МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

STUDIES IN MATHEMATICS
AND ITS APPLICATIONS
VOLUME 20

MATHEMATICAL ELASTICITY

VOLUME I:
THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY

PHILIPPE G. CIARLET
Université Pierre et Marie Curie, Paris

1988

NORTH-HOLLAND
AMSTERDAM · NEW YORK · OXFORD · TOKYO

Ф. Сьярле

Математическая теория упругости

Перевод с английского
Г. А. Иосифьяна

под редакцией
О. А. Олейник

Москва «Мир» 1992

ББК 22.161.6+22.25
С 96
УДК 517.93+539.3

Сьярле Ф.

С 96 Математическая теория упругости: Пер. с англ. — М.: Мир, 1992. — 472 с., ил.

ISBN 5-03-002226-0

Монография известного французского математика, которому принадлежит ряд выдающихся результатов в математической теории упругости. Нашим читателям знаком перевод его «Методов конечных элементов для эллиптических задач» (М.: Мир, 1980) и (в соавторстве с П. Рабье) «Уравнений Кармана» (М.: Мир, 1983). Новая книга представляет собой введение в современные исследования по нелинейной теории упругости и одновременно может использоваться как учебник по курсу прикладной математики и механики сплошной среды. В ней изложены новейшие результаты и поставлен ряд нерешённых проблем.

Для математиков-прикладников, специалистов по механике сплошной среды, аспирантов и студентов университетов.

С $\frac{1603040000-092}{041(01)-92}$ 22-91

ББК 22.161.6+22.25

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-002226-0 (русск.)
ISBN 0-444-70259-8 (англ.)

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Настоящая книга представляет собою первый том двухтомного сочинения известного французского ученого, профессора Парижского университета имени Пьера и Марии Кюри Ф. Сьярле под общим названием «Математическая теория упругости». Первый том озаглавлен «Трёхмерная теория упругости», а второй — «Теория моделей меньшей размерности: пластины и стержни».

Книга содержит изложение современной теории упругости, главным образом её математических аспектов. Основное внимание уделяется нелинейной теории упругости, которая в последние годы вызывает большой интерес среди математиков в связи с наличием в ней большого количества трудных и важных нерешённых задач.

Книга может служить учебником по современной математической теории упругости. Это обеспечивается характером изложения и структурой монографии. В ней рассматриваются лишь статические задачи, при этом изложены все важнейшие их исследования, включая результаты, полученные в самые последние годы.

Как известно, классическая линейная теория упругости имеет ограниченные рамки применимости, за пределами которых линейные модели следует заменить на нелинейные, приближениями которых они являются. Задачи линейной теории упругости рассматриваются в книге лишь в главе 6 (§§ 6.2 и 6.3) в той мере, в какой это необходимо для исследования нелинейных задач. С результатами линейной математической теории упругости читатель может подробнее познакомиться, в частности, по монографии Г. Фикеры «Теоремы существования в теории упругости» (М.: Мир, 1974).

Большим достоинством книги Ф. Сьярле является то, что в ней изложен весь тот вспомогательный математический аппарат, который используется для исследования нелинейных задач теории упругости, а также физические основы этой теории. В данном томе две части. Часть А носит название «Основные положения трёхмерной теории упругости». Первая её глава содержит различные сведения о матрицах, банаховых пространствах, производных Фреше, теорему о неявной функции и другие теоремы из функционального анализа, многие из которых приведены с полными доказательствами. Во второй главе дан вывод основных уравнений и граничных условий статической теории упругости. В последующих главах этой части обсуждается структура системы уравнений теории упругости, её зависимость от свойств упругого материала. Часть В под названием «Математические методы трёхмерной теории упругости» посвящена в основном доказательству теорем существования решений краевых задач нелинейной системы теории упругости. В этой части две главы. В первой даны доказательства теорем существования, основанные на применении теоремы о неявной функции, получены оценки отклонения решения от соответствующего решения линейной задачи, доказана сходимость метода приращений. Во второй главе теоремы существоваиия установлены вариационным методом, на основе минимизации энергии, приведены доказательства замечательных теорем Болла о существовании решений.

Отметим, что каждая глава монографии заканчивается обширным списком упражнений, которые не только помогают читателю творчески овладеть материалом, но и значительно расширяют содержание книги, сообщая ряд важных и интересных фактов. В конце книги приведён список нерешённых проблем.

Библиография содержит более 570 наименований. Это монографии и статьи, опубликованные, главным образом, в иностранных журналах. Лишь немногие из них переведены на русский язык. Редактором добавлен небольшой список литературы, в основном на русском языке, связанной с излагаемым предметом.

К сожалению, математические задачи нелинейной теории упругости мало изучались математиками в нашей стране. Можно надеяться, что написанное с большим мастерством сочинение Ф. Сьярле привлечёт внимание наших математиков к проблемам нелинейной теории упругости, не только имеющим большое прикладное значение, но и способствующим развитию и совершенствованию математических методов исследования, о чём убедительно свидетельствует эта книга.

О. А. Олейник

DE LA PRESSION OU TENSION

DANS UN CORPS SOLIDE.

Les géomètres qui ont recherché les équations d'équilibre ou de mouvement des lames ou des surfaces élastiques ou non élastiques ont distingué deux espèces de forces produites, les unes par la dilatation ou la contraction, les autres par la flexion de ces mêmes surfaces. De plus, ils ont généralement supposé, dans leurs calculs, que les forces de la première espèce, nommées *tensions*, restent perpendiculaires aux lignes contre lesquelles elles s'exercent. Il m'a semblé que ces deux espèces de forces pouvaient être réduites à une seule, qui doit constamment s'appeler *tension* ou *pression*, qui agit sur chaque élément d'une section faite à volonté, non seulement dans une surface flexible, mais encore dans un solide élastique ou non élastique, et qui est de la même nature que la pression hydrostatique exercée par un fluide en repos contre la surface extérieure d'un corps. Seulement la nouvelle pression ne demeure pas toujours perpendiculaire aux faces qui lui sont soumises, ni la même dans tous les sens en un point donné. En développant cette idée, je suis parvenu à reconnaître que la pression ou tension exercée contre un plan quelconque en un point donné d'un corps solide se déduit très aisément, tant en grandeur qu'en direction, des pressions ou tensions exercées contre trois plans rectangulaires menés par le même point. Cette proposition, que j'ai déjà indiquée dans le *Bulletin de la Société philomathique* de janvier 1823 (1), peut être établie à l'aide des considérations suivantes.

(1) *OEuvres de Cauchy*, S. II, T. II.

О ДАВЛЕНИЯХ, ИЛИ НАПРЯЖЕНИЯХ, В ТВЁРДОМ ТЕЛЕ

Геометры, исследующие уравнения равновесия и движения тонких пластин или поверхностей, упругих или неупругих, различают два вида сил — силы, которые возникают вследствие растяжения или сжатия, и силы, которые порождаются изгибанием поверхностей. Кроме того, в этих исследованиях обычно предполагается, что силы первого типа, называемые *напряжениями*, ортогональны линиям, к которым они приложены. Мне представляется, что указанные два типа сил можно свести к одному-единственному, которому следует дать постоянное наименование *сил давления*, или *напряжений*. Эти силы действуют на каждый элемент любого сечения, не только на изгибаемых поверхностях, но и в твёрдых телах, упругих или неупругих, причём они имеют природу гидростатического давления, оказываемого покоящейся жидкостью на поверхность погружённого в неё тела. Особенность нового класса сил давления состоит в том, что они не всегда ортогональны поверхностям, на которые действуют, и в произвольно заданной точке не являются одинаковыми во всех направлениях. Развивая эту идею, я пришёл к выводу, что силы давления, или напряжения, воздействующие на какую-либо плоскость, проходящую через данную точку твёрдого тела, могут быть легко определены, как по величине, так и по направлению, если известны силы давления, или напряжения, действующие на какие-нибудь три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через ту же точку. Данное утверждение, уже отмеченное мною в январском номере „Бюллетеня Общества любителей математики“ за 1823 г. (1), может быть обосновано посредством следующих рассмотрений.

(1) Собрание сочинений Коши, т. II.

Начало статьи О.-Л. Коши «О давлениях, или напряжениях, в твёрдом теле» (Exercises de Mathématiques 2 (1827), 42–56). [Перевод с французского Г. А. Иосифьяна.—*Ред.*]

Жаку-Луи Лионсу

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой *подробное введение в современные исследования по теории упругости*; её также можно использовать как *учебное пособие по курсам чистой и прикладной математики или механики сплошных сред.*

Последние десятилетия наблюдалось возрождение интереса к теории упругости, как в отношении физических основ, так и в отношении математической теории. Одна из причин этого — растущее осознание того факта, что классические *линейные модели* теории упругости, имеющие ныне под собой прочный математический фундамент, обладают лишь ограниченной сферой применения, за пределами которой их следует заменить на «настоящие», *нелинейные модели*, приближениями которых они, по существу, служат. Ещё одна причина, в принципе того же рода, заключается в появлении сомнений относительно справедливости классических *моделей малой размерности*, таких как двумерные уравнения Кармана в нелинейной теории упругих пластин. Возникла необходимость иметь более точное описание связи этих упрощённых моделей с соответствующими трёхмерными, которые они призваны приближать.

Указанные направления современных исследований широко освещены в этой книге, о чём свидетельствует следующий перечень её *основных тем*:

— Подробное *описание* (с повсеместным выявлением *аспектов нелинейности*) двух конкурирующих математических моделей *трёхмерной теории упругости*; это, во-первых, *краевая задача, состоящая из системы трёх квазилинейных уравнений второго порядка с частными производными*, к которой добавлены те или иные краевые условия, и, во-вторых, *задача минимизации соответствующей энергии* (главы 1—5).

— *Математическое исследование* этих моделей, включающее *полные доказательства самых последних результатов о существовании решений* (главы 6 и 7).

— Систематический *вывод двумерных моделей пластин из трёхмерных моделей теории упругости* с помощью метода асимптотических разложений. При этом проводится строгий *анализ сходимости* в линейном случае и даётся обоснование применимости распространённых моделей пластин, таких как *уравнения Кармана* (том II).

— *Математическое исследование двумерных моделей пластин*, включающее, в частности, обзор *теорем существования* в нелинейном случае и введение в *теорию буфуркации* (том II).

— Систематизированный подход к *выводу одномерных моделей стержней из моделей трёхмерной теории* (том II).

— Систематический вывод математических моделей *контакта пластин с трёхмерными конструкциями или со стержнями*, а также моделей *складчатых пластин* (том II).

К настоящему времени достигнут существенный прогресс в *изучении статических задач* (которыми и ограничивается эта книга), анализ же нестационарных задач теории упругости всё ещё пребывает в начальной стадии. Хотя совсем недавно для случая одной пространственной переменной были получены глубокие результаты, однако огромные трудности препятствуют дальнейшему продвижению в этой области. Поэтому, вероятно, пройдёт ещё значительное время, прежде чем будет написан «динамический» вариант этой книги.

В нашем изложении явное предпочтение отдаётся математической стороне рассматриваемых вопросов. При этом сведения — как из математики, так и из механики сплошной среды, — предполагающиеся известными читателю, минимальны — книга содержит *почти весь необходимый подготовительный материал*. Для чтения книги достаточно иметь представление об основных понятиях алгебры, анализа и теории функций.

Стоит отметить одну привлекательную сторону теории упругости: при её изучении *естественно* возникает потребность в овладении *основными математическими методами*, используемыми в *алгебре, анализе и теории функций*. Трудно найти лучший стимул для изучения математики! Вот некоторые примеры:

— Очень часто бывают нужны как широко известные, так и весьма специальные результаты из *теории матриц*, например теорема о полярном разложении (теорема 3.2-2) или знаменитая теорема Ривлина—Эриксена о представлении (теорема 3.6-1). Вряд ли можно было ожидать, что при исследовании широкого класса реальных функций запасённой энергии естественно возникает потребность в неравенстве $|\operatorname{tr} \boldsymbol{AB}| \leqslant \sum_i v_i(\boldsymbol{A})\, v_i(\boldsymbol{B})$, где v_i — сингулярные числа матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, занумерованные в порядке возрастания. Кстати, это на первый взгляд тривиальное неравенство доказывается совсем не просто (теорема 3.2-4).

— Для понимания «геометрии деформаций» (гл. 1) нужно иметь некоторые элементарные знания по *дифференциальной геометрии* и особенно важно уметь их применять. Мой личный опыт показывает, что очень немногие из студентов, имевших дело с современной дифференциальной геометрией, могут вывести формулу $da^{\varphi} = |\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi n|\,da$, связывающую между собой элементы площади в отсчётной и деформированной конфигурациях (теорема 1.7-1).

— Изучение геометрических свойств (сохранение ориентации, инъективность) отображений в $\mathbb{R}^3$ естественно требует привлечения таких важнейших средств, как *теорема о сохранении области* (теоремы 1.2-5 и 1.2-6) или понятие *топологической степени* (§ 5.4), которые, к сожалению, слишком часто остаются за рамками основных курсов по математике.

— *Дифференциальное исчисление в банаховых пространствах* — необходимый инструмент, используемый в этой книге повсеместно, и мы рекомендуем читателю, который ещё не привык к нему, поскорее убедиться в многочисленных достоинствах *производной Фреше* и *теоремы о неявной функции*, которые лежат в основе теории существования, изложенной в главе 6.

— Фундаментальная теорема существования для *обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах*, а также результаты о *сходимости соответствующих аппроксимаций, полученных методом Эйлера*, требуются при исследовании методов приращений, столь часто используемых для численной аппроксимации нелинейных уравнений, описывающих упругие структуры (гл. 6).

— Основные понятия *функционального анализа* и *вариационного исчисления*, такие как *пространства Соболева* (в теории упругости их называют пространствами функций с конечной энергией), *слабая сходимость*, *существование элементов, минимизирующих слабо полунепрерывные снизу функционалы*, повсеместно присутствуют в изложении результатов о существовании в трёхмерной теории упругости (гл. 6 и 7) и двумерной теории пластин (том II).

— Ключевые результаты теории *линейных эллиптических систем уравнений с частными производными*, в особенности достаточные условия $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$-регулярности их решений (теорема 6.3-6), предваряют теоремы существования главы 6.

— В основном благодаря новаторским работам Джона Болла по трёхмерной теории упругости, особенно важную роль при изучении проблем, рассмотренных в томе I, приобрело понятие *выпуклости*. В частности, мы естественным образом приходим к нетривиальным примерам *выпуклых оболочек* множеств, например множества всех квадратных матриц с положительным определителем (теорема 4.7-4), а также *выпуклых функций от матриц*. Так, при изучении *материалов Огдена* в главе 4 естественно возникают функции вида $\boldsymbol{F} \to \sum_i \{\lambda_i(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})\}^{\alpha/2}$ с $\alpha \geqslant 1$;

доказательство выпуклости таких функций при $\alpha = 2$ элементарно, однако при других значениях $\alpha \geqslant 1$ оно оказывается неожиданно трудным (§ 4.9). Подобные функции служат примерами *поливыпуклых функций запасённой энергии*. Это понятие, введённое Джоном Боллом, играет очень большую роль в теории упругости (гл. 4 и 7).

— В главе 7 нам встретится понятие *компенсированной компактности*. Соответствующий метод, который предложили Франсуа Мюра и Люк Тартар, в настоящее время получил широкое признание ввиду его эффективности при исследовании нелинейных уравнений с частными производными.

— Методы *асимптотических разложений* (формальные разложения, анализ ошибок, поправки, пограничные слои и т. д.) будут постоянно применяться в томе II для обоснования перехода от трёхмерных моделей теории упругости к двумерным моделям пластин и одномерным моделям стержней. Такие методы были разработаны Жаком-Луи Лионсом для задач в вариационной постановке.

— При исследовании *нелинейных моделей пластин* (том II) естественно появляется *теория бифуркации*. Задачи, связанные с такими моделями, доставляют множество примеров замечательных «реальных» приложений этой теории (выпучивание, точки поворота, множественность решений, теория возмущений и т. д.).

Математическая теория упругости, даже если ограничиться рассмотренным в этой книге статическим случаем, имеет и ещё одну привлекательную сторону — она ставит целый ряд *нерешённых задач*. Перечислим некоторые из них:

— Распространить «локальный» анализ, данный в главе 6 (теория существования, продолжение решения при увеличении сил, анализ методов приращений), на (существенно) смешанные задачи с граничными условиями на перемещения и напряжения.

— «Заполнить пробел» между теоремами существования, основанными на теореме о неявной функции (гл. 6), и теоремами существования, основанными на методе минимизации энергии (гл. 7).

— Исследовать вопрос о неединственности решений (см. примеры в § 5.8).

— Дать математический анализ контакта при наличии трения (контакт без трения, в том числе и самокасание без трения, изучен в главах 5 и 7).

— Найти подходящие условия, при которых функции, минимизирующие энергию (гл. 7), служат решениями соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа.

— Доказать существование решений трёхмерных нелинейных задач для пластин, подходящим образом продолжив решения двумерных уравнений, которые, как известно, существуют (см. том II).

— Провести для пластин численное сравнение двумерных задач с трёхмерными. (Как ни странно, такое сравнение до сих пор не проведено даже в линейном случае, который теоретически исследован довольно хорошо.)

— Дать математический анализ упруго-пластических сред, которые до сих пор рассматривались лишь в рамках линеаризованной теории упругости.

Цели, которые ставились при написании этой книги, можно будет считать достигнутыми, если она убедит читателя в справедливости высказанных выше положений, а именно:

— если читатели-«прикладники», например инженеры, специалисты по механике сплошных сред или по прикладной математике, убедятся в том, что математический анализ совершенно необходим для подлинного понимания теории упругости как в плане построения моделей, так и в плане их изучения, в основном потому, что всё большее значение в исследованиях приобретают нелинейности (поливыпуклость, бифуркация и т. п.), рассмотрение которых, даже на самых первых стадиях, требует определённого математического опыта;

— если читателям, главные интересы которых лежат в области математики, станет ясно, что теория упругости — это вовсе не пыльный классический музей, а напротив — обильный источник захватывающих новых нерешённых задач.

Настоящая книга разбита на два тома. Нумерация *глав* в них сквозная. Каждая глава состоит из введения и нескольких параграфов, нумеруемых так: $m.1$, $m.2$ и т. д. (где m — номер главы), и завершается упражнениями. В пределах каждого параграфа теоремам присваиваются последовательные номера (теорема $m.n$-1, теорема $m.n$-2 и т. д., где $m.n$ — номер параграфа); так же нумеруются и рисунки (рис. $m.n$-1, рис. $m.n$-2 и т. д.). Замечания же и формулы не занумерованы. Конец теоремы[1] или замечания отмечается знаком ■ у правого края страницы. Упражнения в гл. m имеют такую нумерацию: упражнение $m.1$, упражнение $m.2$ и т. д.

Все важные результаты приводятся в форме *теорем* (леммы, предложения, следствия и т. п. в книге отсутствуют), которые и составляют ядро текста. Напротив, *замечания* имеют целью

[1] Каковым, в случае когда теорема приводится с доказательством, считается конец доказательства. — *Прим. изд. ред.*

дать истолкование того или иного факта, указать на обобщения, контрпримеры, на связь с другими результатами, и их вполне можно опустить при первом чтении; тем не менее они способствуют лучшему пониманию материала. Когда строгое определение какого-либо объекта встречается в тексте первый раз, соответствующий термин выделяется жирным шрифтом в случае его особой важности, в остальных же случаях он набирается курсивом. Термины, допускающие свободное толкование или же употребляемые в интуитивном смысле, приводятся в кавычках.

С особой тщательностью выбирались *обозначения*, поскольку хорошо известно их отвлекающее и даже удручающее воздействие при первом знакомстве с теорией упругости. В частности, книга начинается специальным разделом, который рекомендуется читать первым. В этом разделе описаны правила, лежащие в основе принятых здесь обозначений, а также приведены главные *определения* и *формулы*, используемые в книге.

Как правило, даются полные доказательства всех утверждений. В частности, доказательствами сопровождаются все математические результаты, особо важные для теории упругости, например теорема о полярном разложении матриц, теорема Ривлина—Эриксена о представлении (редко доказываемая в книгах по теории матриц), свойство выпуклости функции $\boldsymbol{F} \to \sum_i \{\lambda_i(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})\}^{\alpha/2}$ при $\alpha \geqslant 1$ (о которой обычно забывают, приводя нетривиальные примеры выпуклых функций) и т. д. Более широко известные сведения из математики помещены (обычно без доказательств) в специальные *параграфы, помеченные звёздочкой* и расположенные в тех местах книги, где необходимы соответствующие результаты.

Упражнения различной степени трудности даны в конце каждой главы. Некоторые из них дополняют текст или же рассчитаны на непосредственное применение изложенных результатов. Другие требуют большей изобретательности и обычно сопровождаются указаниями, либо же ссылками на литературу.

Библиография содержит более 570 наименований, но ни в коем случае не претендует на полноту. Читатели при необходимости могут обратиться к исчерпывающему списку литературы, охватывающему период 1678—1965 гг. и приведённому в трактате Трусделла и Нолла (Truesdell & Noll [1965]), а также к библиографиям, помещённым в недавно вышедших книгах Marsden & Hughes [1983], Hanyga [1985], Oden [1986], и к статьям Antman [1983], Truesdell [1983], где коротко и ясно прослеживается история взаимодействия теории упругости и анализа.

Читателям настоятельно рекомендуется дополнить содержащийся в книге материал, обратившись к ряду других источников.

Особенно заслуживают внимания следующие монографии *общего характера по трёхмерной теории упругости* (соответствующие работы по теориям малой размерности для пластин и стержней приведены в томе II):

— Подробный обзор основных направлений механики сплошных сред и, в частности, теории упругости: Truesdell & Toupin [1960], Truesdell & Noll [1965], а также Germain [1972], Truesdell [1977], Gurtin [1981b].

— Теория упругости в классическом и в современном изложении: Love [1927], Murnaghan [1951], Тимошенко [1951], Новожилов [1948], Sokolnikoff [1956], Новожилов [1958], Eringen [1962], Ландау и Лифшиц [1967], Green & Zerna [1968], Stoker [1968], Green & Adkins [1970], Knops & Payne [1971], Duvaut & Lions [1972], Fichera [1972a, 1972b], Gurtin [1972], Wang & Truesdell [1973], Villagio [1977], Gurtin [1981a], Nečas & Hlaváček [1981], Ogden [1984].

— Вопросы нелинейной теории упругости с математической точки зрения: Marsden & Hughes [1983], Hanyga [1985], Oden [1986], Antman [1988][1].

В настоящей книге при описании механики сплошных сред и теории упругости мы выделили лишь *две аксиомы* — принцип напряжений Эйлера—Коши (§ 2.2) и аксиому независимости материала от системы отсчёта (§ 3.3). Таким образом, все остальные понятия считаются заданными *априори*.

Читатели, которых интересует более аксиоматический подход к основным понятиям, таким как система отсчёта, тело, отсчётная конфигурация, масса, силы, независимость материала от системы отсчёта, изотропность, могут обратиться к книгам Трусделла и Нолла (Truesdell & Noll [1965]) и Вана и Трусделла (Wang & Truesdell [1973]), а также фундаментальным работам Нолла (Noll [1959, 1966, 1972, 1973, 1978]).

Далее, рискуя вызвать недоумение некоторых читателей и допуская *вольности речи*[2], мы не делаем в нашей книге различия между тензорами второго ранга и матрицами. Читателю, у которого такой подход вызовет сомнения, следует посмотреть книги Abraham, Marsden & Ratiu [1983] и в особенности Marsden & Hughes [1983], где глубоко и всесторонне освещены аспекты теории упругости, связанные с тензорным исчислением и дифференциальной геометрией.

Эта книга выросла из лекций, которые последние несколько лет я читал в Татовском (Tata) институте фундаментальных ис-

[1] См. также Ильюшин [1990]′ (штрих отсылает к списку литературы, добавленной редактором). — *Прим. ред.*

[2] В оригинале по-французски: abus de langage. — *Прим. изд. ред.*

следований, Штутгартском университете, Университете имени Пьера и Марии Кюри, а также в Высшей нормальной школе. Мне хочется выразить глубокую признательность за содействие всем ученикам и коллегам, с которыми мне довелось работать в течение этого времени, в частности Мишелю Бернаду, Доминику Бланшару, Жану-Луи Давэ, Филиппу Дестюиндеру, Джузеппе Жеймона, Эрве Ледрэ, Ху Цзяньвею, Сринивасану Кесавану, Клаусу Кирхгэсснеру, Флориану Лорану, Индржиху Нечасу, Роберту Нзенгве, Жану-Клоду Помье, Перегриие Кинтеле-Эстевес, Патрику Рабье и Анни Рауль. Особенная моя благодарность Стюарту Антману, Ирен Фонсека, Мортону Гёртину, Патрику Леталлеку, Бернадетте Мьяра, Франсуа Мюра, Тинсли Одену и Жерару Тронелю, которые любезно согласились прочитать первоначальный вариант рукописи тома I и сделали ряд замечаний, позволивших существенно улучшить текст. Я искренне благодарен также г-же Бюглер, г-же Дампера и г-же Рупрехт за усердие и мастерство, проявленные ими при подготовке издания этой книги.

И наконец, эту книгу я посвящаю Жаку-Луи Лионсу, в знак глубокого уважения и признательности.

Август, 1986 *Филипп Сьярле*

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

1. Некоторые общие сведения

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Большое разнообразие обозначений, используемых в книгах и статьях по теории упругости, нередко ставит читателя, особенно впервые приступающего к изучению предмета, в затруднительное положение. Чтобы облегчить восприятие материала, автор по возможности стремился придать изложению наибольшую ясность, в основном за счёт:

— сведения к минимуму количества различных символов и алфавитов (иногда это приводит к более длинным формулам);

— последовательного соблюдения некоторых простых правил при выборе шрифта для букв (эти правила приведены ниже);

— принятия некоего „усреднённого" варианта обозначений, применяемых в литературе; при этом явное предпочтение отдаётся обозначениям, которые приняты в теории уравнений с частными производными (например, точка общего положения в отсчётной конфигурации обозначается через x, а сама эта конфигурация — через $\bar{\Omega}$, тогда как в книгах по механике соответствующие объекты чаще всего обозначают через X и B).

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

При отсутствии других указаний все рассматриваемые в книге *числа, значения функций, элементы матриц, векторов и т. д. следует считать вещественными.*

Двоеточие слева от знака равенства ($:=$) означает, что данное равенство служит определением его левой части.

Заключение в кавычки какой-либо группы слов означает, что соответствующее высказывание не является формально строгим или же что его смысл интуитивно ясен. Кавычки применяются также для словесного описания математических выражений, которые в данном месте текста явно не выписываются.

Символ $\Rightarrow$ означает импликацию.

Символ $\Leftrightarrow$ означает эквивалентность.

Буквами c, c_1, c_2 и т. д. (или же $c(a)$, $c_1(a)$, $c_2(a)$ и т. д., при необходимости указать на зависимость от какой-либо переменной a) обозначаются постоянные, как правило встречающиеся в неравенствах и необязательно имеющие одно и то же значение в разных формулах.

Всюду далее предполагается *суммирование по повторяющимся индексам* в любой формуле, где один и тот же латинский индекс (i, j и т. д.) встречается дважды; исключение составляют формулы, сопровождающиеся указанием „(суммирования нет)“. Область изменения латинского индекса обычно имеет вид $\{1, 2, \ldots, n\}$, где n — произвольное натуральное число, либо же $\{1, 2, 3\}$ — в приложениях к теории упругости; разумеется, латинские индексы используются и для нумерации членов бесконечных последовательностей и рядов. Какой из этих случаев имеет место в каждой конкретной ситуации, должно быть ясно из контекста. Например,

$$-\partial_j(\sigma_{ij}+\sigma_{kj}\partial_k u_i)=f_i$$

означает

$$-\sum_{j=1}^{3}\partial_j\left(\sigma_{ij}+\sum_{k=1}^{3}\sigma_{kj}\partial_k u_i\right)=f_i$$

для $i=1, 2, 3$, а

$$\det \boldsymbol{A}=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{jq}a_{kr}$$

означает

$$\det \boldsymbol{A}=\frac{1}{6}\sum_{i,\,j,\,k,\,p,\,q,\,r=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{jq}a_{kr}$$

для матрицы третьего порядка $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

В приводимом ниже списке обозначений, определений и формул указаны разделы книги, содержащие дополнительные сведения о соответствующем понятии.

Помещение какого-либо определения или соотношения *в рамку* указывает на его чрезвычайно важную роль в теории упругости.

МНОЖЕСТВА, ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, ОТОБРАЖЕНИЯ

$\varnothing$ — пустое множество.

$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество неотрицательных целых чисел.

$\mathbb{Z}=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ — множество целых чисел.

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

$\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ — расширенная вещественная прямая (§ 4.7).

Замечания. Мы не используем часто встречающиеся в литературе символы $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_+^*$ для обозначения множеств $[0, +\infty[$

и $]0, +\infty[$ соответственно, ввиду несогласованности этих обозначений с обозначением $\mathbb{M}^n_+$, которое принято нами для множества матриц с определителем > 0. Для замкнутых интервалов $[a, b]$ на расширенной вещественной прямой допускаются значения $a = -\infty$ и $b = +\infty$; так например,

$$[a, +\infty] = [a, +\infty[\cup \{+\infty\}, \quad [-\infty, +\infty] = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

$A \subsetneqq B$ — множество A строго содержится в B.
$B - A = B \cap (X - A)$ — множество элементов $B \subset X$, не принадлежащих $A \subset X$.
$X - A = \{y \in X;\ y \notin A\}$ — дополнение подмножества $A \subset X$.

Точки пространства $\mathbb{R}^n$ или, вообще, какого-нибудь множества обозначаются строчными светлыми буквами, например x, y.

Подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ или какого-либо множества обозначаются прописными светлыми буквами, например $\bar{\Omega}$, A.

$\mathfrak{S}_n$ — множество всех перестановок набора $\{1, 2, \ldots, n\}$.
$\bar{A}$, или $\{A\}^-$, или $\mathrm{cl}\, A$ — замыкание множества A.
$\mathring{A}$ или $\mathrm{int}\, A$ — множество внутренних точек множества A.
∂A — граница множества A.
$\mathrm{card}\, A$ — число элементов множества A.
$f\colon X \to Y$ либо $f\colon x \in X \to f(x) \in Y$ — отображение, или функция, из X в Y.
$f\colon A \subset X \to Y$ — отображение f подмножества $A \subset X$ в Y.
$f \circ g$ — композиция отображений.
$f|_A$ — сужение функции (или отображения) f на множество A.
$f(\cdot, b)$ — частичное отображение $x \to f(x, b)$.
$f(A) = \{y \in Y;\ y = f(x)$ для некоторого $x \in A\}$ — образ подмножества $A \subset X$ при отображении $f\colon X \to Y$ (обозначаемый также через $\mathrm{Im}(A)$, если f — линейное отображение).
$f^{-1}(B) = \{x \in X;\ f(x) \in B\}$ — прообраз множества $B \subset Y$ при отображении $f\colon X \to Y$.

Отображение $f\colon X \to Y$ является *сюръективным* (или отображением „на“), если $f(X) = Y$; f *инъективно* (или взаимно-однозначно), если $\mathrm{card}\, f^{-1}(\{y\}) = 0$ или 1 для всех $y \in Y$; f *биективно*, если оно сюръективно и инъективно.

f^{-1} — отображение, обратное к биективному.
$\mathrm{supp}\, f = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}^-$ — носитель функции $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Все числа и вещественнозначные функции обозначаются символами, которые начинаются со строчной или прописной буквы, набранной светлым шрифтом, например c, r, ρ, $\iota_1(\boldsymbol{A})$, $\det \boldsymbol{A}$, u_i, E_{ij}, A_{ij}; исключение составляют два случая: $\mathbb{L}(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\, \boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F})$ и $\mathbb{W}(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\, \boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F})$, когда впереди стоят „полые“ латинские буквы.

Функционалы, т. е. отображения, определённые на пространстве вещественнозначных или векторных функций и принимающие значения в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, обозначаются светлыми прописными буквами, например

$$F(\psi) = \int_\Omega \hat{f}(x, \psi(x))\,dx, \qquad L(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\,dx.$$

Во избежание возможных недоразумений (особенно при дифференцировании функций), в ряде случаев одна и та же «функция» обозначается различными символами, в зависимости от переменных, в которых она записана (например, $\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{F}) = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{C})$).

id или id_X — тождественное отображение множества X (равенство $f = id_X$ означает, что $f(x) = x$ для всех $x \in X$).

$\operatorname{sgn}\alpha = +1$ при $\alpha > 0$, $\operatorname{sgn}\alpha = -1$ при $\alpha < 0$.

$\deg(\varphi, \Omega, b)$ — топологическая степень (§ 5.4) отображения $\varphi \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ в точке $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ относительно ограниченного открытого подмножества Ω в $\mathbb{R}^n$.

$(\varphi_k)_{k=l}^\infty$ или (φ_k) — последовательность элементов $\varphi_l, \varphi_{l+1}, \ldots$ $\ldots, \varphi_k, \ldots$.

$\varphi = \lim_{k\to\infty}\varphi_k$, или $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi$ — последовательность (φ_k) сходится, и её предел равен φ.

$x \to a^+$ — последовательность вещественных чисел $x > a$ сходится к $a \in \mathbb{R}$.

$x \to a^-$ — последовательность вещественных чисел $x < a$ сходится к $a \in \mathbb{R}$.

$\liminf_{k\to\infty}\varphi_k$, $\limsup_{k\to\infty}\varphi_k$ — соответственно нижний и верхний пределы числовой последовательности (φ_k) или последовательности функций со значениями в $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (§ 7.2).

Ради сокращения записи там, где не может возникнуть неясности, мы опускаем символ „$k\to\infty$“ и пишем просто $\varphi = \lim\varphi_k$, $\varphi = \limsup\varphi_k$, $\varphi_k \to \varphi$ и т. д.

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

$[a, b] = \{ta + (1-t)b;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ — замкнутый интервал с концами a и b.

$]a, b[= \{ta + (1-t)b;\ 0 < t < 1\}$ — открытый интервал с концами a и b.

$\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A (наименьшее выпуклое множество, содержащее A; § 4.7).

$\operatorname{Ker} L = \{x \in X;\ Lx = 0\}$ — ядро линейного отображения L: $X \to Y$.

$\operatorname{Im} L = \{y \in Y;\ y = Lx$ для некоторого $x \in X\}$ — образ пространства X при линейном отображении $L\colon X \to Y$ (обозначаемый также через $L(X)$).

$\operatorname{Coker} L = Y/\operatorname{Im} L$ — коядро линейного отображения $L\colon X \to Y$.

$\|\cdot\|$ или $\|\cdot\|_X$ — норма в векторном пространстве X.

$B_r(a) = \{x \in X;\ \|x - a\| < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром в точке a.

$B_r = B_r(0) = \{x \in X;\ \|x\| < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром в начале координат.

$S_r = \{x \in X;\ \|x\| = r\}$ — сфера радиуса r с центром в начале координат.

$|\cdot|$ — полунорма (которая может быть и нормой).

X' — (топологическое) сопряжённое пространство к нормированному векторному пространству X (§ 1.2).

$\|\cdot\|'$ — норма в сопряжённом пространстве.

X/Y — факторпространство векторного пространства X по подпространству $Y \subset X$.

$X \hookrightarrow Y$ — X содержится в Y, причём вложение X в Y непрерывно.

$X \Subset Y$ — X содержится в Y, причём вложение X в Y компактно.

Пусть $f\colon A \subset X \to Y$ и $\alpha \geqslant 0$. Тогда

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = O(\|x\|^\alpha), & \text{или} \\ f(x) = O(x) & \text{при} \quad \alpha = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{существуют постоянная } c \\ \text{и окрестность нуля } V \text{ в } X, \\ \text{такие что} \\ \qquad \|f(x)\|_Y \leqslant c\,(\|x\|_X)^\alpha \\ \text{для всех } x \in A \cap V. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = o(\|x\|^\alpha), & \text{или} \\ f(x) = o(x) & \text{при} \quad \alpha = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|_Y}{(\|x\|_X)^\alpha} = 0.$$

$$f(x, y) = o_y(x) = o(x;\ y) \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\|f(x, y)\|}{\|x\|} = 0 \text{ для всех } y.$$

$\varphi_k \to \varphi$ или $\varphi = \lim \varphi_k$ — сильная сходимость в $X \Leftrightarrow \lim \|\varphi_k - \varphi\|_X = 0$.

$\varphi_k \rightharpoonup \varphi$ — слабая сходимость в $X \Leftrightarrow \lim L(\varphi_k) = L(\varphi)$ для всех $L \in X'$ (§ 7.1).

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

$\mathscr{L}(X;\ Y)$ — пространство всех непрерывных линейных отображений нормированного векторного пространства X в нормированное векторное пространство Y.

$\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X;\ X)$ (§ 1.2).
$X' = \mathscr{L}(X;\ \mathbb{R})$ (§ 1.2).

$\mathscr{I}som\,(X;\ Y) = \{A \in \mathscr{L}(X;\ Y);\ A$ биективно и $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y;\ X)\}$ (§ 1.2).

$\mathscr{I}som\,(X) = \mathscr{I}som\,(X;\ X)$ (§ 1.2).

Замечание. $\mathscr{I}som\,(X;\ Y)$ *не* является векторным пространством.

$\mathscr{L}_k(X;\ Y)$ — пространство всех непрерывных k-линейных отображений нормированного векторного пространства X в нормированное векторное пространство Y, $k \geqslant 2$ (§ 1.3).

$\mathscr{C}^0(E,\ F)$ — множество всех непрерывных отображений топологического пространства E в топологическое пространство F.

$\mathscr{C}^0(E) = \mathscr{C}^0(E;\ \mathbb{R})$.

$\mathscr{C}^m(\Omega;\ Y)$ — пространство всех m раз непрерывно дифференцируемых отображений открытого подмножества Ω нормированного векторного пространства X в нормированное векторное пространство Y, $1 \leqslant m \leqslant \infty$ (§§ 1.2 и 1.3).

$\mathscr{C}^m(\Omega) = \mathscr{C}^m(\Omega;\ \mathbb{R})$.

$\mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$ (Ω — ограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant m \leqslant \infty$) — пространство всех функций $v \in \mathscr{C}^m(\Omega)$, таких что для любого мультииндекса α, $|\alpha| \leqslant m$, существует функция $v^\alpha \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$, совпадающая с $\partial^\alpha v$ на Ω, т. е. $v^\alpha|_\Omega = \partial^\alpha v$ (§ 1.3).

$$\|v\|_{\mathscr{C}^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |v^\alpha(x)| \quad (§\ 1.3).$$

$\mathscr{C}^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ (Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant m < \infty$, $0 < \lambda \leqslant 1$) — пространство всех функций $v \in \mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$, таких что частные производные от v порядка m удовлетворяют в Ω условию Гёльдера с показателем λ (§ 1.3).

$$\|v\|_{\mathscr{C}^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|v\|_{\mathscr{C}^m(\overline{\Omega})} + \max_{|\alpha| = m} \sup_{\substack{x,\, y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)|}{|x - y|^\lambda} \quad (§\ 1.3).$$

Далее Ω считается открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n$.

$\mathscr{D}(\Omega) = \{v \in \mathscr{C}^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp} v$ — компактное подмножество в $\Omega\}$ (§ 6.1).

$\mathscr{D}'(\Omega)$ — пространство распределений на Ω (§ 6.1).

$L^p(\Omega)$ — пространство классов эквивалентности, состоящих из функций, которые совпадают dx-почти-всюду в Ω и удовлетворяют условию

$$| v |_{0,\, p,\, \Omega} = \left\{ \int_\Omega | v(x) |^p \, dx \right\}^{1/p} < \infty \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$| v |_{0,\, \infty,\, \Omega} = \inf \{ \alpha \geqslant 0;\ \ dx\text{-meas}\, \{ x \in \Omega;\ | v(x) | \geqslant \alpha \} = 0 \} < \infty \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

$L^p(\partial\Omega)$ — пространство классов эквивалентности, состоящих из функций v, которые совпадают $d\alpha$-почти-всюду на $\partial\Omega$ и удовлетворяют условию

$$\| v \|_{L^p(\partial\Omega)} = \left\{ \int_{\partial\Omega} | v |^p \, da \right\}^{1/p} < \infty \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p < \infty \quad (\S\ 1.6).$$

$W^{m,\,p}(\Omega) = \{ v \in L^p(\Omega);\ \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)$ для всех $| \alpha | \leqslant m \}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

$W_0^{m,\,p}(\Omega)$ — замыкание $\mathscr{D}(\Omega)$ в $W^{m,\,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ (§ 6.1).

$$\| v \|_{m,\, p,\, \Omega} = \begin{cases} \left\{ \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} | \partial^\alpha v |^p \, dx \right\}^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leqslant m} | \partial^\alpha v |_{0,\, \infty,\, \Omega}, & p = \infty \quad (\S\ 6.1). \end{cases}$$

$$| v |_{m,\, p,\, \Omega} = \begin{cases} \left\{ \int_\Omega \sum_{|\alpha| = m} | \partial^\alpha v |^p \, dx \right\}^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \max_{|\alpha| = m} | \partial^\alpha v |_{0,\, \infty,\, \Omega}, & p = \infty \quad (\S\ 6.1). \end{cases}$$

$H^m(\Omega) = W^{m,\,2}(\Omega)$ (§ 6.1).

$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,\,2}(\Omega)$ (§ 6.1).

$\| v \|_{m,\,\Omega} = \| v \|_{m,\,2,\,\Omega}$ (§ 6.1).

$| v |_{m,\,\Omega} = | v |_{m,\,2,\,\Omega}$ (§ 6.1).

Замечание. Очевидно, что $| v |_{0,\,\Omega} = \| v \|_{0,\,\Omega}$. Поэтому символ $| \cdot |_{0,\,\Omega}$ также обозначает норму в пространстве $L^2(\Omega)$.

