ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуы аясында өтетін «МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАНЫҢ ӨЗЕКТІ МӘСЕЛЕЛЕРІ» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясы

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканской научно-методической конференции «АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева

2016 жыл 14-15 қазан

Астана

ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22
М 49

В подготовке Сборника к печати принимали участие:
Джайчибеков Н.Ж., Ибраев А.Г., Бургумбаева С.К., Бостанов Б.О.

«Механика және математиканың өзекті мәселелері» атты Республикалық ғылыми-әдістемелік конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 20 жылдығы және механика-математика факультеті «Механика» кафедрасының құрылғанына 10 жыл толуына арналған = «Актуальные вопросы механики и математики», посвященной 20-летию Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева и 10-летию основания кафедры «Механика» механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилев. СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-методической конференции. Қазақша, орысша. – Астана, 2016, 292 б.

ISBN 998-601-301-808-9

Жинаққа студентердің, магистранттардың, докоранттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік модельдеу, механика және математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методика преподавания механики и математики.

Тексты докладов печатаются в авторской редакции

ISBN 998-601-301-808-9 ӘОЖ 531:510 (063)
КБЖ 22

9. Zayed E.M.E., Mohamed A.S., Atia H.A. On the separation of elliptic differential operators with operator potentials in weighted Hilbert spaces // Panamer. Math. J. - 2005. - Vol. 15, № 2. - P. 39-47.
10. Zettl A. Separation for differential operators and the L_p spaces // Proc. Amer. Math. Soc. - 1976. - Vol. 55, № 1. – P. 44-46.
11. Muckenhoupt B. Hardy's inequality with weights // Stud. Math. - 1972. - Vol. 24, №1. – C. 31-38.
12. Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D. On separation of a degenerate differential operator in Hilbert space // Centre de Recerca Matematica. UAB, Barcelona, Spain. Preprint no. 1080. December 2011. - P.1-12.

ӘОЖ 517.58

ФУРЬЕ-ХААР КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗДІК МОДУЛІ

Ахажанов Т.Б., Танин Ә.
talgat_a2008@mail.ru, tan_alibek@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан,
Е.А.Бөкетов атындағы ҚарМУ, Қарағанды, Қазақстан

Айталық $f(x,y)$ функциясы $[0,1)^2$ квадратында анықталсын және $\tau = \xi \times \eta$, мұндағы

$$\xi = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1\},$$
$$\eta = \{0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1\},$$

$[0,1)^2$ квадратының қандай да бір бөліктенуі болсын.

Анықтама 1. Берілген $f(x,y)$ функциясының τ бөліктенуі бойынша p-ретті $(1 \le p < \infty)$ вариациялық қосындысы деп

$$\chi_{\tau,p}(f) = \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left| f(x_k, y_l) - f(x_{k-1}, y_l) - f(x_k, y_{l-1}) + f(x_{k-1}, y_{l-1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

шамасын айтамыз.

Бір айнымалы функциялар үшін вариациялық қосынды түсінігін Н.Винер [1] алғаш енгізді, ал екі айнымалы функциялар үшін бұл түсінікті Л.Кларксон және С.Адамс [2] енгізді.

Анықтама 2. Айталық $1 \le p < \infty$ болсын. $f(x,y)$ функция үшін $1 - 1/p$ ретті вариациялық үзіліссіздік модулі деп

$$\omega_{1-1/p}(f, \delta_1, \delta_2) = \sup_{\substack{|\xi| \le \delta_1 \\ |\eta| \le \delta_2}} \chi_{\xi,\eta}^{p}(f),$$

мұндағы $|\xi| = \max\limits_{1 \le k \le n}(x_k - x_{k-1})$, $|\eta| = \max\limits_{1 \le l \le m}(y_l - y_{l-1})$,

шамасын айтамыз.

