. Л. Чебышев (1821 - 1894 гг.). Принципиальное значение имели, в частности, результаты Чебышева, доказавшего, что существуют интегралы, не выражимые через элементарные функции.

Строгое изложение теории интеграла появилось только в прошлом веке. Решение этой задачи связано с именами О. Коши, одного из крупнейших математиков немецкого ученого Б. Римана (1826 - 1866 гг.), французского математика Г. Дарбу (1842 - 1917) [3].

Ответы на многие вопросы, связанные с существованием площадей и объемов фигур, были получены с созданием К. Жорданом (1826 - 1922 гг.) теории меры. Различные обобщения понятия интеграла уже в начале нашего столетия были предложены французскими математиками А. Лебегом (1875 - 1941 гг.) и А. Данжуа (1884 - 1974), советским математиком А. Я. Хичиным (1894 - 1959 гг.).

Интеграл появился в школе вследствие реформ школьного математического образования конца 60-х - начала 70-х годов XX века, вводивших в школе элементы математического анализа [4]. Многие специалисты подчеркивали, что ознакомление учащихся с понятиями и методами математического анализа даже на уровне общих представлений имеет для них большое познавательное, развивающее, общекультурное значение. Такая точка зрения не утратила своей актуальности и в настоящее время [5].

При изучении элементов анализа в школе основное внимание уделяется двум понятиям – производной и первообразной. Это связано с широким использованием этих понятий в школьной математике. В математике производная активно используется при исследовании функции, первообразная при вычислении площадей криволинейных фигур. Без знания модели «производная» невозможно изучить «первообразную» или «определенный интеграл». Связь простая: интегрирование – операция, обратная дифференцированию (производной). И наоборот, нахождение производной – действие, обратное интегралу.

Проведем сравнительный анализ самых популярных российских и казахстанских школьных учебников алгебры и начала анализа с точки зрения использования различных подходов к введению понятия интеграла.

В учебниках, как правило, используются следующие подходы к введению понятия определенного интеграла:

### **1. Интеграл как предел интегральных сумм**

Этот подход предполагает введение операции интегрирования как независимой операции. При этом интеграл определяется как предел последовательности, составленной из интегральных сумм. Начинается изучение в этом случае с рассмотрения конкретных задач, например, задачи о площади под кривой; задачи о работе силы и др. Затем, обобщив

полученные результаты, переходят к определению интеграла как предела интегральных сумм (А.Н. Колмогоров, А.Г. Мордкович, С.М. Никольский, М. И. Башмаков, А. Абылкасымова и др.).

**2. Интеграл как приращение первообразной:** формула Ньютона – Лейбница практически служит определением интеграла (Ш. А. Алимов).

В учебнике Ш. А. Алимова «Алгебра и начала анализа» перед введением понятия интеграла рассматривается задача о нахождении площади криволинейной трапеции, где вычисление площади сводится к отысканию первообразной  $F(x)$  функции  $f(x)$ . Разность  $F(b) - F(a)$  называют интегралом от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Далее автор рассматривает вычисление площади криволинейной трапеции с помощью интегральных сумм. Он считает, что такой способ приближенного вычисления интеграла требует громоздких вычислений и им пользуются в тех случаях, когда не удастся найти первообразную функции.

**3. Интеграл как единственное разделяющее число множеств нижних и верхних сумм Дарбу:** определенный интеграл вводится через такое понятие, как площадь плоской фигуры. Иначе, определенный интеграл - есть единственное число, заключенное между всеми нижними и всеми верхними суммами Дарбу (Н. Я. Виленкин и др., А.Н. Шыныбеков).

Анализ учебников и учебных пособий, содержащих материал по данной теме, показывает наличие разных мнений по поводу изложения этого достаточно сложного материала в школьном курсе математики.

Интеграл принадлежит к числу математических понятий, происхождение и развитие которых тесно связано с решением прикладных задач. Это понятие и построенный на его основе метод применяются сегодня в самых различных областях научно-практической деятельности человека, в том числе в физике, в химии, биологии, экономике, технических дисциплинах. Широкие приложения интеграла побудили включить соответствующий раздел в действующую школьную программу по математике, которая предполагает наряду с раскрытием сути понятий интеграла ознакомить учащихся с некоторыми их приложениями. Это повышает интерес школьников к изучаемому материалу, положительно влияет на формирование у учащихся политехнического кругозора и правильного понимания места и роли математики в современном мире.

В 11 классе учащиеся продолжают изучать новый раздел математики – начала математического анализа. Этот раздел характеризуется своеобразной методикой. Поэтому очень важно сразу заложить грамотное понимание основ высшей математики.

#### Список использованных источников

1. Под редакцией Юшкевича А.П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т. Т. 1. С древнейших времен до начала нового времени,- М.: Наука, 1970. 353 с.
2. Под редакцией Юшкевича А.П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т. Т. 2. Математика XVII столетия, М.: Наука, 1970.-303 с.
3. Под редакцией Юшкевича А.П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т. Т. 3. Математика XVIII столетия,- М.: Наука, 1972.-498 с.
4. Колмогоров, А.Н. под ред. Успенского В.А. Математика в ее историческом развитии,- М.: Наука, 1991. - 221 с.
5. Вилейнтнер, Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Физматгиз, 1966. - 469 с.