Если $X(\Omega)$ — пространство вещественнозначных функций, определённых в Ω, то через $\boldsymbol{X}(\Omega)$ обозначается всякое пространство вектор-функций или функций со значениями в пространстве тензоров, компоненты которых принадлежат $X(\Omega)$, например:

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{v = (v_i);\ v_i \in \mathscr{D}(\Omega)\},$$
$$\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) = \{v = (v_i);\ v_i \in W^{1,p}(\Omega)\},$$
$$\boldsymbol{L}^2(\Omega) = \{\Sigma = (\sigma_{ij});\ \sigma_{ij} \in L^2(\Omega)\}.$$

При этом для соответствующих норм и полунорм сохраняются прежние обозначения, например:

$$\|v\|_{1,p,\Omega} = \left[\sum_{i=1}^{3} \|v_i\|_{1,p,\Omega}^p\right]^{1/p} \quad \text{для} \quad v \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega),$$

$$|\Sigma|_{0,\Omega} = \left[\sum_{i,j=1}^{3} |\sigma_{ij}|_{0,\Omega}^2\right]^{1/2} \quad \text{для} \quad \Sigma \in \boldsymbol{L}^2(\Omega).$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Пусть X и Y — нормированные векторные пространства, Ω — открытое подмножество в X и f: $\Omega \subset X \to Y$ — заданное отображение. Мы используем следующие обозначения:

$f'(a) \in \mathscr{L}(X;\ Y)$ — производная отображения f в точке $a \in \Omega$ (§ 1.2).

$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = f'(a)$ при $X = \mathbb{R}$.

$\partial_j f(a) \in \mathscr{L}(X_j;\ Y)$ или $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ — частная производная f по j-й переменной в точке a, где $X = \prod_j X_j$ (§ 1.2).

$\mathbf{grad}\, f(a) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right] \in \mathbb{R}^n$ — градиент функции f: $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \Omega$ (§ 1.2).

$\mathbf{grad}_x f(a, y) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a, y)\right] \in \mathbb{R}^n$ (§ 1.2).

$\dfrac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}) = \left[\dfrac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\boldsymbol{F})\right] \in \mathbb{M}^n$ — градиент функции W: $\Omega \subset \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ в точке $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^n$ (§ 1.2).

$\boldsymbol{\nabla\varphi}(a) = (\partial_j \varphi_i(a)) \in \mathbb{M}^3$ — градиент деформации, задаваемой отображением $\boldsymbol{\varphi}$: $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, в точке $a \in \Omega$ (§ 1.4).

$\operatorname{div} \boldsymbol{u}(a) = \partial_i u_i(a) \in \mathbb{R}$ — дивергенция векторного поля $\boldsymbol{u} = (u_i)\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в точке $a \in \Omega$ (§ 1.6).

$\operatorname{\mathbf{div}} \boldsymbol{T}(a) = \partial_j T_{ij}(a)\,\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n$ — дивергенция тензорного поля $\boldsymbol{T} = (T_{ij})\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}^n$ в точке $a \in \Omega$ (§ 1.7).

Формулы Грина ($\boldsymbol{n} = (n_i)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$):

$$\int_\Omega \partial_i u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u n_i\,\mathrm{d}a, \text{ где } u\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \quad (\S\S\ 1.6 \text{ и } 6.1),$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a, \text{ где } \boldsymbol{u}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n \quad (\S\ 1.6),$$

$$\int_\Omega \operatorname{\mathbf{div}} \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a, \text{ где } \boldsymbol{T}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{M}^n \quad (\S\ 1.7),$$

$$\int_\Omega \operatorname{\mathbf{div}} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}a, \text{ где}$$

$$\boldsymbol{T}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{M}^n \text{ и } \boldsymbol{\vartheta}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n \quad (\S\ 2.4),$$

$$\int_\Omega \operatorname{\mathbf{div}} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{e}(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}a, \text{ где}$$

$$S\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{S}^n \text{ и } \boldsymbol{v}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n \quad (\S\ 6.3).$$

$f''(a) \in \mathscr{L}_2(X;\, Y)$ — вторая производная от f в точке $a \in \Omega$ (§ 1.3).

$\partial_{ij} f(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a) \in \mathbb{R}$ — вторая частная производная от $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \Omega$ (§ 1.3).

$f^{(m)}(a) \in \mathscr{L}_m(X;\, Y)$ — производная порядка m отображения f в точке $a \in \Omega$ (§ 1.3).

$f^{(m)}(a)\, h^m = f^{(m)}(a)(h_1, h_2, \ldots, h_m) \in Y$ при $h_i = h$, $1 \leqslant i \leqslant m$ (§ 1.3).

$\partial^\alpha v(a) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, где $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, — мультииндексная запись частных производных функции $v\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (§ 1.3).

Замечание. Символы $\partial_j f$, $\partial f/\partial x_j$, $\partial^2 f/\partial x_i\,\partial x_j$, $\partial^\alpha v$ также используются для обозначения частных производных в смысле теории распределений.

ВЕКТОРЫ, МАТРИЦЫ, ТЕНЗОРЫ

Векторы и вектор-функции обозначаются символами, первая буква которых набрана строчным жирным шрифтом, например $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{n}^\varphi$, $\boldsymbol{t}(x, \boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{\varphi}(x)$, $\mathbf{div}\,\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{id}$, $\mathbf{grad}_x f(a, y)$.

Замечание. При заданном базисе точка $x \in \mathbb{R}^n$ отождествляется с вектором $\boldsymbol{ox}$, а разность $(y - x)$ — с вектором $\boldsymbol{xy}$.

Матрицы, а также функции со значениями в пространстве матриц обозначаются символами, начинающимися с прописной жирной буквы, например $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{0}$, $\mathbf{Diag}\,\mu_i$, $\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A}$, $\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$. Исключение составляют: $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}$ (градиент деформации), $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}$ (градиент перемещений), $\partial W/\partial \boldsymbol{F}$ (градиент функции W: $\Omega \subset \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$), $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$ (линеаризованный тензор деформации).

В настоящей книге встречаются только два тензора высокого ранга — это *тензор ориентации* (ε_{ijk}), который имеет ранг 3 и определяется равенствами

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } \{i, j, k\} \text{ — чётная перестановка набора } \{1, 2, 3\}, \\ -1, & \text{если } \{i, j, k\} \text{ — нечётная перестановка набора } \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{если хотя бы два индекса совпадают,} \end{cases}$$

и *тензор упругости*, имеющий ранг 4 и обозначаемый через $\boldsymbol{A}(x, \boldsymbol{F}) = (a_{ijkl}(x, \boldsymbol{F}))$ (§ 5.9).

Множества матриц обозначаются полыми латинскими буквами (например $\mathbb{M}^3$, $\mathbb{M}^3_+$, $\mathbb{O}^3$, $\mathbb{S}^3_>$), которые также используются для поливыпуклых представлений функций от $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$ (например $W(\boldsymbol{F}) = \mathbb{W}(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F})$).

Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — канонический базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. Компоненты вектора $\boldsymbol{u}$ из $\mathbb{R}^n$ записываются в виде $(\boldsymbol{u})_i$ или u_i, и, таким образом,

$$\boldsymbol{u} = (u_i) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{e}_i.$$

Замечание. Это обозначение отличается (запятыми между компонентами) от обозначения транспонированного вектора-столбца (см. ниже).

Для матрицы $\boldsymbol{A}$ типа (m, n) (т. е. с m строками и n столбцами) мы обозначаем через $(\boldsymbol{A})_{ij}$, A_{ij} или a_{ij} её элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце. При этом саму матрицу $\boldsymbol{A}$ мы записываем в виде

$$\boldsymbol{A}=(A_{ij})=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вектор в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемый как матрица, *всегда* считается столбцом, т. е. матрицей типа $(n, 1)$.

Для *векторов* используются следующие обозначения:

$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}=(u_1 u_2 \dots u_n)$ — вектор-строка, т. е. матрица типа $(1, n)$, транспонированная к $\boldsymbol{u}$.

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ — эвклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$ — эвклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=(u_i v_j)$ — тензорное произведение в $\mathbb{R}^n$.

$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}=\varepsilon_{ijk}u_j v_k \boldsymbol{e}_i$ — внешнее произведение в $\mathbb{R}^n$.

Для *матриц* используются обозначения:

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ — матрица, транспонированная к $\boldsymbol{A}$.

$\boldsymbol{A}^{-1}$ — матрица, обратная к $\boldsymbol{A}$.

$\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

$\boldsymbol{A}^{1/2}$ — квадратный корень из симметричной положительно-определённой матрицы $\boldsymbol{A}$ (§ 3.2).

$\boldsymbol{A}^{\alpha}$, $\alpha>0$ — α-я степень симметричной положительно-определённой матрицы $\boldsymbol{A}$ (§ 4.9).

$\boldsymbol{I}=(\delta_{ij})$ — единичная матрица.

$\mathbf{Diag}\,\mu_i$ или $\mathbf{Diag}\,(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ — диагональная матрица с элементами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ на главной диагонали, расположенными в том же порядке.

$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ — след матрицы $\boldsymbol{A}$ (символ tr также применяется для обозначения оператора следа в теории пространств Соболева).

$\det\boldsymbol{A}$ — определитель матрицы $\boldsymbol{A}$.

$\lambda_i=\lambda_i(\boldsymbol{A})$ — собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$.

$v_i=v_i(\boldsymbol{A})=\{\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\}^{1/2}$ — сингулярные числа матрицы $\boldsymbol{A}$ (§ 3.2).

$|\boldsymbol{A}|=\sup\limits_{\boldsymbol{v}\neq 0}(|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}|/|\boldsymbol{v}|)=\max_i\{\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\}^{1/2}$ — спектральная норма матрицы $\boldsymbol{A}$.

$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ — скалярное произведение в пространстве матриц $\mathbb{M}^n$.

$\|A\| = \{A : A\}^{1/2}$ — норма матрицы в $\mathbb{M}^n$.

Cof $\boldsymbol{A}$ — матрица алгебраических дополнеиий[1] для матрицы $\boldsymbol{A}$; **Cof** $\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-T}$, если $\boldsymbol{A}$ обратима (§ 1.1).

$\iota_1(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A}$ (§§ 1.2, 3.5).

$\iota_{n-1}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \mathbf{Cof}\, \boldsymbol{A} (= \det \boldsymbol{A} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^{-1}$, если $\boldsymbol{A}$ обратима; (§§ 1.2, 3.5).

$\iota_n(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$ (§§ 1.2, 3.5).

$\iota_k = \iota_k(\boldsymbol{A})$, $k = 1, 2, 3$, для матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка 3 (§ 3.5).

$\iota_A = (\iota_1(\boldsymbol{A}), \iota_2(\boldsymbol{A}), \iota_3(\boldsymbol{A}))$ — тройка, образованная главными инвариантами матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка 3 (§ 3.5).

Определим теперь множества матриц, которым отводится особо важная роль в этой книге. В скобках указаны другие распространённые обозначения этих множеств или же соответствующих им множеств линейных преобразований.

$\mathbb{M}^n$ — множество всех квадратных матриц порядка n с вещественными элементами ($\mathrm{GL}(n)$, Lin).

$\boxed{\mathbb{M}^n_+ = \{\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^n;\ \det \boldsymbol{F} > 0\} \quad (\mathrm{GL}^+(n),\ \mathrm{Lin}^+).}$

$\mathbb{O}^n = \{\boldsymbol{P} \in \mathbb{M}^n;\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}\}$ — множество всех ортогональных матриц порядка n ($\mathrm{O}(n)$, Orth).

> $\mathbb{O}^n_+ = \{\boldsymbol{P} \in \mathbb{O}^n;\ \det \boldsymbol{P} > 0\} = \{\boldsymbol{P} \in \mathbb{O}^n;\ \det \boldsymbol{P} = 1\}$ — множество всех поворотов в $\mathbb{R}^n$, или множество собственно ортогональных матриц ($\mathrm{SO}(n)$; Orth^+).

$\mathbb{S}^n = \{\boldsymbol{B} \in \mathbb{M}^n;\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^T\}$ — множество всех симметричных матриц порядка n (Sym).

> $\mathbb{S}^n_>$ — множество всех симметричных положительно-определённых матриц порядка n (Psym, Sym^+).

$\mathbb{S}^n_\geqslant$ — множество всех симметричных неотрицательно-определённых матриц порядка n.

---

[1] **Cof** от английского cofactor matrix. — *Прим. перев.*

2. Теория упругости

ГЕОМЕТРИЯ ОТСЧЁТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ; ДЕФОРМАЦИИ; ТЕНЗОРЫ ДЕФОРМАЦИИ

dx — элемент объёма в $\mathbb{R}^n$.

dx-meas A или vol A, если $n=3$, — объём подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ (§ 1.5).

da — элемент площади поверхности в $\mathbb{R}^n$ (§ 1.6).

da-meas Δ или area Δ при $n=3$ — площадь da-измеримого подмножества Δ на границе области в $\mathbb{R}^n$ (§ 1.6).

дл γ — длина кривой γ в $\mathbb{R}^3$ (§ 1.8).

$\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ — отсчётная конфигурация (Ω — область в $\mathbb{R}^3$) (§ 1.4).

$\Gamma = \partial\Omega$ — граница множества Ω.

Γ_α — da-измеримое подмножество на Γ.

$x \in \bar{\Omega}$ — точка общего положения в отсчётной конфигурации, имеющая координаты x_i.

$\boldsymbol{n}$ — вектор единичной (т. е. с $|\boldsymbol{n}|=1$) внешней нормали к $\partial\Omega$ или к границе какой-либо подобласти в Ω (§ 1.6).

$\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ — обычные обозначения для деформаций отсчётиой конфигурации; деформация — это достаточно гладкое отображение, которое сохраняет ориентацию и инъективно, за исключением, быть может, точек на Γ (§ 1.4).

$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ — обычные обозначения для перемещений; прн этом $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{v}$ (§ 1.4).

$\nabla\boldsymbol{\varphi} = (\partial_j\varphi_i) = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{M}^3$ — градиент деформации (§ 1.4).

$\nabla\boldsymbol{u} = (\partial_j u_i)$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{M}^3$ — градиент перемещений (§ 1.4).

$\partial_j\boldsymbol{\varphi} = \partial_j\varphi_i\boldsymbol{e}_i$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ — касательные векторы к координатным кривым (§ 1.4).

$\boldsymbol{C} = \nabla\boldsymbol{\varphi}^T\nabla\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{S}^3_>$ — правый тензор деформации Коши — Грина (§ 1.8).

$\boldsymbol{B} = \nabla\boldsymbol{\varphi}\nabla\boldsymbol{\varphi}^T \in \mathbb{S}^3_>$ — левый тензор деформации Коши — Грина (§ 1.8).

$E=\frac{1}{2}(C-I)=\frac{1}{2}(\nabla u^{T}+\nabla u+\nabla u^{T}\nabla u)\in\mathbb{S}^3$ — тензор деформации Грина — Сен-Венана (§ 1.8).

ГЕОМЕТРИЯ ДЕФОРМИРОВАННОЙ КОНФИГУРАЦИИ

$\bar{\Omega}^{\varphi}=\varphi(\bar{\Omega})$ — деформированная конфигурация (§ 1.6).

Ω^{φ} — множество внутренних точек деформированной конфигурации ($\Omega^{\varphi}=\operatorname{int}\varphi(\bar{\Omega})$, когда φ инъективно на $\bar{\Omega}$; см. § 1.6).

Γ^{φ} — граница деформированной конфигурации ($\Gamma^{\varphi}=\partial\{\Omega^{\varphi}\}$, когда φ инъективно на $\bar{\Omega}$; см. § 1.6).

$\Gamma^{\varphi}_{\alpha}$ — da^{φ}-измеримое подмножество на Γ^{φ}.

$x^{\varphi}=\varphi(x)\in\bar{\Omega}^{\varphi}$ — точка общего положения в деформированной конфигурации; её координаты имеют вид x^{φ}_{i} (§ 1.4).

$\partial^{\varphi}_{j}=\partial/\partial x^{\varphi}_{j}$.

n^{φ} — вектор единичной $(|n^{\varphi}|=1)$ внешней нормали к Γ^{φ} или же к границе какой-либо подобласти в $\bar{\Omega}^{\varphi}$.

$dx^{\varphi}=\det\nabla\varphi\, dx$ — элемент объёма в деформированной конфигурации (§ 1.5).

$da^{\varphi}=|\operatorname{\mathbf{Cof}}\nabla\varphi\, n|\, da=\det\nabla\varphi|\nabla\varphi^{-T}n|\, da$ — элемент площади поверхности в деформированной конфигурации (§ 1.7).

$dl^{\varphi}=\{dx^{T}\nabla\varphi^{T}\nabla\varphi\, dx\}^{1/2}$ — элемент длины кривой в деформированной конфигурации (§ 1.8).

$\operatorname{div}^{\varphi}T^{\varphi}=\partial^{\varphi}_{j}T^{\varphi}_{ij}e_{i}\colon \bar{\Omega}^{\varphi}\to\mathbb{R}^3$ — дивергенция тензорного поля $T^{\varphi}\colon\bar{\Omega}^{\varphi}\to\mathbb{M}^3$ относительно переменных x^{φ}.

ПРИЛОЖЕННЫЕ СИЛЫ

$f^{\varphi}\colon\Omega^{\varphi}\to\mathbb{R}^3$ — плотность приложенной объёмной силы на единицу объёма деформированной конфигурации (§ 2.1).

$f\colon\Omega\to\mathbb{R}^3$ — плотность приложенной объёмной силы на единицу объёма отсчётной конфигурации (§ 2.6).

Эти плотности связаны соотношением

$$\boxed{f^{\varphi}(x^{\varphi})\,dx^{\varphi} = f(x)\,dx.}$$

Пример. В случае поля тяготения (см. §§ 2.1, 2.7)

$$f^{\varphi}(x^{\varphi}) = -g\rho^{\varphi}(x^{\varphi})\,e_3, \quad f(x) = -g\rho(x)\,e_3,$$

где ρ^{φ} — плотность массы в деформированной конфигурации, ρ — в отсчётной конфигурации.

Консервативная объёмная сила (§ 2.7): $f(x) = \hat{f}(x, \varphi(x))$, $x \in \Omega$, причём

$$\hat{f}(x, \eta) = \mathbf{grad}_{\eta}\,\hat{F}(x, \eta) \text{ для всех } x \in \Omega,\ \eta \in \mathbb{R}^3.$$

Тогда

$$\boxed{\begin{gathered}\int_{\Omega} \hat{f}(x, \varphi(x)) \cdot \vartheta(x)\,dx = F'(\varphi)\,\vartheta \quad \text{для всех} \quad \varphi, \vartheta\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3, \\ \text{где} \quad F(\psi) = \int_{\Omega} \hat{F}(x, \psi(x))\,dx.\end{gathered}}$$

$\hat{F}\colon \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — потенциал приложенной объёмной силы.

Пример. „*Замороженная*“ (т. е. не зависящая от деформации) нагрузка, рассматриваемая в § 2.7:

$$\boxed{\hat{f}(x, \eta) = f(x) \Rightarrow \hat{F}(x, \eta) = f(x) \cdot \eta.}$$

$g^{\varphi}\colon \Gamma_1^{\varphi} \to \mathbb{R}^3$ — плотность приложенной поверхностной силы на единицу площади в деформированной конфигурации (§ 2.1).

$g\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ — плотность приложенной поверхностной силы на единицу площади в отсчётной конфигурации (§ 2.6).

Эти плотности связаны соотношением

$$\boxed{g^{\varphi}(x^{\varphi})\,da^{\varphi} = g(x)\,da.}$$

Пример. Равномерно сжимающая (растягивающая) нагрузка (давление; см. § 2.7):

$$g^{\varphi}(x^{\varphi}) = -\pi n^{\varphi}(x^{\varphi}),$$

$$g(x) = -\pi(\det \nabla\varphi(x))\,\nabla\varphi(x)^{-T} n(x) = \hat{g}(x, \nabla\varphi(x)), \qquad \pi \in \mathbb{R}.$$

Консервативная поверхностная сила (§ 2.7): $g(x)=\hat{g}(x, \nabla\varphi(x))$, $x\in\Gamma_1$, причём

$$\int_{\Gamma_1}\hat{g}(x, \nabla\varphi(x))\cdot\vartheta(x)\,da=G'(\varphi)\,\vartheta$$

для всех $\varphi, \vartheta\colon \bar{\Omega}\to\mathbb{R}^3$, таких что $\vartheta=o$ на $\Gamma-\Gamma_1$,

где $G(\psi)=\int_{\Gamma_1}\hat{G}(x, \psi(x), \nabla\psi(x))\,da.$

$\hat{G}\colon \Gamma\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{M}^3_+\to\mathbb{R}$ — потенциал приложенной поверхностной силы.

Пример. „Замороженная“ нагрузка (см. § 2.7):

$$\hat{g}(x, \eta)=g(x)\Rightarrow\hat{G}(x, \eta)=g(x)\cdot\eta.$$

ТЕНЗОРЫ НАПРЯЖЕНИЙ. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

$T^{\varphi}(x^{\varphi})\in\mathbb{S}^3$ — тензор напряжений Коши в точке $x^{\varphi}\in\bar{\Omega}^{\varphi}$ (§ 2.3).

$t^{\varphi}(x^{\varphi}, n^{\varphi})=T^{\varphi}(x^{\varphi})\,n^{\varphi}$, $x^{\varphi}\in\bar{\Omega}^{\varphi}$, $|n^{\varphi}|=1$, — вектор напряжений Коши (§§ 2.2, 2.3).

$T(x)=T^{\varphi}(x^{\varphi})\operatorname{\mathbf{Cof}}\nabla\varphi(x)=(\det\nabla\varphi(x))\,T^{\varphi}(x^{\varphi})\,\nabla\varphi(x)^{-T}$, $x\in\bar{\Omega}$, — первый тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа (§ 2.5).

Тензор напряжений Коши и первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа связаны соотношениями (§ 1.7)

$$T(x)\,n\,da=T^{\varphi}(x^{\varphi})\,\mathbf{n}^{\varphi}\,da^{\varphi},$$
$$\operatorname{\mathbf{div}}T(x)=(\det\nabla\varphi(x))\operatorname{\mathbf{div}}T^{\varphi}(x^{\varphi}).$$

$\Sigma(x)=\nabla\varphi(x)^{-1}T(x)=(\det\nabla\varphi(x))\,\nabla\varphi(x)^{-1}T^{\varphi}(x^{\varphi})\,\nabla\varphi(x)^{-T}\in\mathbb{S}^3$, $x\in\bar{\Omega}$, — второй тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа (§ 2.5).

Определяющие уравнения для изотропного упругого материала (§ 3.6):

$$\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi}) = \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \nabla\varphi(x)) = \overline{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \nabla\varphi(x)\nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}}), \quad \text{где}$$
$$\overline{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{B}) = \beta_0(x, \iota_{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{I} + \beta_1(x, \iota_{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{B} + \beta_2(x, \iota_{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{B}^2, \qquad \boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^2_>,$$

$$\Sigma(x) = \hat{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)) = \tilde{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}}\nabla\varphi(x)), \quad \text{где}$$
$$\tilde{\Sigma}(x, \boldsymbol{C}) = \gamma_0(x, \iota_{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{I} + \gamma_1(x, \iota_{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{C} + \gamma_2(x, \iota_{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{C}^2, \qquad \boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_>.$$

$\boldsymbol{T}_R(x) = \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{I}) = \hat{\Sigma}(x, \boldsymbol{I})$ — тензор остаточных напряжений (§ 3.6).

Если материал является изотропным и однородным и отсчётная конфигурация соответствует естественному состоянию (§ 3.7), то

$$\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{C}) = \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + o(\boldsymbol{E}), \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}.$$

Экспериментальные данные показывают, что обе *постоянные Ламе* λ и μ положительны (§ 3.8).

Определяющее уравнение для *материала Сен-Венана—Кирхгофа* имеет вид (§ 3.9)

$$\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E}.$$

$\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ — коэффициент Пуассона (§ 3.8),

$E = \dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ — модуль Юнга (§ 3.8).

$\mathsf{A}(x, \boldsymbol{F}) = \left(\dfrac{\partial\hat{T}_{ij}}{\partial F_{kl}}(x, \boldsymbol{F})\right)$ — тензор упругости (§ 5.9).

Правило. Если рассматривается функция $\hat{S}$: $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{S}(\boldsymbol{F})$ и её зависимость от $\boldsymbol{F}$ может быть также выражена через некоторые другие функции от $\boldsymbol{F}$, такие как $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ и т. п., то будут использоваться следующие очевидные обозначения:

$$\boldsymbol{S} = \widehat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{F}) = \overline{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{B}) = \widetilde{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{C}) = \breve{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{E}) = \dot{\boldsymbol{S}}(\iota_{\boldsymbol{C}}) = \mathbb{S}(\boldsymbol{F}, \operatorname{\mathbf{Cof}} \boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}),$$

где $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}$.

ГИПЕРУПРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ

Гиперупругий материал (§ 4.1): $\boldsymbol{T}(x) = \widehat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x))$, $x \in \Omega$, причём

$$\widehat{\boldsymbol{T}}(x, \boldsymbol{F}) = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{F}) \text{ для всех } x \in \overline{\Omega},\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,$$

$$\int_\Omega \widehat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x)) : \nabla\vartheta(x)\, \mathrm{d}x = W'(\varphi)\,\vartheta \text{ для всех } \varphi,\ \vartheta\colon \Omega \to \mathbb{R}^3,$$

$$\text{где } W(\psi) = \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\psi(x))\, \mathrm{d}x.$$

$\widehat{W}\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ — функция запасённой энергии (§ 4.1).
$W(\cdot)$ — энергия деформации (§ 4.1).

Пусть $\widehat{W}(x, \boldsymbol{F}) = \widetilde{W}(x, \boldsymbol{C}) = \breve{W}(x, \boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{F}$. Тогда

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \boldsymbol{C}) = 2\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \boldsymbol{C}}(x, \boldsymbol{C}), \qquad \breve{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \boldsymbol{E}) = \frac{\partial \breve{W}}{\partial \boldsymbol{E}}(x, \boldsymbol{E}).$$

Функция запасённой энергии изотропного гиперупругого материала имеет вид (§ 4.4)

$$\widehat{W}(x, \boldsymbol{F}) = \dot{W}(x, \iota_{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}}).$$

Если материал однороден и отсчётная конфигурация соответствует естественному состоянию (§ 4.5), то

$$\widehat{W}(\boldsymbol{F}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} \boldsymbol{E})^2 + \mu \operatorname{tr} \boldsymbol{E}^2 + o(\|\boldsymbol{E}\|^2), \qquad \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}.$$

Функция запасённой энергии для *материала Сен-Венана—Кирхгофа* (§ 4.4) имеет вид

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \breve{W}(\boldsymbol{E}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu \operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2, \qquad \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}.$$

Функция запасённой энергии для *материала Огдена* (§ 4.10) определяется следующим образом:

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \sum_{i=1}^{M} a_i \operatorname{tr}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{\gamma_i/2} + \sum_{j=1}^{N} b_j \operatorname{tr}(\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{\delta_j/2} + \Gamma(\det\boldsymbol{F}),$$

где $a_i > 0$, $\gamma_i \geqslant 1$, $b_j > 0$, $\delta_j \geqslant 1$,

функция Γ: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ выпукла, $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \Gamma(\delta) = +\infty$.

$\mathsf{A}(x, \boldsymbol{F}) = \left(\dfrac{\partial^2\hat{W}}{\partial F_{ij}\,\partial F_{kl}}(x, \boldsymbol{F})\right)$ — тензор упругости гиперупругого материала (§ 5.9).

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для определённости рассмотрим задачу со смешанными граничными условиями на перемещения и напряжения при замороженных нагрузках, приложенных к телу.

Уравнения равновесия в отсчётной конфигурации имеют вид (§§ 2.6 и 5.1)

$$\begin{aligned} &-\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x)) = \boldsymbol{f}(x), \qquad x \in \Omega,\\ &\varphi(x) = \varphi_0(x), \quad x \in \Gamma_0,\\ &\hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x))\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}(x), \qquad x \in \Gamma_1. \end{aligned}$$

Принцип виртуальной работы в отсчётной конфигурации (§ 2.6) заключается в следующем: уравнения равновесия формально эквивалентны задаче нахождения функции φ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, такой что $\varphi = \varphi_0$ на Γ_0 и

$$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x)) : \nabla\boldsymbol{\vartheta}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} \boldsymbol{f}(x)\cdot\boldsymbol{\vartheta}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}(x)\cdot\boldsymbol{\vartheta}(x)\,\mathrm{d}a,$$

для всех $\boldsymbol{\vartheta}$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, равных нулю на Γ_0.

В случае *гиперупругих материалов*, когда

$$\hat{\boldsymbol{T}}(x, \boldsymbol{F}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{F}),$$

уравнения равновесия формально эквивалентны задаче отыскания функции

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi \in \Phi = \{\psi\colon \ \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3; \ \ \psi \text{ — достаточно гладкая функция} \\ \qquad \det \nabla\psi > 0 \text{ в } \Omega, \ \psi = \varphi_0 \text{ на } \Gamma_0\},\end{array}}$$

такой что

$$\boxed{I'(\varphi)\vartheta = 0 \ \text{ для любой } \vartheta\colon \ \Omega \to \mathbb{R}^3, \text{ равной нулю на } \Gamma_0.}$$

где *полная энергия* I выражается формулой

$$\boxed{\begin{aligned} I(\psi) = & \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\psi(x))\,\mathrm{d}x \\ & - \left\{\int_\Omega \boldsymbol{f}(x)\cdot\psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}(x)\cdot\psi(x)\,\mathrm{d}a\right\}.\end{aligned}}$$

Односторонние граничные условия на положения (§ 5.3) имеют вид

$$\boxed{\varphi(\Gamma_2) \subset C, \text{ где } \Gamma_2 \subset \Gamma \text{ и } C \text{ — замкнутое подмножество в } \mathbb{R}^3.}$$

Условие изоляции (§ 5.6):

$$\boxed{\varphi(\bar{\Omega}) \subset B, \text{ где } B \text{ — замкнутое подмножество в } \mathbb{R}^3.}$$

Условие инъективности (§ 5.6):

$$\boxed{\int_\Omega \det \nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \operatorname{vol}\varphi(\Omega).}$$

Уравнения равновесия, записанные относительно перемещений:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) := -\operatorname{\mathbf{div}}\{(\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u})\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\} = \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \text{ на } \Gamma_0,$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) := (\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u})\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \text{ на } \Gamma_1.$$

Уравнения линеаризованной теории упругости для однородного изотропного материала, отсчётная конфигурация которого соответствует *естественному состоянию*, при дополнительном предположении, что $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{o}$ (§ 6.2):

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{u} = -\operatorname{\mathbf{div}}\{\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\} = \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega,$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma_0,$$
$$\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{u} = \{\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \text{ на } \Gamma_1,$$
$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\boldsymbol{u}) \text{ — линеаризованный тензор деформации.}$$

ЧАСТЬ А

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТРЁХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГЛАВА 1

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГЕОМЕТРИИ И АНАЛИЗА. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введение

Основная задача нелинейной трёхмерной теории упругости состоит в отыскании положения равновесия упругого тела, которое в отсутствие приложенных сил занимает *отсчётную конфигурацию* $\bar{\Omega}$, где Ω — связное ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей. Тело, к которому приложены силы, занимает *деформированную конфигурацию* $\varphi(\bar{\Omega})$. Эта конфигурация описывается отображением $\varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, которое, чтобы быть приемлемым с физической точки зрения, должно, в частности, *сохранять ориентацию* множества $\bar{\Omega}$ и являться *инъективным на* Ω (§ 1.4).

Такие отображения φ называются *деформациями*. *Геометрические свойства* деформаций и составляют предмет исследования настоящей главы, где, в частности, показано, что изменения *объёмов*, *площадей* и *длин*, вызванные деформацией φ, определяются соответственно *скалярной величиной* $\det \nabla\varphi$ (§ 1.5), *матрицей* $\mathrm{Cof}\, \nabla\varphi$ (§ 1.7, теорема 1.7-1) и *правым тензором деформации Коши—Грина* $\boldsymbol{C} = \nabla\varphi^{\mathrm{T}} \nabla\varphi$ (§ 1.8). Кроме того, как установлено в теоремах 1.8-1 и 1.8-2, *тензор деформации Грина—Сен-Венана* $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})$, отвечающий деформации φ, определяет меру отклонения φ от жёсткой деформации (для которой $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$). Тензоры деформации $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{E}$ принадлежат к числу основных понятий, на которые опирается изложение в последующих главах.

* 1.1. Матрица алгебраических дополнений

Матрица алгебраических дополнений градиента деформации (§ 1.4) используется для определения преобразования Пиолы тензорных полей. Эта матрица также входит в формулу, устанавливающую соотношение между элементами площади поверхности при деформации в $\mathbb{R}^3$ (§ 1.7), а в теории гиперупругих материалов (гл. 4) она служит естественной переменной, от которой зависит функция запасённой энергии.

Пусть $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ — матрица порядка n. Для каждой пары индексов (i, j) обозначим через $\boldsymbol{A}'_{ij}$ матрицу порядка $(n-1)$, которая получается из A удалением i-й строки и j-го столбца. Скалярная величина

$$d_{ij} := (-1)^{i+j} \det A'_{ij}$$

называется (i, j)-*м алгебраическим дополнением* матрицы A, а матрица

$$\mathbf{Cof}\, A := (d_{ij})$$

— **матрицей алгебраических дополнений** матрицы A.

Замечание. В некоторых работах вместо матрицы $\mathbf{Cof}\, A$ вводится *транспонированная* к ней матрица $(\mathbf{Cof}\, A)^{\mathrm{T}}$, которая называется *присоединённой* к A. ■

Хорошо известны разложения

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \text{и} \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_{ij}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

которые можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$A (\mathbf{Cof}\, A)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{Cof}\, A)^{\mathrm{T}} A = (\det A) I.$$

Если матрица A обратима, то

$$\boxed{\mathbf{Cof}\, A = (\det A)\, A^{-\mathrm{T}},}$$

где $A^{-\mathrm{T}} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$, и в этом случае $(\mathbf{Cof}\, A)^{\mathrm{T}}$ является единственной матрицей B, для которой $AB = BA = (\det A) I$. Нетрудно доказать соотношения

$$\mathbf{Cof}\, (A^{\mathrm{T}}) = (\mathbf{Cof}\, A)^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{Cof}\, AB = (\mathbf{Cof}\, A)(\mathbf{Cof}\, B).$$

Они очевидны для обратимых матриц A и B, а значит, имеют место и для любых квадратных матриц, поскольку отображение $A \in \mathbb{M}^n \to \mathbf{Cof}\, A \in \mathbb{M}^n$ непрерывно.

В частном случае $n = 3$, которому отводится главное место в этой книге, имеем

$$\mathbf{Cof}\, A = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12} & a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13} & a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix},$$

или

$$(\mathbf{Cof}\, A)_{ij} = a_{i+1,\, j+1} a_{i+2,\, j+2} - a_{i+1,\, j+2} a_{i+2,\, j+1},$$
$$1 \leqslant i, \; j \leqslant 3 \text{ (суммирования нет)},$$

где индексы занумерованы по модулю 3. Последние соотношения можно также записать (уже предполагая суммирование по повторяющимся индексам) в виде

$$(\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{A})_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{mni}\varepsilon_{pqj}a_{mp}a_{nq},$$

где (ε_{ijk}) — *тензор ориентации*, который имеет ранг 3 и задаётся равенствами

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } \{i, j, k\} \text{ — чётная перестановка набора } \{1, 2, 3\}, \\ -1, & \text{если } \{i, j, k\} \text{ — нечётная перестановка набора } \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{если хотя бы два индекса совпадают.} \end{cases}$$

Следует отметить, что тензор ориентации бывает удобно использовать для вычисления определителя матрицы третьего порядка:

$$\det \boldsymbol{A} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{jq}a_{kr}.$$

Установим теперь одно полезное свойство матрицы алгебраических дополнений (для случая матриц порядка 3; обобщение на случай матриц произвольного порядка предоставляется читателю).

Теорема 1.1-1. *Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения матрицы третьего порядка $\boldsymbol{A}$. Тогда собственные значения матрицы* $\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{A}$ *имеют вид $\lambda_2\lambda_3$, $\lambda_3\lambda_1$, $\lambda_1\lambda_2$.*

Доказательство. Как хорошо известно из теории матриц (см., например, Ciarlet [1982, теорема 1.2-1] или Strang [1976, p. 223]), существует обратимая матрица $\boldsymbol{P}$, такая что $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ является верхнетреугольной матрицей:

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & \lambda_2 & t_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь соотношением $\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = (\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{A})(\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{B})$, получаем

$$(\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{P})^{-1}\,\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{A}\,(\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{P}) = (\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{P}^{-1})\,\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{A}\,(\mathrm{Cof}\,\boldsymbol{P}) = \mathrm{Cof}\,(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы, так как

$$\mathrm{Cof}\,(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3 & 0 & 0 \\ -\lambda_3 t_{12} & \lambda_3\lambda_1 & 0 \\ (t_{12}t_{23} - \lambda_2 t_{13}) & -\lambda_1 t_{23} & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Замечание. Поскольку утверждение теоремы 1.1-1 очевидно для обратимых матриц (так как $\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}$), было бы естественно доказывать её „по непрерывности“, однако такое доказательство требует более тонкого анализа (см. упражнение 1.2). ■

* 1.2. Производная Фреше

Далее будут рассматриваться лишь векторные пространства над полем вещественных чисел.

Поскольку дифференциальное исчисление в нормированных векторных пространствах широко используется в настоящей книге и особенно важно в данной главе, мы приводим здесь краткий обзор основных фактов, касающихся дифференцируемых отображений. Более подробное изложение этих вопросов можно найти в следующих книгах: Avez [1983], Cartan [1967], Dieudonné [1968], Schwartz [1967] [1].

Пусть X и Y — нормированные векторные пространства. Обозначим через

$$\mathscr{L}(X; Y) \quad \text{или} \quad \mathscr{L}(X) \quad \text{при} \quad X = Y$$

векторное пространство, состоящее из всех непрерывных линейных отображений $A: X \to Y$. Если в $\mathscr{L}(X; Y)$ ввести норму

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X},$$

то $\mathscr{L}(X; Y)$ становится нормированным векторным пространством, которое в случае полноты Y также является полным. Когда $X = Y = \mathbb{R}^n$, элемент $\boldsymbol{A} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ отождествляется с матрицей, задающей это отображение, и если в обоих пространствах введена эвклидова норма $|\cdot|$, то соответствующая норма матрицы $\boldsymbol{A}$ представляет собой *спектральную норму*, которая также обозначается символом $|\cdot|$. При $Y = \mathbb{R}$ пространство $X' := \mathscr{L}(X; \mathbb{R})$ называется (топологически) **сопряжённым** с X.

Ради упрощения обозначений, в этом и следующем параграфах всякий раз, когда мы пишем

$$f: \Omega \subset X \to Y,$$

предполагается, что X и Y — нормированные векторные пространства (с нормами, обозначаемыми одним и тем же символом $\|\cdot\|$, если это не мешает ясности изложения), что Ω — от-

---

[1] См. также Колмогоров и Фомин [1976]′, Рисс и Сёкефальви-Надь [1979]′. — *Прим. ред.*

крытое подмножество пространства X и f — отображение, определённое на Ω и принимающее значения в пространстве Y.

Отображение f: $\Omega \subset X \to Y$ называется **дифференцируемым** *в точке* $a \in \Omega$, если существует элемент $f'(a)$ пространства $\mathscr{L}(X; Y)$, такой что

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).}$$

Здесь обозначение $o(h)$ понимается так:

$$o(h) = \|h\| \varepsilon(h), \quad \text{где} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{в} \quad Y.$$

Ясно, что в этом определении следует рассматривать только те точки $(a+h)$, которые принадлежат множеству Ω; поскольку Ω предполагается открытым, то множество допустимых векторов h содержит некоторый шар с центром в нуле пространства X. Легко видеть, что если отображение f дифференцируемо в точке $a \in \Omega$, то оно непрерывно в этой точке и элемент $f'(a) \in \mathscr{L}(X; Y)$ определен единственным образом. Этот элемент $f'(a) \in \mathscr{L}(X; Y)$ называется **производной Фреше** (или просто **производной**) отображения f в точке a. В случае когда $X = \mathbb{R}$ и x — точка общего положения на прямой $\mathbb{R}$, для производной используется также обозначение

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$

Отображение f: $\Omega \subset X \to Y$, дифференцируемое в каждой точке открытого множества Ω, называется *дифференцируемым на* Ω. Если отображение

$$f': x \in \Omega \subset X \to f'(x) \in \mathscr{L}(X; Y)$$

(которое для дифференцируемого f корректно определено) непрерывно, то f называется *непрерывно дифференцируемым на* Ω или отображением *класса* $\mathscr{C}^1$. Обозначим через

$$\mathscr{C}^1(\Omega; Y) \quad \text{или} \quad \mathscr{C}^1(\Omega) \quad \text{при} \quad Y = \mathbb{R}$$

пространство всех непрерывно дифференцируемых отображений множества Ω в Y.

Рассмотрим, например, *непрерывное аффинное отображение*

$$f: x \in X \to f(x) = Ax + b, \quad \text{где} \quad A \in \mathscr{L}(X; Y) \quad \text{и} \quad b \in Y.$$

Поскольку $f(a+h) = f(a) + Ah$ для всех $a, h \in X$, такое отображение является непрерывно дифференцируемым на X, причём

$$f'(x) = A \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega,$$

т. е. в этом случае отображение f' будет постоянным. Можно доказать и обратное утверждение (пользуясь теоремой о среднем значении; см. теорему 1.2-2 ниже), а именно, если $f'(x) = A \in \mathscr{L}(X; Y)$ для всех $x \in \Omega$ и если, кроме того, множество Ω является *связным*, то существует вектор $b \in Y$, такой что $f(x) = Ax + b$ для всех $x \in \Omega$.

Если пространство Y представляет собой *произведение* $Y = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m$ нормированных векторных пространств Y_i, то можно построить отображение f: $\Omega \subset X \to Y$, задавая m отображений f_i: $\Omega \subset X \to Y_i$, являющихся *компонентами* f. При этом очевидно, что отображение f дифференцируемо в точке $a \in \Omega$ тогда и только тогда, когда каждое f_i дифференцируемо в точке a. В этом случае производную $f'(a) \in \mathscr{L}(X; Y)$ можно отождествить с элементом $(f_1'(a), f_2'(a), \ldots, f_m'(a))$ пространства $\mathscr{L}(X; Y_1) \times \mathscr{L}(X; Y_2) \times \ldots \times \mathscr{L}(X; Y_m)$.