Анықтама 3. Айталық $1 \le p < \infty$ болсын. Егер $f(x,y)$ функциясы үшін төмендегідей

$$V_p\left(f, [0,1)^2\right) \equiv \omega_{1-1/p}(f,1,1) =$$

$$= \sup_{\tau} \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left| f(x_k, y_l) - f(x_{k-1}, y_l) - f(x_k, y_{l-1}) + f(x_{k-1}, y_{l-1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

шарты орындалса, онда $f(x,y)$ функциясы шенелген p-вариациялы функция деп атаймыз және оны $BV_p[0,1)^2$ функциялар класына жатады дейміз, ал егер $(1 < p < \infty)$

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \omega_{1-1/p}(f, \delta_1, \delta_2) = 0$$

шарты орындалса, онда f функциясы $BVC_p[0,1)^2$ функциялар класына жатады дейміз.
Хаар жүйесінің функциялары $[0,1)$ аралығында келесі түрде беріледі:
егер $x \in [0,1)$ болса,

$$h_0(x) = 1$$

болады, ал егер $n = 2^k + j$, $k \in P = N \cup \{0\}$, $0 \le j < 2^k$ және $\Delta_j^{(k)} = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right)$ болса, онда Хаар функциялары былайша анықталады:

$$h_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, x \in \Delta_{2j}^{(k+1)} \\ -2^{k/2}, x \in \Delta_{2j+1}^{(k+1)} \\ 0, x \in [0,1) \setminus \Delta_j^{(k)} \end{cases}.$$

Айталық $\overline{x} \in R_k$, $\overline{n} \in Z^k$, $\overline{x} = (x_1, ..., x_k)$, $\overline{n} = (n_1, ..., n_k)$ болсын. Онда еселі Хаар жүйесін келесі түрде анықтаймыз:

$$h_{\overline{n}}(\overline{x}) = \prod_{i=1}^{k} h_{n_i}(x_i).$$

Екі айнымалы функциялардың $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ ретті вариациялық үзіліссіздік модуліне қандай шарттар қойғанда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}(f)|^{\beta}, \ \beta > 0$$

қатары жинақталады деген сұрақ қарастырылады, мұндағы $a_{mn}(f)$- Фурье-Хаар коэффициенттері.

Теорема 1. Айталық $f \in BVC_p[0,1)^2$, $1 < p < \infty$ және

$$a_{n_1,n_2}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) h_{n_1}(x) h_{n_2}(y) dxdy, \ n_1, n_2 \in N$$

болсын. Онда келесі теңсіздік орындалады:

$$\left(\sum_{i=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \sum_{j=2^{k_2}}^{2^{k_2+1}-1} |a_{ij}(f)|^p \right)^{1/p} \le \omega_{1-1/p}\left(f, \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right) \cdot 2^{-\frac{k_1+k_2}{2}-2}. \quad (1)$$

Дәлелдеуі. Егер $n_1 = 2^{k_1} + m_1$, $n_2 = 2^{k_2} + m_2$ болса, онда $h_{n_1,n_2}(x,y)$ Хаар функциясының анықтамасын пайдаланып төмендегі теңдіктерді аламыз:

$$a_{n_1,n_2} = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) h_{n_1}(x) h_{n_2}(y) dxdy = \int_{\frac{m_1}{2^{k_1}}}^{\frac{m_1+1}{2^{k_1}}} \int_{\frac{m_2}{2^{k_2}}}^{\frac{m_2+1}{2^{k_2}}} f(x,y) h_{n_1}(x) h_{n_2}(y) dxdy =$$

$$= 2^{\frac{k_1}{2}} 2^{\frac{k_2}{2}} \left(\int\limits_{\frac{m_1}{2^{k_1}}}^{\frac{2m_1+1}{2^{k_1+1}}} \int\limits_{\frac{m_2}{2^{k_2}}}^{\frac{2m_2+1}{2^{k_2+1}}} f(x,y)dxdy - \int\limits_{\frac{2m_1+1}{2^{k_1+1}}}^{\frac{m_1+1}{2^{k_1}}} \int\limits_{\frac{m_2}{2^{k_2}}}^{\frac{2m_2+1}{2^{k_2+1}}} f(x,y)dxdy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\frac{m_1}{2^{k_1}}}^{\frac{2m_1+1}{2^{k_1+1}}} \int\limits_{\frac{2m_2+1}{2^{k_2+1}}}^{\frac{m_2+1}{2^{k_2}}} f(x,y)dxdy + \int\limits_{\frac{2m_1+1}{2^{k_1+1}}}^{\frac{m_1+1}{2^{k_1}}} \int\limits_{\frac{2m_2+1}{2^{k_2+1}}}^{\frac{m_2+1}{2^{k_2}}} f(x,y)dxdy \right).$$