Рассмотрим теперь пространство $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, являющееся произведением нормированных векторных пространств X_j. Для каждой точки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из открытого подмножества Ω пространства X и для каждого индекса j существует открытое подмножество Ω_j пространства X_j, содержащее точку a_j и такое, что открытое множество $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$ принадлежит Ω. Если для некоторого индекса j *частичное отображение*

$$f(a_1, \ldots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \ldots, a_n): \Omega_j \subset X_j \to Y$$

дифференцируемо в точке $a_j \in \Omega_j$, то его производная

$$\partial_j f(a) \in \mathscr{L}(X_j; Y)$$

называется **частной производной** по j-**й** переменной отображения f в точке a. Когда x_j — точка общего положения в пространстве X_j, для частных производных будет также использоваться обозначение

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Замечание. В несколько иной ситуации мы также будем обозначать через $\partial f/\partial \boldsymbol{A}$ *градиент* функции f: $\Omega \subset \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ (см. конец этого параграфа). ■

Для отображения f: $\Omega \subset X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, которое дифференцируемо в точке $a \in \Omega$, легко проверить, что n частных производных $\partial_j f(a)$ существуют и

$$f'(a)h = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) h_j \quad \text{для всех} \quad h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Пользуясь теоремой о среднем значении, это утверждение можно *обратить*, при условии что *все частные производные от* f *определены и непрерывны в* Ω. Таким образом,

$$f \in \mathscr{C}^1(\Omega;\, Y) \Longleftrightarrow \partial_j f \in \mathscr{C}^0(\Omega;\, \mathscr{L}(X_j;\, Y)), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

где $\mathscr{C}^0(E;\, F)$ обозначает множество всех непрерывных отображений топологического пространства E в топологическое пространство F.

Пусть X_1, X_2, Y — нормированные векторные пространства. Отображение B: $X_1 \times X_2 \to Y$ называется *билинейным*, если оно удовлетворяет соотношениям

$$B(\alpha_1 x_1 + \alpha_1' x_1',\, x_2) = \alpha_1 B(x_1,\, x_2) + \alpha_1' B(x_1',\, x_2),$$
$$B(x_1,\, \alpha_2 x_2 + \alpha_2' x_2') = \alpha_2 B(x_1,\, x_2) + \alpha_2' B(x_1,\, x_2'),$$

для любых x_1, $x_1' \in X_1$, x_2, $x_2' \in X_2$, α_1, α_1', α_2, $\alpha_2' \in \mathbb{R}$. Если билинейное отображение B непрерывно, что равносильно неравенству

$$\|B\| := \sup_{\substack{x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2 \\ x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0}} \frac{\|B(x_1,\, x_2)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2}} < +\infty,$$

то оно дифференцируемо в пространстве $X_1 \times X_2$, поскольку в силу билинейности

$$B(a_1 + h_1,\, a_2 + h_2) = B(a_1,\, a_2) + B(h_1,\, a_2) + B(a_1,\, h_2) + B(h_1,\, h_2)$$

для всех $(a_1,\, a_2) \in X_1 \times X_2$, $(h_1,\, h_2) \in X_1 \times X_2$, а в силу непрерывности

$$\|B(h_1,\, h_2)\| \leqslant \|B\| \|h_1\|_{X_1} \|h_2\|_{X_2} \leqslant \|B\| \max\{\|h_1\|_{X_1},\, \|h_2\|_{X_2}\}^2.$$

Производная отображения B и его частные производные задаются соответственно равенствами

$$B'(a_1,\, a_2)(h_1,\, h_2) = B(h_1,\, a_2) + B(a_1,\, h_2),$$
$$\partial_1 B(a_1,\, a_2) h_1 = B(h_1,\, a_2), \qquad \partial_2 B(a_1,\, a_2) h_2 = B(a_1,\, h_2).$$

При $X_1 = X_2 = X$ аналогичные вычисления показывают, что отображение f: $x \in X \to B(x,\, x) \in Y$ также дифференцируемо и $f'(a)h = B(a,\, h) + B(h,\, a)$ для любых a, $h \in X$. Эта формула приобретает ещё более простой вид, а именно $f'(a)h = 2B(a,\, h)$, если билинейное отображение B: $X \times X \to Y$ *симметрично*, т. е. $B(x,\, x') = B(x',\, x)$ для всех x, $x' \in X$.

Обычно для вычисления производной $f'(a) \in \mathscr{L}(X;\, Y)$ *находят результат её действия на векторы из* X, т. е.

$$f'(a)h = \lim_{\vartheta \to 0} \frac{f(a + \vartheta h) - f(a)}{\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta} f(a + \vartheta h)\Big|_{\vartheta = 0} \in Y,$$

где h — произвольный вектор из X. Вектор $f'(a)h$ называется **производной по направлению** (или **производной Гато** *по направлению*) *вектора* h.

Например, вычислим производные следующих отображений:

$$\iota_1\colon\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^n \to \iota_1(\boldsymbol{A}) := \operatorname{tr}\boldsymbol{A},$$
$$\iota_n\colon\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^n \to \iota_n(\boldsymbol{A}) := \det\boldsymbol{A}.$$

Поскольку отображение ι_1 линейно и непрерывно, то оно дифференцируемо в каждой точке пространства $\mathbb{M}^n$, причём

$$\iota_1'(\boldsymbol{A})\boldsymbol{H} = \iota_1(\boldsymbol{H}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{H}.$$

Отображение ι_n представляет собой полином степени n относительно n^2 элементов матрицы, и, значит, оно непрерывно дифференцируемо на $\mathbb{M}^n$. Если матрица $\boldsymbol{A}$ обратима, то

$$\begin{aligned}\iota_n(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H}) &= \det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H}) = \det\boldsymbol{A}\det\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H}\right)\\ &= (\det\boldsymbol{A})\left(1+\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H}\right)+o(\boldsymbol{H})\right).\end{aligned}$$

Последнее равенство выводится из соотношения

$$\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}) = 1+\operatorname{tr}\mathbf{E}+\{\text{одночлены степени} \geqslant 2\},$$

которое, в свою очередь, вытекает из определения детерминанта. Таким образом, мы доказали (см. также упражнение 1.3), что

$$\iota_n'(\boldsymbol{A})\boldsymbol{H} = \det\boldsymbol{A}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H}\right) = \operatorname{tr}\left\{(\operatorname{Cof}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right\},$$

если матрица $\boldsymbol{A}$ обратима. Пользуясь непрерывностью отображения $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^n \to \operatorname{Cof}\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^n$, отсюда заключаем, что равенство $\iota_n'(\boldsymbol{A})\boldsymbol{H} = \operatorname{tr}\{(\operatorname{Cof}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\}$ справедливо и для вырожденных матриц $\boldsymbol{A}$.

Часто отображение, которое требуется продифференцировать, является композицией более простых отображений, производные которых известны. В этом случае бывает полезна

Теорема 1.2-1 (цепное правило). *Пусть X, Y, Z — нормированные векторные пространства, U и V — открытые подмножества в X и Y соответственно, $f\colon U \subset X \to V \subset Y$ — отображение, дифференцируемое в точке $a \in U$, $g\colon V \subset Y \to Z$ — отображение, дифференцируемое в точке $f(a)$. Тогда композиция отображений $g \circ f\colon U \subset X \to Z$ дифференцируема в точке $a \in U$ и*

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).} \qquad \blacksquare$$

В качестве приложения цепного правила найдём производную отображения

$$\iota_{n-1}\colon\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{U}^n \subset \mathbb{M}^n \to \iota_{n-1}(\boldsymbol{A}) := \det\boldsymbol{A}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{-1} = \operatorname{tr}\operatorname{Cof}\boldsymbol{A},$$

где $\mathbb{U}^n$ — открытое подмножество в $\mathbb{M}^n$, состоящее из всех обратимых матриц порядка n. Очевидно, что

$$\iota_{n-1}(\boldsymbol{A}) = \iota_n(\boldsymbol{A})\, h(\boldsymbol{A}), \quad \text{где} \quad h(\boldsymbol{A}) = (\iota_1 \circ f)(\boldsymbol{A}), \quad f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

Поэтому, учитывая формулу производной билинейного отображения и цепное правило, получаем

$$\iota'_{n-1}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{H} = h(\boldsymbol{A})\,\iota'_n(\boldsymbol{A})\boldsymbol{H} + \iota_n(\boldsymbol{A})\,\iota'_1(f(\boldsymbol{A}))\,f'(\boldsymbol{A})\boldsymbol{H}.$$

В силу того что матрица $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H})$ обратима при $|\boldsymbol{H}| < |\boldsymbol{A}^{-1}|^{-1}$ и

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H})^{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H} + o(\boldsymbol{H}),$$

мы можем написать

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{H}) &= (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{H})^{-1} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \\ &= \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^{-1} + o(\boldsymbol{H}), \end{aligned}$$

и, значит,

$$f'(\boldsymbol{A})\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Пользуясь уже найденными формулами для производных ι'_1 и ι'_n, отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} \iota'_{n-1}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{H} &= \det \boldsymbol{A}\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H})\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{-1} - \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^{-1})\} \\ &= \operatorname{tr}\{(\operatorname{Cof}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}((\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{H}\}. \end{aligned}$$

Отображения ι_1, ι_{n-1}, ι_n являются примерами *главных инвариантов матрицы* и будут далее использоваться в большинстве случаев для матриц третьего порядка (см., в частности, § 3.6). Некоторые другие результаты, касающиеся производных главных инвариантов, можно найти в упражнениях 1.4 и 1.5.

Приведём теперь некоторые основные факты из дифференциального исчисления, которые потребуются в дальнейшем. Вначале сформулируем обобщение теоремы о среднем значении для вещественнозначной функции f, непрерывной на компактном интервале $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируемой на открытом интервале $]a, b[$. Согласно этой теореме, существует точка $c \in]a, b[$, такая что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Данную формулу нельзя распространить на случай *вектор-функций*. Действительно, отображение $f\colon t \in [0, 2\pi] \to f(t) = (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию $f(2\pi) - f(0) = 0$, однако его производная $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ нигде не обращается в нуль. Тем не менее удаётся получить обобщение (теорема 1.2-2) *неравенства*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{t \in]a, b[} |f'(t)|\,|b - a|,$$

которое вытекает из соотношения $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Пусть a и b — точки векторного пространства. Обозначим через

$$[a, b] = \{x = ta + (1-t)b;\ t \in [0, 1]\},$$
$$]a, b[= \{x = ta + (1-t)b;\ t \in]0, 1[\}$$

соответственно *замкнутый* и *открытый отрезки с концами в точках* a *и* b.

Теорема 1.2-2 (о среднем значении). *Пусть заданы нормированные векторные пространства* X *и* Y, *открытое подмножество* Ω *в* X, *содержащее замкнутый отрезок* $[a, b]$, *а также отображение* $f\colon \Omega \subset X \to Y$, *непрерывное на замкнутом отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируемое на открытом отрезке* $]a, b[$. *Тогда*

$$\boxed{\|f(b) - f(a)\|_Y \leqslant \sup_{t \in]a, b[} \|f'(t)\|_{\mathscr{L}(X;\, Y)} \|b - a\|_X.} \qquad \blacksquare$$

На основе теоремы о среднем значении и теоремы о сжимающем отображении можно доказать чрезвычайно важную теорему, предоставляющую достаточные условия, при которых уравнение вида $\varphi(x_1, x_2) = b$ *локально* эквивалентно уравнению вида $x_2 = f(x_1)$ (слово „локально“ указывает на справедливость утверждения в окрестности некоторого частного решения уравнения $\varphi(x_1, x_2) = b$). Такая функция f называется **неявной.**

Для нормированных векторных пространств X и Y обозначим через

$$\mathscr{I}som(X;\, Y) \quad \text{или} \quad \mathscr{I}som(X) \quad \text{при} \quad X = Y$$

множество всех непрерывных линейных отображений $A\colon X \to Y$, таких что A биективно (т. е. взаимно-однозначно и отображает X на Y) и обратное отображение $A^{-1}\colon Y \to X$ непрерывно. Следует отметить, что $\mathscr{I}som(X;\, Y)$ — подмножество в пространстве $\mathscr{L}(X;\, Y)$, но *не* подпространство. Отображения класса $\mathscr{C}^m$, $m \geqslant 2$, определены в § 1.3.

Теорема 1.2-3 (о неявной функции). *Пусть* X_1 *и* Y — *нормированные векторные пространства,* X_2 — *банахово пространство,* Ω — *открытое подмножество в пространстве* $X_1 \times X_2$, *содержащее точку* (a_1, a_2), $\varphi\colon \Omega \subset X_1 \times X_2 \to Y$ — *отображение, удовлетворяющее условию*

$$\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega;\, Y), \qquad \partial_2\varphi(a_1, a_2) \in \mathscr{I}som(X_2;\, Y),$$

и $\varphi(a_1, a_2) = b \in Y$. *Тогда существуют открытые подмножества* O_1 *и* O_2 *пространств* X_1 *и* X_2 *соответственно, такие что*

$(a_1, a_2) \in O_1 \times O_2 \subset \Omega$, *и существует неявная функция* (рис. 1.2-1) $f\colon O_1 \subset X_1 \to O_2 \subset X_2$, *обладающая свойствами*

$$\{(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2;\ \varphi(x_1, x_2) = b\} = \{(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2;\ x_2 = f(x_1)\},$$

$$f \in \mathscr{C}^1(O_1; X_2);$$

$$f'(x_1) = -\{\partial_2\varphi(x_1, f(x_1))\}^{-1}\partial_1\varphi(x_1, f(x_1)) \text{ для всех } x_1 \in O_1.$$

Если $\varphi\colon \Omega \subset X_1 \times X_2 \to Y$ — *отображение класса* $\mathscr{C}^m$, $m \geqslant 2$, *то и неявная функция* $f\colon O_1 \to X_2$ *принадлежит классу* $\mathscr{C}^m$. ■

Замечание. Утверждение теоремы носит существенно *локальный* характер. Действительно, возможен случай, когда найдётся элемент $x_2' \in (X_2 - O_2)$, такой что $\varphi(x_1, x_2') = b$ (см. рис. 1.2-1).

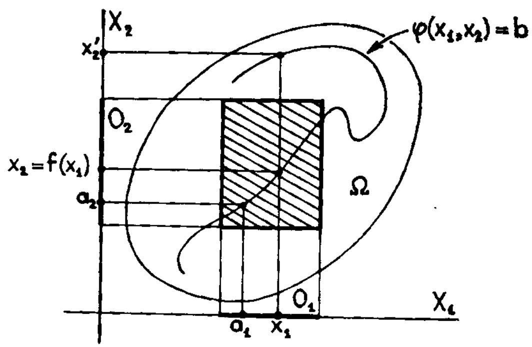

Рис. 1.2-1. Если уравнение $\varphi(x_1, x_2) = b$ локально эквивалентно уравнению $x_2 = f(x_1)$, то функция f называется неявной функцией, определяемой первым из этих уравнений.

Отображение $f\colon \Omega \subset X \to f(\Omega) \subset Y$ называется $\mathscr{C}^m$-*диффеоморфизмом*, $m \geqslant 1$, если оно принадлежит классу $\mathscr{C}^m$, инъективно и обратное отображение $f^{-1}\colon f(\Omega) \subset Y \to \Omega \subset X$ также принадлежит классу $\mathscr{C}^m$. В частном случае, когда $Y = X_1$ и отображение φ имеет вид $\varphi(x_1, x_2) = x_1 - g(x_2)$, можно показать, что неявная функция из теоремы 1.2-3 является $\mathscr{C}^m$-диффеоморфизмом. Это вытекает из следующего предложения:

Теорема 1.2-4 (о локальном обращении). *Пусть* X_1, X_2 — *банаховы пространства и* Ω_2 — *открытое подмножество в* X_2, *содержащее точку* a_2. *Пусть отображение* $g\colon \Omega_2 \subset X_2 \to X_1$ *удовле-*

творяет условиям

$$g \in \mathscr{C}^1(\Omega_2; X_1), \qquad g'(a_2) \in \mathscr{I}\!som(X_2; X_1)$$

и $a_1 = g(a_2)$. *Тогда существуют открытые подмножества* O_1 *и* O_2 *в пространствах* X_1 *и* X_2 *соответственно, такие что* $(a_1, a_2) \in O_1 \times O_2$, $O_2 \subset \Omega_2$, *и существует неявная функция* f: $O_1 \subset X_1 \to O_2 \subset X_2$, *такая что*

$$\begin{cases} \{(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2;\ x_1 = g(x_2)\} \\ = \{(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2;\ x_2 = f(x_1)\}, \quad O_2 = f(O_1), \\ f\colon O_1 \subset X_1 \to O_2 \subset X_2 \text{ есть } \mathscr{C}^1\text{-диффеоморфизм}, \\ f'(x_1) = \{g'(f(x_1))\}^{-1} \quad \text{для всех} \quad x_1 \in O_1. \end{cases}$$

Если, кроме того, отображение g: $\Omega_2 \subset X_2 \to X_1$ *принадлежит классу* $\mathscr{C}^m$ *при каком-либо* $m \geqslant 2$, *то неявная функция* f: $O_1 \subset X_1 \to O_2 \subset X_2$ *есть* $\mathscr{C}^m$*-диффеоморфизм.* ■

Следующий результат, принадлежащий Брауэру, представляет собой ещё одно важное следствие из теоремы о неявной функции (по поводу доказательства см. Schwartz [1967, p. 294], Zeidler [1986]).

Теорема 1.2-5 (о сохранении области в банаховых пространствах). *Пусть заданы два банаховых пространства* X *и* Y, *открытое подмножество* Ω *в* X *и отображение* f: $\Omega \subset X \to Y$, *удовлетворяющее условиям*

$$f \in \mathscr{C}^1(\Omega; Y), \qquad f'(x) \in \mathscr{I}\!som(X; Y) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

Тогда множество

$$f(\Omega) := \{y \in Y;\ y = f(x) \text{ для некоторого } x \in \Omega\}$$

открыто в Y.

Если, кроме того, отображение f: $\Omega \to Y$ *инъективно, то отображение* f: $\Omega \to f(\Omega)$ *есть* $\mathscr{C}^1$*-диффеоморфизм.* ■

Даже и без предположений о дифференцируемости отображения f утверждение, аналогичное теореме 1.2-5, будет выполняться для *инъективных* отображений в *конечномерных пространствах*; соответствующее доказательство можно найти, например, в следующих книгах: Nirenberg [1974, следствие 2, p. 17], Hurewicz & Wallman [1948, pp. 95—97]. Rado & Reichelderfer [1955, p. 135], Dieudonné [1982, теорема 24.8.7].

Теорема 1.2-6 (о сохранении области в $\mathbb{R}^n$**).** *Пусть* Ω — *открытое подмножество в* $\mathbb{R}^n$ *и* $f \in \mathscr{C}^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ — *инъективное отображение. Тогда множество* $f(\Omega)$ *открыто.* ■

Приведённые ниже следствия теоремы о сохранении области имеют важные приложения в теории упругости.

Теорема 1.2-7. *Пусть* Ω — *ограниченное подмножество в* $\mathbb{R}^n$ *и отображение* $f \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *обладает инъективным сужением на* Ω. *Тогда*

$$f(\bar{\Omega}) = \{f(\Omega)\}^-, \quad f(\Omega) \subset \operatorname{int} f(\bar{\Omega}), \quad f(\partial\Omega) \supset \partial f(\bar{\Omega}).$$

Доказательство. Пусть $y \in f(\bar{\Omega})$. Согласио определению, найдётся точка $x \in \bar{\Omega}$, такая что $f(x) = y$. Пусть последовательность $x_k \in \Omega$ такова, что $x_k \to x$ при $k \to \infty$. В силу непрерывности f имеем $f(x_k) \to f(x) \in \{f(\Omega)\}^-$ при $k \to \infty$. Это означает, что $f(\bar{\Omega}) \subset \{f(\Omega)\}^-$. Поскольку множество $\bar{\Omega}$ компактно и отображение f непрерывно, то $f(\bar{\Omega})$ компактно и, значит, замкнуто. Таким образом,

$$f(\Omega) \subset f(\bar{\Omega}) \Rightarrow \{f(\Omega)\}^- \subset \{f(\bar{\Omega})\}^- = f(\bar{\Omega}).$$

Отсюда следует, что $f(\bar{\Omega}) = \{f(\Omega)\}^-$,

Множество $f(\Omega)$ открыто в силу теоремы о сохранении области, и оно содержится в $f(\bar{\Omega})$. Отсюда заключаем, что $f(\Omega) \subset \operatorname{int} f(\bar{\Omega})$.

Для любого подмножества A топологического пространства имеют место соотношения $\bar{A} = (\operatorname{int} A) \cup \partial A$ и $(\operatorname{int} A) \cap \partial A = \varnothing$. Поэтому

$$f(\bar{\Omega}) = (\operatorname{int} f(\bar{\Omega})) \cup \partial f(\bar{\Omega}) \quad \text{и} \quad (\operatorname{int} f(\bar{\Omega})) \cap \partial f(\bar{\Omega}) = \varnothing.$$

С другой стороны,

$$f(\bar{\Omega}) = f(\Omega \cup \partial\Omega) = f(\Omega) \cup f(\partial\Omega) \quad \text{и} \quad f(\Omega) \subset \operatorname{int} f(\bar{\Omega}).$$

Из этих соотношений вытекает включение $f(\partial\Omega) \supset \partial f(\bar{\Omega})$. ■

Предположив дополнительно, что отображение f инъективно „вплоть до границы“ и что $\operatorname{int} \bar{\Omega} = \Omega$, мы получаем более сильный результат, а именно: отображение f „сохраняет“ множество внутренних точек и границу, а не только замыкание множества Ω.

Теорема 1.2-8. *Пусть* Ω — *ограниченное открытое подмножество в* $\mathbb{R}^n$, *такое что*

$$\operatorname{int} \bar{\Omega} = \Omega,$$

и $f \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ — *инъективное отображение. Тогда*

$$f(\bar{\Omega}) = \{f(\Omega)\}^-, \quad f(\Omega) = \operatorname{int} f(\bar{\Omega}), \quad f(\partial\Omega) = \partial f(\Omega) = \partial f(\bar{\Omega}).$$

Доказательство. На основании теоремы 1.2-7 имеем $f(\bar{\Omega}) = \{f(\Omega)\}^-$ и $f(\Omega) \subset \operatorname{int} f(\bar{\Omega})$. Для доказательства соотношения $f(\Omega) = \operatorname{int} f(\bar{\Omega})$ предположим, что $y \in \operatorname{int} f(\bar{\Omega})$ и $y \notin f(\Omega)$. Поскольку непрерывное отображение $f\colon \bar{\Omega} \to f(\bar{\Omega})$ биективно и множество $\bar{\Omega}$ компактно, то отображение $f^{-1}\colon f(\bar{\Omega}) \to \bar{\Omega}$ также является непрерывным. Следовательно, по теореме о сохранении области $f^{-1}(\operatorname{int} f(\bar{\Omega}))$ — открытое подмножество в $\bar{\Omega}$, содержащее точку $f^{-1}(y)$. Но $f^{-1}(y) \notin \Omega$ (f — биекция), и, таким образом, мы нашли открытое подмножество в $\bar{\Omega}$, которое строго содержит Ω, что противоречит условию $\operatorname{int} \bar{\Omega} = \Omega$. Поэтому $f(\Omega) = \operatorname{int} f(\bar{\Omega})$.

Для любого открытого множества A имеем $\bar{A} = A \cup \partial A$ и $A \cap \partial A = \varnothing$. Следовательно,

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \quad \text{и} \quad \Omega \cap \partial\Omega = \varnothing,$$

$$\{f(\Omega)\}^- = f(\Omega) \cup \partial f(\Omega) \quad \text{и} \quad f(\Omega) \cap \partial f(\Omega) = \varnothing.$$

Отсюда заключаем, что $f(\partial\Omega) = \partial f(\Omega)$, поскольку отображение $f\colon \bar{\Omega} \to f(\bar{\Omega}) = \{f(\Omega)\}^-$ — биекция. Так как $f(\Omega) = \operatorname{int} f(\bar{\Omega})$, то

$$\{f(\Omega)\}^- = f(\Omega) \cup \partial f(\bar{\Omega}) \quad \text{и} \quad f(\Omega) \cap \partial f(\bar{\Omega}) = \varnothing,$$

а значит, $\partial f(\Omega) = \partial f(\bar{\Omega})$. ■

Для пояснения этих результатов рассмотрим открытое множество

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^2;\ \frac{1}{2} < x_1 < 1,\ -1 < x_2 < 1 \right\}$$

и отображение

$$f_\vartheta\colon x \in \bar{U} \to f_\vartheta(x) = (x_1 \cos(\vartheta x_2),\ x_1 \sin(\vartheta x_2)),$$

где $\vartheta > 0$ — параметр. Если $0 < \vartheta < \pi$, то применима теорема 1.2-8; однако при $\vartheta = \pi$ справедлива лишь теорема 1.2-7 (см. рис. 1.2-2). Частный случай $\vartheta = \pi$ также показывает, почему предположение $\operatorname{int} \bar{\Omega} = \Omega$ существенно во второй теореме. Действительно, открытое множество $\Omega := f_\pi(U)$ не удовлетворяет условию $\operatorname{int} \bar{\Omega} = \Omega$, и для инъективного отображения $f := id$ не выполнены два последних равенства теоремы 1.2-8.

Замечания. (1) Достаточные условия инъективности отображения $f\colon \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ будут даны в теоремах 5.5-1, 5.5-2, 5.5-3 и 5.6-1.

(2) Как показывает пример области $\Omega = f_\pi(U)$ на рис. 1.2-2, предположением $\operatorname{int} \bar{\Omega} = \Omega$ исключаются из рассмотрения неко-

торые открытые множества с нерегулярными границами особого вида. Однако это предположение выполняется для достаточно широкого класса открытых множеств в $\mathbb{R}^n$, которые при $n=3$ вполне соответствуют требованиям теории упругости (см. § 1.6).

(3) Монография Rado & Reichelderfer [1955] содержит большое число результатов, по своей сути близких к теореме 1.2-8. ■

В заключение этого обзора рассмотрим свойства производных, характерные только для *вещественнозначных функций*. Точка $a \in \Omega$ называется точкой *локального экстремума* функции f: $\Omega \subset X \to \mathbb{R}$, если существует окрестность V точки a, такая что

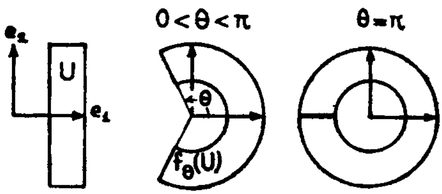

Рис. 1.2-2. Отображение $f_\theta : \overline{U} \to \mathbb{R}^2$ инъективно при $0 < \theta < \pi$; отображение $f_\pi : \overline{U} \to \mathbb{R}^2$ инъективно на U, но не инъективно на $\overline{U}$, причём $f_\pi(U) \subsetneqq \operatorname{int} f_\pi(\overline{U})$, $f_\pi(\partial U) \supsetneqq \partial f_\pi(\overline{U})$.

либо $f(a) \leqslant f(x)$ для всех $x \in V$ (**локальный минимум**), либо $f(x) \leqslant f(a)$ для всех $x \in V$ (**локальный максимум**). Если функция f дифференцируема в точке локального экстремума a, то $f'(a)=0$. С другой стороны, если $f'(a)=0$, то необходимы дополнительные условия (связанные, например, со второй производной, как в теореме 1.3-1, или с выпуклостью, как в теореме 4.7-8), которые позволили бы заключить, что a — точка локального экстремума. Точка $a \in \Omega$, в которой $f'(a)=0$, называется **стационарной точкой** функции f.

Когда X — *гильбертово пространство*, производную вещественнозначной функции f: $\Omega \subset X \to \mathbb{R}$ в каждой точке можно отождествить с некоторым элементом пространства X. Действительно, если отображение f дифференцируемо в точке $a \in \Omega$, то его производная $f'(a)$ является, по определению, элементом двойственного пространства $X' = \mathscr{L}(X; \mathbb{R})$ и, значит, в силу *теоремы Рисса о представлении линейного функционала*, в гильбертовом пространстве X существует единственный элемент $\operatorname{grad} f(a)$, который удовлетворяет условию

$$f'(a)h = (\operatorname{grad} f(a), h) \quad \text{для всех} \quad h \in X,$$

где через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в X. Элемент $\operatorname{grad} f(a) \in X$ называется **градиентом** функции f в точке a.

Хотя, согласно внутреннему определению производной, $f'(a)$ является элементом сопряжённого пространства X', градиент есть элемент пространства X, зависящий от скалярного произведения.

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда X представляет собой пространство $\mathbb{R}^n$ с эвклидовым скалярным произведением $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$. Для дифференцируемой в точке $a\in\Omega$ вещественнозначной функции $f\colon\ \Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ градиент есть вектор

$$\boxed{\mathbf{grad}\, f(a):=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,}$$

компонентами которого служат частные производные отображения f. Согласно определению, имеем

$$\boxed{\begin{gathered}f'(a)\,\boldsymbol{h}=\mathbf{grad}\,f(a)\cdot\boldsymbol{h}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,h_i\\ \text{для всех векторов } \boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n.\end{gathered}}$$

Для функции от двух переменных

$$f\colon\ (t,\ x)\in\Omega\subset(T\times\mathbb{R}^n)\to f(t,\ x)\in\mathbb{R}$$

аналогичным образом определим вектор

$$\mathbf{grad}_x f(t,\ a):=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(t,\ a)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(t,\ a)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

в каждой точке $(t,\ a)\in\Omega$, где функция f имеет частную производную по второй переменной x.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда X — пространство $\mathbb{M}^n$ со *скалярным произведением матриц* $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$. Для вещественнозначной функции $f\colon\ \Omega\subset\mathbb{M}^n\to\mathbb{R}$, дифференцируемой в точке $\boldsymbol{A} \in \Omega$, градиент есть *матрица*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial A_{11}}(\boldsymbol{A}) & \dots & \frac{\partial f}{\partial A_{1n}}(\boldsymbol{A}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial A_{n1}}(\boldsymbol{A}) & \dots & \frac{\partial f}{\partial A_{nn}}(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^n,}$$

элементы которой — частные производные отображения f. По определению, имеем

$$\boxed{f'(\boldsymbol{A})\boldsymbol{H} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{H} = \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial A_{ij}}(\boldsymbol{A}) H_{ij} \quad \text{для всех матриц } \boldsymbol{H} \in \mathbb{M}^n.}$$

В частности, для отображений ι_1, ι_{n-1}, ι_n, производные которых были вычислены ранее в этом параграфе, градиенты имеют вид

$$\frac{\partial \iota_1}{\partial \boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I},$$

$$\frac{\partial \iota_{n-1}}{\partial \boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}\right) \mathbf{Cof}\, \boldsymbol{A},$$

$$\frac{\partial \iota_n}{\partial \boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = (\det \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}} = \mathbf{Cof}\, \boldsymbol{A}.$$

В случае функции от двух переменных

$$f\colon (y,\ \boldsymbol{A}) \in \Omega \subset (Y \times \mathbb{M}^n) \to f(y,\ \boldsymbol{A}) \in \mathbb{R}$$

аналогично определим матрицу

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}}(y,\ \boldsymbol{A}) := \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{A}_{ij}}(y,\ \boldsymbol{A})\right] \in \mathbb{M}^n$$

в каждой точке $(y,\ \boldsymbol{A}) \in \Omega$, где функция f имеет частную производную по второй переменной $\boldsymbol{A}$.

Замечания. (1) Мы избегаем употреблять выражение ∇f для обозначения градиента вещественнозначной функции f, поскольку символ ∇ обычно, хотя и некорректно, используется в теории упругости для обозначения матрицы $\nabla \boldsymbol{\varphi} = (\partial_j \varphi_i)$, задающей производную отображения $\boldsymbol{\varphi}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (§ 1.4). Ещё менее способствует ясности распространённый термин „градиент деформации" применительно к матрице $\nabla\varphi$ — последняя не имеет никакого отношения к представлению линейных функционалов с помощью скалярного произведения.

(2) Столь же сомнительным представляется использование выражений $(\partial f/\partial \boldsymbol{A})(\boldsymbol{A})$ и $(\partial f/\partial \boldsymbol{A})(y, \boldsymbol{A})$, поскольку они не обозначают частных производных в том смысле, который имелся в в виду до сих пор. ■

* 1.3. Производные высших порядков

Пусть заданы нормированные векторные пространства X и Y, открытое подмножество Ω из X и отображение $f: \Omega \subset X \to Y$, дифференцируемое в Ω. Предположим, что производное отображение

$$f': x \in \Omega \subset X \to f'(x) \in \mathscr{L}(X; Y)$$

дифференцируемо в точке $a \in \Omega$. Тогда отображение

$$f''(a) := (f')'(a) \in \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; Y))$$

называют **второй производной** от f в точке a и говорят, что f **дважды дифференцируемо** *в точке* a. Если f является дважды дифференцируемым в каждой точке открытого множества Ω, то f называется *дважды дифференцируемым в* Ω. В этом случае корректно определено отображение

$$f'': x \in \Omega \subset X \to f''(x) \in \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; Y)).$$

Если это отображение непрерывно, то говорят, что f *дважды непрерывно дифференцируемо в* Ω или что f — *отображение класса* $\mathscr{C}^2$. Обозначим через

$$\mathscr{C}^2(\Omega; Y) \quad \text{или} \quad \mathscr{C}^2(\Omega) \quad \text{при} \quad Y = \mathbb{R}$$

пространство всех дважды непрерывно дифференцируемых отображений из Ω в Y.

Вторую производную в точке можно отождествить с непрерывным билинейным отображением из X в Y, если положить

$$(f''(a)h)k = f''(a)(h, k) \quad \text{для всех} \quad h, k \in X.$$

Пользуясь теоремой о среднем значении, можно показать, что это — *симметричное* билинейное отображение, т. е.

$$f''(a)(h, k) = f''(a)(k, h) \quad \text{для всех} \quad h, k \in X.$$

На практике вычисление вторых производных часто сводится к вычислению первых производных, поскольку, как нетрудно заметить, *при заданных векторах* $h, k \in X$ *вектор* $f''(a)(h, k) \in Y$ *является производной Гато отображения* $x \in \Omega \to f'(x)k \in Y$ *в точке* $a \in \Omega$ *по направлению вектора* h. Поясним это на примере вычисления второй производной для отображения вида $f(x) = B(x, x)$, где $B\colon X \times X \to Y$ — непрерывное билинейное отображение. В § 1.2 показано, что отображение $x \in X \to f'(x)k \in Y$ в данном случае определяется формулой

$$x \in X \to f'(x)k = B(x, k) + B(k, x).$$

Поскольку при фиксированном $k \in X$ это отображение аффинно и непрерывно, имеем

$$f''(a)(h, k) = B(h, k) + B(k, h).$$

Заметим, что $f''(a)(h, k) = 2B(h, k)$, если B — симметричное отображение.

Пользуясь понятием второй производной, можно сформулировать необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет точка локального экстремума вещественнозначной функции. Для определенности рассмотрим случай локального минимума.

Теорема 1.3-1 (достаточные условия локального минимума). *Пусть Ω — открытое подмножество нормированного векторного пространства X, $f\colon \Omega \subset X \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая в Ω функция и $f'(a) = 0$, $a \in \Omega$.*

(a) *Если функция f дважды дифференцируема в точке a и существует число α, такое что*

$$\alpha > 0 \quad \text{и} \quad f''(a)(h, h) \geqslant \alpha \|h\|^2 \quad \text{для всех} \quad h \in X,$$

то a — точка локального минимума функции f.

(b) *Если функция f дважды дифференцируема в Ω и существует окрестность $V \subset \Omega$ точки a, такая что*

$$f''(a)(h, h) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in V \quad \text{и всех} \quad h \in X,$$

то a — точка локального минимума функции f. ■

Отметим, что локальный минимум в утверждении (a) является *строгим*, а именно существует окрестность V точки a, такая что $f(a) < f(x)$ для всех $x \in V$, $x \neq a$. Локальный минимум в утверждении (b) является строгим при более сильном предположении

$$f''(x)(h, h) > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in V \quad \text{и всех} \quad h \in X,\ h \neq 0.$$

Теорема 1.3-2 (необходимые условия локального минимума). *Пусть Ω — открытое подмножество нормированного векторного пространства X и функция $f\colon \Omega \subset X \to Y$ дифференцируема в Ω и дважды дифференцируема в точке $a \in \Omega$. Если a — точка локального минимума функции f, то*

$$f'(a) = 0 \quad \text{и} \quad f''(a)(h, h) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad h \in X. \quad ■$$

Отметим, что *ни одна из этих двух теорем не служит обращением другой*. Их доказательства основаны на формулах Тэйлора—Юнга и Тэйлора—Маклорена (теорема 1.3-3), применённых к дважды дифференцируемым функциям.

В случае когда $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}$, через

$$\partial_{ij} f(a) := \partial_i (\partial_j f)(a)$$

или $(\partial^2 f/\partial x_i\, \partial x_j)(a)$, если (x_i) — точка общего положения в $\mathbb{R}^n$, обозначаются обычные *частные производные второго порядка* функции f. Таким образом,

$$f''(a)(h, k) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(a) h_i k_j \quad \text{для всех} \quad h = (h_i), \quad k = (k_i) \in \mathbb{R}^n.$$

Производные высших порядков определяются аналогично. Для каждого целого $k \geqslant 2$ обозначим через $\mathscr{L}_k(X; Y)$ пространство всех непрерывных k-линейных отображений из X в Y. Пространство $\mathscr{L}_k(X; Y)$ изоморфно пространству $\mathscr{L}(X; \mathscr{L}_{k-1}(X; Y))$ и потому может быть отождествлено с последним; при этом $\mathscr{L}_1(X; Y) = \mathscr{L}(X; Y)$. Тогда для отображения $f\colon \Omega \subset X \to Y$ **производная порядка m**

$$f^{(m)}(a) \in \mathscr{L}(X; \mathscr{L}_{m-1}(X; Y)) = \mathscr{L}_m(X; Y)$$

в точке $a \in \Omega$ определяется, как производная в точке a отображения

$$f^{(m-1)}\colon x \in \Omega \to f^{(m-1)}(x) \in \mathscr{L}_{m-1}(X; Y),$$

которое является $(m-1)$-й производной от f. Если $f^{(m)}(a)$ существует, то говорят, что отображение f **дифференцируемо m раз** *в точке a*. Отображение f называется *m раз дифференцируемым в Ω*, если оно m раз дифференцируемо в каждой точке Ω. В случае непрерывности m-й производной $f^{(m)}\colon \Omega \to \mathscr{L}_m(X; Y)$ отображение f называется *m раз непрерывно дифференцируемым* или *принадлежащим классу $\mathscr{C}^m$*. Обозначим через

$$\mathscr{C}^m(\Omega; Y) \quad \text{или} \quad \mathscr{C}^m(\Omega) \quad \text{при} \quad Y = \mathbb{R}$$

пространство всех m раз непрерывно дифференцируемых отображений из X в Y.

И наконец, введём пространство *бесконечно дифференцируемых отображений Ω в Y*, полагая

$$\mathscr{C}^\infty(\Omega; Y) := \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathscr{C}^m(\Omega; Y) \quad (\text{при } Y = \mathbb{R} \text{ пишем просто } \mathscr{C}^\infty(\Omega)).$$

Пользуясь сокращённым обозначением

$$f^{(m)}(a) h^m = f^{(m)}(a)(h_1, h_2, \ldots, h_m), \quad \text{где} \quad h_i = h, \ 1 \leqslant i \leqslant m,$$

приведем теперь некоторые важные формулы *типа формулы Тэйлора*. Первая из этих формул обобщает определение производной; вторая является обобщением теоремы о среднем значении; третья и четвертая предоставляют явные выражения для остаточного члена; третья формула обобщает классическую теорему о среднем значении для вещественнозначных функций, а четвёртая служит обобщением хорошо известного равенства $f(a+h)-f(a)=\int_a^{a+h} f'(\eta)\,\mathrm{d}\eta$ для функций вещественной переменной.

Теорема 1.3-3 (формулы Тэйлора). *Пусть X и Y — нормированные векторные пространства, Ω — открытое подмножество в X, $[a, a+h]$ — замкнутый отрезок, содержащийся в Ω, f: $\Omega \subset X \to Y$ — заданное отображение, $m \geqslant 1$ — целое число.*

(a) (*Формула Тэйлора—Юнга.*) *Если отображение f дифференцируемо $(m-1)$ раз в Ω и m раз в точке a, то*

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\ \ldots\ +\frac{1}{m!}f^{(m)}(a)h^{(m)}$$
$$+\|h\|^m\varepsilon(h),\qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

(b) (*Обобщение теоремы о среднем значении.*) *Если отображение f непрерывно дифференцируемо $(m-1)$ раз в Ω и дифференцируемо m раз на открытом интервале $]a, a+h[$, то*

$$\left\| f(a+h)-\left\{ f(a)+f'(a)h+\ \ldots\ +\frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a)h^{m-1}\right\}\right\|$$
$$\leqslant\frac{1}{m!}\sup_{x\in]a,\,a+h[}\|f^{(m)}(x)\|\,\|h\|^m.$$

(c) (*Формула Тэйлора — Маклорена.*) *Пусть $Y=\mathbb{R}$, f непрерывно дифференцируемо $(m-1)$ раз в Ω и дифференцируемо m раз на открытом интервале $]a, a+h[$. Тогда найдётся такое число $\vartheta\in]0, 1[$, что*

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\ \ldots\ +\frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a)h^{m-1}$$
$$+\frac{1}{m!}f^{(m)}(a+\vartheta h)h^m.$$

(d) (*Формула Тэйлора с остаточным членом в интегральной форме.*) *Пусть отображение f непрерывно дифференцируемо m раз в Ω и пространство Y является полным. Тогда*

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\ \ldots\ +\frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a)h^{m-1}$$
$$+\int_0^1\frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!}\left\{f^{(m)}(a+th)h^m\right\}\mathrm{d}t.\qquad\blacksquare$$

Мы также будем пользоваться *обозначениями с мультииндексами* для частных производных высшего порядка в случае **отображений** $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ — мультнннндекс. Положнм $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Тогда

$$\partial^\alpha f(a) := f^{(|\alpha|)}(a)(e_1, \ldots, e_1, e_2, \ldots, e_2, \ldots, e_n, \ldots, e_n),$$

где каждый базнсный вектор e_i нз $\mathbb{R}^n$ повторяется α_i раз, $1 \leqslant i \leqslant n$. Так, для $n = 3$ нмеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) = \partial^{(2,0,0)} f(a), \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \, \partial x_3^2}(a) = \partial^{(1,0,2)} f(a) \quad \text{и т. д.}$$

Такие обозначення позволяют записать в простой форме множества, состоящие из всех частных производных данного порядка m нли же порядка, не превосходящего m, а именно:

$$\{\partial^\alpha f(a);\ |\alpha| = m\} \quad \text{или} \quad \{\partial^\alpha f(a);\ |\alpha| \leqslant m\} \quad \text{и т. п.}$$

В частном случае, когда Ω — *ограниченное открытое подмножество в* $\mathbb{R}^n$, мы обозначаем через $\mathscr{C}^m(\bar{\Omega})$ (для каждого целого $m \geqslant 1$) подпространство в $\mathscr{C}^m(\Omega)$, состоящее из всех функций v, для которых существуют функцнн $v^\alpha \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$, такне что $v^\alpha|_\Omega = \partial^\alpha v$ при всех значеннях мультнннндекса α, удовлетворяющих неравенству $|\alpha| \leqslant m$ (в частностн, $\mathscr{C}^m(\bar{\Omega})$ — подпространство в $\mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$). *Введение нормы*

$$\boxed{\|v\|_{\mathscr{C}^m(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} |v^\alpha(x)|}$$

превращает $\mathscr{C}^m(\bar{\Omega})$ *в банахово пространство.* Положим также

$$\mathscr{C}^\infty(\bar{\Omega}) := \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathscr{C}^m(\bar{\Omega}).$$

Как и ранее, считая Ω ограниченным открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n$, обозначим через $\mathscr{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ (для каждого целого $m \geqslant 0$ н каждого $\lambda \in]0, 1]$) подпространство в $\mathscr{C}^m(\bar{\Omega})$, состоящее из всех функций v, удовлетворяющих условию

$$\|v\|_{\mathscr{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|v\|_{\mathscr{C}^m(\bar{\Omega})} + \max_{|\alpha| = m} \sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)|}{|x - y|^\lambda} < +\infty.$$

Прннято говорить, что функции из пространства $\mathscr{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ удовлетворяют *условию Гёльдера с показателем* λ при $\lambda < 1$ и являются **непрерывными по Липшицу** при $\lambda = 1$. *Пространство* $\mathscr{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ *с нормой* $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})}$ *является банаховым.*

Пусть $X(\Omega)$ или $Y(\overline{\Omega})$ — одно из векторных пространств, рассмотренных в этом разделе. Пространства функций, значениями которых являются векторы или тензоры с компонентами из $X(\Omega)$ или $Y(\overline{\Omega})$, будут в дальнейшем обозначаться через $\boldsymbol{X}(\Omega)$ или $\boldsymbol{Y}(\overline{\Omega})$ соответственно. Если $\|\cdot\|$ — норма в $Y(\overline{\Omega})$, то соответствующая норма произведения в пространстве $\boldsymbol{Y}(\overline{\Omega})$ будет обозначаться тем же символом.

1.4. Деформации в $\mathbb{R}^3$

Во всём дальнейшем изложении будем предполагать *раз и навсегда* фиксированными начало координат $\boldsymbol{o}$ и ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ в трехмерном эвклидовом пространстве, которое будет отождествляться с $\mathbb{R}^3$. Таким образом, при наших обозначениях точка x отождествляется с вектором $\boldsymbol{ox}$. При рассмотрении компонент векторов из $\mathbb{R}^3$ или элементов матриц из $\mathbb{M}^3$ всегда подразумевается, что *латинские индексы* $(i, j, p, \ldots)$ *принимают значения на множестве* $\{1, 2, 3\}$, а также что имеет место обычное предположение о *суммировании по повторяющимся индексам.*

Пусть задано ограниченное открытое и связное подмножество Ω в $\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей (конкретные предположения о гладкости будут сделаны ниже). Условимся считать, что замыкание $\overline{\Omega}$ множества Ω представляет собой часть пространства, занимаемую телом „до того, как оно подвергнуто деформации"; по этой причине множество $\overline{\Omega}$ называется **отсчётной конфигурацией.**

Деформация отсчётной конфигурации $\overline{\Omega}$ — это векторное поле

$$\boldsymbol{\varphi}\colon\ \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3,$$

которое является *достаточно гладким, инъективным, кроме, быть может, точек границы множества* Ω, и *сохраняющим ориентацию.*

Замечания. (1) Причина, по которой на границе Ω может не быть инъективности, состоит в необходимости допустить „соприкосновение" различных точек границы при деформации. Эти вопросы будут достаточно подробно обсуждаться в гл. 5.

(2) Слова „достаточно гладкая" указывают на тот факт, что деформации, входящие в какое-либо определение, доказательство, теорему и т. п., обладают такой гладкостью, при которой все соответствующие рассуждения имеют смысл. В силу этого подразумеваемая степень гладкости может меняться в зависимости от контекста. Например, существование градиента деформации (который определен чуть ниже) предполагает *дифферен-*

цируемость деформации *во всех точках* отсчётной конфигурации; теорема 1.7-1 опирается на тождество Пиолы, которое имеет смысл (по крайней мере в классической теории) лишь для *дважды дифференцируемых* деформаций; описание класса жёстких деформаций (теорема 1.8-1) дано в предположении их *непрерывной дифференцируемости* и т. д. Иной подход осуществлён в гл. 7, где даже условие дифференцируемости в каждой точке заменено на более слабое и частные производные от „деформаций", понимаемые в смысле *теории распределений*, достаточно определить лишь почти всюду (как правило, они принадлежат пространствам типа $L^p(\Omega)$).

(3) Некоторые авторы вместо термина „деформация" употребляют термин „конфигурация". ■

Будем обозначать через x точку общего положения, пробегающую множество $\bar{\Omega}$, через x_i — её координаты в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, а через

$$\partial_i = \partial/\partial x_i$$

— частную производную по переменной x_i. Пусть задана деформация вида

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi_i \boldsymbol{e}_i.$$

В каждой точке множества Ω определим матрицу

$$\boxed{\nabla\boldsymbol{\varphi} := \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1 & \partial_2\varphi_1 & \partial_3\varphi_1 \\ \partial_1\varphi_2 & \partial_2\varphi_2 & \partial_3\varphi_2 \\ \partial_1\varphi_3 & \partial_2\varphi_3 & \partial_3\varphi_3 \end{pmatrix}.}$$

Матрица $\nabla\boldsymbol{\varphi}$ называется **градиентом деформации.** Поскольку, согласно определению, деформация есть отображение, сохраняющее ориентацию, определитель градиента деформации удовлетворяет **условию сохранения ориентации:**

$$\boxed{\det \nabla\boldsymbol{\varphi}(x) > 0 \text{ для всех } x \in \bar{\Omega}.}$$

В частности, матрица $\nabla\boldsymbol{\varphi}(x)$ обратима в каждой точке x отсчётной конфигурации $\bar{\Omega}$.

Замечания. (1) В литературе обычно используются следующие обозначения:

$$\boldsymbol{F} = \nabla\boldsymbol{\varphi} \quad \text{и} \quad J = \det \nabla\boldsymbol{\varphi}.$$

(2) Как уже сказано в § 1.2, обозначение $\nabla\boldsymbol{\varphi}$ не способствует ясности, поскольку *градиент вещественнозначной функции*

f есть *вектор-столбец*, составленный из первых частных производных $\partial_i f$ от f, тогда как $(\nabla\varphi)_{ij} = \partial_j \varphi_i$ (этим и объясняется наш выбор обозначения $\mathbf{grad}\, f$ вместо ∇f в § 1.2). Действительно, *градиент деформации — это матрица, представляющая собой производную Фреше отображения* φ, которая в случае вещественнозначной функции f должна быть отождествлена со строкой, *транспонированной* к градиенту f. ■

Наряду с деформацией φ часто бывает полезно ввести в рассмотрение **перемещение u**, которое является векторным полем

$$u\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$$

и определяется соотношением

$$\boxed{\varphi = id + u,}$$

где id обозначает тождественное отображение $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$ (точнее, его ограничение на $\bar{\Omega}$). Заметим, что **градиент перемещений**

$$\boxed{\nabla u := \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix}}$$

и градиент деформации связаны уравнением

$$\boxed{\nabla\varphi = I + \nabla u.}$$

Пусть заданы отсчётная конфигурация $\bar{\Omega}$ и деформация $\varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$. Множество $\varphi(\bar{\Omega})$ называется **деформированной конфигурацией.** В каждой точке

$$\boxed{x^{\varphi} := \varphi(x)}$$

деформированной конфигурации определены три вектора (рис. 1.4-1)

$$\partial_j \varphi(x) = \partial_j \varphi_i(x)\, e_i.$$

При каждом j вектор $\partial_j \varphi(x)$ является мерой „локальной деформации в направлении вектора e_j“. Под этим подразумевается, что *в первом приближении по* $\mathrm{d}t$ *вектор* $\mathrm{d}t\, e_j$ *преобразуется в* $\mathrm{d}t\, \partial_j \varphi(x)$. Эквивалентное утверждение состоит в том, что $\partial_j \varphi(x)$

является касательным вектором к j-й *координатной линии*, проходящей через точку x^φ (т. е. образом при деформации φ отрезка, который параллелен вектору e_j, содержит внутри себя точку x и параметризован переменной t). Поскольку $\partial_j\varphi(x)$ есть в точности j-й столбец матрицы $\nabla\varphi(x)$, то *градиент деформации полностью описывает локальную деформацию в первом приближении.*

Замечания. (1) Хотя градиент деформации $\nabla\varphi(x)$, очевидным образом, зависит от базиса (e_i), оказывается возмож-

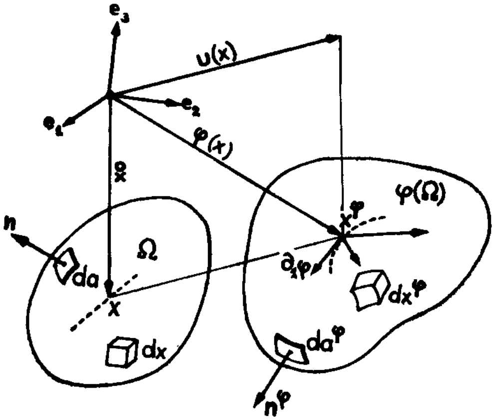

Рис. 1.4-1. Геометрические свойства деформации. Элемент объема, элемент площади и единичный вектор внешней нормали в отсчётной конфигурации $\overline{\Omega}$ обозначены через dx, da и n, а в деформированной конфигурации $\varphi(\overline{\Omega})$ — через ∂x^φ, ∂a^φ и n^φ соответственно. В первом приближении деформация в точке $x \in \overline{\Omega}$ определяется векторами $\partial_j\varphi(x)$.

ным выявить внутреннюю геометрическую природу деформации в точке x, если применить теорему о полярном разложении (теорема 3.2-2) к матрице $\nabla\varphi(x)$, которая тогда представляется как произведение „тензора поворота“ и „тензора растяжения“. Подробности, относящиеся к этому классическому результату, можно найти, например, в следующих работах: Germain [1972, p. 97], Gurtin [1981b, p 46], Truesdell & Noll [1965, p. 52].

(2) Если $x^\varphi = \varphi(x)$ является внутренней точкой деформированной конфигурации $\varphi(\overline{\Omega})$, то, согласно терминологии, принятой в дифференциальной геометрии, три вектора $\partial_j\varphi(x)$ задают *касательное пространство* в точке x *многообразия* $\operatorname{int}\varphi(\overline{\Omega})$. Это пространство трёхмерно, так как матрица $\nabla\varphi(x)$ обратима (по определению деформации).

(3) Точки $x \in \Omega$ и их образы $x^\varphi \in \varphi(\Omega)$ в литературе по механике сплошных сред часто называют соответственно *материальными точками* и *точками расположения в пространстве*; их часто обозначают буквами X и x соответственно. ■

Вычислим теперь элементы *объёма*, *площади* и *длины* в деформированной конфигурации. В каждом случае ставится задача: при *заданной деформации* выразить соответствующие величины (объёмы, площади, длины), определённые в *деформированной* конфигурации, через те же величины, но определённые в *отсчётной* конфигурации. Чтобы подчеркнуть существенное различие между величинами указанных двух типов, для их обозначения условимся использовать разные символы, а именно: величины, определённые в деформированной конфигурации, будем всегда обозначать буквами с верхним индексом „φ", а соответствующие величины, определённые в отсчётной конфигурации, — теми же буквами без индекса „φ". Такого рода обозначения уже применялись в случае точки общего положения $x \in \bar{\Omega}$ и её образа $x^\varphi = \varphi(x) \in \varphi(\bar{\Omega})$.

Это соответствие между величиной, заданной в виде функции от **лагранжевой переменной** x и аналогичной величиной, заданной как функция **эйлеровой переменной** $x^\varphi = \varphi(x)$, которое мы вначале установим для объёмов, площадей и длин, можно распространить и на другие характеристики, такие как дивергенция тензорных полей (теорема 1.7-1) и приложенные силы (§§ 2.6 и 2.7).

Замечание. Последовательное изложение этих вопросов можно провести на основе понятий „прямого" и „обратного образов", известных в дифференциальной геометрии; см., например, Choquet-Bruhat, Dewitt-Morette & Dillard-Bleick [1977] или Marsden & Hughes [1983]. ■

1.5. Элемент объёма в деформированной конфигурации

Рассмотрим деформацию φ. Если dx обозначает **элемент объёма** в точке x отсчётной конфигурации, то *элемент объёма* dx^φ *в точке* $x^\varphi = \varphi(x)$ *деформированной конфигурации* (рис. 1.4-1) *имеет вид*

$$\boxed{dx^\varphi = \det \nabla\varphi(x)\, dx,}$$

так как $|\det \nabla\varphi(x)| = \det \nabla\varphi(x) > 0$, по определению деформации.

Элемент объёма dx^φ *используется для вычисления объёмов в деформированной конфигурации.* Пусть A — измеримое подмножество отсчётной конфигурации $\bar{\Omega}$. Тогда **объём** множества A и объём деформированного множества $A^\varphi := \varphi(A)$ задаются соотношениями

$$\operatorname{vol} A := \int_A dx, \qquad \operatorname{vol} A^\varphi := \int_{A^\varphi} dx^\varphi = \int_A \det \nabla\varphi(x)\, dx.$$

Отметим, что последнее равенство есть лишь частный случай *формулы замены переменных в кратных интегралах.* Приведём эту формулу. Пусть $\varphi: A \to \varphi(A) = A^\varphi$ — непрерывно дифференцируемое *инъективное отображение*, причём обратное отображение $\varphi^{-1}: A^\varphi \to A$ тоже непрерывно. Тогда функция $u: x^\varphi \in A^\varphi \to \mathbb{R}$ является dx^φ-интегрируемой на множестве A^φ в том и только в том случае, когда функция

$$x \in A \to (u \circ \varphi)(x) |\det \nabla\varphi(x)|$$

dx-интегрируема на множестве A, причём для интегрируемой функции u имеем

$$\boxed{\int_{A^\varphi = \varphi(A)} u(x^\varphi)\, dx^\varphi = \int_A (u \circ \varphi)(x) |\det \nabla\varphi(x)\, dx.}$$

Следует помнить, что *справедливость данной формулы в существенной мере опирается на предположение инъективности отображения* φ. В противном случае эту формулу нужно заменить более общим соотношением

$$\boxed{\int_{\varphi(A)} u(x') \operatorname{card} \varphi^{-1}(x')\, dx' = \int_A (u \circ \varphi)(x) |\det \nabla\varphi(x)|\, dx,}$$

где $\operatorname{card} B$, вообще говоря, есть число элементов множества B. Подробности содержатся в работах: Schwartz [1967, следствие 2, p. 675], Rado & Reichelderfer [1955, p. 438], Federer [1969, p. 241 и далее], Smith [1983, гл. 16], а также Bojarski & Iwaniec [1983, § 8], Marcus & Mizel [1973], Водопьянов, Гольдштейн, Решетняк [1979], где дано обобщение на отображения со значениями в пространствах Соболева (такое обобщение будет использоваться в гл. 7).

Приведённые здесь формулы справедливы для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ при любом n. *Объём* $\int_A \mathrm{d}x$ множества $A \subset \mathbb{R}^n$, которое $\mathrm{d}x$-измеримо, обзначается через $\mathrm{d}x$-meas A.

1.6. Интегралы по поверхности. Формулы Грина

В этом параграфе мы преимущественно будем следовать изложению, данному в книге Nečas [1967, p. 119 и далее]. Пусть $|\cdot|$ — эвклидова норма, $X - A$ — дополнение подмножества A в множестве X, $\operatorname{supp}\psi$ — носитель вещественнозначной функции ψ. Граница $\partial\Omega$ открытого подмножества Ω в $\mathbb{R}^n$ называется **липшицевой,** если одновременно выполнены следующие условия. Существуют постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$, λ, а также конечное число *систем локальных координат* (ζ_r', ζ_r) с началом в точках o_r и координатами $\zeta_r' = (\xi_1^r, \xi_2^r, \ldots, \xi_{n-1}^r)$, $\zeta_r = \xi_n^r$ и соответствующие отображения a_r, $1 \leqslant r \leqslant R$, такие что (см. рис. 1.6-1 и контрпримеры на рис. 1.6-2 при $n = 2$)

$$\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^{R} \{(\zeta_r', \zeta_r);\ \zeta_r = a_r(\zeta_r');\ |\zeta_r'| < \alpha\},$$

и при $1 \leqslant r \leqslant R$

$$\{(\zeta_r', \zeta_r);\ a_r(\zeta_r') < \zeta_r < a_r(\zeta_r') + \beta;\ |\zeta_r'| \leqslant \alpha\} \subset \Omega,$$

$$\{(\zeta_r', \zeta_r);\ a_r(\zeta_r') - \beta < \zeta_r < a_r(\zeta_r');\ |\zeta_r'| \leqslant \alpha\} \subset \mathbb{R}^3 - \bar{\Omega},$$

$$|a_r(\zeta_r') - a_r(\eta_r')| \leqslant \lambda |\zeta_r' - \eta_r'| \text{ для всех } |\zeta_r'|,\ |\eta_r'| \leqslant \alpha.$$

Неравенства, стоящие в последней строке, показывают, что *отображения a_r непрерывны по Липшицу.* Отметим, что липшицева граница $\partial\Omega$ всегда является ограниченным множеством, однако этого нельзя утверждать о самом множестве Ω, поскольку в определении липшицевой границы можно поменять местами Ω и $\mathbb{R}^3 - \bar{\Omega}$.

Более общим образом, $\partial\Omega$ называется границей *класса* $\mathscr{C}^m$, $m \geqslant 1$, или *класса* $\mathscr{C}^{m,\lambda}$, $m \geqslant 1$, $0 < \lambda \leqslant 1$, если отображення a_r принадлежат классу $\mathscr{C}^m$ или классу $\mathscr{C}^{m,\lambda}$ (см. § 1.3) соответственно, а все остальные условия оставлены без изменений.

Важность понятия липшицевой границы объясняется тем, что, несмотря на отсутствие у таких границ большой гладкости (например, множества типа многогранника имеют липшицеву границу, не принадлежащую классу $\mathscr{C}^1$), по ним могут быть определены *поверхностные интегралы,* и при этом справедлива *формула Грина.* Рассмотрим теперь вкратце эти вопросы, не касаясь вопроса об *измеримости* соответствующих функций.

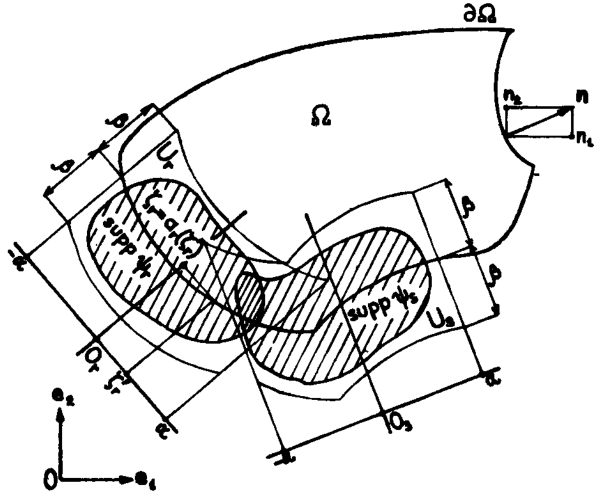

Рис. 1.6-1. Открытое подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой границей $\partial\Omega$.

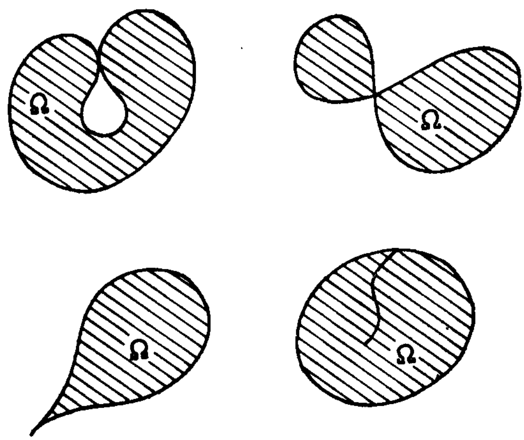

Рис. 1.6-2. Примеры открытых подмножеств $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, граиицы которых не являются липшицевыми.

Говорят, что функция $v\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ определена d*a-почти-всюду* на $\partial\Omega$, если для каждого r функция $v(\zeta_r', a_r(\zeta_r'))$ определена почти всюду (в смысле $(n-1)$-мерной лебеговой меры) на множестве $|\zeta_r'| < \alpha$. Если, кроме того, все функции $|\zeta_r'| < \alpha \to v(\zeta_r', a_r(\zeta_r'))$ интегрируемы по Лебегу, т. е.

$$\int\limits_{|\zeta_r'| < \alpha} |v(\zeta_r', a_r(\zeta_r'))|\, \mathrm{d}\zeta_r' < +\infty,$$

функция v называется *интегрируемой* по $\partial\Omega$ и мы пишем $v \in \mathscr{L}^1(\partial\Omega)$. В более общем случае, когда при некотором $p \geqslant 1$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{|\zeta_r'| < \alpha} |v(\zeta_r', a_r(\zeta_r'))|^p\, \mathrm{d}\zeta_r' < +\infty, \qquad 1 \leqslant r \leqslant R,$$

мы пишем $v \in \mathscr{L}^p(\partial\Omega)$. Чтобы дать определение интеграла от функции $v \in \mathscr{L}^1(\partial\Omega)$, нужно воспользоваться *разбиением единицы*, подчинённым покрытию границы $\partial\Omega$ открытыми множествами

$$U_r := \{(\zeta_r', \zeta_r);\ |\zeta_r'| < \alpha,\ \ a_r(\zeta_r') - \beta < \zeta_r < a_r(\zeta_r') + \beta\}.$$

Это разбиение единицы задаётся семейством функций $\psi_r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant r \leqslant R$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} \operatorname{supp}\psi_r \subset U_r \ \text{ и } \ 0 \leqslant \psi_r \leqslant 1, & 1 \leqslant r \leqslant R, \\ \sum\limits_{r=1}^{R} \psi_r = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Тогда *интеграл по поверхности* $\partial\Omega$ от функции $v \in \mathscr{L}^1(\partial\Omega)$ определяется как

$$\int\limits_{\partial\Omega} v\, \mathrm{d}a :=$$

$$\sum_{r=1}^{R} \int\limits_{|\zeta_r'| < \alpha} v(\zeta_r', a_r(\zeta_r'))\, \psi_r(\zeta_r', a_r(\zeta_r')) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \xi_i^r} \right)^2 \right\}^{1/2} \mathrm{d}\zeta_r',$$

где da обозначает **элемент площади** на $\partial\Omega$. Такое определение имеет смысл, поскольку, во-первых, будучи непрерывными по Липшицу, функции a_r почти всюду (в смысле $(n-1)$-мерной лебеговой меры) дифференцируемы по Фреше (см., например, Nečas [1967, p. 88]) и каждая частная производная удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\partial a_r}{\partial \xi_i^r}(\zeta_r')\right| \leqslant \lambda \quad \text{для почти всех} \quad |\zeta_r'| < \alpha;$$

во-вторых, можно показать, что число $\int_{\partial\Omega} v\,\mathrm{d}a$, определённое указанным образом, не зависит от выбора систем локальных координат и соответствующего разбиения единицы. Назовём эквивалентными любые две функции из $\mathscr{L}^p(\partial\Omega)$, которые совпадают $\mathrm{d}a$-почти-всюду на $\partial\Omega$. Пространство соответствующих классов эквивалентности обозначим через $L^p(\partial\Omega)$. С введением нормы

$$\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} := \left\{\int_{\partial\Omega} |v|^p\,\mathrm{d}a\right\}^{1/p}$$

пространство $L^p(\partial\Omega)$ становится банаховым. **Площадь** $\mathrm{d}a$-**измеримого подмножества** Δ на $\partial\Omega$ определяется равенством

$$\mathrm{d}a\text{-meas}\,\Delta := \int_{\partial\Omega} \chi_\Delta\,\mathrm{d}a = \int_\Delta \mathrm{d}a \ (\text{при } n = 3 \text{ пишем просто area}\,\Delta),$$

где χ_Δ — характеристическая функция множества Δ.

Ещё одним следствием дифференцируемости почти всюду функций a_r является *существование* $\mathrm{d}a$*-почти-всюду на* $\partial\Omega$ **единичного вектора внешней нормали** $\boldsymbol{n} = n_i\boldsymbol{e}_i$, т. е. вектора, направленного вовне области Ω и имеющего эвклидову норму $|\boldsymbol{n}| = 1$.

Область в $\mathbb{R}^n$ определяется как *открытое, ограниченное и связное* подмножество в $\mathbb{R}^n$ с *липшицевой границей*, а **подобластью** называется множество, содержащееся в области и само являющееся областью. Важное свойство областей заключается в том, что для них имеет место **основная формула Грина**, а именно: пусть задана область Ω в $\mathbb{R}^n$ с вектором нормали $\boldsymbol{n} = (n_i)$ к $\partial\Omega$ и $u\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ — достаточно гладкая функция; тогда

$$\boxed{\int_\Omega \partial_i u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u n_i\,\mathrm{d}a, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.}$$

В частности, эта формула выполнена для функции u, непрерывно дифференцируемой на множестве $\bar{\Omega}$, однако, как станет ясно далее (теорема 6.1-9), такое предположение о гладкости может быть значительно ослаблено. Отметим, что основная формула Грина есть не что иное, как обобщение на многомерный случай формулы интегрирования по частям $\int_a^b v'(t)\,\mathrm{d}t = v(b) - v(a)$ для функций v от одной переменной. Пользуясь этой формулой, можно доказать ряд других **формул Грина**, которые, в сущности, *выражают определённые линейные комбинации интегралов по Ω через комбинации поверхностных интегралов по $\partial\Omega$*. Так например, заменяя в основной формуле Грина функцию u произведением функций u и v, получаем другую хорошо известную формулу

$$\int_\Omega u\,\partial_i v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \partial_i u v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uvn_i\,\mathrm{d}a.$$

Рассмотрим ещё один пример. Пусть задано векторное поле $\boldsymbol{u}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ с компонентами $u_i\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$. Тогда, в силу основной формулы Грина, имеем

$$\int_\Omega \partial_i u_i\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u_i n_i\,\mathrm{d}a,$$

или в векторной форме

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} := \partial_i u_i.$$

Последняя формула Грина носит название **теоремы о дивергенции векторных полей.**

Напомним, что отсчётная конфигурация $\bar{\Omega}$ была определена (§ 1.4) как замыкание некоторого открытого подмножества Ω в $\mathbb{R}^3$. *Всюду далее мы будем предполагать, что Ω является областью.* Отсюда, в частности, вытекает, что множество внутренних точек $\bar{\Omega}$ совпадает с Ω (см. упражнение 1.7) и, таким образом, применима теорема 1.2-8: *если отображение $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$ инъективно на $\bar{\Omega}$, то*

$$\boldsymbol{\varphi}(\bar{\Omega}) = \{\boldsymbol{\varphi}(\Omega)\}^-, \qquad \operatorname{int}\boldsymbol{\varphi}(\bar{\Omega}) = \boldsymbol{\varphi}(\Omega), \qquad \boldsymbol{\varphi}(\partial\Omega) = \partial\boldsymbol{\varphi}(\Omega).$$

Эти соотношения, в частности, свидетельствуют о корректности обозначений

$$\boxed{\bar{\Omega}^\varphi = \boldsymbol{\varphi}(\bar{\Omega}), \qquad \Omega^\varphi = \boldsymbol{\varphi}(\Omega), \qquad \partial\Omega^\varphi = \boldsymbol{\varphi}(\partial\Omega),}$$

которыми мы будем пользоваться в дальнейшем применительно к деформированной конфигурации, её внутренности и границе во всех случаях, когда деформация $\boldsymbol{\varphi}$ инъективна на $\bar{\Omega}$ (следует вспомнить, что, вообще говоря, деформация может и не быть инъективной на $\partial\Omega$).

Рассматриваемые далее деформации φ: $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ будут предполагаться такими, что множество Ω^φ также является областью (это условие выполнено, если отображение φ достаточно гладкое; см. упражнение 1.10). В этом случае можно определить элемент площади da^φ на границе $\partial\Omega^\varphi$ деформированной конфигурации, и, кроме того, da^φ-почти-всюду на $\partial\Omega^\varphi$ можно определить единичный вектор внешней нормали $\boldsymbol{n}^\varphi = n_i^\varphi \boldsymbol{e}_i$.

1.7. Преобразование Пиолы. Элемент площади в деформированной конфигурации

Для выражения элемента площади в деформированной конфигурации через элемент площади в отсчётной конфигурации удобно предварительно ввести специальное *преобразование, устанавливающее соответствие между тензорами, определёнными на отсчётной конфигурации* $\overline{\Omega}$, *и тензорами, определёнными на деформированной конфигурации* $\overline{\Omega}^\varphi$. Кроме того, это преобразование играет ключевую роль в определении первого тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа, который будет введён в § 2.5.

Дадим сначала краткий обзор некоторых определений и результатов, относящихся к тензорным полям, заданным на одном из множеств $\overline{\Omega}$ или $\overline{\Omega}^\varphi$. Под **тензорами** здесь понимают *тензоры второго ранга*, имеющие вид

$$\boldsymbol{T} = (T_{ij}), \text{ где } i \text{ — номер строки, } j \text{ — номер столбца.}$$

Поскольку мы не учитываем различие между ковариантными и контравариантными компонентами, множество всех таких тензоров будет отождествляться с множеством $\mathbb{M}^3$, состоящим из всех квадратных матриц третьего порядка.

Пусть на отсчётной конфигурации $\overline{\Omega}$ задано тензорное поле $\boldsymbol{T}: \overline{\Omega} \to \mathbb{M}^3$. В каждой точке $\overline{\Omega}$ определим его **дивергенцию** $\operatorname{div} \boldsymbol{T}$ как вектор, компоненты которого представляют собой дивергенции от *транспонированных* строк матрицы $\boldsymbol{T}$, а именно:

$$\boldsymbol{T} = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \boldsymbol{T} := \begin{pmatrix} \partial_1 T_{11} + \partial_2 T_{12} + \partial_3 T_{13} \\ \partial_1 T_{21} + \partial_2 T_{22} + \partial_3 T_{23} \\ \partial_1 T_{31} + \partial_2 T_{32} + \partial_3 T_{33} \end{pmatrix} = \partial_j T_{ij} \boldsymbol{e}_i.$$

Естественно принять аналогичное определение для $\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi$, т. е. для дивергенции тензорного поля $\boldsymbol{T}^\varphi$: $\bar{\Omega}^\varphi \to \mathbb{M}^3$, заданного в точках деформированной конфигурации:

$$\boldsymbol{T}^\varphi = \left(T_{ij}^\varphi\right) \Rightarrow \mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi := \partial_j^\varphi T_{ij}^\varphi \boldsymbol{e}_i,$$

где

$$\partial_j^\varphi := \partial / \partial x_j^\varphi$$

— частные производные по переменным x_j^φ.

Применение основной формулы Грина на множестве $\bar{\Omega}$ очевидным образом показывает, что дивергенция тензорного поля удовлетворяет равенству

$$\int_\Omega \mathbf{div}\, \boldsymbol{T}\, \mathrm{d}x = \left[\int_\Omega \partial_j T_{ij}\, \mathrm{d}x\right] \boldsymbol{e}_i = \left[\int_{\partial\Omega} T_{ij} n_j\, \mathrm{d}a\right] \boldsymbol{e}_i,$$

которое в матричной форме имеет вид

$$\boxed{\int_\Omega \mathbf{div}\, \boldsymbol{T}\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\, \mathrm{d}a.}$$

Напомним, что вектор, если он рассматривается как матрица, мы всегда считаем *столбцом*. Таким образом, выражение $\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}$ в предыдущей формуле обозначает вектор-столбец, полученный действием матрицы $\boldsymbol{T}$ слева на вектор-столбец $\boldsymbol{n}$. Эта *формула Грина* носит название **теоремы о дивергенции тензорных полей** (ср. с теоремой о дивергенции векторных полей, установленной в § 1.6). Тензорное поле $\boldsymbol{T}^\varphi$: $\bar{\Omega}^\varphi \to \mathbb{M}^3$ удовлетворяет аналогичному равенству

$$\int_{\Omega^\varphi} \mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi\, \mathrm{d}x^\varphi = \int_{\partial\Omega^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi\, \mathrm{d}a^\varphi,$$

где $\boldsymbol{n}^\varphi$ — вектор единичной внешней нормали к границе деформированной конфигурации.

Теперь мы дадим важное определение. Пусть φ — деформация, инъективная на $\bar{\Omega}$, так что матрица $\boldsymbol{\nabla}\varphi$ обратима во всех точках отсчётной конфигурации. Рассмотрим тензор $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)$, заданный в точке $x^\varphi = \varphi(x)$ деформированной конфигурации. Поставим в соответствие тензору $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)$ тензор $\boldsymbol{T}(x)$, заданный в точке x отсчетной конфигурации, полагая

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{T}(x) := (\det \boldsymbol{\nabla}\varphi(x))\, \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\, \boldsymbol{\nabla}\varphi(x)^{-\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\, \mathbf{Cof}\, \boldsymbol{\nabla}\varphi(x), \\ x^\varphi = \varphi(x). \end{aligned}}$$

Таким образом, установлено соответствие, называемое **преобразованием Пиолы**, между тензорными полями на деформированной конфигурации и тензорными полями на отсчётной конфигурации.

Замечание. Представляется вполне оправданным и в некотором смысле более естественным исходить из тензорного поля $\boldsymbol{T}: \bar{\Omega} \to \mathbb{M}^3$ и поставить в соответствие этому полю его «обратное преобразование Пиолы» $\boldsymbol{T}^\varphi: \bar{\Omega}^\varphi \to \mathbb{M}^3$, заданное соотношением

$$\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) := (\det \nabla\varphi(x))^{-1}\, \boldsymbol{T}(x)\, \nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}}, \qquad x \in \bar{\Omega}.$$

Однако мы поступаем иначе, поскольку, как будет показано в гл. 2, «отправной точкой» в теории упругости служит тензорное поле, заданное на *деформированной конфигурации* (тензор напряжений Коши), и именно его преобразование Пиолы в точках отсчётной конфигурации (первый тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа) играет ключевую роль в дальнейшем изложении.

Как показывает следующая теорема, основное значение преобразования Пиолы состоит в том, что оно позволяет установить *простое соотношение между дивергенциями тензоров* $\boldsymbol{T}^\varphi$ *и* $\boldsymbol{T}$, а также (в качестве следствия) *искомое соотношение между соответствующими элементами площади* $\mathrm{d}a^\varphi$ *и* $\mathrm{d}a$.

Теорема 1.7-1 (о свойствах преобразования Пиолы). *Пусть* $\boldsymbol{T}: \bar{\Omega} \to \mathbb{M}^3$ — *преобразование Пиолы тензорного поля* $\boldsymbol{T}^\varphi: \bar{\Omega}_\varphi \to \mathbb{M}^3$. *Тогда*

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{div}\, \boldsymbol{T}(x) = (\det \nabla\varphi(x))\, \mathbf{div}^\varphi\, \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) \text{ для всех} \\ &\qquad\qquad x^\varphi = \varphi(x), \; x \in \bar{\Omega}, \end{aligned}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{n}^\varphi\,\mathrm{d}a^\varphi \text{ для всех } x^\varphi = \varphi(x), \qquad x \in \partial\Omega.}$$

Элементы площади $\mathrm{d}a$ *и* $\mathrm{d}a^\varphi$ *в точках* $x \in \partial\Omega$ *и* $x^\varphi = \varphi(x) \in \partial\Omega^\varphi$, *которым соответствуют единичные векторы внешней нормали* $\boldsymbol{n}$ *и* $\boldsymbol{n}^\varphi$, *связаны соотношением*

$$\boxed{\det \nabla\varphi(x)\,|\nabla\varphi(x)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}|\,\mathrm{d}a = |\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi(x)\,\boldsymbol{n}|\,\mathrm{d}a = \mathrm{d}a^\varphi.}$$

Доказательство. Основу доказательства составляет *тождество Пиолы*

$$\mathbf{div}\left\{(\det \nabla\boldsymbol{\varphi})\, \nabla\boldsymbol{\varphi}^{-\mathrm{T}}\right\} = \mathbf{div}\, \mathbf{Cof}\, \nabla\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{o},$$

которое мы и установим в первую очередь. Считая, что индексы занумерованы по модулю 3, имеем следующие выражения для элементов матрицы $\mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\varphi}$ (см. § 1.1):

$$(\mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\varphi})_{ij} = \partial_{j+1}\varphi_{i+1}\partial_{j+2}\varphi_{i+2} - \partial_{j+2}\varphi_{i+1}\partial_{j+1}\varphi_{i+2}$$
(суммирования нет),

и, как показывают непосредственные вычисления,

$$\partial_j\left((\det \nabla\boldsymbol{\varphi})\, \nabla\boldsymbol{\varphi}(x)^{-\mathrm{T}}\right)_{ij} = \partial_j(\mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\varphi})_{ij} = 0.$$

Тогда из соотношений

$$T_{ij}(x) = (\det \nabla\boldsymbol{\varphi}(x))\, T_{ik}^{\varphi}(x^{\varphi})\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}(x)^{-\mathrm{T}}\right)_{kj}$$

следует, что

$$\partial_j T_{ij}(x) = (\det \nabla\boldsymbol{\varphi}(x))\, \partial_j T_{ik}^{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}(x))\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}(x)^{-\mathrm{T}}\right)_{kj},$$

поскольку второй член производной от произведения равен нулю в силу тождества Пиолы. Далее, пользуясь цепным правилом, находим

$$\partial_j T_{ik}^{\varphi}(x^{\varphi}) = \partial_l^{\varphi} T_{ik}^{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}(x))\, \partial_j\varphi_l(x) = \partial_l^{\varphi} T_{ik}^{\varphi}(x^{\varphi})\, (\nabla\boldsymbol{\varphi}(x))_{lj},$$

откуда и вытекает требуемое соотношение между $\mathbf{div}\,\boldsymbol{T}(x)$ и $\mathbf{div}^{\varphi}\,\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})$, так как

$$(\nabla\boldsymbol{\varphi}(x))_{li}\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}(x)^{-\mathrm{T}}\right)_{ki} = \delta_{lk}.$$

Пользуясь соотношением $\mathrm{d}x^{\varphi} = \det \nabla\boldsymbol{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x$, теоремой о дивергенции тензорных полей для произвольной подобласти A в $\bar{\Omega}$, а также формулой замены переменных в кратных интегралах, получаем

$$\int_{\partial A} \boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \int_A \mathbf{div}\,\boldsymbol{T}(x)\,\mathrm{d}x = \int_A \mathbf{div}^{\varphi}\,\boldsymbol{T}^{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}(x))\det\nabla\boldsymbol{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\boldsymbol{\varphi}(A)} \mathbf{div}^{\varphi}\,\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\mathrm{d}x^{\varphi} = \int_{\partial\boldsymbol{\varphi}(A)} \boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\boldsymbol{n}^{\varphi}\,\mathrm{d}a^{\varphi}.$$

Отсюда следует соотношение $\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{T}^{\varphi}\boldsymbol{n}^{\varphi}\mathrm{d}a^{\varphi}$. [1] Как частный

[1] Действительно, из последнего равенства видно, что

$$\int_{\partial\Omega} f(\boldsymbol{\varphi}(x))\,\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \int_{\partial\boldsymbol{\varphi}(\Omega)} f(x^{\varphi})\,\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\boldsymbol{n}^{\varphi}\,\mathrm{d}a^{\varphi}$$

для любой вещественнозначной функции $f(x^{\varphi}) \in \mathscr{C}^1(\boldsymbol{\varphi}(\bar{\Omega}))$, поскольку тензор $\boldsymbol{T}_1(x) = f(\boldsymbol{\varphi}(x))\,\boldsymbol{T}(x)$ является преобразованием Пиолы тензора $\boldsymbol{T}_1^{\varphi}(x^{\varphi}) = f(x^{\varphi})\,\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})$. Это означает, что $\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{T}^{\varphi}\boldsymbol{n}^{\varphi}\,\mathrm{d}a^{\varphi}$, так как f произвольна. — *Прим. перев.*

случай, взяв преобразование Пиолы $(\det \nabla\varphi)\nabla\varphi(x)^{-T}$ единичного тензора $\boldsymbol{I}$, получаем соотношение $(\det \nabla\varphi)\nabla\varphi(x)^{-T}\boldsymbol{n}\,da = \boldsymbol{n}^\varphi da^\varphi$ между элементами площади da и da^φ. Поэтому $(\det \nabla\varphi)\times \times|\nabla\varphi(x)^{-T}\boldsymbol{n}|\,da = da^\varphi$, ввиду того что $|\boldsymbol{n}^\varphi| = 1$ и, значит, da^φ является эвклидовой нормой вектора, стоящего в левой части равенства $(\det \nabla\varphi)\nabla\varphi(x)^{-T}\boldsymbol{n}\,da = \boldsymbol{n}^\varphi\,da^\varphi$. ■

Замечания. (1) Очевидно, что утверждения теоремы 1.7-1 остаются верными, если заменить множество Ω на любую *подобласть* A в Ω. В этом случае соответствующие элементы площади и векторы внешней нормали следует считать заданными на границах ∂A и $\partial A^\varphi = \varphi(\partial A)$ соответственно.

(2) При доказательстве теоремы 7.6-1 нам потребуется ослабленный вариант тождества Пиолы *в смысле теории распределений.*

(3) Хотя соотношение между векторами $\mathbf{div}\,\boldsymbol{T}$ и $\mathbf{div}^\varphi\,\boldsymbol{T}^\varphi$ было установлено для дважды дифференцируемых деформаций φ, тем не менее соотношения между элементами площади, даваемые теоремой 1.7-1, остаются справедливыми при более слабых предположениях о регулярности деформаций. В связи с этим см. упражнение 1.13.