Сондықтан, айнымалыларды ауыстырып, аргументтердің жылжуын ескеріп,

$$a_{n_1,n_2} = 2^{\frac{k_1+k_2}{2}} \left(\int\limits_{\frac{m_1}{2^{k_1}}}^{\frac{2m_1+1}{2^{k_1+1}}} \int\limits_{\frac{m_2}{2^{k_2}}}^{\frac{2m_2+1}{2^{k_2+1}}} f(x,y)dxdy - \int\limits_{\frac{m_1}{2^{k_1}}}^{\frac{2m_1+1}{2^{k_1+1}}} \int\limits_{\frac{m_2}{2^{k_2}}}^{\frac{2m_2+1}{2^{k_2+1}}} f(x+2^{-k_1-1},y)dxdy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\frac{m_1}{2^{k_1}}}^{\frac{2m_1+1}{2^{k_1+1}}} \int\limits_{\frac{m_2}{2^{k_2}}}^{\frac{2m_2+1}{2^{k_2+1}}} f(x,y+2^{-k_2-1})dxdy + \int\limits_{\frac{m_1}{2^{k_1}}}^{\frac{2m_1+1}{2^{k_1+1}}} \int\limits_{\frac{m_2}{2^{k_2}}}^{\frac{2m_2+1}{2^{k_2+1}}} f(x+2^{-k_1-1},y+2^{-k_2-1})dxdy \right) =$$

$$= 2^{\frac{k_1+k_2}{2}} \left(\int\limits_{\frac{m_1}{2^{k_1}}}^{\frac{2m_1+1}{2^{k_1+1}}} \int\limits_{\frac{m_2}{2^{k_2}}}^{\frac{2m_2+1}{2^{k_2+1}}} \left(f(x,y) - f(x+2^{-k_1-1},y) - f(x,y+2^{-k_2-1}) + f(x+2^{-k_1-1},y+2^{-k_2-1}) \right) dxdy \right)$$

теңдігін аламыз.

Енді $\Delta_2(f,x,y,h_1,h_2)$ айырымын

$$\Delta_2(f,x,y,h_1,h_2) = f(x+h_1,y+h_2) - f(x,y+h_2) - f(x+h_1,y) + f(x,y)$$

түрінде белгілеп аламыз.

Онда $x \in \Delta_{2m_1}^{k_1+1}$, $y \in \Delta_{2m_2}^{k_2+1}$ болғанда анықтама бойынша

$$\left|\Delta_2(f,x,y,h_1,h_2)\right|^p \le V^p\left(f,\Delta_{2m_1}^{k_1+1},\Delta_{2m_2}^{k_2+1}\right), \text{ мұндағы } \Delta_{2m}^{k+1} = \left[\frac{2m}{2^{k+1}};\frac{2m+1}{2^{k+1}}\right)$$

теңсіздігі орындалатындығын ескеріп және Гёльдер теңсіздігі негізінде (мұндағы $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

төмендегідей теңсіздіктерді аламыз:

$$a_{n_1,n_2} \le 2^{\frac{k_1+k_2}{2}} \left(\int\limits_{\Delta_{2m_1}^{(k_1+1)}} \int\limits_{\Delta_{2m_2}^{(k_2+1)}} \left| f(x,y) - f(x+2^{-k_1-1},y) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(x,y+2^{-k_2-1}) + f(x+2^{-k_1-1},y+2^{-k_2-1}) \right|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2^{k_1+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2^{k_2+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le 2^{\frac{k_1+k_2}{2}}\left(\sup_{\substack{h_1\le\frac{1}{2^{k_1+1}}\\ h_2\le\frac{1}{2^{k_2+1}}}}\int_{\Delta_{2m_1}^{(k_1+1)}}\int_{\Delta_{2m_2}^{(k_2+1)}}\left|\Delta_2(f,x,y,h_1,h_2)\right|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2^{k_1+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2^{k_2+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le 2^{\frac{k_1+k_2}{2}}V_p\left(f,\left[\frac{m_1}{2^{k_1}},\frac{m_1+1}{2^{k_1}}\right],\left[\frac{m_2}{2^{k_2}},\frac{m_2+1}{2^{k_2}}\right]\right)\left(\frac{1}{2^{k_1+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2^{k_2+1}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2^{k_1+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2^{k_2+1}}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=2^{\frac{k_1+k_2}{2}}V_p\left(f,\left[\frac{m_1}{2^{k_1}},\frac{m_1+1}{2^{k_1}}\right],\left[\frac{m_2}{2^{k_2}},\frac{m_2+1}{2^{k_2}}\right]\right)\left(\frac{1}{2^{k_1+1}}\right)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2^{k_2+1}}\right)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}=$$