(4) Последнее равенство в теореме 1.7-1 показывает, что единичные векторы внешней нормали в точках $x^\varphi = \varphi(x)$ и x связаны соотношением

$$\boldsymbol{n}^\varphi = \frac{\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi(x)\,\boldsymbol{n}}{|\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi(x)\,\boldsymbol{n}|}. \qquad ■$$

Теперь мы располагаем всем необходимым, чтобы указать, каким образом *преобразуются площади*. Если Δ — измеримое подмножество на границе ∂A подобласти A, то площадь деформированного множества $\Delta^\varphi = \varphi(\Delta)$ даётся формулой

$$\operatorname{area}\Delta^\varphi := \int_{\Delta^\varphi} da^\varphi = \int_\Delta (\det\nabla\varphi)\,|\nabla\varphi^{-T}\boldsymbol{n}|\,da.$$

1.8. Элемент длины в деформированной конфигурации. Тензоры деформации

Если деформация φ дифференцируема в точке $x \in \bar\Omega$, то, согласно определению дифференцируемости, мы можем написать

$$\varphi(x + \boldsymbol{\delta x}) - \varphi(x) = \nabla\varphi(x)\,\boldsymbol{\delta x} + o(|\boldsymbol{\delta x}|)$$

для всех точек $x + \boldsymbol{\delta x} \in \bar\Omega$. Отсюда следует, что

$$|\varphi(x + \boldsymbol{\delta x}) - \varphi(x)|^2 = \boldsymbol{\delta x}^T\,\nabla\varphi^T(x)\,\nabla\varphi(x)\,\boldsymbol{\delta x} + o(|\boldsymbol{\delta x}|^2).$$

Симметричный тензор

$$\boxed{C := \nabla\varphi^{\mathrm{T}}\, \nabla\varphi,}$$

входящий в предыдущее равенство, называется в теории упругости **правым тензором деформации Коши — Грина.** Нужно отметить, что соответствующая квадратичная форма

$$(\xi, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \xi^{\mathrm{T}} C(x)\, \xi = |\nabla\varphi(x)\, \xi|^2$$

является положительно-определённой во всех точках $x \in \bar{\Omega}$, поскольку в силу наших предположений градиент деформации

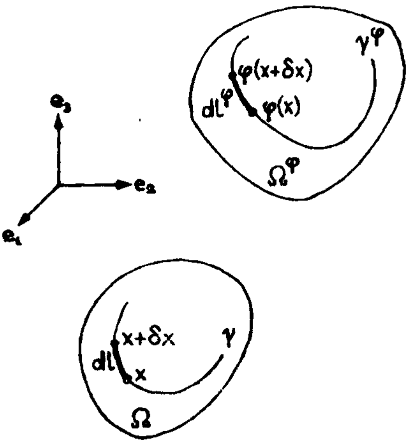

Рис. 1.8-1. $dl = \{dx^{\mathrm{T}}\, dx\}^{1/2}$ и $dl^\varphi = \{dx^{\mathrm{T}}\, C\, dx\}^{1/2}$ — элемеиты длины в отсчётиой и деформироваииой конфигурациях; $C = \nabla\varphi^{\mathrm{T}}\nabla\varphi$ — правый тензор Коши—Грииа.

$\nabla\varphi(x)$ всюду обратим. Как и следует ожидать, эта квадратичная форма используется для вычисления длин. Действительно, рассмотрим кривую в отсчётной конфигурации (рис. 1.8-1)

$$\gamma = f(I), \quad f\colon I \to \bar{\Omega}, \quad I \text{ — компактный интервал в } \mathbb{R}.$$

Обозначая через f_i компоненты отображения f, получаем следующее выражение для *длины* кривой γ:

$$\text{дл}\,\gamma := \int_I |f'(t)|\, dt = \int_I \{f_i'(t)\, f_i'(t)\}^{1/2}\, dt,$$

где $f' = df/dt$. С другой стороны, длина *деформированной* кривой $\gamma^\varphi := \varphi(\gamma)$ задаётся равенством

$$\text{дл}\,\gamma^\varphi := \int_I |(\varphi \circ f)'(t)|\, dt = \int_I \{C_{il}(f(t))\, f_i'(t)\, f_l'(t)\}^{1/2}\, dt.$$

Следовательно, **элементы длины** $\mathrm{d}l$ и $\mathrm{d}l^{\varphi}$ в отсчётной и деформированной конфигурациях соответственно могут быть символически записаны в виде

$$\boxed{\mathrm{d}l = \{\mathbf{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}\}^{1/2}, \qquad \mathrm{d}l^{\varphi} = \{\mathbf{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}\}^{1/2}.}$$

Если, в частности, $\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}t\,\boldsymbol{e}_j$, то соответствующий элемент длины в деформированной конфигурации равен $\{C_{jj}\}^{1/2}\mathrm{d}t = |\partial_j\varphi|\,\mathrm{d}t$. Это наблюдение помогает понять рис. 1.4-1.

Замечание. В терминах дифференциальной геометрии можно сказать, что на $\bar{\Omega}$ введена *структура риманова многообразия* посредством задания *метрического тензора* $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$, который часто обозначается через $\boldsymbol{g} = (g_{ij})$ и которому соответствует квадратичная форма, обозначаемая $\mathrm{d}s^2$ и называемая *первой фундаментальной формой* многообразия. Подробности см., например, в книгах: Lelong-Ferrand [1963], Malliavin [1972][1].

С другой стороны, можно рассмотреть следующий *симметрический* тензор, называемый **левым тензором деформации Коши — Грина:**

$$\boxed{\boldsymbol{B} := \nabla\varphi\nabla\varphi^{\mathrm{T}}.}$$

Этот тензор, хотя и не допускает непосредственной геометрической интерпретации, является не менее важным; в частности, он играет существенную роль в теореме о представлении функции реакции для тензора напряжений Коши (теорема 3.6-2). Пока лишь отметим, что *матрицы* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ *и* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ *имеют один и тот же характеристический многочлен*, так как это верно вообще для произведений $\boldsymbol{FG}$ и $\boldsymbol{GF}$ любых матриц $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ одинакового порядка. При $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ последнее утверждение вытекает непосредственно из теоремы о полярном разложении (теорема 3.2-2).

Чтобы пояснить целесообразность выбора тензора $\boldsymbol{C}$ в качестве меры „деформации“, которая интуитивно понимается здесь как „измерение *формы* или *размера*“, рассмотрим сначала один класс деформаций, не вызывающих таких изменений.

Деформация называется **жёсткой**, если она представима в виде

$$\varphi(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{o}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+ \text{ для всех } x \in \bar{\Omega},$$

[1] Или Дубровин, Новиков и Фоменко [1979]. — *Прим. перев.*

где $\mathbb{O}^3_+$ — множество всех *поворотов* в $\mathbb{R}^3$, т. е. множество всех ортогональных матриц третьего порядка с определителем, равным единице. Иными словами, *соответствующая деформированная конфигурация получается поворотом* (*задаваемым матрицей* $\boldsymbol{Q}$) *отсчётной конфигурации относительно начала координат и сдвигом на вектор* $\boldsymbol{a}$. Такое определение вполне согласуется с представлением о „жёсткой“ деформации, при которой отсчётная конфигурация „движется“, „не деформируясь“ (см. рис. 1.8-2). Заметим, что поворот $\boldsymbol{Q}$ может осуществляться вокруг любой

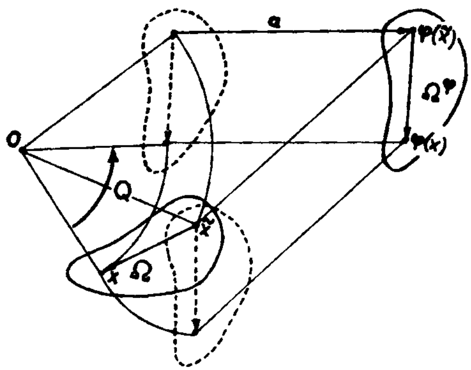

Рис. 1.8-2. Жёсткая деформация — это параллельный перенос с последующим (или предшествующим) поворотом отсчётной конфигурации.

точки $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ (рис. 1.8-2), поскольку рассматриваемая деформация допускает представление

$$\varphi(x) = \varphi(\tilde{x}) + \boldsymbol{Q}\tilde{x}\boldsymbol{x}.$$

Если φ — жёсткая деформация, то $\nabla\varphi(x) = \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$ во всех точках $x \in \bar{\Omega}$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} \text{ в } \bar{\Omega}, \quad \text{т. е.} \quad \nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}}\, \nabla\varphi(x) = \boldsymbol{I} \quad \text{для всех} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Следует особо подчеркнуть, что справедливо и *обратное* утверждение, а именно: если $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$ в $\bar{\Omega}$ и $\det \nabla\varphi > 0$, то соответствующая деформация является жёсткой. Приведём теперь доказательство этого результата при достаточно слабых предположениях (различные дополнительные сведения по данному вопросу содержатся в упражнениях 1.14, 1.15, 1.16). Через $\mathbb{O}^n$ обозначается множество всех ортогональных матриц порядка n.

Теорема 1.8-1 (об описании класса жёстких деформаций). *Пусть Ω — открытое связное подмножество в $\mathbb{R}^3$ и отображение*

$$\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$$

удовлетворяет условию

$$\nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}}\,\nabla\varphi(x)=\boldsymbol{I}\quad \text{для всех}\quad x\in\Omega.$$

Тогда существуют вектор $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ *и ортогональная матрица* $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{O}^n$, *такие что*

$$\varphi(x)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{Qox}\quad \text{для всех}\quad x\in\Omega.$$

Доказательство. (1) Установим сначала, что *отображение* φ *является локальной изометрией, т. е. для любой заданной точки* $x_0\in\Omega$ *найдётся открытое подмножество* V, *такое что*

$$x_0\in V\subset\Omega \text{ и } |\varphi(y)-\varphi(x)|=|y-x| \text{ для всех } x,\ y\in V.$$

В силу открытости множества Ω, существует постоянная $\rho>0$, такая что открытый шар

$$B_\rho(x_0):=\{x\in\mathbb{R}^n;\quad |x-x_0|<\rho\}$$

содержится в Ω. Спектральная норма ортогональной матрицы равна единице; это следует из определения такой нормы для произвольной квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$|\boldsymbol{A}|:=\sup_{\boldsymbol{v}\neq 0}\frac{|\boldsymbol{Av}|}{|\boldsymbol{v}|}=\max_i\{\lambda_i(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\}^{1/2}.$$

На основании теоремы о среднем значении (теорема 1.2-2), учитывая выпуклость шара $B_\rho(x_0)$, заключаем, что

$$|\varphi(y)-\varphi(x)|\leqslant\sup_{z\in]x,\,y[}|\nabla\varphi(z)||y-x|=|y-x|$$

для всех $x,\ y\in B_\rho(x_0)$.

Для доказательства обратного неравенства заметим, что по теореме о локальном обращении (теорема 1.2-4) отображение φ локально обратимо в Ω, так как матрица $\nabla\varphi(x)$ обратима при всех $x\in\Omega$. В частности, существуют открытые множества V и V^φ, содержащие точки x_0 и $x_0^\varphi=\varphi(x_0)$ соответственно и такие, что сужение отображения φ на множество V есть $\mathscr{C}^1$-диффеоморфизм V на V^φ, т. е. отображение $\varphi: V\to V^\varphi$ биективно и обратное к нему отображение ψ: $V^\varphi\to V$ также является непрерывно дифференцируемым.

Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что множество V содержится в шаре $B_\rho(x_0)$ и множество V^φ выпукло. В противном случае следует заменить V на прообраз (относительно φ) некоторого открытого шара, принадлежащего $V^\varphi\cap\varphi(B_\rho(x_0))$, с центром в точке x_0^φ. Поскольку

$$\psi(\varphi(x))=x\quad \text{для всех}\quad x\in V,$$

то мы можем заключить, что отображение ψ удовлетворяет условию

$$\nabla\psi(x^\varphi) = \nabla\varphi(x)^{-1} \quad \text{для всех} \quad x^\varphi = \varphi(x), \quad x \in V.$$

Следовательно, матрица $\nabla\psi(x^\varphi)$ также является ортогональной для всех точек $x^\varphi \in V^\varphi$. Учитывая выпуклость множества V^φ и снова пользуясь теоремой о среднем значении, устанавливаем, что

$$|\psi(y^\varphi) - \psi(x^\varphi)| \leqslant |y^\varphi - x^\varphi| \quad \text{для всех} \quad x^\varphi,\ y^\varphi \in V^\varphi.$$

Это неравенство можно записать в эквивалентной форме

$$|y - x| \leqslant |\varphi(y) - \varphi(x)| \quad \text{для всех} \quad x,\ y \in V.$$

Таким образом, доказано равенство

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| = |y - x| \quad \text{для всех} \quad x,\ y \in V,$$

поскольку множество V содержится в шаре $B_\rho(x_0)$.

(ii) Покажем теперь, что *матрица* $\nabla\varphi$ *локально постоянна*, т. е. что *матрица* $\nabla\varphi(x)$ *не зависит от* $x \in V$. Для этого перепишем равенство, установленное на предыдущем шаге доказательства, в эквивалентном виде

$$F(x,\ y) := (\varphi_k(y) - \varphi_k(x))(\varphi_k(y) - \varphi_k(x)) - (y_k - x_k)(y_k - x_k) = 0$$

для всех $x,\ y \in V$. При каждом $x \in V$ функция $y \in V \to F(x, y)$ дифференцируема, и

$$G_i(x,\ y) := \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y_i}(x,\ y) = \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}(y)(\varphi_k(y) - \varphi_k(x)) - \delta_{ik}(y_k - x_k) = 0$$

для всех $x,\ y \in V$. При каждом $y \in V$ функции $x \in V \to G_i(x, y)$ дифференцируемы, и

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x,\ y) = -\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}(y)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}(x) + \delta_{ij} = 0,$$

т. е.

$$\nabla\varphi(y)^{\mathrm{T}}\nabla\varphi(x) = \boldsymbol{I} \quad \text{для всех} \quad x,\ y \in V.$$

Полагая $y = x_0$, имеем

$$\nabla\varphi(x) = \nabla\varphi(x_0) \quad \text{для всех} \quad x \in V.$$

(iii) Из п. (ii) следует, что отображение $\nabla\varphi\colon \Omega \to \mathbb{M}^n$ дифференцируемо и его производная равна нулю в Ω. Это означает, что *отображение* φ *дважды дифференцируемо и его вторая производная Фреше равна нулю*. Поскольку множество Ω *связно* (это предположение до сих пор не использовалось), то, как известно из классического анализа (см., например, Schwartz [1967, p. 266]), отображение φ должно иметь вид

$$\varphi(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{o}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{M}^n \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega,$$

и потому его градиент $\boldsymbol{Q}$ равен постоянной матрице $\nabla\varphi(x_0)$ на всём множестве Ω. Матрица $\boldsymbol{Q} = \nabla\varphi(x_0)$ ортогональна, так как по условию теоремы $\nabla\varphi(x_0)^{\mathrm{T}}\nabla\varphi(x_0) = \boldsymbol{I}$. ■

Замечание. Если сделать дополнительное предположение, что $\det \nabla\varphi(x) > 0$ хотя бы в одной точке $x \in \Omega$ (а значит, и во всех точках связного множества Ω), то мы можем заключить, что ортогональная матрица, построенная в теореме, задаёт поворот (т. е. $\det \boldsymbol{Q} = 1$). Отметим также, что если отображение φ непрерывно вплоть до границы, то соотношение $\varphi(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{o}\boldsymbol{x}$ выполняется для всех точек $x \in \bar{\Omega}$. ■

Теорему 1.8-1 можно рассматривать как частный случай (когда в качестве ψ взята произвольная жесткая деформация) следующей теоремы, которая показывает, что *если две деформации соответствуют одному и тому же тензору* $\boldsymbol{C}$, *то одна из них выражается через другую посредством композиции с жёсткой деформацией.*

Теорема 1.8-2. *Пусть* Ω — *открытое связное подмножество в* $\mathbb{R}^n$ *и заданы два отображения*

$$\varphi, \ \psi \in \mathscr{C}^1(\Omega; \ \mathbb{R}^n),$$

такие что

$$\nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}} \, \nabla\varphi(x) = \nabla\psi(x)^{\mathrm{T}} \, \nabla\psi(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega,$$

$$\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n \ \text{инъективно}, \ \det \nabla\psi(x) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

Тогда существуют вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *и ортогональная матрица* $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n$, *такие что*

$$\varphi(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}\psi(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

Доказательство. Поскольку отображение ψ инъективно и $\det \nabla\psi(x) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, то обратное отображение

$$\psi^{-1}\colon \ \psi(\Omega) \to \Omega$$

также является непрерывно дифференцируемым и удовлетворяет условию

$$\nabla\psi^{-1}(\xi) \, \nabla\psi(x) = \boldsymbol{I} \quad \text{для всех} \quad \xi = \psi(x), \quad x \in \Omega.$$

Кроме того, множество $\psi(\Omega)$ открыто в силу теоремы о сохранении области (теорема 1.2-6) и, будучи образом связного множества при непрерывном отображении, связно. Композиция отображений

$$\vartheta := \varphi \circ \psi^{-1} \colon \psi(\Omega) \to \mathbb{R}^n$$

удовлетворяет соотношению

$$\nabla\vartheta(\xi) = \nabla\varphi(x)\,\nabla\psi(\xi)^{-1} = \nabla\varphi(x)\,\nabla\psi(x)^{-1}$$
$$\text{для всех } \xi = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

и, значит, в силу сделанных предположений,

$$\nabla\vartheta(\xi)^{\mathrm{T}}\,\nabla\vartheta(\xi) = \nabla\psi(x)^{-\mathrm{T}}\,\nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}}\,\nabla\varphi(x)\,\nabla\psi(x)^{-1} = \boldsymbol{I}$$
$$\text{для всех } \xi = \psi(x), \quad x \in \Omega.$$

Поэтому мы можем применить теорему 1.8-1 к отображению ϑ. Таким образом,

$$\vartheta(\xi) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}o\xi \quad \text{для всех} \quad \xi = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

где $\boldsymbol{a}$ — вектор из $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n$ — ортогональная матрица. Полученное равенство эквивалентно утверждению доказываемой теоремы. ■

Две предыдущие теоремы помогают понять ту роль, которую играет тензор $\boldsymbol{C}$. Во-первых, как показывает теорема 1.8-1, разность

$$\boxed{2\boldsymbol{E} := \boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}}$$

представляет собой меру „отклонения“ данной деформации от жёсткой, поскольку равенство $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$ имеет место в том и только в том случае, когда деформация является жёсткой. Во-вторых, из теоремы 1.8-2 ясно, что *если известно тензорное поле $\boldsymbol{C}\colon \Omega \to \mathbb{S}^3_>$, то деформация определена единственным образом с точностью до композиции с жёсткими деформациями* (совсем иной вопрос — доказать для заданного поля тензоров *существование* деформации, для которой *это поле* является полем правых тензоров Коши—Грина $\boldsymbol{C}\colon \Omega \to \mathbb{S}^3_>$; см. упражнение 1.18). Эти замечания поясняются рис. 1.8-3.

Матрица $\boldsymbol{E}$ называется **тензором деформации Грина—Сен-Венана.** Тензор деформации $\boldsymbol{C}$, определённый выше посредством градиента деформации $\nabla\varphi$, можно выразить через *градиент перемещений* $\nabla\boldsymbol{u}$ (напомним, что $\varphi = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u}$, $\nabla\varphi = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}$):

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \nabla\varphi^{\mathrm{T}}\nabla\varphi = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{u} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E},}$$

при этом

$$\boxed{E(u) := E = \frac{1}{2}(\nabla u^{\mathrm{T}} + \nabla u + \nabla u^{\mathrm{T}} \nabla u).}$$

В дальнейшем нам также потребуются формулы

$$C_{ij} = \partial_i \varphi_k \partial_j \varphi_k, \qquad E_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k),$$

где $\varphi = \varphi_i e_i$, $u = u_i e_i$.

Замечания. (1) Теоремы 1.8-1 и 1.8-2 можно сформулировать в эквивалентной форме с помощью тензора деформации

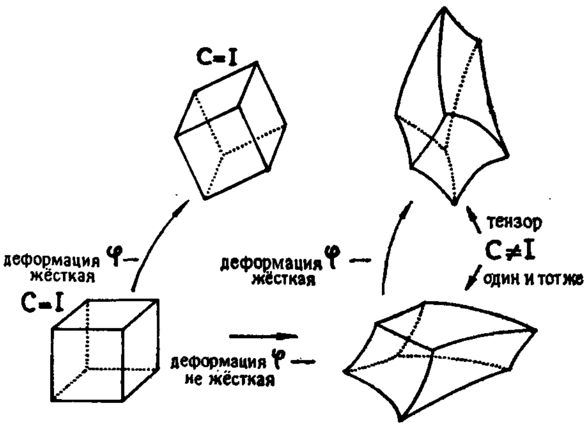

Рис. 1.8-3. Правый тензор Коши—Грина C равен I в том и только в том случае, когда деформация жёсткая. Две деформации, отвечающие одному тензору C, отличаются на жёсткую деформацию.

Грина—Сен-Венана, если воспользоваться соотношениями

$$\nabla\varphi^{\mathrm{T}}\nabla\varphi = I \text{ в } \Omega \Leftrightarrow E(u) = 0 \text{ в } \Omega, \qquad \varphi = id + u,$$

$$\nabla\varphi^{\mathrm{T}}\nabla\varphi = \nabla\psi^{\mathrm{T}}\nabla\psi \text{ в } \Omega \Leftrightarrow E(u) = E(v) \text{ в } \Omega, \qquad \varphi = id + u, \quad \psi = id + v.$$

(2) Введение коэффициента 1/2 в определении тензора E мотивируется требованием, чтобы его составляющая „первого порядка“ $\frac{1}{2}(\nabla u^{\mathrm{T}} + \nabla u)$ совпадала с *линеаризованным тензором деформации* (см. гл. 6), имеющим первостепенное значение в линеаризованных теориях, которые ранее в основном и были предметом исследований. Кроме того, в ряде работ предлагалось

принять тензор $(\boldsymbol{C}^{1/2} - \boldsymbol{I})$ в качестве ещё одного варианта меры деформации (определение квадратного корня $\boldsymbol{C}^{1/2}$ см. в § 3.2), и множитель $1/2$ обеспечивал равенство составляющих первого порядка для тензоров $\boldsymbol{E}$ и $(\boldsymbol{C}^{1/2} - \boldsymbol{I})$.

(3) Тензор $\boldsymbol{E}$ известен в литературе по теории упругости также под именами *тензора деформации Грина—Лагранжа* и *тензора деформации Альманси.* ■

В заключение дадим характеристику подмножества в $\mathbb{S}^3$, образованного значениями тензора деформации Грина—Сен-Венана $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{I})$, когда матрица $\boldsymbol{F}$ пробегает множество $\mathbb{M}^3_+$.

Теорема 1.8-3. *Множество*

$$\mathbb{V}(\boldsymbol{0}) := \left\{ \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) \in \mathbb{S}^3;\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+ \right\}$$

является окрестностью нуля в $\mathbb{S}^3$.

Доказательство. Поскольку любая матрица $\boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_>$ может быть представлена в виде $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{1/2}\boldsymbol{C}^{1/2}$ (это свойство положительно-определённых матриц установлено в теореме 3.2-1), то множество $\mathbb{V}(\boldsymbol{0})$ можно записать в виде

$$\mathbb{V}(\boldsymbol{0}) = \left\{ \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) \in \mathbb{S}^3;\ \boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_> \right\} = f^{-1}(\mathbb{S}^3_>),$$

где f: $\boldsymbol{E} \in \mathbb{S}^3 \to (\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}) \in \mathbb{S}^3$ — непрерывное отображение. Отсюда вытекает утверждение теоремы, так как множество $\mathbb{S}^3_>$ открыто в $\mathbb{S}^3$ (см. упражнение 1.1) и $\boldsymbol{0} \in \mathbb{V}(\boldsymbol{0})$. ■

Упражнения

1.1. (1) Покажите, что множество всех обратимых матриц порядка n открыто в $\mathbb{M}^n$.

(2) Покажите, что множество $\mathbb{S}^n_>$ открыто в $\mathbb{S}^n$.

(3) Покажите, что множество $\mathbb{S}^n$ замкнуто в $\mathbb{M}^n$.

(4) Что можно сказать об $\mathbb{S}^n_>$ как подмножестве в $\mathbb{M}^n$?

1.2. (1) Пусть $\boldsymbol{A}$ — обратимая матрица с собственными значениями λ_i. Пользуясь соотношением $\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}$, вычислите собственные значения матрицы $\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A}$.

(2) Покажите, что любая квадратная матрица является пределом последовательности обратимых матриц того же порядка.

(3) Пусть $\boldsymbol{A}$ — любая матрица порядка n с собственными значениями λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, занумерованными произвольным образом. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Покажите, что найдётся число

$\delta = \delta(\boldsymbol{A}, \varepsilon) > 0$, обладающее следующим свойством. Для любой матрицы $\boldsymbol{B}$ порядка n с произвольно занумерованными собственными значениями μ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, такой что $\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\| \leqslant \delta$, существует перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, для которой

$$|\lambda_i - \mu_{\sigma(i)}| \leqslant \varepsilon, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

(4) Пусть $\boldsymbol{A}$ — произвольная матрица порядка n с собственными значениями λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Выведите из утверждений (1)—(3), что собственные значения матрицы $\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A}$ имеют вид $\prod_{i \neq j} \lambda_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Замечания. В случае кратных собственных значений доказательство утверждения (3) нетривиально (см., например, Ostrowski [1966, p. 282]). С помощью (4) можно получить другое доказательство теоремы 1.1-1.

1.3. (1) Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — произвольные матрицы одинакового порядка. Покажите, что

$$\det \boldsymbol{A} = \frac{1}{3} \boldsymbol{A} : \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A},$$

$$\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{A} + (\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} : \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{B} + \det \boldsymbol{B}.$$

(2) Примените второе равенство для вычисления производной отображения $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^n \to \det \boldsymbol{A}$ (см. § 1.2).

1.4. В § 1.2 установлено, что производная функции ι_{n-1}: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^n \to \operatorname{tr} \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A}$ задаётся равенством

$$\frac{\partial \iota_{n-1}}{\partial \boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \left(\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}\right) \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A},$$

если матрица $\boldsymbol{A}$ обратима; кроме того, очевидно, что функция ι_{n-1} дифференцируема при всех $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^n$. Какой вывод можно сделать из этих двух утверждений?

1.5. *Главными инвариантами* матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n называются коэффициенты $\iota_1, \ldots, \iota_n$ её характеристического многочлена

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \iota_1(\boldsymbol{A}) \lambda^{n-1} + \ldots - \iota_{n-1}(\boldsymbol{A}) \lambda + \iota_n(\boldsymbol{A});$$

в частности, $\iota_1(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A}$, $\iota_{n-1}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A}$, $\iota_n(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$ (см. § 1.2). Покажите, что градиенты главных инвариантов удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям (см., например, Truesdell & Noll [1965, p. 26], Carlson & Hoger [1986]):

$$\frac{\partial \iota_k}{\partial \boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \iota_{k-j-1}(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{A}^j \right\}^{\mathrm{T}}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \iota_0(\boldsymbol{A}) = 1.$$

1.6. Докажите, что отображение $A \to A^{-1}$ бесконечно дифференцируемо на открытом подмножестве в $\mathbb{M}^n$, состоящем из всех обратимых матриц. Вычислите его первую и вторую производные.

1.7. Покажите. что $\operatorname{int} \overline{\Omega} = \Omega$, если открытое подмножество Ω в $\mathbb{R}^n$ является областью.

1.8. Покажите, что открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет конечное число связных компонент, если Ω удовлетворяет всем условиям, входящим в определение области, за исключением связности.

1.9. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что найдётся постоянная $c(\Omega)$, такая что для любых заданных точек x_1 и x_2 в $\overline{\Omega}$ существует конечное число точек y_k, $1 \leqslant k \leqslant l+1$, удовлетворяющих условиям

$$y_1 = x_1, \quad y_k \in \Omega \text{ при } 2 \leqslant k \leqslant l, \quad y_{l+1} = x_2,$$
$$]y_k, \ y_{k+1}[\subset \Omega \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant l,$$
$$\sum_{k=1}^{l} |y_k - y_{k+1}| \leqslant c(\Omega) |x_1 - x_2|.$$

Замечание. Этот результат будет использован при доказательстве теоремы 5.5-1.

1.10. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi\colon \overline{\Omega} \to \varphi(\overline{\Omega})$ — диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^1$. Докажите, что $\varphi(\Omega)$ — область.

1.11. Является ли областью множество Ω в $\mathbb{R}^2$, которое ограничено, выпукло и открыто?

1.12. Пусть на деформированной конфигурации $\overline{\Omega}^\varphi$ задано векторное поле $\boldsymbol{v}^\varphi\colon \overline{\Omega}^\varphi \to \mathbb{R}^3$. *Преобразованием Пиолы* поля $\boldsymbol{v}^\varphi$ называется векторное поле $\boldsymbol{v}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, определённое в точках отсчётной конфигурации $\overline{\Omega}$ с помощью равенства

$$\boldsymbol{v}(x) = (\det \nabla\varphi(x)) \, \nabla\varphi^{-1}(x) \, \boldsymbol{v}^\varphi(x^\varphi), \qquad x^\varphi = \varphi(x).$$

Покажите, что дивергенции этих векторных полей связаны соотношением

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x) = (\det \nabla\varphi(x)) \operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{v}^\varphi(x^\varphi),$$

которое аналогично первому равенству в теореме 1.7-1.

1.13. (1) Покажите, что формулу, задающую элемент площади в определении поверхностного интеграла, апостериори можно рассматривать как частный случай соотношения $\mathrm{d}a^{\varphi} = (\det \nabla\varphi)\,|\nabla\varphi^{-T}\boldsymbol{n}|\,\mathrm{d}a$, установленного в теореме 1.7-1.

(2) Два последних соотношения в теореме 1.7-1, связывающие элементы площади $\mathrm{d}a$ и $\mathrm{d}a^{\varphi}$, были получены в предположении, что деформация φ дважды дифференцируема. Выполняются ли эти соотношения при более слабых предположениях относительно регулярности деформации?

1.14. Цель этого упражнения — дать более простое и удобное с вычислительной точки зрения (но, возможно, менее проясняющее суть дела) доказательство теоремы 1.8.-1 при *дополнительном* предположении *двукратной дифференцируемости* отображения φ. А именно, покажите сначала, что из равенства $\nabla\varphi(x)^T\nabla\varphi(x) = \boldsymbol{I}$ следуют соотношения вида

$$\partial_{ij}\varphi(x) = \alpha_{ijm}(x)\,\partial_m\varphi(x),$$

а затем — что коэффициенты $\alpha_{ijm}(x)$ равны нулю.

1.15. Пусть задано число $l > 0$. Говорят, что отображение φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *сохраняет расстояние* l, если

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| = |y - x| \quad \text{для всех} \quad x,\ y \in \mathbb{R}^n, \quad \text{таких что} \quad |y - x| = l.$$

(1) Покажите, что если для некоторого $l_0 > 0$ отображение φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, сохраняет расстояние l_0, то оно сохраняет и любое расстояние l (доказательство можно найти в Cabane [1981] или в Beckman & Quarles [1953]); отметим, что здесь не требуется непрерывность φ.

(2) Верен ли предыдущий результат при $n = 1$?

(3) Покажите, что отображение φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сохраняющее любое расстояние $l > 0$, имеет вид $\varphi(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{ox}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^{*}$, или, эквивалентно, что φ есть произведение не более $(n + 1)$ отражений относительно гиперплоскостей (см., например, Yale [1968, p. 60]; эквивалентность этих утверждений представляет собой классическое свойство ортогональных матриц, доказанное, например, в книге Ciarlet [1983, теорема 4.5-2]).

Замечание. Свойство (3) установлено в части (ii) доказательства теоремы 1.8-1 для отображений класса $\mathscr{C}^1$.

1.16. Пусть $H^1(\Omega)$ и $W^{1,p}(\Omega)$ — пространства Соболева, определённые в § 6.1. Покажите, что

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) \text{ и } \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{L}^r(\Omega), \qquad r \geqslant 1 \Rightarrow \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^{1,2r}(\Omega)$$

(обратная импликация очевидна). На этот факт обратил внимание Люк Тартар.

1.17. Цель данного упражнения — выяснить, в какой мере описание жёстких деформаций, полученное в теореме 1.8-1 для отображений $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$, можно распространить на случай отображений φ *меньшей гладкости*. Пространства $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ и $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ определены в § 6.1.

(1) Пусть $\varphi \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ и $\nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}}\nabla\varphi(x) = \boldsymbol{I}$ для почти всех $x \in \Omega$. Покажите, что $\varphi \in \boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega)$.

(2) Пусть выполнены предположения п. (1). Покажите, что φ не обязано иметь вид $\varphi(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Qox}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n$, даже если $\varphi = \boldsymbol{id}$ на некотором подмножестве Γ_0 границы $\Gamma = \partial\Omega$, таком что area $\Gamma_0 > 0$.

(3) Пусть Ω ограничено и $\varphi \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ удовлетворяет условиям

$$\nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}}\nabla\varphi(x) = \boldsymbol{I} \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega,$$

$$\varphi = \varphi_0 \ \text{на}\ \Gamma,\ \text{где}\ \varphi_0(x) = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{Qox}, \qquad \boldsymbol{a}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n.$$

Покажите, что $\varphi = \varphi_0$ в Ω.

Замечание. Эти результаты принадлежат Флориану Лорану. Подобные вопросы также рассмотрены в работах: Решетняк [1967], Kohn [1982].

1.18. В этом упражнении формулируются условия согласованности, налагаемые на поле тензоров $\boldsymbol{C}$: $\Omega \to \mathbb{S}^n_>$ (Ω открыто в $\mathbb{R}^n$), которые необходимы и достаточны для существования поля деформаций φ: $\Omega \to \mathbb{R}^n$, такого что

$$\nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}}\nabla\varphi(x) = \boldsymbol{C}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

(i) Пусть задано дважды дифференцируемое векторное поле φ: $\Omega \to \mathbb{R}^n$. Предположим, что симметрическая матрица $\boldsymbol{C} = (C_{ij}) := \nabla\varphi^{\mathrm{T}}\nabla\varphi$ является положительно-определённой во всех точках. Положим

$$\Gamma_{lkj} = \frac{1}{2}(\partial_j C_{lk} + \partial_l C_{jk} - \partial_k C_{lj}), \qquad \Gamma^k_{ij} = (\boldsymbol{C}^{-1})_{kl}\Gamma_{ilj},$$

Покажите, что тогда выполняются следующие *условия согласованности*

$$\partial_l\Gamma^l_{ik} - \partial_k\Gamma^l_{il} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{ml} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{mk} = 0, \qquad 1 \leqslant i,\ j,\ k,\ l \leqslant n.$$

Замечания. В дифференциальной геометрии функции Γ_{ikj} и Γ^k_{ij} носят название *символов Кристоффеля соответственно первого и второго рода* для многообразия Ω с *метрическим тензором* $\boldsymbol{C}$, а приведённые выше соотношения означают обращение в нуль *тензора кривизны Римана—Кристоффеля* для этого многообразия (см., например, Choquet-Bruhat, Dewitt-Morette & Dillard-Bleick [1977, p. 303]).

Полезный обзор представлений ортогональных матриц дан в работе Guo [1981] (см. также приведённую там библиографию). Эти результаты можно использовать для вывода уравнений совместности, которым удовлетворяет тензор $\boldsymbol{C}$ (см. Signorini [1943], Shamina [1974], Guo [1963]).

(2) Обратно, пусть Ω — ограниченное односвязное открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и задано дважды непрерывно дифференцируемое тензорное поле $\boldsymbol{C}$: $\Omega \to \mathbb{S}^n_> \subset \mathbb{M}^n$, которое удовлетворяет приведённым выше уравнениям совместности. Докажите наличие векторного поля $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^3(\Omega; \mathbb{R}^n)$, такого что $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}$ в Ω (это поле определено с точностью до композиции с отображениями вида $\boldsymbol{\vartheta}(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}ox$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n$; см. теорему 1.8-2).

Замечания. Доказательство существования „глобального“ решения $\boldsymbol{\varphi}$ принадлежит Сьярле и Лорану (см. Ciarlet & Laurent [1987]). В работах по дифференциальной геометрии обычно даётся лишь „локальное“ решение этой задачи в качестве приложения теории вполне интегрируемых систем Пфаффа (см., например, Malliavin [1972, p. 133]). Основная трудность состоит именно в получении „глобального“ решения, т. е. заданного на всём множестве Ω. См. также Pietraszkiewicz [1982], Pietraszkiewicz & Badur [1983a, 1983b] и Deturck & Yang [1983] в связи с задачей о нахождении отображений, которым отвечает тензор деформации с заданными собственными значениями.

К этому кругу вопросов относится также задача о получении различных *априорных* оценок деформаций через соответствующие тензоры деформации; см., в особенности, John [1961, 1972, 1975] и Kohn [1982].

ГЛАВА 2
УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Введение

Тело, которое занимает деформированную конфигурацию $\overline{\Omega}^\varphi$ и к которому приложены объёмные силы во внутренних точках, т. е. в точках Ω^φ, а на части $\Gamma_1^\varphi = \varphi(\Gamma_1)$ его границы приложены поверхностные силы (§ 2.1), находится в состоянии статического равновесия, если выполнен фундаментальный *принцип Эйлера — Коши для напряжений* (§ 2.2). Эта аксиома является основой механики сплошных сред. Из неё вытекает знаменитая *теорема Коши* (теорема 2.3-1), согласно которой существует поле симметрических тензоров $\boldsymbol{T}^\varphi\colon \overline{\Omega}^\varphi \to \mathbb{S}^3$, такое что

$$\begin{cases} -\operatorname{\mathbf{div}}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi = \boldsymbol{f}^\varphi \text{ в } \Omega^\varphi, \\ \boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi \text{ на } \Gamma_1^\varphi, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{f}^\varphi$ и $\boldsymbol{g}^\varphi$ — плотности приложенных объёмных и поверхностных сил соответственно, $\boldsymbol{n}^\varphi$ — единичный вектор внешней нормали к Γ_1^φ. Эти соотношения носят название *уравнений равновесия в деформированной конфигурации* (§ 2.4), а тензор $\boldsymbol{T}^\varphi$ называется *тензором напряжений Коши.*

Замечательным свойством этих уравнений является их „*дивергентная структура*“, которая позволяет записать их в вариационной форме (теорема 2.4-1); однако у этих уравнений тот недостаток, что они записаны в переменных $x^\varphi = \varphi(x)$, которые сами являются *неизвестными.* Чтобы упростить ситуацию и в то же время сохранить дивергентную структуру уравнений, применим к полю тензоров напряжений Коши *преобразование Пиолы* $\boldsymbol{T}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{M}^3$, которое определяется равенством $\boldsymbol{T}(x) = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) \operatorname{\mathbf{Cof}} \nabla\varphi(x)$ (§ 2.5). Таким образом устанавливается (теорема 2.6-1), что уравнения равновесия в $\overline{\Omega}^\varphi$ эквивалентны следующим *уравнениям равновесия в отсчётной конфигурации* $\overline{\Omega}$:

$$\begin{cases} -\operatorname{\mathbf{div}} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \\ \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \text{ на } \Gamma_1, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ_1 и поля́ $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{g}\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ связаны с полями $\boldsymbol{f}^\varphi\colon \Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$ и $\boldsymbol{g}^\varphi\colon \Gamma_1^\varphi \to \mathbb{R}^3$

простыми соотношениями $\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{f}^{\varphi}\,\mathrm{d}x^{\varphi}$, $\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{g}^{\varphi}\,\mathrm{d}a^{\varphi}$. Поскольку эти уравнения также имеют дивергентную структуру, их можно записать в вариационной форме, которая известна как *принцип виртуальной работы* (теорема 2.6-1). Этот принцип играет первостепенную роль в теории гиперупругих материалов (гл. 4), являясь её исходным положением, а также в асимптотической теории двумерных моделей пластин (том II).

Тензор $\boldsymbol{T}$ носит название *первого тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа*. Мы также введём *второй тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа* $\boldsymbol{\Sigma} = \nabla\varphi^{-1}\boldsymbol{T}$, который является симметрическим и возникает естественным образом при записи определяющих уравнений для упругих материалов (гл. 3).

В заключительной части главы будут приведены различные примеры встречающихся на практике приложенных сил (§ 2.7), которым соответствуют плотности $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ вида

$$\boldsymbol{f}(x) = \hat{\boldsymbol{f}}(x, \varphi(x)), \quad x \in \Omega, \quad \text{и} \quad \boldsymbol{g}(x) = \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\varphi(x)), \quad x \in \Gamma_1,$$

при заданиых отображениях $\hat{\boldsymbol{f}}$ и $\hat{\boldsymbol{g}}$.

2.1. Приложенные силы

Пусть $\bar{\Omega}^{\varphi}$ — деформированная конфигурация, соответствующая произвольной деформации φ. Предполагается, что на тело, занимающее конфигурацию $\bar{\Omega}^{\varphi}$, действуют **приложенные силы** двух типов:

(i) **приложенные объёмные силы,** задаваемые векторным полем

$$\boldsymbol{f}^{\varphi}\colon\ \Omega^{\varphi} \to \mathbb{R}^3;$$

это поле называется **плотностью приложенных объёмных сил** *на единицу объёма деформированной конфигурации*;

(ii) **приложенные поверхностные силы,** задаваемые векторным полем

$$\boldsymbol{g}^{\varphi}\colon\ \Gamma_1^{\varphi} \to \mathbb{R}^3;$$

в точках $\mathrm{d}a^{\varphi}$-измеримого подмножества Γ_1^{φ} границы

$$\Gamma^{\varphi} := \partial\Omega^{\varphi};$$

это поле называется **плотностью приложеиных поверхностиых сил** *на единицу площади границы деформированной конфигурации.*

Пусть $\rho^{\varphi}\colon\ \Omega^{\varphi} \to \mathbb{R}^3$ обозначает *плотность массы в деформированной конфигурации,* так что масса любого $\mathrm{d}x^{\varphi}$-измеримого подмножества A^φ в $\bar{\Omega}^\varphi$ задаётся интегралом $\int_{A^\varphi} \rho^\varphi(x^\varphi)\,dx^\varphi$. Мы предполагаем, что

$$\rho^\varphi(x^\varphi) > 0 \quad \text{для всех} \quad x^\varphi \in \Omega^\varphi.$$

Приложенные объёмные силы можно эквивалентным образом задать с помощью *плотности* $\boldsymbol{b}^\varphi$: $\Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$ *на единицу массы в деформированной конфигурации*. Плотности $\boldsymbol{f}^\varphi$ и $\boldsymbol{b}^\varphi$ связаны уравнением

$$\boldsymbol{f}^\varphi = \rho^\varphi \boldsymbol{b}^\varphi.$$

Приложенные силы описывают воздействие на тело со стороны внешнего мира: элементарная сила $\boldsymbol{f}^\varphi(x^\varphi)\,dx^\varphi$ действует

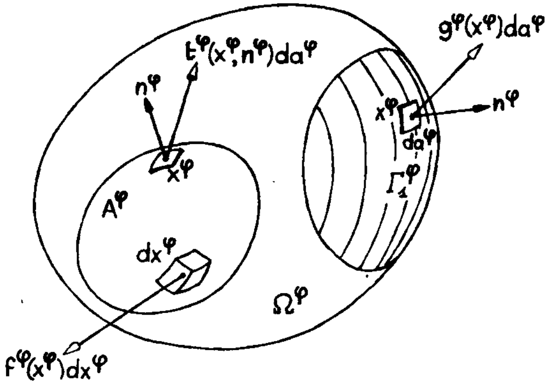

Рис. 2.1-1. Приложенные силы бывают двух типов: объёмные силы $\boldsymbol{f}^\varphi(x^\varphi)\,dx^\varphi$, $x^\varphi \in \Omega^\varphi$, и поверхностные силы $\boldsymbol{g}^\varphi(x^\varphi)\,da^\varphi$, $x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi$. Согласно принципу напряжений Эйлера — Коши, помимо этих сил существуют элементарные поверхностные силы $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, n^\varphi)\,da^\varphi$, $x^\varphi \in \partial A^\varphi$, действующие в точках границы ∂A^φ любой подобласти A^φ деформированной конфигурации $\bar{\Omega}^\varphi$, где n^φ — единичный вектор внешней нормали к ∂A^φ.

на элемент объёма dx^φ в каждой точке x^φ деформированной конфигурации (рис. 2.1-1). Примером таких сил служит *поле гравитации*, для которого $\boldsymbol{f}^\varphi(x^\varphi) = -g\rho^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{e}_3$ при всех $x^\varphi \in \Omega^\varphi$ (предполагается, что базисный вектор $\boldsymbol{e}_3$ „вертикален“ и ориентирован „вверх“), где g — гравитационная постоянная. Еще один пример — это действие электростатических сил.

Подобным же образом, элементарная сила $\boldsymbol{g}^\varphi(x^\varphi)\,da^\varphi$ приложена к элементу площади da^φ в каждой точке x^φ множества Γ_1^φ на границе деформированной конфигурации (рис. 2.1-1). Такие силы обычно представляют воздействие другого тела (природа которого не уточняется) на часть Γ_1^φ границы $\partial\Omega^\varphi$. Конкретные примеры приложенных сил даны в § 2.7.

Замечание. Во избежание лишних обозначений один и тот же символ на рисунках может соответствовать различным значениям какой-либо величины; так, на рис. 2.1-1 x^φ обозначает три различные точки, а da^φ и $\boldsymbol{n}^\varphi$ — два различных элемента площади и два вектора нормали, соответственно. ■

Из наших рассмотрений не исключаются поверхностные приложенные силы, которые заданы лишь „частично"; например, на множестве Γ_1^φ может быть задана лишь нормальная компонента $\boldsymbol{g}^\varphi(x^\varphi)\cdot\boldsymbol{n}^\varphi$. Такого рода „промежуточные" случаи обсуждаются в § 5.2. Однако на данном этапе, чтобы упростить изложение, мы рассматриваем только „крайние" случаи, когда плотность $\boldsymbol{g}^\varphi$ либо полностью известна на Γ_1^φ, либо остаётся вовсе незаданной, как это имеет место в точках дополнения к Γ_1^φ,

$$\Gamma_0^\varphi := \Gamma^\varphi - \Gamma_1^\varphi,$$

на границе деформированной конфигурации. В такой ситуации, как будет показано ниже, для получения корректной постановки следует задавать саму деформацию на соответствующем подмножестве $\Gamma_0 := \varphi^{-1}(\Gamma_0^\varphi)$ границы отсчётной конфигурации.

2.2. Принцип напряжений Эйлера — Коши

Изучение статических задач механики сплошных сред основано на следующей аксиоме, которая восходит к фундаментальным результатам Эйлера (Euler [1757, 1771]) и Коши (Cauchy [1823, 1827]). Краткие исторические сведения по этому вопросу приведены в подстрочном примечании ([1]) из работы Truesdell & Toupin [1960, § 200].

Через $\wedge$ обозначается внешнее произведение в $\mathbb{R}^3$.

Аксиома 2.2-1 (принцип напряжений Эйлера—Коши). *Пусть тело занимает деформированную конфигурацию* $\overline{\Omega}^\varphi$ *и на него действуют приложенные силы, которые заданы плотностями* $\boldsymbol{f}^\varphi\colon \Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$ и $\boldsymbol{g}^\varphi\colon \Gamma_1^\varphi \to \mathbb{R}^3$. *Тогда существует векторное поле*

$$\boxed{\boldsymbol{t}^\varphi\colon \overline{\Omega}^\varphi \times S_1 \to \mathbb{R}^3, \text{ где } S_1 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3;\ |\boldsymbol{v}| = 1\},}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

(a) *Для любой подобласти* A^φ *в* $\bar{\Omega}^\varphi$ *и любой точки* $x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi \cap \partial A^\varphi$, *в которой существует единичный вектор внешней нормали* $\boldsymbol{n}^\varphi$ *к* $\Gamma_1^\varphi \cap \partial A^\varphi$, *выполняется равенство*

$$\boxed{\boldsymbol{t}^\varphi (x^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi) = \boldsymbol{g}^\varphi (x^\varphi).}$$

(b) **Аксиома баланса сил:** *для любой подобласти* A^φ *в* $\bar{\Omega}^\varphi$

$$\boxed{\int_{A^\varphi} \boldsymbol{f}^\varphi (x^\varphi)\, \mathrm{d}x^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} \boldsymbol{t}^\varphi (x^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)\, \mathrm{d}a^\varphi = \boldsymbol{o},}$$

где $\boldsymbol{n}^\varphi$ — *единичный вектор внешней нормали к* ∂A^φ.

(c) **Аксиома баланса моментов:** *для любой подобласти* A^φ *в* $\bar{\Omega}^\varphi$

$$\boxed{\int_{A^\varphi} \boldsymbol{ox}^\varphi \wedge \boldsymbol{f}^\varphi (x^\varphi)\, \mathrm{d}x^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} \boldsymbol{ox}^\varphi \wedge \boldsymbol{t}^\varphi (x^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)\, \mathrm{d}a^\varphi = \boldsymbol{o}.}$$ ■

Таким образом, во-первых, принцип напряжений утверждает *существование* элементарных **поверхностных сил** $\boldsymbol{t}^\varphi (x^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)\, \mathrm{d}a^\varphi$ на границах всех подобластей деформированной конфигурации (рис. 2.1-1).

Во-вторых, принцип напряжений утверждает, что в точке x^φ границы ∂A^φ подобласти A^φ зависимость элементарной поверхностной силы от подобласти A^φ определяется *лишь* вектором нормали $\boldsymbol{n}^\varphi$ к ∂A^φ в точке x^φ. Хотя априори в равной степени допустимо предположить, что элементарная поверхностная сила в точке x^φ зависит также от других геометрических свойств подобласти A^φ, например от кривизны ∂A^φ в точке x^φ и т. п., тем не менее, как показал Нолл (Noll [1959]), удаётся построить общую теорию поверхностных сил, которая позволяет строго обосновать такое исключение зависимости от дополнительных геометрических характеристик (см. также Gurtin & Williams [1967], Ziemer [1983]).

В-третьих, принцип напряжений утверждает, что любая подобласть A^φ деформированной конфигурации $\bar{\Omega}^\varphi$ (включая и саму $\bar{\Omega}^\varphi$) находится в *состоянии статического равновесия*, которое понимается как *эквивалентность нулю торсора, задавае-*

мого элементарными поверхностными силами $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)\,\mathrm{d}a^\varphi$, $x^\varphi \in \partial A^\varphi$, *где* $\boldsymbol{n}^\varphi$ *— нормаль к* ∂A^φ *в точке* x^φ, *и объёмными силами* $\boldsymbol{f}^\varphi(x^\varphi)\,\mathrm{d}x^\varphi$, $x^\varphi \in A^\varphi$. Последнее означает обращение в нуль соответствующей результирующей силы (аксиома балаиса сил), а также обращение в нуль результирующего момента (аксиома баланса моментов) относительно начала координат (и, значит, относительно любой другой точки, ввиду хорошо известного свойства торсоров).

Таким образом, принцип напряжений служит математическим выражением (в виде аксиомы) интуитивного представления, что любая подобласть A^φ в $\bar{\Omega}^\varphi$, на которую действуют заданные объёмные силы $\boldsymbol{f}^\varphi(x^\varphi)\,\mathrm{d}x^\varphi$, $x^\varphi \in A^\varphi$, и к которой, возможно, приложены заданные поверхностные силы $\boldsymbol{g}^\varphi(x^\varphi)\,\mathrm{d}a^\varphi$ в точках $x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi \cap \partial A^\varphi$, где существует вектор внешней нормали к $\Gamma_1^\varphi \cap \partial A^\varphi$, может пребывать в статическом равновесии благодаря дополнительному воздействию элементарных поверхностных сил указанного конкретного вида, которые действуют на остальную часть границы ∂A^φ.

Замечание. Гёртин (Gurtin [1981a, 1981b]) использует термин „*система сил*“ применительно к множеству, состоящему из приложенных объёмных сил, соответствующих векторному полю $\boldsymbol{f}^\varphi\colon \Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$, и поверхностных сил, соответствующих векторному полю $\boldsymbol{t}^\varphi\colon \bar{\Omega}^\varphi \times S_1 \to \mathbb{R}^3$. ■

Пусть x^φ — точка деформированной конфигурации. Вектор $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)$ называется **вектором напряжений Коши** *на ориентированном элементе поверхности с нормалью* $\boldsymbol{n}^\varphi$ или *плотностью поверхностной силы на единицу площади в деформированной конфигурации.*

2.3. Теорема Коши; тензор напряжений Коши

Выведем теперь из принципа напряжений некоторые фундаментальные следствия. Первое из них принадлежит Коши (Cauchy [1823, 1827a]) и является *одним из важнейших результатов в механике сплошных сред.* **Оно устанавливает, что** *зависимость вектора напряжений Коши* $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n})$ *от второго аргумента* $\boldsymbol{n} \in S_1$ *является линейной*, т. е. в каждой точке $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$ существует тензор $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) \in \mathbb{M}^3$, для которого $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\boldsymbol{n}$ при всех $\boldsymbol{n} \in S_1$. Второе следствие утверждает, что в каждой точке $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$ тензор $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)$ *симмéтричен*, а третье, также полученное Коши (Cauchy [1827b, 1828]), состоит в том, что тензорное поле $\boldsymbol{T}^\varphi\colon \Omega^\varphi \to \mathbb{M}^3$ связано с векторными полями $\boldsymbol{f}^\varphi\colon \Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$ и $\boldsymbol{g}^\varphi\colon \Gamma_1^\varphi \to \mathbb{R}^3$ посредством *дифференциального уравнения с частными производными в* Ω^φ и *граничного условия на* Γ_1^φ соответственно.

Теорема 2.3-1 (теорема Коши). *Предположим, что плотность* $\boldsymbol{f}^\varphi\colon \overline{\Omega}^\varphi \to \mathbb{R}^3$ *приложенных объёмных сил непрерывна, а поле векторов напряжений Коши*

$$\boldsymbol{t}^\varphi\colon (x^\varphi,\ \boldsymbol{n}) \in \overline{\Omega}^\varphi \times S_1 \to \boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi,\ \boldsymbol{n}) \in \mathbb{R}^3$$

непрерывно дифференцируемо по переменной $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$ *при каждом* $\boldsymbol{n} \in S_1$ *и непрерывно по переменной* $\boldsymbol{n} \in S_1$ *при каждом* $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$. *Тогда из аксиом баланса сил и моментов вытекает существование непрерывно дифференцируемого тензорного поля*

$$\boldsymbol{T}^\varphi\colon x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi \to \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) \in \mathbb{M}^3,$$

такого что вектор напряжений Коши удовлетворяет равенству

$$\boxed{\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi,\ \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{n} \text{ для всех } x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi,\quad \boldsymbol{n} \in S_1,}$$

и, кроме того,

$$\boxed{-\,\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) = \boldsymbol{f}^\varphi(x^\varphi) \text{ для всех } x^\varphi \in \Omega^\varphi,}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)^{\mathrm{T}} \text{ для всех } x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi,}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi(x^\varphi) \text{ для всех } x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi,}$$

где $\boldsymbol{n}^\varphi$ — *единичный вектор внешней нормали к* Γ_1^φ.

Доказательство. Пусть x^φ — фиксированная точка в Ω^φ. Поскольку множество Ω^φ открыто, мы можем взять в качестве подобласти $\overline{\Omega}^\varphi$ тетраэдр T с вершиной в x^φ, у которого три грани параллельны координатным плоскостям, а четвёртая грань F обладает вектором нормали $\boldsymbol{n} = n_i \boldsymbol{e}_i$ с компонентами $n_i > 0$ (рис. 2.3-1). Пусть через v_i, в соответствии с рисунком, обозначены вершины тетраэдра, отличные от x^φ, а F_i — грань, противоположная вершине v_i, так что $\operatorname{area} F_i = n_i \operatorname{area} F$. Согласно аксиоме баланса сил для тетраэдра T имеем

$$\int_T \boldsymbol{f}^\varphi(y^\varphi)\,\mathrm{d}y^\varphi + \int_{\partial T} \boldsymbol{t}^\varphi(y^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)\,\mathrm{d}a^\varphi = \boldsymbol{o}.$$

Распишем это соотношение по компонентам, учитывая равенства

$$\boldsymbol{f}^\varphi(y^\varphi) = f_i^\varphi(y^\varphi)\,\boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{t}^\varphi(y^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi) = t_i^\varphi(y^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)\,\boldsymbol{e}_i,$$

и воспользуемся теоремой о среднем значении для интегралов (она применима к интегралам по ∂T, так как по предположению четыре функции $y^\varphi \in \partial T \to \boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)$ и $y^\varphi \in \partial T \to \boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{e})$

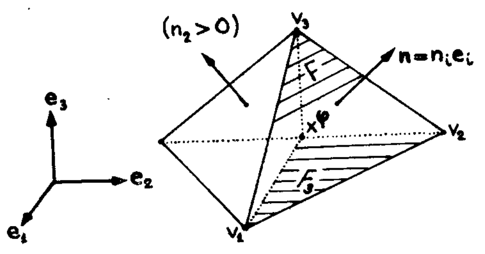

Рис. 2.3-1. Знаменитое доказательство теоремы Коши, данное самим Коши

непрерывны). Тогда мы можем заключить, что для любого индекса i

$$|t_i^\varphi(y_i, \boldsymbol{n}) + t_i^\varphi(y_{ij}, -\boldsymbol{e}_j)\,n_j|\,\mathrm{area}\,F \leqslant \sup_{y \in T} |f_i^\varphi(y)|\,\mathrm{vol}\,\boldsymbol{T}$$

для соответствующих точек $y_i \in F$, $y_{ij} \in F_j$. При фиксированном векторе $\boldsymbol{n}$ устремим вершины v_i к x^φ и снова воспользуемся непрерывностью векторного поля $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n})$ по первому аргументу x^φ, а также равенством $\mathrm{vol}\,T = c(\boldsymbol{n})\,(\mathrm{area}\,F)^{3/2}$ и ограниченностью плотности приложенных объёмных сил. Таким образом получаем

$$\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}) = -n_j \boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, -\boldsymbol{e}_j).$$

Устремляя в этом равенстве $\boldsymbol{n}$ к одному из базисных векторов $\boldsymbol{e}_j$ и пользуясь непрерывностью $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n})$ по второму аргументу, получим

$$\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{e}_j) = -\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, -\boldsymbol{e}_j).$$

Отсюда следует, что соотношение

$$\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}) = n_j \boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{e}_j)$$

выполняется, даже если некоторые (или все) компоненты вектора $\boldsymbol{n}$ отрицательны (на рис. 2.3-1 показан случай $n_2 < 0$), и, значит, оно выполняется для всех точек $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$ и всех единичных векторов $\boldsymbol{n} \in S_1$. Определим теперь функции T_{ij}^φ: $\overline{\Omega}^\varphi \to \mathbb{R}$, полагая

$$\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{e}_j) = T_{ij}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{e}_i \text{ для всех } x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi,$$

так что $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}) = T_{ij}^\varphi(x^\varphi)\,n_j\boldsymbol{e}_i$ и потому

$$t_i^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}) = T_{ij}^\varphi(x^\varphi)\,n_j \text{ для всех } x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi, \quad \boldsymbol{n} \in S_1.$$

Таким образом, если определить тензор $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)$ соотношением

$$\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) := (T_{ij}^\varphi(x^\varphi)),$$

то уравнения $t_i^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}) = T_{ij}^\varphi(x^\varphi)\,n_j$ оказываются эквивалентными следующему уравнению в векторной форме:

$$\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{n}.$$

Сделанные выше предположения непрерывности по обоим аргументам x^φ и $\boldsymbol{n}$ показывают, что это соотношение, установленное для точек x^φ открытого множества Ω^φ и векторов $\boldsymbol{n} = n_i\boldsymbol{e}_i \in S_1$ с $|\boldsymbol{n}| \neq 0$, на самом деле справедливо для всех $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$ и всех $\boldsymbol{n} \in S_1$. Равенства $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{e}_j) = T_{ij}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{e}_i$ также свидетельствуют о том, что гладкость поля $\boldsymbol{T}^\varphi$: $\overline{\Omega}^\varphi \to \mathbb{M}^3$ в точности совпадает с гладкостью вектора напряжений Коши по первому аргументу $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$.

Из теоремы о дивергенции тензорных полей (§ 1.7), применённой к тензору $\boldsymbol{T}^\varphi$, вытекает, что поверхностные интегралы, входящие в аксиому баланса сил, можно преобразовать в пространственные интегралы, а именно, для произвольно заданной подобласти $A^\varphi \subset \Omega^\varphi$ имеем

$$\int_{\partial A^\varphi} \boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \mathrm{n}^\varphi)\,\mathrm{d}a^\varphi = \int_{\partial A^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{n}^\varphi\,\mathrm{d}a^\varphi = \int_{A^\varphi} \mathbf{div}^\varphi\,\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\mathrm{d}x^\varphi.$$

На основании аксиомы баланса сил заключаем, что

$$\int_{A^\varphi} \{\mathbf{div}^\varphi\,\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) + \boldsymbol{f}^\varphi(x^\varphi)\}\,\mathrm{d}x^\varphi = \boldsymbol{o}$$

для любой подобласти $A^\varphi \subset \Omega^\varphi$. Поэтому

$$\mathbf{div}^\varphi\,\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) + \boldsymbol{f}^\varphi(x^\varphi) = \boldsymbol{o} \text{ для всех } x^\varphi \in \Omega^\varphi.$$

Поверхностные интегралы, входящие в аксиому баланса моментов, также могут быть преобразованы в пространственные интегралы при помощи формулы Грина. Для $i \neq j$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial A^\varphi} \{x_j^\varphi t_i^\varphi (x^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi) - x_i^\varphi t_j^\varphi (x^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)\} \, da^\varphi \\
&\qquad = \int_{\partial A^\varphi} \{x_j^\varphi T_{ik}^\varphi (x^\varphi) - x_i^\varphi T_{jk}^\varphi (x^\varphi)\} \, n_k^\varphi \, da^\varphi \\
&\qquad = \int_{A^\varphi} \partial_k^\varphi \{x_j^\varphi T_{ik}^\varphi (x^\varphi) - x_i^\varphi T_{jk}^\varphi (x^\varphi)\} \, dx^\varphi \\
&\qquad = \int_{A^\varphi} \{\delta_{jk} T_{ik}^\varphi (x^\varphi) - \delta_{ik} T_{jk}^\varphi (x^\varphi)\} \, dx^\varphi \\
&\qquad + \int_{A^\varphi} \{x_j^\varphi \partial_k^\varphi T_{ik}^\varphi (x^\varphi) - x_i^\varphi \partial_k^\varphi T_{jk}^\varphi (x^\varphi)\} \, dx^\varphi \\
&\qquad = \int_{A^\varphi} \{T_{ij}^\varphi (x^\varphi) - T_{ji}^\varphi (x^\varphi)\} \, dx^\varphi \\
&\qquad - \int_{A^\varphi} \{x_j^\varphi f_i^\varphi (x^\varphi) - x_i^\varphi f_j^\varphi (x^\varphi)\} \, dx^\varphi;
\end{aligned}
$$

при получении последнего равенства мы учли только что выведенное уравнение $\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi (x^\varphi) + \boldsymbol{f}^\varphi (x^\varphi) = \boldsymbol{o}$. Таким образом, из аксиомы баланса моментов вытекает, что

$$\int_{A^\varphi} \{T_{ij}^\varphi (x^\varphi) - T_{ji}^\varphi (x^\varphi)\} \, dx^\varphi = 0$$

для всех подобластей A^φ из $\bar{\Omega}^\varphi$. Следовательно, $\boldsymbol{T}^\varphi (x^\varphi) = \boldsymbol{T}^\varphi (x^\varphi)^{\mathrm{T}}$ для всех $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$.

Краевое условие $\boldsymbol{T}^\varphi (x^\varphi) \boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi (x^\varphi)$ для всех $x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi$ является прямым следствием определения вектора напряжений Коши и формулы, связывающей его с тензором $\boldsymbol{T}^\varphi$. ■

Замечания. (1) Для справедливости рассуждений, применённых при доказательстве существования тензорного поля $\boldsymbol{T}^\varphi$: $\bar{\Omega}^\varphi \to \mathbb{M}^3$ и при выводе соотношения $\boldsymbol{t}^\varphi (x^\varphi, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}^\varphi (x^\varphi) \boldsymbol{n}$, достаточно предполагать непрерывность вектора напряжений Коши отдельно по каждой из переменных x^φ и $\boldsymbol{n}$ (тогда отображение $\boldsymbol{T}^\varphi$: $\bar{\Omega}^\varphi \to \mathbb{M}^3$ будет лишь непрерывным). Эти результаты, а также уравнение $\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) + \boldsymbol{f}^\varphi(x^\varphi) = \boldsymbol{o}$ суть следствия одной лишь аксиомы баланса сил.

(2) С другой стороны, приведённое здесь доказательство симметричности тензора $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)$ (которая априори никак не связана с требованием гладкости), предполагает непрерывную дифференцируемость тензора $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n})$ по переменной x^φ. Читатель, которого интересуют эти вопросы, может обратиться к одной из основных работ по теореме Коши Gurtin & Martins [1976], где показано, каким образом можно существенно ослабить предположения гладкости в теореме 2.3-1. См. также Gurtin, Mizel & Williams [1968], Martins [1976]. ■

Симметрическая матрица $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)$ носит название **тензора напряжений Коши** в точке $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$. Полезно обратить внимание на интерпретацию его элементов $T_{ij}^\varphi(x^\varphi)$: поскольку $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{e}_j) = T_{ij}^\varphi(x^\varphi)\boldsymbol{e}_i$, *то элементы j-й строки тензора $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)$ задают компоненты вектора напряжений Коши $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n})$ в точке x^φ при* $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_j$ (см. рис. 2.3-2, где приведён случай $j = 1$). В свою очередь, три вектора $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{e}_j)$ полностью определяют вектор напряжений Коши $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n})$ для произвольного вектора $\boldsymbol{n} = n_i\boldsymbol{e}_i \in S_1$, так как

$$\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}) = n_j\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{e}_j).$$

Это наблюдение используется на рисунках (см., в частности, рис. 2.3-3), где вектор напряжений Коши часто изображается на трёх взаимно перпендикулярных гранях прямоугольного параллелепипеда.

Особый интерес представляют следующие три тензора напряжений Коши частного вида. Они изображены на рис. 2.3-3, причём в каждом случае тензор Коши предполагается постоянным в рассматриваемой области. Первый тензор имеет вид

$$\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) = -\pi\boldsymbol{I}, \qquad \pi \in \mathbb{R},$$

и определяет *равномерное сжатие* (*растяжение*); вещественное число π называется *коэффициентом равномерного сжатия* (*растяжения*). Соответствующий вектор напряжений Коши

$$\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}) = -\pi\boldsymbol{n}$$

всегда ортогонален элементу поверхности, его длина постоянна, он направлен внутрь, если $\pi > 0$, и вовне, если $\pi < 0$ (рис. 2.3-3(a)). Второй тензор задаётся равенством

$$\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) = \tau\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^3, \quad |\boldsymbol{e}| = 1.$$

Такой тензор напряжений Коши определяет *чистое растяжение* (при $\tau > 0$) или *чистое сжатие* (при $\tau < 0$) в направлении $\boldsymbol{e}$. Параметр τ называется *коэффициентом одноосного растяжения* (*сжатия*). В этом случае вектор напряжений Коши

$$\boldsymbol{t}^{\varphi}(x^{\varphi}, \boldsymbol{n}) = -\tau(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{e}$$

всегда коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}$ и направлен вовне (при $\tau > 0$) или внутрь (при $\tau < 0$) на гранях с нормалями $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}$;

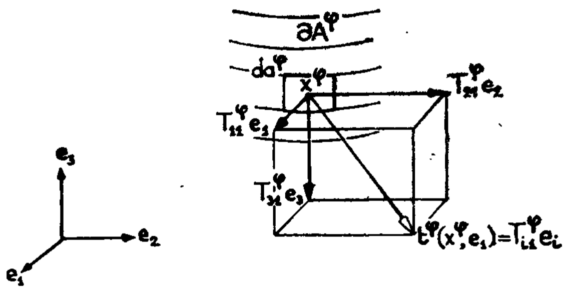

Рис. 2.3-2. Интерпретация элементов T^{φ}_{i1} тензора напряжений Коши $\boldsymbol{T}^{\varphi} = (T^{\varphi}_{ij})$.

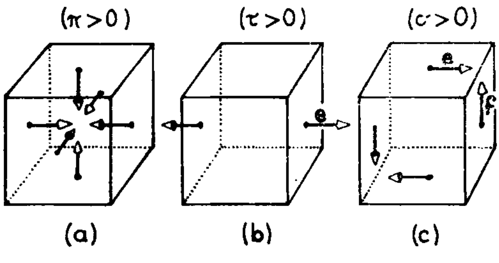

Рис. 2.3-3. Три важных частных случая тензора напряжений Коши: (a) равномерное сжатие (растяжение) $\boldsymbol{T}^{\varphi} = -\pi\boldsymbol{I}$; (b) чистое растяжение (сжатие) в направлении $\boldsymbol{e}$: $\boldsymbol{T}^{\varphi} = \tau\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}$; (c) чистый сдвиг по направлениям $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{T}^{\varphi} = \sigma(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{e})$.

на гранях с нормалью, ортогональной вектору e, он равен нулю (рис. 2.3-3(b)).

Третий тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi}) = \sigma(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{e}), \quad \sigma\in\mathbb{R}, \quad \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^3, \quad |\boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{f}| = 1, \quad \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f} = 0,$$

и отвечает *чистому сдвигу по направлениям* $\boldsymbol{e}$ *и* $\boldsymbol{f}$. Параметр σ называется *сдвиговым напряжением*. Соответствующий вектор напряжений Коши имеет вид

$$\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}) = \sigma\{(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{e} + (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{f}\}.$$

Тензоры напряжений Коши в рассмотренных трёх частных случаях задаются матрицами

$$\begin{pmatrix} -\pi & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно (здесь для определённости мы положили $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_2$).

2.4. Уравнения равновесия и принцип виртуальной работы в деформированной конфигурации

Как показано в теореме 2.3-1, из аксиом баланса сил и моментов вытекает, что тензор напряжений Коши $\boldsymbol{T}^\varphi\colon \overline{\Omega}^\varphi \to \mathbb{S}^3$ является решением некоторой *краевой задачи*, записанной посредством *переменных Эйлера* x^φ **в деформированной** конфигурации и включающей в себя дифференциальное уравнение с частными производными $-\,\mathbf{div}^\varphi\,\boldsymbol{T}^\varphi = \boldsymbol{f}^\varphi$ в Ω^φ и граничное условие $\boldsymbol{T}^\varphi\boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi$ на Γ_1^φ. Эта краевая задача обладает одним замечательным свойством, а именно, благодаря своему „дивергентному виду" она, как мы сейчас покажем, может быть записана в *вариационной форме* (обоснование такой терминологии будет дано в § 2.6). В дальнейшем через $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_i v_i$ обозначается скалярное произведение векторов эвклидова пространства, через $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}B_{ij} = \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ — скалярное произведение матриц, а через $\nabla^\varphi\boldsymbol{\vartheta}^\varphi$ — матрица с элементами $(\partial_j^\varphi/\vartheta_i^\varphi)$.

Теорема 2.4-1. *Краевая задача*

$$\boxed{\begin{aligned} -\,\mathbf{div}^\varphi\,\boldsymbol{T}^\varphi &= \boldsymbol{f}^\varphi \ \text{в}\ \Omega^\varphi, \\ \boldsymbol{T}^\varphi\boldsymbol{n}^\varphi &= \boldsymbol{g}^\varphi \ \text{на}\ \Gamma_1^\varphi \end{aligned}}$$

формально эквивалентна следующим вариационным уравнениям:

$$\boxed{\int_{\Omega^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi\colon \nabla^\varphi\boldsymbol{\vartheta}^\varphi\, dx^\varphi = \int_{\Omega^\varphi} \boldsymbol{f}^\varphi\cdot\boldsymbol{\vartheta}^\varphi\, dx^\varphi + \int_{\Gamma_1^\varphi} \boldsymbol{g}^\varphi\cdot\boldsymbol{\vartheta}^\varphi\, dx^\varphi,}$$

которые справедливы для всех достаточно гладких векторных полей $\vartheta^\varphi\colon \Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$, *таких что*

$$\boxed{\vartheta^\varphi = o \text{ на } \Gamma_0^\varphi := \Gamma^\varphi - \Gamma_1^\varphi.}$$

Доказательство. Эквивалентность краевой задачи вариационным уравнениям устанавливается применением ещё одной *формулы Грина*, которая непосредственно вытекает из основной формулы Грина (см. § 1.6) и имеет вид

$$\int_{\Omega^\varphi} (\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi) \cdot \vartheta^\varphi \, dx^\varphi = -\int_{\Omega^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi\colon \nabla^\varphi \vartheta^\varphi \, dx^\varphi + \int_{\Gamma^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi \cdot \vartheta^\varphi \, da^\varphi$$

для любых достаточно гладких полей $\boldsymbol{T}^\varphi\colon \overline{\Omega}^\varphi \to \mathbb{M}^3$ *и* $\vartheta^\varphi\colon \overline{\Omega}^\varphi \to \mathbb{R}^3$ *тензоров и векторов соответственно.* Таким образом, интегрируя по множеству Ω^φ скалярное произведение уравнения $\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi + \boldsymbol{f}^\varphi = o$ и векторного поля ϑ^φ, равного нулю на Γ_0^φ, получаем

$$\begin{aligned} o &= \int_{\Omega^\varphi} (\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi + \boldsymbol{f}^\varphi) \cdot \vartheta^\varphi \, dx^\varphi \\ &= \int_{\Omega^\varphi} \{-\boldsymbol{T}^\varphi\colon \nabla^\varphi \vartheta^\varphi + \boldsymbol{f}^\varphi \cdot \vartheta^\varphi\} \, dx^\varphi + \int_{\Gamma_1^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi \cdot \vartheta^\varphi \, da^\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда следуют вариационные уравнения, так как $\boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi$ на Γ_1^φ. Докажем обратное. Предположим, что выполнены указанные в формулировке теоремы вариационные уравнения. Они принимают вид

$$\int_{\Omega^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi : \nabla^\varphi \vartheta^\varphi \, dx^\varphi = \int_{\Omega^\varphi} \boldsymbol{f}^\varphi \cdot \vartheta^\varphi \, dx^\varphi, \text{ если } \vartheta^\varphi = o \text{ на } \Gamma^\varphi.$$

Отсюда заключаем, что $\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi + \boldsymbol{f}^\varphi = o$ в Ω^φ, поскольку в силу приведённой выше формулы Грина

$$\int_{\Omega^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi : \nabla^\varphi \vartheta^\varphi \, dx^\varphi = -\int_{\Omega^\varphi} (\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi) \cdot \vartheta^\varphi \, dx^\varphi, \text{ если } \vartheta^\varphi = o \text{ на } \Gamma^\varphi.$$

Учитывая полученное уравнение с частными производными в Ω^φ и пользуясь той же формулой Грина, мы можем привести вариационные уравнения к виду

$$\int_{\Gamma_1^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi \cdot \boldsymbol{\vartheta}^\varphi \, da^\varphi = \int_{\Gamma_1^\varphi} \boldsymbol{g}^\varphi \cdot \boldsymbol{\vartheta}^\varphi \, da^\varphi.$$

Это означает, что $\boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi$ на Γ_1^φ. ■

Соотношения

$$\boxed{\begin{aligned} &-\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi = \boldsymbol{f}^\varphi \ \text{в}\ \Omega^\varphi,\\ &\boldsymbol{T}^\varphi = (\boldsymbol{T}^\varphi)^{\mathrm{T}} \ \text{в}\ \Omega^\varphi,\\ &\boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi \ \text{на}\ \Gamma_1^\varphi \end{aligned}}$$

носят название **уравнений равновесия в деформированной конфигурации**, а соответствующие им вариационные уравнения из теоремы 2.4-1 выражают **принцип виртуальной работы в деформированной конфигурации.**

Замечание. Как в аксиоме баланса сил, так и в формулировке принципа виртуальной работы требования гладкости, налагаемые на поле $\boldsymbol{T}^\varphi$: $\bar{\Omega}^\varphi \to \mathbb{S}^3$, весьма умеренные: достаточно, чтобы все интегралы имели смысл. Напротив, *необходимы существенные дополнительные предположения о гладкости, чтобы написать уравнения равновесия и придать смысл величине* $\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi$. Эти уравнения используются только как средство перехода от аксиомы баланса сил к принципу виртуальной работы, и потому естественно возникает вопрос, нельзя ли при этом переходе вовсе обойтись без уравнений равновесия и соответствующим образом понизить требования гладкости. Исследования в этом направлении проведены в работе Antman & Osborn [1979], где показано, что принцип виртуальной работы может быть выведен непосредственно из аксиомы баланса сил. Подход Антмана и Осборна основан на выявлении своего рода эквивалентности между справедливостью аксиомы баланса сил «для всех подобластей A^φ» и выполнением принципа виртуальной работы «для всех отображений $\boldsymbol{\vartheta}^\varphi$». Такая эквивалентность устанавливается с помощью соответствия между специальными классами подобластей (кубами и их образами при изоморфизмах, липшицевых в обе стороны) и специальными классами вариаций (по существу, кусочно-линейными функциями). Метод доказательства в общем тот же, что и при выводе формул Грина в теории интегрирования. ■

2.5. Тензоры напряжений Пиолы—Кирхгофа

Наша конечная цель — определить поле деформации и поле тензоров напряжений Коши, возникающие в теле, которое подвергается действию заданной системы приложенных сил. Для решения этой задачи не удаётся эффективно воспользоваться уравнениями равновесия в деформированной конфигурации, поскольку они записаны в *переменных Эйлера* $x^\varphi = \varphi(x)$, *которые сами относятся к числу неизвестных*. Чтобы избежать трудностей такого рода, перейдём в уравнениях равновесия к *переменным Лагранжа* x, соотнесённым с отсчётной конфигурацией, которая считается заданной раз и навсегда. Точнее, преобразуем левые части $\mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi$ и $\boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi$, а также правые части $\boldsymbol{f}^\varphi$ и $\boldsymbol{g}^\varphi$ уравнений равновесия для $\bar{\Omega}^\varphi$ в величины того же типа, определённые на $\bar{\Omega}$.

Преобразование левых частей основано на свойствах преобразования Пиолы, которое было определено и изучено в § 1.7. Напомним, что преобразованием Пиолы тензорного поля $\boldsymbol{T}^\varphi$: $\bar{\Omega}^\varphi = \varphi(\bar{\Omega}) \to \mathbb{M}^3$ называется тензорное поле $\boldsymbol{T}$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{M}^3$ вида

$$\boxed{\boldsymbol{T}(x) = (\det \nabla\varphi(x))\, \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\, \nabla\varphi(x)^{-\mathrm{T}}, \qquad x^\varphi = \varphi(x).}$$

Применяя это преобразование к тензору напряжений Коши $\boldsymbol{T}^\varphi$, получим тензор $\boldsymbol{T}$, который называется **первым тензором напряжений Пиолы—Кирхгофа.** Как показано в теореме 1.7-1, главное преимущество этого преобразования заключается в том, что оно приводит к особенно простому соотношению между дивергенциями обоих тензоров, а именно:

$$\boxed{\mathbf{div}\, \boldsymbol{T}(x) = (\det \nabla\varphi(x))\, \mathbf{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi), \qquad x^\varphi = \varphi(x).}$$

В силу этого, уравнения равновесия на деформированной конфигурации перейдут (см. теорему 2.6-1) в уравнения на отсчётной конфигурации, которые также имеют „*дивергентную структуру*“. Последнее свойство, в свою очередь, позволяет записать полученные уравнения в *вариационной форме*, как это было показано в теореме 2.4-1 для уравнений равновесия в деформированной конфигурации и будет показано в теореме 2.6-1 для уравнений в отсчётной конфигурации.

Подобным образом можно преобразовать вектор напряжений Коши $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi) = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\boldsymbol{n}^\varphi$ в такой вектор $\boldsymbol{t}(x, \boldsymbol{n})$, что имеет место соотношение

$$\boxed{\boldsymbol{t}(x,\ \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{n},}$$

где $\boldsymbol{T}(x)$ — первый тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}^\varphi$ — векторы нормали в точках x и $x^\varphi = \varphi(x)$ границ соответствующих подобластей A и $A^\varphi = \varphi(A)$. Отметим, что при этом не может возникнуть неоднозначности, поскольку вектор нормали $\boldsymbol{n}^\varphi$ в точке $x^\varphi = \varphi(x)$ один и тот же для *всех* подобластей с границей, проходящей через точку x, и вектором нормали $\boldsymbol{n}$ в этой точке. В силу установленного теоремой 1.7-1 соотношения $\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{n}^\varphi\,\mathrm{d}a^\varphi$ вектор $\boldsymbol{t}(x, \boldsymbol{n})$ можно задать равенством

$$\boxed{\boldsymbol{t}(x,\ \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi,\ \boldsymbol{n}^\varphi)\,\mathrm{d}a^\varphi.}$$

Так как по теореме Коши $\boldsymbol{t}^\varphi(x^\varphi,\ \boldsymbol{n}^\varphi) = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{n}^\varphi$, то отсюда следует искомое соотношение $\boldsymbol{t}(x, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{n}$.

Вектор $\boldsymbol{t}(x, \boldsymbol{n})$ называется **первым вектором напряжений Пиолы—Кирхгофа** *на ориентированном элементе поверхности с нормалью* $\boldsymbol{n}$ *в точке* x *отсчётной конфигурации*. Векторное поле $\boldsymbol{t}$: $\Omega \times S_1 \to \mathbb{R}^3$, определённое указанным образом, характеризует *плотность поверхностных сил на единицу площади в отсчётной конфигурации*.

Несмотря на свойство симметричности тензора напряжений Коши $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)$ (теорема 2.3-1), тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа $\boldsymbol{T}(x)$, вообще говоря, не является симметрическим; для него имеет место соотношение

$$\boldsymbol{T}(x)^{\mathrm{T}} = \nabla\varphi(x)^{-1}\,\boldsymbol{T}(x)\,\nabla\varphi(x)^{-\mathrm{T}}.$$

Тем не менее полезно ввести в отсчётной конфигурации некоторый симметрический тензор напряжений, главным образом потому, что это позволяет, как мы увидим в следующей главе, *привести определяющее уравнение в отсчётной конфигурации к более простому виду* (см., в особенности, теорему 3.6-2). А именно, определим **второй тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа** $\boldsymbol{\Sigma}(x)$, полагая

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}(x) = \nabla\varphi(x)^{-1}\,\boldsymbol{T}(x) = (\det\nabla\varphi(x))\,\nabla\varphi(x)^{-1}\,\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\nabla\varphi(x)^{-\mathrm{T}},\\ x^\varphi = \varphi(x).\end{aligned}}$$

Замечания. (1) На самом деле вопрос о симметричности матрицы $T(x)$ некорректен, потому что у неё как у тензора один индекс относится к отсчётной конфигурации, а другой — к деформированной. Эта ситуация исчерпывающим образом обсуждается в книге Marsden & Hughes [1983].

(2) Сведения исторического характера о тензорах напряжений Пиолы—Кирхгофа приведены в работе Truesdell & Toupin [1960, § 210].

Оба тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа $T(x)$ *и* $\Sigma(x)$ *зависят от деформации* φ. Эта зависимость изучается в гл. 3. Она обусловлена, во-первых, структурой преобразования Пиолы и, во-вторых, зависимостью от φ тензора напряжений Коши.

2.6. Уравнения равновесия и принцип виртуальной работы в отсчётной конфигурации

После преобразования левых частей уравнений равновесия в деформированной конфигурации остаётся преобразовать соответствующие плотности приложенных сил. Первый шаг состоит в том, что плотности $f^\varphi\colon \Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$ приложенных объёмных сил на единицу объёма деформированной конфигурации мы ставим в соответствие векторное поле $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, такое что

$$\boxed{f(x)\,dx = f^\varphi(x^\varphi)\,dx^\varphi \quad \text{для всех } x^\varphi = \varphi(x) \in \Omega^\varphi,}$$

где dx и dx^φ — соответствующие элементы объёма. Поскольку $dx^\varphi = \det \nabla\varphi(x)\,dx$, отсюда получаем, что

$$\boxed{f(x) = (\det \nabla\varphi(x))\,f^\varphi(x^\varphi), \qquad x^\varphi = \varphi(x),}$$

и, значит, *зависимость вектора* $f(x)$ *от деформации* φ определяется, во-первых, коэффициентом $\det \nabla\varphi(x)$ и, во-вторых, возможной зависимостью от деформации φ плотности f^φ. Заметим, что в соотношение, связывающее f и f^φ, входит *тот же* множитель $\det \nabla\varphi(x)$, что и в соотношение, связывающее векторы $\operatorname{div} T(x)$ и $\operatorname{div}^\varphi T^\varphi(x^\varphi)$. Этот факт будет использован при доказательстве теоремы 2.6-1.