$$=2^{\frac{k_1+k_2}{2}}V_p\left(f,\left[\frac{m_1}{2^{k_1}},\frac{m_1+1}{2^{k_1}}\right],\left[\frac{m_2}{2^{k_2}},\frac{m_2+1}{2^{k_2}}\right]\right)\left(\frac{1}{2^{k_1+1}}\right)\left(\frac{1}{2^{k_2+1}}\right)=$$

$$=2^{\frac{k_1+k_2}{2}-k_1-k_2-2}V_p\left(f,\left[\frac{m_1}{2^{k_1}},\frac{m_1+1}{2^{k_1}}\right],\left[\frac{m_2}{2^{k_2}},\frac{m_2+1}{2^{k_2}}\right]\right)=$$

$$=2^{-\frac{k_1+k_2}{2}-2}V_p\left(f,\left[\frac{m_1}{2^{k_1}},\frac{m_1+1}{2^{k_1}}\right],\left[\frac{m_2}{2^{k_2}},\frac{m_2+1}{2^{k_2}}\right]\right).$$

Осыдан

$$\left|a_{n_1,n_2}(f)\right|^p\le 2^{-\frac{p}{2}(k_1+k_2)-2p}\left(V_p\left(f,\left[\frac{m_1}{2^{k_1}},\frac{m_1+1}{2^{k_1}}\right],\left[\frac{m_2}{2^{k_2}},\frac{m_2+1}{2^{k_2}}\right]\right)\right)^p. \tag{2}$$

Енді $\varepsilon>0$ кез келген оң санын алайық. Кез келген $m_1=0,1,...,2^{k_1}-1$, $m_2=0,1,...,2^{k_2}-1$ сандары үшін

$$\left(\chi^p_{\xi_{m_1},\eta_{m_2}}(f)\right)^p\ge\left(V_p^p\left(f,\left[\frac{m_1}{2^{k_1}},\frac{m_1+1}{2^{k_1}}\right],\left[\frac{m_2}{2^{k_2}},\frac{m_2+1}{2^{k_2}}\right]\right)\right)^p-\frac{\varepsilon}{2^{k_1+k_2}}$$

теңсіздігі орындалатындай $\left[\frac{m_1}{2^{k_1}},\frac{m_1+1}{2^{k_1}}\right),\left[\frac{m_2}{2^{k_2}},\frac{m_2+1}{2^{k_2}}\right)$ кесінділерінің ξ_{m_1} және η_{m_2} бөліктеулері табылады. Сондықтан $[0,1)^2$ квадратының диаметрлері $\frac{1}{2^{k_1}}$, $\frac{1}{2^{k_2}}$ аспайтын бөліктеулерін біріктіріп (2) теңсіздігін қосындылап

$$\sum_{i=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\sum_{j=2^{k_2}}^{2^{k_2+1}-1}\left|a_{ij}(f)\right|^p\le\left(\omega^p_{1-1/p}\left(f,\frac{1}{2^{k_1}},\frac{1}{2^{k_2}}\right)-\varepsilon\right)\cdot 2^{-\frac{k_1+k_2}{2}p-2p}$$

теңсіздігіне келеміз. ε саны кез келген өте аз шама болғандықтан (1) теңсіздігіне келеміз. Теорема дәлелденді.

Қолданылған әдебиетер тізімі

1. Wiener N. The gudratic variation of a function and its Fourier coefficients // Massachusetts J. of Math. - 1924 . - Vol. 3. - P. 72-94.
2. Clarkson J.A., Adams C.R. On definitions of bounded variation for functions of two variables // Trans. Amer. Math.Soc. - 1933. - №35. - P. 824-854.