Векторное поле $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ характеризует **плотность приложенных объёмных сил** *на единицу объёма в отсчётной конфигурации*; вектор $f(x)$ вводится таким образом, чтобы вектор $f(x)\,dx$ был равен элементу объёмной силы $f^\varphi(x^\varphi)\,dx^\varphi$, действующей на элемент объёма dx^φ в точке $x^\varphi = \varphi(x)$ (рис. 2.6-1).

Пусть ρ: $\Omega \to \mathbb{R}$ — *плотность массы в отсчётной конфигурации.* Математически выражая тот факт, что элементарные объёмы dx и $dx^\varphi = \det \nabla\varphi(x)\,dx$ имеют одну и ту же массу, находим, что плотности массы $\rho: \Omega \to \mathbb{R}$ и $\rho^\varphi: \Omega^\varphi \to \mathbb{R}$ связаны уравненнем

$$\rho(x) = \det \nabla\varphi(x)\,\rho^\varphi(x^\varphi), \qquad x^\varphi = \varphi(x).$$

Отметим, что это равенство, даже если не принимать во внимание требование сохранения ориентации, показывает, что яко-

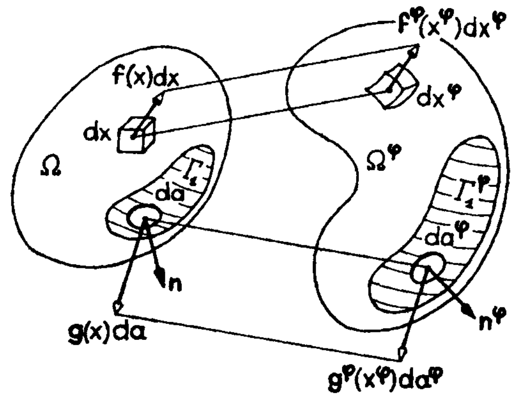

Рис. 2.6-1. Плотности приложенных объёмных и поверхностных сил в деформированной и отсчётной конфигурациях.

биан $\det \nabla\varphi(x)$ не должен обращаться в нуль при реальных деформациях, поскольку плотность массы всегда положительна, по крайней мере макроскопически.

Таким образом, если мы определим *плотность* $\boldsymbol{b}$: $\Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$ *приложенных объёмных сил на единицу массы в отсчётной конфигурации*, полагая

$$\boldsymbol{f}(x) = \rho(x)\,\boldsymbol{b}(x) \text{ для всех } x \in \Omega,$$

то получим следующее соотношение для плотностей приложенных объёмных сил на единицу массы:

$$\boldsymbol{b}(x) = \boldsymbol{b}^\varphi(x^\varphi), \qquad x^\varphi = \varphi(x).$$

Второй шаг состоит в переходе от краевого условия $\boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi$ на $\Gamma_1^\varphi = \varphi(\Gamma_1)$ к аналогичному краевому условию на Γ_1. Именно с этой целью и был введен *первый вектор напряжений Пиолы—Кирхгофа* в § 2.5. Плотности $\boldsymbol{g}^\varphi$: $\Gamma_1^\varphi \to \mathbb{R}^3$ приложенных поверхностных сил на единицу площади в деформированной конфигурации соотнесём векторное поле $\boldsymbol{g}\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$, заданное равенством

$$\boxed{\boldsymbol{g}(x)\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{g}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\mathrm{d}a^{\varphi} \quad \text{для всех } x^{\varphi} = \varphi(x) \in \Gamma_1^{\varphi},}$$

где $\mathrm{d}a$ и $\mathrm{d}a^{\varphi}$ — соответствующие элементы площади. В силу теоремы 1.7-1 вектор $\boldsymbol{g}$ задаётся равенством

$$\boxed{\boldsymbol{g}(x) = \det\nabla\varphi(x)\,|\nabla\varphi(x)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}|\,\boldsymbol{g}^{\varphi}(x^{\varphi}).}$$

Отметим, что *зависимость вектора* $\boldsymbol{g}(x)$ *от деформации* φ определяется двумя факторами: во-первых, формулой, связывающей элементы площади в обеих конфигурациях, и, во-вторых, возможной зависимостью плотности $\boldsymbol{g}^{\varphi}$ от деформации φ. Векторное поле $\boldsymbol{g}\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ характеризует **плотность приложенных поверхностных сил** *на единицу площади в отсчётной конфигурации*; оно вводится таким образом, чтобы вектор $\boldsymbol{g}(x)\,\mathrm{d}a$ был равен элементу поверхностной силы $\boldsymbol{g}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\mathrm{d}a^{\varphi}$, приложенной к соответствующему элементу площади $\mathrm{d}a^{\varphi}$ в точке $x^{\varphi} = \varphi(x)$ (рис. 2.6-1).

Теперь мы можем установить аналог теоремы 2.4-1 для отсчётной конфигурации.

Теорема 2.6-1. *Первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа* $\boldsymbol{T}(x) = (\det\nabla\varphi(x))\,\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\nabla\varphi(x)^{-\mathrm{T}}$ *удовлетворяет следующим уравнениям в отсчётной конфигурации* $\bar{\Omega}$:

$$\boxed{\begin{aligned} &-\mathbf{div}\,\boldsymbol{T}(x) = \boldsymbol{f}(x), && x \in \Omega,\\ &\nabla\varphi(x)\,\boldsymbol{T}(x)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}(x)\,\nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}}, && x \in \Omega,\\ &\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}(x), && x \in \Gamma_1,\end{aligned}}$$

где $\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{f}^{\varphi}\,\mathrm{d}x^{\varphi}$, $\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{g}^{\varphi}\,\mathrm{d}a^{\varphi}$. *Система, состоящая из первого и третьего уравнений, эквивалентна уравнениям в вариационной форме*

$$\boxed{\int_{\Omega} \boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}a,}$$

которые справедливы для всех достаточно гладких векторных полей $\boldsymbol{\vartheta}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, *таких что*

$$\boxed{\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma_0 := \Gamma - \Gamma_1.}$$

Доказательство. Первое уравнение вытекает из равенств $-\operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi = \boldsymbol{f}^\varphi$ в Ω^φ, $\operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi = (\det \nabla\varphi) \operatorname{div} \boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{f} = (\det \nabla\varphi) \boldsymbol{f}^\varphi$; второе следует из определения тензора $\boldsymbol{T}$ и симметричности тензора $\boldsymbol{T}^\varphi$; третье получается из равенств $\boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi$, $\boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi \, \mathrm{d}a^\varphi = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}a$ и $\boldsymbol{g}^\varphi \, \mathrm{d}a^\varphi = \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}a$. Эквивалентность вариационным уравнениям устанавливается аналогично тому, как это было сделано в теореме 2.4-1. ■

Эту теорему можно также сформулировать в терминах второго тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа:

Теорема 2.6-2. *Второй тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа* $\Sigma(x) = (\det \nabla\varphi(x)) \nabla\varphi(x)^{-1} \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) \nabla\varphi(x)^{-\mathrm{T}}$ *удовлетворяет следующим уравнениям в отсчётной конфигурации* $\bar{\Omega}$:

$$\boxed{\begin{aligned} &-\operatorname{div}(\nabla\varphi(x)\Sigma(x)) = \boldsymbol{f}(x), \quad && x \in \bar{\Omega}, \\ &\Sigma(x) = \Sigma(x)^{\mathrm{T}}, \quad && x \in \Omega, \\ &\nabla\varphi(x)\Sigma(x)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}(x), \quad && x \in \Gamma_1. \end{aligned}}$$

Система, состоящая из первого и третьего уравнений, эквивалентна уравнениям в вариационной форме

$$\boxed{\int_\Omega \nabla\varphi\Sigma : \nabla\boldsymbol{\vartheta} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \, \mathrm{d}x = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \, \mathrm{d}a,}$$

которые справедливы для всех достаточно гладких отображений $\boldsymbol{\vartheta}: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, *таких что*

$$\boxed{\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma_0 := \Gamma - \Gamma_1.} \qquad ■$$

Уравнения, которым удовлетворяют в Ω и на Γ_1 оба тензора напряжений, носят название **уравнений равновесия в отсчётной конфигурации**, а соответствующие уравнения в вариационной форме выражают **принцип виртуальной работы в отсчётной конфигурации.** Уравнение на Γ_1 называется **граничным условием на напряжения.**

Как уже было сказано в § 2.1, к уравнениям равновесия в отсчётной конфигурации будет впоследствии добавлено **граничное условие на положения**, имеющее вид

$$\varphi = \varphi_0 \text{ на } \Gamma_0,$$

где φ_0: $\Gamma_0 \to \mathbb{R}^3$ — заданное отображение. Поэтому мы можем рассматривать каждое векторное поле $\boldsymbol{\vartheta}$: $\Omega \to \mathbb{R}^3$, входящее в формулировку принципа виртуальной работы, как „*виртуальную*" (т. е. возможную) *вариацию деформации, совместимую с граничным условием на положения*. Точнее, введём множество

$$\Phi := \{\psi \colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3;\ \det \nabla\psi(x) > 0 \text{ в } \bar{\Omega},\ \psi = \varphi_0 \text{ на } \Gamma_0\}.$$

(На данном этапе мы не требуем инъективности векторных полей ψ: $\Omega \to \mathbb{R}^3$, хотя это условие входит в определение деформации; мы учтем его в гл. 5.) Заметим, что *касательное пространство в точке* φ *многообразия* Φ есть не что иное как

$$T_\varphi\Phi = \{\boldsymbol{\vartheta} \colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma_0\}.$$

Именно как элементы этого касательного пространства векторные поля в формулировке принципа виртуальных работ правомерно считать *вариациями*. Данное наблюдение служит также обоснованием термина «вариационный» применительно к самим уравнениям. Прилагательное „виртуальный", заимствованное из классической механики сплошных сред, отражает тот факт, что векторные поля $\boldsymbol{\vartheta} \in T_\varphi\Phi$, входящие в формулировку принципа виртуальной работы, являются по своей сути математическими объектами, не требующими физического истолкования.

Замечания. (1) Более ясная интерпретация такого рода „вариаций" с точки зрения вариационного исчисления будет дана в главах 4 и 5, где принцип виртуальной работы рассматривается как условие стационарности некоторого функционала.

(2) Введение касательного пространства может оказаться весьма полезным в более сложных ситуациях, когда на множество допустимых деформаций налагаются другие геометрические ограничения, такие как несжимаемость (см. Marsden & Hughes [1983, p. 279]).

(3) Ещё один вариант принципа виртуальной работы, в формулировку которого входят „инфинитезимальные жёсткие перемещения", предлагается в упражнении 2.2.

(4) Принятые допущения относительно регулярности плотностей приложенных сил, границы тела и т. п. можно заменить на различные более слабые предположения, при которых, тем не менее, аксиомы баланса сил и моментов, а также принцип виртуальной работы имеют смысл. По этому поводу см. Noll [1959, 1966, 1978], Gurtin & Williams [1967], Truesdell [1977], Antman & Osborn [1979]. ■

2.7. Примеры приложенных сил; консервативные силы

Приложенные силы появляются в уравнениях равновесия в отсчётной конфигурации в двух местах: поле плотности $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ входит в уравнение

$$-\operatorname{\mathbf{div}} \boldsymbol{T}(x) = \boldsymbol{f}(x), \qquad x \in \Omega,$$

а поле плотности $\boldsymbol{g}\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ — в граничное условие на напряжения

$$\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{n}(x) = \boldsymbol{g}(x), \qquad x \in \Gamma_1.$$

Напомним, что эти поля связаны с плотностями $\boldsymbol{f}^\varphi\colon \Omega^\varphi \to \mathbb{R}^3$ и $\boldsymbol{g}^\varphi\colon \Gamma_1^\varphi \to \mathbb{R}^3$ при помощи соотношений $\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{f}^\varphi\,\mathrm{d}x^\varphi$ и $\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{g}^\varphi\,\mathrm{d}a^\varphi$ соответственно.

Приложенная объёмная сила называется **замороженной нагрузкой**, если отвечающая ей плотность $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ на единицу объёма отсчётной конфигурации не зависит от конкретной рассматриваемой деформации $\boldsymbol{\varphi}$. Это условие выполнено, например, в случае *поля гравитации* (§ 2.1), когда

$$\boldsymbol{f}(x) = -g\rho(x)\,\boldsymbol{e}_3, \qquad x \in \Omega.$$

Аналогично, приложенная поверхностная сила называется **замороженной нагрузкой**, если отвечающая ей плотность $\boldsymbol{g}$ на единицу площади в отсчётной конфигурации не зависит от конкретной рассматриваемой деформации $\boldsymbol{\varphi}$. Простой пример такой силы: $\boldsymbol{g}^\varphi = \boldsymbol{o}$ на Γ_1^φ, а значит, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{o}$ на Γ_1. В этом случае часть границы тела закреплена, а её дополнение Γ_1^φ „свободно" от всех внешних воздействий („Триумфальная арка" в безветренный день).

Замечание. Некоторые авторы употребляют для сил, не являющихся замороженными нагрузками, термин *живые нагрузки*. ■

Допущение, что приложенные силы являются замороженными нагрузками, принимается ради упрощения задачи с *математической* точки зрения, поскольку тогда правые части соответствующей краевой задачи в отсчётной конфигурации становятся *известными* функциями точки $x \in \bar{\Omega}$. С другой стороны, нужно помнить, что *за исключением двух упомянутых выше случаев реальные приложенные силы редко удаётся представить в виде замороженных нагрузок; напротив, плотности* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{g}$ *оказываются зависящими не только от* $x \in \Omega$ *или* $x \in \Gamma_1$, *но и от самой деформации* $\boldsymbol{\varphi}$.

Рассмотрим один пример. Приложенная поверхностная сила называется **равномерно сжимающей нагрузкой** (или **давлением**), если её плотность $\boldsymbol{g}^{\varphi}$ в *деформированной* конфигурации имеет вид

$$\boxed{\boldsymbol{g}^{\varphi}(x^{\varphi}) = -\pi \boldsymbol{n}^{\varphi}(x^{\varphi}), \qquad x^{\varphi} \in \Gamma_1^{\varphi},}$$

где π — некоторая постоянная, называемая *давлением*; знак «минус“ показывает, что вектор $\boldsymbol{g}$ направлен внутрь области при $\pi > 0$. Отметим, что данное определение согласуется с определением тензора напряжений Коши, задающего равномерное сжатие (давление); см. § 2.3.

За исключением случая $\pi = 0$, *когда* $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{o}$, *равномерно сжимающая нагрузка не является замороженной.* Интуитивно это ясно. Действительно, представим, например, что спущенный *воздушный шар* образует отсчётную конфигурацию, а тот же шар в надутом состоянии — деформированную конфигурацию (рис. 2.7-1). Очевидно, что векторы $\boldsymbol{g}^{id}(x^{id})$ и $\boldsymbol{g}^{\varphi}(x^{\varphi})$, вообще говоря, имеют различные направления. Более веский довод можно привести, если учесть соотношение из теоремы 1.7-1, связывающее элементы площади $\mathrm{d}a$ и $\mathrm{d}a^{\varphi}$, равенство $\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{g}^{\varphi}\,\mathrm{d}a^{\varphi}$ и определение равномерно сжимающей нагрузки. Таким образом находим, что

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{g}(x) = -\pi(\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi(x))\,\boldsymbol{n}(x) = -\pi(\det\nabla\varphi(x))\,\nabla\varphi(x)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}(x),\\ x \in \Gamma_1.\end{aligned}}$$

Тогда соответствующее **граничное условие давления** принимает вид

$$\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{n}(x) = \boldsymbol{g}(x) := \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\varphi(x)), \qquad x \in \Gamma_1,$$

где отображение $\hat{\boldsymbol{g}}$: $\Gamma_1 \times \mathbb{M}_+^3 \to \mathbb{R}^3$ задаётся соотношениями

$$\hat{\boldsymbol{g}}(x, \boldsymbol{F}) = -\pi(\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{n}(x) = -\pi(\det\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}_+^3.$$

В качестве ещё одного примера рассмотрим *центробежную силу*, которая действует на тело, вращающееся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси $\boldsymbol{e}_1$ (рис. 2.7-2). *Предположим, что оси* $\boldsymbol{e}_2$ *и* $\boldsymbol{e}_3$ *также вращаются вокруг* $\boldsymbol{e}_1$ *с той же угловой скоростью.* Тогда плотность $\boldsymbol{f}^{\varphi}$ задается равенством

$$\boldsymbol{f}^{\varphi}(x^{\varphi}) = \omega^2\rho^{\varphi}(x^{\varphi})\,(x_2^{\varphi}\boldsymbol{e}_2 + x_3^{\varphi}\boldsymbol{e}_3), \qquad x^{\varphi} \in \Omega^{\varphi},$$

и, значит,

$$\boldsymbol{f}(x) = \omega^2\rho(x)\,(\varphi_2(x)\,\boldsymbol{e}_2 + \varphi_3(x)\,\boldsymbol{e}_3).$$

Следовательно, при отсутствии других объёмных сил уравнения равновесия принимают вид

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{T}(x) = \boldsymbol{f}(x) := \hat{\boldsymbol{f}}(x, \boldsymbol{\varphi}(x)), \qquad x \in \Omega,$$

где отображение $\hat{\boldsymbol{f}}: \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ определяется формулой

$$\hat{\boldsymbol{f}}(x, \eta) = \omega^2 \rho(x)(\eta_2 \boldsymbol{e}_2 + \eta_3 \boldsymbol{e}_3), \qquad x \in \Omega, \quad \eta \in \mathbb{R}^3.$$

Исходя из этих примеров, *всюду далее мы будем предполагать, что либо приложенные силы являются замороженными*

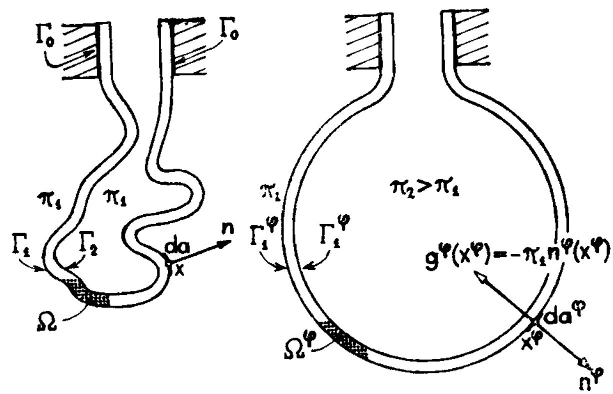

Рис. 2.7-1. Равномерно сжимающая нагрузка служит примером приложенной поверхностной силы, не являющейся замороженной нагрузкой.

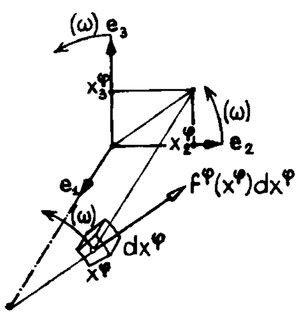

Рис. 2.7-2. Центробежная сила, действующая на тело, вращающееся с постоянной угловой скоростью, не является замороженной нагрузкой.

нагрузками, либо их плотности в отсчётной конфигурации имеют вид

$$\boxed{\boldsymbol{f}(x) = \hat{\boldsymbol{f}}(x, \boldsymbol{\varphi}(x)), \quad x \in \Omega; \qquad \boldsymbol{g}(x) = \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\boldsymbol{\varphi}(x)), \quad x \in \Gamma_1,}$$

при заданных отображениях $\hat{\boldsymbol{f}}: \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\hat{\boldsymbol{g}}: \Gamma_1 \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}^3$.

Рассмотрение сил указанного вида облегчает изложение основных идей и методов. Тем не менее, являясь достаточно общими, такие формы сил не охватывают все возможные случаи. Например, в *задаче о воздушном шаре* (упражнение 2.5) возникает приложенная поверхностная сила, которая *нелокальна*, в том смысле, что её значение в точке зависит от значений деформации в других точках; учёт взаимных гравитационных сил в деформированной конфигурации также приводит к необходимости введения плотности нелокальной приложенной объёмной силы (упражнение 2.6), и т. п.

Замечание. Приложенные силы, описываемые плотностями более общего вида, обсуждаются в работах: Noll [1978], Podio-Guidugli & Vergara-Caffarelli [1984], Spector [1980, 1982], Podio-Guidugli [1986b]. ■

В заключение приведём два важных определения. Приложенная объёмная сила $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ в отсчётной конфигурации называется **консервативной**, если интеграл

$$\int_\Omega f(x)\cdot\vartheta(x)\,dx = \int_\Omega \hat{f}(x,\ \varphi(x))\cdot\vartheta(x)\,dx,$$

входящий в формулировку принципа виртуальной работы в отсчётной конфигурации (теоремы 2.6-1 и 2.6-2), может быть записан как *производная Гато*

$$\boxed{F'(\varphi)\vartheta = \int_\Omega \hat{f}(x,\ \varphi(x))\cdot\vartheta(x)\,dx}$$

некоторого функционала F, имеющего вид

$$\boxed{F\colon \{\psi\colon \bar{\Omega}\to\mathbb{R}^3\} \to F(\psi) = \int_\Omega \hat{F}(x,\ \psi(x))\,dx.}$$

В таком случае функция $\hat{F}\colon \Omega\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ называется *потенциалом приложенной объёмной силы*. Очевидно, что *приложенная объёмная сила, являющаяся замороженной нагрузкой, консервативна, причём*

$$\hat{F}(x,\ \eta) = f(x)\cdot\eta \text{ для всех } x\in\Omega \text{ и } \eta\in\mathbb{R}^3.$$

Дадим более общее определение. Приложенная объёмная сила с плотностью вида

$$f(x) = \hat{f}(x,\ \varphi(x)) \text{ для всех } x\in\Omega,$$

где $\hat{f}\colon \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — заданное отображение, называется **консервативной**, если

$$\hat{f}(x, \eta) = \operatorname{\mathbf{grad}}_\eta \hat{F}(x, \eta) \text{ для всех } x \in \Omega \text{ и } \eta \in \mathbb{R}^3.$$

В частности, *консервативна центробежная сила, изображённая на рис. 2.7.-2* (упражнение 2.7).

Аналогично, приложенная поверхностная сила с плотностью $g\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ в отсчётной конфигурации называется **консервативной**, если интеграл

$$\int_{\Gamma_1} g(x) \cdot \vartheta(x)\, da = \int_{\Gamma_1} \hat{g}(x, \nabla\varphi(x)) \cdot \vartheta(x)\, da,$$

входящий в формулировку принципа виртуальной работы в отсчётной конфигурации, может быть записан как производная Гато

$$\boxed{G'(\varphi)\vartheta = \int_{\Gamma_1} \hat{g}(x, \nabla\varphi(x)) \cdot \vartheta(x)\, da}$$

некоторого функционала, имеющего вид

$$\boxed{G\colon \{\psi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3\} \to G(\psi) = \int_{\Gamma_1} \hat{G}(x, \psi(x), \nabla\psi(x))\, da.}$$

В этом случае функция $\hat{G}\colon \Gamma_1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ называется *потенциалом приложенной поверхностной силы*. Очевидно, что *приложенная поверхностная сила, являющаяся замороженной нагрузкой, консервативна, причём*

$$\hat{G}(x, \eta, \boldsymbol{F}) = \hat{g}(x) \cdot \eta \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma_1,\ \eta \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

Рассмотрим ещё один пример.

Теорема 2.7-1. *Пусть задано число $\pi \in \mathbb{R}$ и функционал G определён формулой*

$$G(\psi) = -\frac{\pi}{3} \int_\Gamma \{(\mathbf{Cof}\, \nabla\psi)\boldsymbol{n}\} \cdot \psi\, da$$

для всех достаточно гладких отображений $\psi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$. Тогда

$$G(\psi) = -\pi \int_\Omega \det \nabla\psi\, dx$$

и производная Гато функционала G задаётся равенством

$$G'(\varphi)\vartheta = -\pi \int_{\Gamma} \{(\mathbf{Cof}\, \nabla\varphi)\, \boldsymbol{n}\} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\, da.$$

Следовательно, равномерно сжимающая нагрузка, соответствующая граничному условию

$$\boldsymbol{T}(x)\,\boldsymbol{n}(x) = -\pi\,(\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi(x))\,\boldsymbol{n}(x), \qquad x \in \Gamma_1,$$

является консервативной поверхностной силой.

Доказательство. Пусть $\pi = -1$. Покажем сначала, что $G(\psi) = -\pi \int_{\Omega} \det \nabla\psi\, dx$. Выражая $\det \nabla\psi$ и $\mathbf{Cof}\,\nabla\psi$ с помощью тензора ориентации (ε_{ijk}) (см. § 1.1) и пользуясь тождеством Пиолы (см. доказательство теоремы 1.7-1), а также основной формулой Грина, получаем

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \det \nabla\psi\, dx &= \frac{1}{6} \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\, \partial_p\psi_i \partial_q\psi_j\, \partial_r\psi_k\, dx \\
&= \frac{1}{6} \int_{\Omega} \partial_p \{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\psi_i\, \partial_q\psi_j\, \partial_r\psi_k\}\, dx \\
&= \frac{1}{6} \int_{\Gamma} (\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\, \partial_q\psi_j\, \partial_r\psi_k)\, n_p\psi_i\, da \\
&= \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \{(\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)\,\boldsymbol{n}\} \cdot \boldsymbol{\psi}\, da.
\end{aligned}$$

Вычислим теперь производную функционала

$$G(\psi) = -\pi \int_{\Omega} \det \nabla\psi\, dx = -\pi \int_{\Omega} \iota_3(\nabla\psi)\, dx,$$

где $\iota_3(\boldsymbol{F}) = \det \boldsymbol{F}$. В § 1.2 показано, что

$$\iota_3'(\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{G} = \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F} : \boldsymbol{G},$$

для произвольных матриц $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$. Поэтому

$$G'(\varphi)\,\boldsymbol{\vartheta} = -\pi \int_{\Omega} \iota_3'(\nabla\varphi) : \nabla\boldsymbol{\vartheta}\, dx = -\pi \int_{\Omega} \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi : \nabla\boldsymbol{\vartheta}\, dx.$$

Пользуясь формулой Грина

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{H} : \nabla\boldsymbol{\vartheta}\, dx = -\int_{\Omega} \mathbf{div}\,\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\, dx + \int_{\Gamma} \boldsymbol{H}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\, da,$$

а также тождеством Пиолы, устанавливаем, что

$$G'(\varphi)\boldsymbol{\vartheta} = -\pi \int_{\Gamma} \{(\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi)\boldsymbol{n}\} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}a.$$

Теорема доказана. ■

Замечания. (1) На границе Г может существовать несколько подмножеств, к каждому из которых приложена поверхностная сила, являющаяся равномерно сжимающей нагрузкой, как на рис. 2.7-1; подробности см. в упражнении 2.8.

(2) Общее описание консервативных поверхностных сил дано в работе Podio-Guidugli [1987b]. ■

Важность рассмотрения консервативных приложенных сил станет ясна в гл. 4, где для случая гиперупругих материалов интеграл $\int_{\Omega} \boldsymbol{T}(x) : \nabla\boldsymbol{\vartheta}(x)\,\mathrm{d}x$, входящий в формулировку принципа виртуальной работы, также будет записан в виде производной Гато некоторого функционала.

Упражнения

2.1. Пусть задана система приложенных сил $\boldsymbol{f}^{\varphi}\colon \Omega^{\varphi} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{g}^{\varphi}\colon \Gamma^{\varphi} \to \mathbb{R}^3$, которая может и не удовлетворять аксиоме баланса моментов. Покажите, что существует ортогональная матрица $\boldsymbol{Q}$, такая что

$$\int_{\Omega^{\varphi}} \boldsymbol{ox}^{\varphi} \wedge \boldsymbol{Qf}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\mathrm{d}x^{\varphi} + \int_{\Gamma^{\varphi}} \boldsymbol{ox}^{\varphi} \wedge \boldsymbol{Qg}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\mathrm{d}a^{\varphi} = \boldsymbol{o},$$

$$\int_{\Omega^{\varphi}} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ox}^{\varphi} \wedge \boldsymbol{f}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\mathrm{d}x^{\varphi} + \int_{\Gamma^{\varphi}} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ox}^{\varphi} \wedge \boldsymbol{g}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\mathrm{d}a^{\varphi} = \boldsymbol{o}.$$

Этот результат носит название *теоремы Да-Сильвы* и применяется при изучении *краевой задачи с граничными условиями на напряжения* (см. § 5.1); эти вопросы обсуждаются в работах: Truesdell & Noll [1965, p. 128], Marsden & Hughes [1983, p. 466].

2.2. (1) Пусть $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ и $\boldsymbol{t}\colon \bar{\Omega} \times S_1 \to \mathbb{R}^3$ — соответственно плотность приложенной силы в отсчётной конфигурации и первый вектор напряжений Пиолы— Кирхгофа. Покажите, что

$$\int_{A} \boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial A} \boldsymbol{t}(x, \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{o},$$

$$\int_{A} \boldsymbol{\varphi}(x) \wedge \boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial A} \boldsymbol{\varphi}(x) \wedge \boldsymbol{t}(x, \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{o},$$

для всех подобластей $A \subset \bar{\Omega}$. Эти соотношения выражают *аксиомы баланса сил и моментов в отсчётной конфигурации.*

(2) Покажите, что из этих соотношений вытекает аналог теоремы Коши в отсчётной конфигурации, причём соответствующие утверждения формулируются для первого тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа.

Замечание. Преимущества такого подхода, сводящегося к построению всей теории исключительно в отсчётной конфигурации, наиболее убедительно изложены в работе Antman [1984].

(3) Покажите, что аксиомы баланса сил и моментов выполнены в том и только в том случае, когда

$$\int_A \boldsymbol{f}(x) \cdot \boldsymbol{v}(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\partial A} \boldsymbol{t}(x, \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{v}(x) \, \mathrm{d}a = 0$$

для всех подобластей $A \subset \bar{\Omega}$ и всех векторных полей $\boldsymbol{v}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ вида

$$\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{ox} \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega},$$

где $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Такие векторные поля называются *инфинитезимальными жёсткими перемещениями*, согласно терминологии, которую мы поясним в § 6.3. Это необходимое и достаточное условие в книге Gurtin [1981b, p. 100] носит название *принципа виртуальной работы.*

2.3. Является ли первый вектор напряжений Пиолы—Кирхгофа преобразованием Пиолы, введённым в упражнении 1.12, от вектора напряжений Коши?

2.4. Некоторые авторы (см., например, Washizu [1975, p. 64]) формулируют принцип виртуальной работы в отсчётной конфигурации в виде

$$\int_\Omega \boldsymbol{\Sigma} : \delta \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \boldsymbol{g} \cdot \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}a$$

для всех «вариаций» $\delta\boldsymbol{u}$. Дайте обоснование этим выражениям.

2.5. Следуя Ноллу (Noll [1978]), рассмотрим *задачу о воздушном шаре*, когда к внешней границе приложено постоянное давление, а внутренняя граница подвергается давлению, которое является заданной функцией ограниченного воздушным шаром объёма. Выпишите соответствующие краевые условия как в деформированной конфигурации, так и в отсчётной.

2.6. Напишите выражения в деформированной и отсчётной конфигурациях для плотностей следующих приложенных объёмных сил:

(1) поле гравитации (с учетом кривизны Земли);

(2) гравитационные силы взаимного притяжения внутри деформированной конфигурации;

(3) электростатические силы (как внешние, так и внутренние).

2.7. Покажите, что центробежная сила, которая действует на тело, вращающееся с постоянной угловой скоростью вокруг фиксированной оси (рис. 2.7-2), консервативна.

2.8. Это упражнение служит дополнением к теореме 2.7-1. Пусть $r \geqslant 2$, $\Gamma = \bigcup_{\rho=0}^{r} \Gamma_\rho$, причём $\Gamma_\rho \cap \Gamma_{\rho'} = \varnothing$, если $\rho \neq \rho'$, и пусть π_ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant r$, — заданные постоянные. Предположим, что существует достаточно гладкая функция π: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, для которой $\pi = \pi_\rho$ на $\bar{\Gamma}_\rho$, $1 \leqslant \rho \leqslant r$, так что из соотношения $\pi_\rho \neq \pi_{\rho'}$ следует, что $\bar{\Gamma}_\rho \cap \bar{\Gamma}_{\rho'} = \varnothing$ при $1 \leqslant \rho < \rho' \leqslant r$. Вычислив производную Гато от функционала

$$Q(\psi) = \pi \int_\Omega \det \nabla\psi \, dx + \frac{1}{3} \int_\Gamma \det \nabla\psi \left(\nabla\psi^{-T} \mathbf{grad}\, \pi\right) \cdot \psi \, da,$$

покажите, что приложенная поверхностная сила, заданная совместным действием равномерно сжимающих нагрузок

$$\boldsymbol{T}(x)\, \boldsymbol{n}(x) = -\pi_\rho \, \mathbf{Cof}\, \nabla\varphi(x)\, \boldsymbol{n}(x), \qquad x \in \Gamma_\rho, \qquad 1 \leqslant \rho \leqslant r,$$

является консервативной. Дополнительная информация по этим вопросам содержится в работах: Ball [1977], Beatty [1970], Bufler [1984], Romano [1972], Pearson [1956], Sewell [1967].

ГЛАВА 3

УПРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ И ИХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Введение

Три уравнения равновесия в отсчётной конфигурации, выполняющиеся независимо от макроскопических свойств среды (газа, жидкости или твёрдого тела), которую они призваны моделировать, составляют недоопределённую систему, поскольку имеется *девять* неизвестных функций, а именно три компоненты деформации и шесть компонент первого тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа (в силу симметричности тензора напряжений Коши). Шесть недостающих уравнений получаются из предположений относительно свойств материала, составляющего рассматриваемую среду.

В частности, мы будем изучать в этой книге материалы, поведение которых согласуется со следующим определением (§ 3.1): материал называется *упругим*, если в каждой точке $x^{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ деформированной конфигурации тензор напряжений Коши $\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})$ является функцией, зависящей лишь от x и градиента деформации $\nabla\boldsymbol{\varphi}(x)$.

Учитывая, что

$$\boldsymbol{T}(x) = \boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\varphi}(x) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\Sigma}(x) = \nabla\boldsymbol{\varphi}(x)^{-1}\,\boldsymbol{T}(x),$$

можно дать и другое, эквивалентное, определение: материал называется упругим, если каждый из тензоров напряжений Пиолы — Кирхгофа выражается как функция от x и $\nabla\boldsymbol{\varphi}(x)$ посредством *определяющего уравнения* вида

$$\boldsymbol{T}(x) = \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\boldsymbol{\varphi}(x)) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\Sigma}(x) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \nabla\boldsymbol{\varphi}(x)) \quad \text{для всех} \quad x \in \bar{\Omega},$$

где $\hat{\boldsymbol{T}}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{M}^3$ и $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{S}^3$ — *функции реакции*, характеризующие упругий материал.

Сначала будет показано (§ 3.3), что принятие общей *аксиомы независимости материала от системы отсчёта* ведёт к тому, что в каждой точке $x \in \bar{\Omega}$ функция реакции $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \cdot)$ является функцией лишь тензора деформации $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$, т. е. существует отображение $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \cdot)$, для которого

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \boldsymbol{F}) = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

Затем, пользуясь *свойством изотропности* в сочетании с *теоремой Ривлина — Эриксена о представлении* (теорема 3.6-1), мы покажем (§ 3.6), что функции реакции $\hat{\Sigma}$ можно придать ещё более простой вид, а именно: если в точке $x \in \bar{\Omega}$ материал изотропен, то отображение $\tilde{\Sigma}(x, \cdot)$ допускает представление

$$\tilde{\Sigma}(x, \boldsymbol{C}) = \gamma_0(x, \iota_C)\boldsymbol{I} + \gamma_1(x, \iota_C)\boldsymbol{C} + \gamma_2(x, \iota_C)\boldsymbol{C}^2,$$

где $\gamma_0(x, \cdot)$, $\gamma_1(x, \cdot)$, $\gamma_2(x, \cdot)$ — вещественнозначные функции главных инвариантов тензора деформации $\boldsymbol{C}$.

Предположим, что материал *однороден*, т. е. его функция реакции не зависит от $x \in \bar{\Omega}$, а также что *отсчётная конфигурация соответствует естественному состоянию*, т. е. $\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ (эти допущения вполне приемлемы для обычных упругих материалов, как например сталь, железо, алюминий). В этом случае мы приходим к весьма неожиданному результату (теоремы 3.7-1 и 3.8-1): вблизи отсчётной конфигурации (для неё $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$) функция реакции $\tilde{\Sigma}$ удовлетворяет равенству

$$\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{C}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + o(\|\boldsymbol{E}\|), \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E},$$

т. е. имеются всего *две* произвольные постоянные λ и μ в члене первой степени разложения функции реакции по «степеням» тензора деформации Грина—Сен-Венана $\boldsymbol{E}$. В § 3.8 указано, каким образом экспериментально можно найти числа λ и μ, называемые *постоянными Ламэ*, а также две другие упругие постоянные — *модуль Юнга* и *коэффициент Пуассона*.

И наконец, мы обсуждаем (§ 3.9) *материалы Сен-Венана—Кирхгофа*, для которых справедливо наиболее простое определяющее уравнение, совместимое с различными условиями, сформулированными выше:

$$\Sigma = \tilde{\Sigma}(\boldsymbol{C}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}.$$

Хотя столь простые модели обладают рядом недостатков, тем не менее их часто используют при численном анализе равновесных состояний конструкций, подчиняющихся соотношениям нелинейной теории упругости, вблизи их отсчётной конфигурации.

3.1. Упругие материалы

Уравнения равновесия в отсчётной конфигурации (записанные для какого-либо из тензоров напряжений Пиолы — Кирхгофа) входят в состав краевой задачи, которая имеет девять неизвестных функций: шесть компонент тензора напряжений (поскольку мы учли одно из соотношений $\nabla\varphi\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}\nabla\varphi^{\mathrm{T}}$ или $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}$), а также три компоненты деформации. Очевидно несоответствие общего числа неизвестных функций (девять) наличному количеству уравнений (три). Таким образом, *необходимо добавить ещё шесть уравнений.*

О незавершенном характере построенной выше математической модели свидетельствуют также и *физические* соображения. Действительно, *уравнения равновесия выполнены независимо от конкретного материала, из которого состоит рассматриваемое тело* (оно может быть твёрдым, жидким или газообразным), *однако ясно, что свойства этого материала должны быть учтены.* Очевидно, что при заданных приложенных силах (например, замороженных нагрузках) возникающие деформации отсчётной конфигурации будут разными для тела из свинца и тела из стали. Также ясно, что для одинаковой деформации двух тел, одно из которых сделано из железа, а другое — из фанеры и которые занимают одну и ту же отсчётную конфигурацию, необходимо приложить различные системы сил и при этом возникнут различные поля тензоров напряжений.

В этой книге мы ограничимся рассмотрением лишь одной категории материалов, для которых необходимые дополнительные уравнения могут быть записаны весьма просто, в соответствии с *предположением,* что *тензор напряжений Коши* $\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})$ *в каждой точке* $x^{\varphi}=\varphi(x)\in\bar{\Omega}^{\varphi}$ *полностью определяется градиентом деформации* $\nabla\varphi(x)$ *в соответствующей точке* $x\in\bar{\Omega}$. Выразим это предположение в виде математического определения.

Материал называется **упругим**, если существует отображение

$$\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}\colon\ (x,\ \boldsymbol{F})\in\bar{\Omega}\times\mathbb{M}^3_+\to\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x,\ \boldsymbol{F})\in\mathbb{S}^3,$$

называемое **функцией реакции для первого тензора напряжений Коши,** такое что для любой деформированной конфигурации, занимаемой телом из этого материала, тензор напряжений Коши $\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})$ в каждой точке $x^{\varphi}=\varphi(x)$ этой деформированной конфигурации связан с градиентом деформации $\nabla\varphi(x)$ в соответствующей точке x отсчётной конфигурации посредством уравнения

$$\boxed{\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})=\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x,\ \nabla\varphi(x)),\qquad x^{\varphi}=\varphi(x).}$$

Для данного материала это соотношение носит название **определяющего уравнения.** Напомним, что $\mathbb{M}^3_+$ — это множество всех матриц порядка 3 с положительным определителем (определитель градиента деформации >0 по определению), $\mathbb{S}^3$ — множество всех симметрических матриц порядка 3 (тензор напряжений Коши всегда симметрический; см. теорему 2.3-1).

Согласно определению, функция реакции в каждой точке упругого материала должна иметь смысл *для всех матриц* $\boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+$.

Таким образом, данное определение подразумевает, что *для любой точки* $x \in \bar{\Omega}$ *и любой матрицы* $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$ *существует деформация тела* φ, *для которой* $\nabla\varphi(x) = \boldsymbol{F}$ (при соответствующих приложенных силах и граничных условиях, которые не уточняются). Поэтому *приведённое определение исключает из рассмотрения материалы, на которые наложены внутренние связи*, т. е. материалы, для которых возможны лишь деформации, принадлежащие некоторому достаточно узкому классу (§ 5.7). Такими, например, являются *несжимаемые материалы*, определяемые в § 5.7.

Следует отметить, что в силу соотношений

$$\boldsymbol{T} = (\det \nabla\varphi)\, \boldsymbol{T}^{\varphi} \nabla\varphi^{-\mathrm{T}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \nabla\varphi(x)^{-1}\, \boldsymbol{T},$$

связывающих первый и второй тензоры напряжений Пиолы—Кирхгофа с тензором напряжений Коши, существуют отображения

$$\hat{\boldsymbol{T}}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \to \mathbb{M}^3 \quad \text{и} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \to \mathbb{S}^3,$$

заданные равенствами

$$\hat{\boldsymbol{T}}(x, \boldsymbol{F}) = (\det \boldsymbol{F})\, \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F})\, \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \boldsymbol{F}) = (\det \boldsymbol{F})\, \boldsymbol{F}^{-1}\, \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F})\, \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} \quad \text{для всех } x \in \bar{\Omega},\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}_+^3,$$

такие что

$$\boxed{\boldsymbol{T}(x) = \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x)) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\Sigma}(x) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \nabla\varphi(x)) \quad \text{для всех} \quad x \in \bar{\Omega}.}$$

Поскольку эти соотношения можно принять в качестве эквивалентных определений упругих материалов, им также даётся название **определяющих уравнений,** причём отображения $\hat{\boldsymbol{T}}$ и $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ называются **функциями реакции** соответственно **для первого и второго тензоров напряжений Пиолы—Кирхгофа.**

Материал, занимающий отсчётную конфигурацию $\bar{\Omega}$, называется **однородным,** если его функция реакции не зависит от точки $x \in \bar{\Omega}$; в противном случае говорят, что материал является **неоднородным.** Таким образом, определяющее уравнение однородного упругого материала принимает более простой вид

$$\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi}) = \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\nabla\varphi(x)) \quad \text{для всех} \quad x^{\varphi} = \varphi(x) \in \bar{\Omega}^{\varphi}.$$

Для конкретного материала свойство быть однородным связано с *некоторой заданной отсчётной конфигурацией*, и это свойство может не иметь места, если принять в качестве отсчётной конфигурации „деформированное“ состояние.

Заметим, что *вид функции реакции* $\hat{T}^{D}$ *упругого материала по определению не зависит от конкретной рассматриваемой деформации.* Поэтому в обозначении этой функции отсутствует символ „φ“. Верхний индекс „D“ указывает, что данная функция служит для вычисления некоторой величины в *деформированной* конфигурации.

Отметим также, что *по определению зависимость тензора напряжений Коши* $T^{\varphi}(x^{\varphi})$ *в точке* $x^{\varphi}=\varphi(x)$ *упругого материала от деформации осуществляется лишь через градиент деформации, т. е. через частные производные первого порядка* $\partial_j\varphi_i(x)$. Ясно, что, с одной стороны, тензор $T^{\varphi}(x^{\varphi})$ не должен быть функцией самих значений деформации $\varphi_i(x)$, иначе поле тензора напряжений Коши могло бы измениться при сдвиге деформированной конфигурации как абсолютно твёрдого тела. С другой стороны, экспериментальные данные показывают, что тензор $T^{\varphi}(x^{\varphi})$ в точке $x^{\varphi}=\varphi(x)$ может зависеть от значений градиента деформации $\nabla\varphi(y)$ во *всех* других точках $y\in\bar{\Omega}$, хотя эта зависимость очень быстро затухает с увеличением расстояния $|y-x|$. Это наблюдение приводит к *нелокальной теории упругости*, предложенной в работе Eringen [1966], где также учитывается *история* материала; см. по этому поводу: Edelen [1969a, 1969b, 1970], Eringen & Edelen [1972], Eringen [1978]. Подобным же образом, вполне допустимо считать, что тензор $T^{\varphi}(x^{\varphi})$ зависит также от *производных высших порядков* деформации φ в точке x. Например, удаётся построить теорию *упругих материалов сложности 2*, т. е. исследовать случай, когда $T^{\varphi}(x^{\varphi})$ является функцией от x, $\nabla\varphi(x)$ и всех вторых частных производных $\partial_{ij}\varphi_k(x)$; см. Murdoch [1979], Triantafyllidis & Aifantis [1986] а также предшествующие работы: Toupin [1962, 1964], Mindlin [1964, 1965], Green & Rivlin [1964].

Сто́ит ещё отметить, что функция реакции, по существу, определяется *опытным путём*, для неизбежно узкого диапазона возможных „значений“ переменной F (этот вопрос обсуждается в § 3.8), а затем используется в математических построениях в предположении, что эта функция имеет установленный вид „для всех F“. Однако при „больши́х“ деформациях наблюдаются пластичность, трещины и многие другие явления, не охватываемые данным определением упругих материалов.

Даже из приведённых кратких замечаний можно понять, почему, при безусловном принятии аксиом баланса сил и моментов в физике макроскопических явлений, определение упругого материала вызывает многочисленные сомнения. Тем не менее, данное определение позволило настолько продвинуться в изучении упругих конструкций, а его рассмотрение с математической точки зрения привело к такому количеству интереснейших задач (некоторые из них не решены до сих пор, как мы увидим далее), что теория упругости при всем её несовершенстве в качестве модели является одним из главных достнжений механики сплошных сред.

Подчеркнём, что функция реакции упругого материала априори зависит от выбранного *ортонормированного базиса, а также* от рассматриваемой *отсчётной конфигурации*, поскольку любую деформированную конфигурацию можно взять в качестве отсчётной. Зависимость от указанных двух объектов изучается в §§ 3.3 и 3.4; она характеризуется соответственно аксиомой независимости материала от системы отсчёта и свойством изотропности. В связи с этими вопросами нам потребуется следующий краткий обзор некоторых важных результатов из теории матриц.

* 3.2. Полярное разложение и сингулярные значения матриц

Все определения и результаты этого параграфа сформулированы и доказаны для матриц с вещественными элементами (только такие матрицы и рассматриваются в книге), однако их можно распространить и на случай комплексных матриц. Вначале приведем один вспомогательный результат, который важен и сам по себе.

Теорема 3.2-1. *Пусть $\boldsymbol{K}$ — симметрическая положительно-определённая матрица. Тогда существует единственная симметрическая положительно-определённая матрица $\boldsymbol{H}$, такая что $\boldsymbol{H}^2 = \boldsymbol{K}$.*

Доказательство. (i) Покажем сначала, что *если $\boldsymbol{H}$ — симметрическая положительно-определённая матрица, то любой собственный вектор матрицы $\boldsymbol{H}^2$, отвечающий собственному значению μ, является также и собственным вектором матрицы $\boldsymbol{H}$, соответствующим собственному значению $\sqrt{\mu}$, т. е.*

$$\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o} \Rightarrow \boldsymbol{H}\boldsymbol{v} = \sqrt{\mu}\boldsymbol{v}.$$

Заметим, что матрица $\boldsymbol{H}^2$ также симметрическая и положительно-определённая. Поэтому из равенства $\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$ следует, что

$$(\boldsymbol{H} + \sqrt{\mu}\boldsymbol{I})(\boldsymbol{H} - \sqrt{\mu}\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

и, значит,

$$\boldsymbol{w} := (\boldsymbol{H} - \sqrt{\mu}\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o},$$

так как в противном случае элемент $\boldsymbol{w}$ был бы собственным вектором матрицы $\boldsymbol{H}$ с собственным значением $-\sqrt{\mu} < 0$ (это отличающееся особой краткостью доказательство предложено в работе Stephenson [1980]).

(ii) Пусть K — симметрическая положительно-определённая матрица. Нетрудно установить *существование* симметрической положительно-определённой матрицы H, для которой $H^2 = K$. Действительно, пусть P — ортогональная матрица, приводящая K к диагональному виду, т. е.

$$K = P^{\mathrm{T}} D P, \quad \text{где} \quad D = \mathrm{Diag}\, \mu_i, \quad \mu_i > 0.$$

Тогда матрица

$$H = P^{\mathrm{T}}\, \mathrm{Diag}\, \sqrt{\mu_i} P$$

является симметрической положительно-определённой и $H^2 = K$. Для доказательства *единственности* воспользуемся утверждением (i). Пусть H_1 и H_2 — симметрические положительно-определённые матрицы, удовлетворяющие равенству

$$K = H_1^2 = H_2^2.$$

В силу (i) имеем

$$Kv = \mu v, \qquad v \neq o \Rightarrow H_\alpha^2 v = \mu v \Rightarrow H_\alpha v = \sqrt{\mu} v, \qquad \alpha = 1, 2.$$

Следовательно, H_1 и H_2 равны как матрицы, имеющие одинаковые собственные значения и собственные векторы. ■

Построенная матрица $H \in \mathbb{S}^n_>$ называется **квадратным корнем** из матрицы $K = H^2 \in \mathbb{S}^n_>$ и обозначается так:

$$\boxed{H = K^{1/2}.}$$

Приведём теперь результат, который будет играть ключевую роль при рассмотрении понятия независимости материала от системы отсчёта в следующем параграфе (теорема 3.3-1). Этот результат служит обобщением на случай матриц представления комплексных чисел в виде $z = |z| e^{i\vartheta}$ (другое его доказательство см. в упражнении 3.2).

Теорема 3.2-2 (о полярном разложении обратимых матриц). *Любая обратимая вещественная матрица F может быть единственным образом представлена в виде*

$$\boxed{F = RU, \quad \text{или} \quad F = VS,}$$

где $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ — ортогональные матрицы, а $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ — симметрические положительно-определённые матрицы. Кроме того,

$$\boxed{\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{1/2}, \quad \boldsymbol{V}=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^{1/2}, \quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{F}.}$$

Доказательство. (i) Предположим, что мы нашли ортогональную матрицу $\boldsymbol{R}$ и симметрическую положительио-определенную матрицу $\boldsymbol{U}$, для которых

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}.$$

Тогда, очевидно,

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^2 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}.$$

Следовательно, достаточно взять в качестве $\boldsymbol{U}$ единственную (по теореме 3.2-1) симметрическую положительно-определённую матрицу, удовлетворяющую соотношению $\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ (симметрическая матрица $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ положительна, если $\boldsymbol{F}$ обратима), и затем положить $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}$, поскольку матрица $\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}$ ортогональна:

$$(\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{I}. \ .$$

Аналогично мы можем доказать, что $\boldsymbol{F}$ единственным образом представляется в виде

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{S},$$

где $\boldsymbol{V}$ — симметрическая положительно-определённая матрица, а $\boldsymbol{S}$ ортогональна. Для этого достаточно положить

$$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^{1/2} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{F}.$$

(ii) Остается показать, что $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}$, или, эквивалентно, что

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{-1}.$$

С одной стороны, имеем

$$(\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{-1})^2=\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}^2,$$

с другой стороны — обе матрицы $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{-1}$ симметрические и положительно-определённые. Докажем последнее утверждение для матрицы $\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{-1}$. Заметим, во-первых, что

$$\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\Rightarrow\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\Rightarrow\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}},$$

и, во-вторых, что для любого вектора $\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{o}$

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})>0,$$

поскольку из равенства $\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ вытекает равенство $\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$, а матрица $\boldsymbol{U}^{-1}$ положительно-определённа. Таким образом, ещё раз пользуясь теоремой 3.2-1, заключаем, что $V = FUF^{-1}$. ■

Следует отметить, что *если применить теорему о полярном разложении к матрице* F *с* $\det F > 0$ (такой, в частности, является матрица градиента деформации), *то получим ортогональную матрицу* R *с* $\det R = 1$, *т. е. матрицу, задающую поворот.*

Замечание. Матрицу F можно также записать в виде *декартовой суммы* $F = I + E + W$, где E — симметрическая, а W — кососимметрическая ($W = -W^{\mathrm{T}}$) матрицы. Соотношения между декартовой суммой и полярным разложением, а также их приложения к деформациям изучаются в работе Martins, Olivera & Podio-Guidugli [1987]. ■

Две матрицы

$$\boxed{C := F^{\mathrm{T}}F = U^2 \quad \text{и} \quad B := FF^{\mathrm{T}} = V^2}$$

из приведённого выше доказательства играют основную роль в теореме о представлении функций реакции общего вида (теорема 3.6-2). Пока лишь отметим, что матрицы U и V ортогонально эквивалентны, так как

$$F = RU = VR \Rightarrow V = RUR^{\mathrm{T}}.$$

Поэтому *ортогонально эквивалентны также и матрицы* $B = V^2$ и $C = U^2$, *т. е.*

$$\boxed{B = RCR^{\mathrm{T}}.}$$

Следовательно, характеристические многочлены этих матриц, а значит, и их *главные инварианты* (§ 3.5) совпадают.

Рассмотрим произвольную (необязательно обратимую) матрицу F порядка n, и пусть через $\lambda_i(F^{\mathrm{T}}F)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначены n собственных значений (все они $\geqslant 0$) симметрической положительно-полуопределённой матрицы $F^{\mathrm{T}}F$. Числа

$$\boxed{v_i(F) := \{\lambda_i(F^{\mathrm{T}}F)\}^{1/2}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,}$$

называются **сингулярными числами** матрицы F. С помощью следующих двух теорем в дальнейшем (§ 4.9) будет выявлена важная роль этих чисел при построении широкого класса *поливыпуклых функций запасённой энергии.*

Теорема 3.2-3 (о сингулярном разложении матриц). *Пусть* F — *произвольная квадратная матрица с вещественными* *элементами и* $v_i(\boldsymbol{F})$ — *её сингулярные числа, занумерованные в любом порядке. Тогда найдутся ортогональные матрицы* $\boldsymbol{P}$ *и* $\boldsymbol{Q}$, *такие что*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P}\{\mathrm{Diag}\, v_i(\boldsymbol{F})\}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}.$$

Доказательство. Установим сначала, что *всякая вырожденная матрица* $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^n$ *также может быть представлена в виде произведения* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$, *где* $\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n$, $\boldsymbol{U} \in \mathbb{S}^n_{\geqslant}$. Тем самым мы распространим на случай произвольных матриц результат о существовании (но не единственности) полярного разложения, доказанный в теореме 3.2-2 для обратимых матриц.

Рассмотрим последовательность обратимых матриц $(\boldsymbol{F}_k)$, сходящуюся к $\boldsymbol{F}$. Согласно теореме 3.2-2, каждую из матриц $\boldsymbol{F}_k$ можно представить в виде $\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{R}_k\boldsymbol{U}_k$, где $\boldsymbol{R}_k \in \mathbb{O}^n$, $\boldsymbol{U}_k \in \mathbb{S}^n_{>}$. Поскольку последовательность $(\boldsymbol{R}_k)$ ограничена (спектральная норма ортогональной матрицы равна единице), у неё найдётся подпоследовательность $(\boldsymbol{R}_l)$, сходящаяся к некоторой ортогональной матрице $\boldsymbol{R}$. Следовательно, последовательность $(\boldsymbol{U}_l) = (\boldsymbol{R}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_l)$ является сходящейся и $\boldsymbol{U} = \lim_{l\to\infty} \boldsymbol{U}_l = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ — симметрическая положительно-полуопределённая матрица.

Пусть $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^n$ и $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$, где $\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n$, $\boldsymbol{U} \in \mathbb{S}^n_{\geqslant}$. Тогда существует матрица $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n$, такая что $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Q}\,\mathrm{Diag}\,\lambda_i(\boldsymbol{U})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$, и, значит,

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P}\,\mathrm{Diag}\,\lambda_i(\boldsymbol{U})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \text{ где } \boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n.$$

Поскольку $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P}\,\mathrm{Diag}\,\lambda_i^2(\boldsymbol{U})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ и $\lambda_i(\boldsymbol{U}) \geqslant 0$, мы можем заключить, что $\lambda_i(\boldsymbol{U}) = v_{\sigma(i)}(\boldsymbol{F})$ для некоторой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Чтобы нужным образом упорядочить числа $\lambda_i(\boldsymbol{U})$, введём матрицу перестановки $\boldsymbol{P}_\sigma := (\delta_{i\sigma(j)})$, которая также ортогональна. Тогда

$$\boldsymbol{P}_\sigma\,\mathrm{Diag}\,\lambda_i(\boldsymbol{U})\boldsymbol{P}_\sigma^{\mathrm{T}} = \mathrm{Diag}\,\lambda_{\sigma^{-1}(i)} = \mathrm{Diag}\,v_i(\boldsymbol{F}).$$

Теорема доказана. ■

Из теоремы о сингулярном разложении матриц следует, что матрицы $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ всегда ортогонально эквивалентны (ранее это было установлено лишь для обратимых матриц $\boldsymbol{F}$). Действительно, из соотношения $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ при $\boldsymbol{D} := \mathrm{Diag}\,v_i(\boldsymbol{F})$ получаем

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.$$

Некоторые другие свойства сингулярного разложения матриц можно найти в упражнении 3.3.

Следующий результат касается соотношения между следом произведения двух матриц и их сингулярными числами. Это соотношение будет положено в основу доказательства выпуклости некоторых функций от матриц (теорема 4.9-1). Впервые это соотношение установил фон Нейман (von Neumann [1937]), а затем другое доказательство дал Мирский (Mirsky [1959]; см. упражнение 3.4). Третье доказательство, которое мы приводим ниже, также принадлежит Мирскому (Mirsky [1975]), а в упражнении 3.5 предложен ещё один подход, основанный на множителях Лагранжа. Вопреки ожиданиям, дать „подобающее" доказательство столь простого на первый взгляд результата оказывается весьма непросто; чтобы убедиться в этом, мы настоятельно советуем читателю попытаться найти собственное доказательство.

Теорема 3.2-4. *Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — матрицы порядка n с сингулярными числами $\alpha_i := v_i(\boldsymbol{A})$ и $\beta_i := v_i(\boldsymbol{B})$, занумерованными в невозрастающем порядке*:

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n \geqslant 0.$$

Тогда

$$|\operatorname{tr} \boldsymbol{AB}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Доказательство. (i) В силу теоремы 3.2-3 существуют матрицы $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S} \in \mathbb{O}^n$, такие что

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_\alpha \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_\beta \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{D}_\alpha = \mathbf{Diag}\, \alpha_i, \quad \boldsymbol{D}_\beta = \mathbf{Diag}\, \beta_i.$$

Положим

$$\boldsymbol{M} = (m_{ij}) := \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} \in \mathbb{O}^n \quad \text{и} \quad \boldsymbol{N} = (n_{ij}) := \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n.$$

Тогда

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{AB} = \operatorname{tr} \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_\alpha \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_\beta \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = \operatorname{tr} \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_\alpha \boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_\beta = \sum_{i,\, j=1}^{n} m_{ij} n_{ij} \alpha_i \beta_j$$

и, значит,

$$|\operatorname{tr} \boldsymbol{AB}| \leqslant \sum_{i,\, j=1}^{n} |m_{ij} n_{ij}| \alpha_i \beta_j \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} |m_{ij}|^2 \alpha_i \beta_j + \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} |n_{ij}|^2 \alpha_i \beta_j.$$

(ii) Пусть

$$|m_{ij}|^2 = \mu_{ij}, \quad \zeta_n = \alpha_n \quad \text{и} \quad \zeta_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$
$$\eta_n = \beta_n \quad \text{и} \quad \eta_j = \beta_j - \beta_{j+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i - \sum_{i,\,j=1}^{n} \mu_{ij}\alpha_i\beta_j \\
&\quad = \sum_{i,\,j=1}^{n} (\delta_{ij} - \mu_{ij}) \sum_{i\leqslant k\leqslant n} \zeta_k \sum_{j\leqslant l\leqslant n} \eta_l \\
&\quad = \sum_{i,\,j=1}^{n} \zeta_i\eta_j \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} (\delta_{kl} - \mu_{kl}) \\
&\quad \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \zeta_i\eta_j \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{n} (\delta_{kl} - \mu_{kl}) \\
&\quad + \sum_{1\leqslant j< i\leqslant n} \zeta_i\eta_j \sum_{l=1}^{j} \sum_{k=1}^{n} (\delta_{kl} - \mu_{kl}) = 0,
\end{aligned}$$

поскольку все числа ζ_i, η_j, μ_{kl} неотрицательны и

$$\sum_{l=1}^{n} \mu_{kl} = 1 \text{ для всех } k, \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu_{kl} = 1 \text{ для всех } l,$$

в силу ортогональности матрицы $\boldsymbol{M}$. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{i,\,j=1}^{n} |m_{ij}|^2 \alpha_i\beta_j \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i. \qquad \blacksquare$$

Замечания. (1) Результат, установленный в части (ii) доказательства, описывает свойство *стохастических матриц*, т. е. таких матриц (μ_{ij}) порядка n, для которых

$$\mu_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} = 1 \text{ при всех } i,\ j.$$

(2) Аналогичные неравенства для сингулярных чисел вполне непрерывных линейных операторов в бесконечномерных векторных пространствах получены в книге Гохберга и Крейна [1971]. ■

3.3. Независимость материала от системы отсчёта

Согласно общему принципу, известному в физике, *всякая „наблюдаемая величина"*, *т. е. величина, отражающая сущность объекта*, как например плотность массы, вектор ускорения и т. п., *должна быть независимой от конкретного ортогонального базиса, относительно которого она вычисляется*. Здесь мы не будем формулировать этот принцип в максимальной общности, а лишь применим его к случаю упругих материалов, когда „*наблюдаемой величиной*“, *вычисляемой посредством определяющего уравнения, является вектор напряжений Коши.* Прежде всего отметим, что вместо перехода к другому ортогональному базису (такой подход рассмотрен в упражнении 3.6) мы поступаем эквивалентным образом, сохраняя базис фиксированным и поворачивая деформированную конфигурацию относительно начала координат (сдвигами начала координат можно пренебречь, поскольку они не влияют на градиент деформации). Поэтому оказывается достаточным указать соответствующий поворот векторов напряжений Коши. Итак, мы приходим к следующей аксиоме (изложение этих вопросов с более общих позиций см. в работах: Noll [1955, 1958], Truesdell & Noll [1965, §§ 19 & 19A]).

Аксиома 3.3-1 (аксиома независимости материала от системы отсчёта). *Пусть деформированная конфигурация* $\bar{\Omega}^{\psi}$ *полу-*

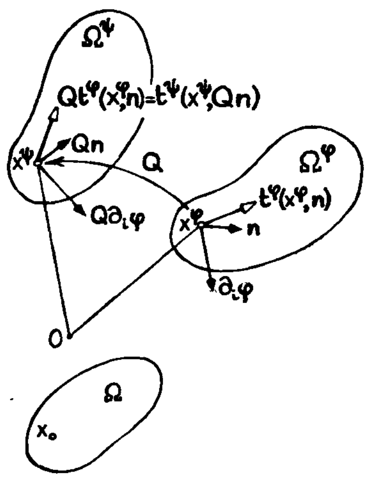

Рис. 3.3-1. Аксиома независимости материала от системы отсчёта. Повороту $Q \in \mathbb{O}^3_+$ деформированной конфигурации соответствует поворот Q вектора иапряжений Коши.

чается из деформированной конфигурации $\bar{\Omega}^{\varphi}$ *при помощи поворота, задаваемого матрицей* Q, *т. е.* $\psi = Q\varphi$ *для некоторой матрицы* $Q \in \mathbb{O}^3_+$ (рис. 3.3-1). *Тогда*

$$\boxed{t^{\psi}(x^{\psi}, Qn) = Qt^{\varphi}(x^{\varphi}, n) \quad \text{для всех} \quad x \in \bar{\Omega}, \quad n \in S_1,}$$

где $x^{\psi} = \psi(x)$, $x^{\varphi} = \varphi(x)$ *и*

$$t^{\psi} := \bar{\Omega}^{\psi} \times S_1 \to \mathbb{R}^3, \qquad t^{\varphi} := \bar{\Omega}^{\varphi} \times S_1 \to \mathbb{R}^3$$

— *векторные поля напряжений Коши в деформированных конфигурациях* $\bar{\Omega}^{\psi}$ *и* $\bar{\Omega}^{\varphi}$ *соответственно.* ■

Этот принцип также известен как *аксиома инвариантности при смене наблюдателя* или *аксиома объективности*. Естественно ожидать, и мы сейчас дадим этому обоснование, что рассматриваемая аксиома приводит к *сужению* класса отображений $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}} = (\hat{T}_{ij}^{\mathrm{D}})$, которые допустимо использовать для введения определяющих уравнений

$$\begin{cases} T_{11}^{\varphi}(x^{\varphi}) = \hat{T}_{11}^{\mathrm{D}}(x, \partial_1\varphi_1(x), \ldots, \partial_3\varphi_3(x)), \\ \vdots \\ T_{33}^{\varphi}(x^{\varphi}) = \hat{T}_{33}^{\mathrm{D}}(x, \partial_1\varphi_1(x), \ldots, \partial_3\varphi_3(x)) \end{cases}$$

произвольного упругого материала. Напомним, что $\mathbb{O}_+^3$ — множество всех *поворотов* в $\mathbb{R}^3$, т. е. множество ортогональных матриц $\boldsymbol{Q}$ порядка 3 с $\det \boldsymbol{Q} = +1$, а $\mathbb{S}_>^3$ — множество всех симметрических положительно-определённых матриц порядка 3.

Теорема 3.3-1. *Функция реакции* $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \to \mathbb{S}^3$ *для тензора напряжений Коши удовлетворяет аксиоме независимости материала от системы отсчёта в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих условий*:

(a) *для всех* $x \in \bar{\Omega}$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{QF}) = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}_+^3, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}_+^3;}$$

(b) *для всех* $x \in \bar{\Omega}$

$$\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{U})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{RU} \in \mathbb{M}_+^3,$$

где $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{RU}$ — *полярное разложение матрицы* $\boldsymbol{F}$;

(c) *существует отображение* $\tilde{\Sigma}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{S}_>^3 \to \mathbb{S}^3$, *такое что для всех* $x \in \bar{\Omega}$

$$\boxed{\hat{\Sigma}(x, \boldsymbol{F}) = \tilde{\Sigma}(x, \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}_+^3,}$$

где $\hat{\Sigma}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \to \mathbb{S}^3$ — *функция реакции для второго тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})$ и $\boldsymbol{T}^{\psi}(x^{\psi})$ — тензоры напряжений Коши в точках $x^{\varphi} \in \bar{\Omega}^{\varphi}$ и $x^{\psi} \in \bar{\Omega}^{\psi}$ соответственно, причём $\boldsymbol{ox}^{\psi}$ получается из $\boldsymbol{ox}^{\varphi}$ поворотом, задаваемым матрицей $\boldsymbol{Q}$.

Тогда из аксиомы независимости материала от системы отсчёта следует, что

$$t^{\psi}(x^{\psi}, Qn) = T^{\psi}(x^{\psi})\,Qn = Qt^{\varphi}(x^{\varphi}, n) = QT^{\varphi}(x^{\varphi})\,n.$$

Поскольку эти равенства должны выполняться для всех единичных векторов n, заключаем, что тензоры напряжений Коши $T^{\varphi}(x^{\varphi})$ и $T^{\psi}(x^{\psi})$ связаны соотношением

$$T^{\psi}(x^{\psi}) = QT^{\varphi}(x^{\varphi})\,Q^{\mathrm{T}}.$$

С другой стороны, на основании геометрической интерпретации градиента деформации (рис. 1.4-1) можно утверждать, что матрица $\nabla\varphi(x)$ переходит в матрицу $\nabla\psi(x) = Q\nabla\varphi(x)$ (это вытекает также из равенства $ox^{\psi} = Qox^{\varphi}$).

Следовательно, аксиома независимости материала от системы отсчёта выполняется тогда и только тогда, когда

$$\hat{T}^{\mathrm{D}}(x, \nabla\psi(x)) = \hat{T}^{\mathrm{D}}(x, Q\nabla\varphi(x)) = Q\hat{T}^{\mathrm{D}}(x, \nabla\varphi(x))\,Q^{\mathrm{T}}.$$

Для произвольно заданной матрицы $F \in \mathbb{M}^3_+$ существуют деформации φ с $\nabla\varphi(x) = F$, и, таким образом, эквивалентность аксиомы условию (a) доказана.

Установим теперь эквивалентность условий (a) и (b). Пусть $F = RU$ — полярное разложение матрицы $F \in \mathbb{M}^3_+$. Поскольку в этом случае $R \in \mathbb{O}^3_+$ и $U \in \mathbb{S}^3_> \subset \mathbb{M}^3_+$, то из условия (a) непосредственно вытекает (для упрощения обозначений здесь и далее в доказательстве зависимость от переменной $x \in \bar{\Omega}$ не указана), что

$$\hat{T}^{\mathrm{D}}(F) = \hat{T}^{\mathrm{D}}(RU) = R\hat{T}^{\mathrm{D}}(U)\,R^{\mathrm{T}}.$$

Обратно, пусть выполнено условие (b) и $F = RU$ — полярное разложение матрицы $F \in \mathbb{M}^3_+$. Полярное разложение матрицы QF при $Q \in \mathbb{O}^3_+$ должно иметь вид $QF = (QR)\,U$, в силу его единственности (теорема 3.2-2), и, значит, согласно условию (b), имеем

$$\hat{T}^{\mathrm{D}}(QF) = \hat{T}^{\mathrm{D}}((QR)\,U) = QR\hat{T}^{\mathrm{D}}(U)\,R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} = Q\hat{T}^{\mathrm{D}}(F)\,Q^{\mathrm{T}}.$$

Условие (b) можно записать в виде

$$\hat{T}^{\mathrm{D}}(F) = R\hat{T}^{\mathrm{D}}(U)\,R^{\mathrm{T}} = FU^{-1}\hat{T}^{\mathrm{D}}(U)\,U^{-1}F^{\mathrm{T}},$$

и, значит,

$$\hat{\Sigma}(F) = (\det F)\,F^{-1}\hat{T}^{\mathrm{D}}(F)\,F^{-\mathrm{T}} = \tilde{\Sigma}(F^{\mathrm{T}}F),$$

где

$$\tilde{\Sigma}(C) := (\det U)\,U^{-1}\,\hat{T}^{\mathrm{D}}(U)\,U^{-1},\ U = C^{1/2} \quad \text{для всех} \quad C \in \mathbb{S}^3_>.$$

Пусть выполнено условие (c). Тогда

$$\hat{T}^{D}(F) = (\det F)^{-1} F\tilde{\Sigma}(F^{T}F)F^{T} = (\det U)^{-1} RU\tilde{\Sigma}(U^{2})UR^{T}$$
$$= R\hat{T}^{D}(U)R^{T}.$$

Теорема доказана. ■

Записывая соотношение $\hat{T}^{D}(x, QF) = Q\hat{T}^{D}(x, F)Q^{T}$ в условии (a) через функции реакции $\hat{T}$ и $\hat{\Sigma}$ для первого и второго тензоров напряжений Пиолы—Кирхгофа соответственно, получим, что аксиома независимости материала от системы отсчёта эквивалентна любому из соотношений

$$\boxed{\begin{array}{llll} \hat{T}^{D}(x, QF) = Q\hat{T}^{D}(x, F) & \text{для всех} & F \in \mathbb{M}^{3}_{+}, & Q \in \mathbb{O}^{3}_{+}, \\ \hat{\Sigma}(x, QF) = \hat{\Sigma}(x, F) & \text{для всех} & F \in \mathbb{M}^{3}_{+}, & Q \in \mathbb{O}^{3}_{+}. \end{array}}$$

Естественным образом расширяя введённое понятие независимости от системы отсчёта, будем говорить, что *функции реакции $\hat{T}$ и $\hat{\Sigma}$ удовлетворяют аксиоме независимости материала от системы отсчёта* или просто что $\hat{T}$ и $\hat{\Sigma}$ **не зависят от системы отсчёта,** если эта аксиома выполнена для функции реакции $\hat{T}^{D}$, т. е. если справедливы приведённые выше равенства для $\hat{T}$ и $\hat{\Sigma}$.

Условие (b), т. е. равенство $\hat{T}^{D}(x, F) = R\hat{T}^{D}(x, U)R^{T}$, известное как *теорема Рихтера*, означает, *что функция реакции $\hat{T}^{D}$ в точке $x \in \bar{\Omega}$ полностью определяется своим сужением на множество всех симметрических положительно-определённых матриц*; иными словами, „вклад поворота R не зависит от конкретной функции реакции“. На основании эквивалентности аксиомы условию (c) аналогичное утверждение можно сделать относительно второго тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа. В этом случае *определяющее уравнение предстаёт* как *функциональная зависимость между „мерой деформации“, т. е. тензором деформации $C = \nabla\varphi^{T}\nabla\varphi$, и „мерой напряжения“, т. е. тензором напряжений Σ*. По этой причине определяющие уравнения часто называют в литературе *законами соответствия между напряжениями и деформациями* (или просто *законами напряжение—деформация*).

3.4. Изотропные упругие материалы

Из предыдущего ясно, каким образом принятие некоторой *аксиомы* (в частности, аксиомы о независимости материала от системы отсчёта) может сузить класс рассматриваемых функций реакции. Выясним теперь, как достичь ещё большего сужения указанного класса за счёт принятия некоторого *свойства*, присущего материалу. Имеется в виду свойство, называемое *изотропностью* и отвечающее интуитивному представлению, что в заданной точке реакция материала „одинакова во всех направлениях". Строгое математическое определение свойства изотропности не столь просто, как может показаться на первый взгляд. В связи с этим рассмотрим произвольную точку $x^{\varphi} = \varphi(x)$ тела, занимающего деформированную конфигурацию $\bar{\Omega}^{\varphi} = \varphi(\bar{\Omega})$. По определению упругого материала тензор напряжений Коши в точке x^{φ} имеет вид

$$\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi}) = \hat{\boldsymbol{T}}^{D}(x, \nabla\varphi(x)).$$

Осуществим поворот $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ (рис. 3.4-1) отсчётной конфигурации вокруг точки x. Тогда исходная деформированная конфигурация

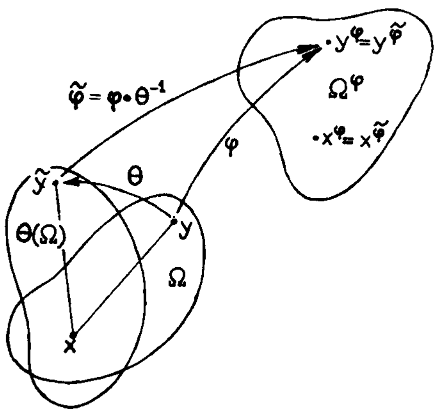

Рис. 3.4-1. Свойство изотропности в точке x отсчётной конфигурации: тензор напряжений Коши в точке x^{φ} не меняется при повороте отсчётной конфигурации, задаваемом матрицей из $\mathbb{O}^3_+$, относительно точки x.

$\varphi(\bar{\Omega})$ может быть получена как образ новой отсчётной конфигурации $\vartheta(\bar{\Omega})$, где

$$\vartheta(y) = x + \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{xy} \quad \text{для всех} \quad y \in \bar{\Omega},$$

при отображении

$$\tilde{\varphi} = \varphi \cdot \vartheta^{-1}\colon \tilde{y} \in \vartheta(\bar{\Omega}) \to \varphi(x + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x\tilde{y}}),$$

которое также является деформацией. Тензор напряжений Коши в той же точке $x^{\varphi} = x^{\tilde{\varphi}}$ теперь задаётся равенством

$$\boldsymbol{T}^{\tilde{\varphi}}(x^{\tilde{\varphi}}) = \hat{\boldsymbol{T}}^{D}(x, \nabla\tilde{\varphi}(x)) = \hat{\boldsymbol{T}}^{D}(x, \nabla\varphi(x)\boldsymbol{Q}).$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Упругий материал называется **изотропным в точке** x, если функция реакции для его тензора напряжений Коши удовлетворяет соотношению

$$\boxed{\hat{T}^{D}(x, FQ) = \hat{T}^{D}(x, F) \quad \text{при всех} \quad F \in \mathbb{M}^3_+, \quad Q \in \mathbb{O}^3_+,}$$

т. е. если тензор напряжений Коши (а значит, и вектор напряжений Коши) не меняется при любом повороте отсчётной конфигурации вокруг точки x. В противном случае, т. е. если указанное соотношение выполняется лишь для матриц Q из некоторого подмножества $\mathbb{G}_x$, строго содержащегося в группе $\mathbb{O}^3_+$, материал называется **анизотропным в точке** x.

Замечания. (1) Можно показать (см. упражнение 3.8), что множество $\mathbb{G}_x$ всегда является *подгруппой* в $\mathbb{O}^3_+$; она называется *группой симметрии* рассматриваемого материала в точке x.

(2) Подробности, касающиеся анизотропных материалов, можно найти в работах: Truesdell & Noll [1965, § 33], Ogden [1984, § 4.2.5]. ■

Упругий материал, занимающий отсчётную конфигурацию $\bar{\Omega}$, называется **изотропным**, если он изотропен в каждой точке $\bar{\Omega}$.

Отсчётную конфигурацию часто рассматривают как положение, занимаемое телом „в состоянии покоя", т. е. до того, как под действием приложенных сил в нём возникнет деформация, отличная от жёсткой, и потому *изотропность представляется свойством материала „в состоянии покоя"*. Это наблюдение, которое согласуется с интуитивным предположеием о неизотропности „сильно деформированных" тел в общем случае, также отражает тот факт, что для изотропного в точке x материала имеет место соотношение $T^{D}(x, I) = -\pi(x)I$, $\pi(x) \in \mathbb{R}$ (§ 3.6).

Если материал изотропен в точке x, то мы будем также говорить, что любая из соответствующих ему функций реакции *изотропна в точке* x. Свойство изотропности в точке x, выраженное посредством функций реакции $\hat{T}$ и $\hat{\Sigma}$ для первого и второго тензоров напряжений Пиолы—Кирхгофа, эквивалентно каждому из следующих соотношений:

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{T}(x, FQ) = \hat{T}(x, F)Q && \text{для всех} \quad F \in \mathbb{M}^3_+, \quad Q \in \mathbb{O}^3_+, \\ &\hat{\Sigma}(x, FQ) = Q^{T}\hat{\Sigma}(x, F)Q && \text{для всех} \quad F \in \mathbb{M}^3_+, \quad Q \in \mathbb{O}^3_+. \end{aligned}}$$

Охарактеризуем теперь функцию реакции упругого материала, изотропного в точке x, подобно тому как это было сделано в теореме 3.3-1 для функций реакции, удовлетворяющих аксиоме независимости от системы отсчёта.

Теорема 3.4-1. *Функция реакции* $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}\colon \bar{\Omega}\times\mathbb{M}^3_+\to\mathbb{S}^3$ *изотропна в точке* $x\in\bar{\Omega}$, *т. е. удовлетворяет соотношению*

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q})=\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F})\quad\text{для всех}\quad \boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+,\quad \boldsymbol{Q}\in\mathbb{O}^3_+,}$$

в том и только в том случае, когда существует отображение $\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x,\ \cdot)\colon \mathbb{S}^3_>\to\mathbb{S}^3$, *такое что*

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F})=\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\quad\text{для всех}\quad \boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+.}$$

Доказательство. Напомним сначала один простой результат из теории множеств (см., например, Bourbaki [1970, p. E II 20]). Пусть X, Y, Z — множества и $f\colon X\to Y$, $g\colon X\to Z$ — отображения, для которых

$$\{x,\ x'\in X\ \text{и}\ g(x)=g(x')\}\Rightarrow f(x)=f(x').$$

Тогда „f является функцией только от g“, точнее, существует отображение

$$h\colon g(X)\subset Z\to Y,$$

такое что

$$f(x)=h(g(x))\quad\text{для всех}\quad x\in X.$$

Для сокращения записи далее в доказательстве мы не будем указывать явную зависимость от x. Доказать наличие отображения $\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}$ — это значит установить импликацию

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}},\quad\text{где}\quad \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G}\in\mathbb{M}^3_+,\Rightarrow\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{F})=\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{G}).$$

Соотношение

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\Leftrightarrow(\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{F})(\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{F})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$$

показывает, что матрица $\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{F}$ ортогональна. Поскольку её определитель положителен, в силу определения изотропности имеем

$$\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{G})=\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{F}))=\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{F}).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{F})=\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\Rightarrow\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q})&=\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\\&=\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})=\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{F}).\end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Следует отметить некоторую аналогию между теоремой 3.3-1, где даётся описание функций реакции для материалов, не зависящих от системы отсчёта, и теоремой 3.4-1. В первом случае повороту подвергалась *деформированная* конфигурация, что приводило к умножению $\boldsymbol{F}$ на $\boldsymbol{Q}$ *слева* и выражению функции реакции в виде функции от произведения $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$. Во втором случае поворачивается *отсчётная* конфигурация; при этом $\boldsymbol{F}$ умножается на $\boldsymbol{Q}$ *справа* и функция реакции сводится к функции от произведения $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$.

* 3.5. Главные инварианты матрицы третьего порядка

Главные инварианты матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка 3 определяются как коэффициенты *характеристического многочлена* матрицы $\boldsymbol{A}$

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}) = -\lambda^3 + \iota_1\lambda^2 - \iota_2\lambda + \iota_3$$

и обозначаются через ι_1, ι_2, ι_3 или $\iota_1(\boldsymbol{A})$, $\iota_2(\boldsymbol{A})$, $\iota_3(\boldsymbol{A})$, если требуется подчеркнуть их зависимость от $\boldsymbol{A}$.

Из данного определения нетрудно вывести следующие соотношения (ниже λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$):

$$\boxed{\begin{aligned}
\iota_1 &= a_{ii} = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\\
\iota_2 &= \frac{1}{2}(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) = \frac{1}{2}\{(\operatorname{tr}\boldsymbol{A})^2 - \operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2\}\\
&= \operatorname{tr}\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A} = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1\\
&= \det\boldsymbol{A}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{-1}, \text{ если } \boldsymbol{A} \text{ — обратимая матрица},\\
\iota_3 &= \det\boldsymbol{A} = \frac{1}{6}\{(\operatorname{tr}\boldsymbol{A})^3 - 3\operatorname{tr}\boldsymbol{A}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2 + 2\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^3\} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.
\end{aligned}}$$

Положим

$$\iota_{\boldsymbol{A}} = (\iota_1(\boldsymbol{A}), \iota_2(\boldsymbol{A}), \iota_3(\boldsymbol{A})).$$

Таким образом, ι_A — строка, состоящая из трёх главных инвариантов матрицы $\boldsymbol{A}$.

Вообще, *инвариантом* матрицы $\boldsymbol{A}$ называется любая вещественнозначная функция $\omega(\boldsymbol{A})$, обладающая свойством

$$\omega(\boldsymbol{A}) = \omega(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \text{ для всех обратимых матриц } \boldsymbol{B}.$$

Встречавшиеся выше функции $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2$ и $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^3$ служат примерами инвариантов, которые не являются главными (ещё один пример дан в упражнении 5.10).

Напомним также **теорему Кэли—Гамильтона,** согласно которой „всякая матрица является нулём своего характеристического многочлена“, т. е.

$$-\boldsymbol{A}^3+\iota_1\boldsymbol{A}^2-\iota_2\boldsymbol{A}+\iota_3\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}.$$

Следовательно, для всех целых $p\geqslant 0$ и всех целых $p\leqslant -1$ в случае обратимости матрицы $\boldsymbol{A}$ матрица $\boldsymbol{A}^p$ может быть записана в виде

$$\boldsymbol{A}^p=\alpha_{0p}(\iota_A)\boldsymbol{I}+\alpha_{1p}(\iota_A)\boldsymbol{A}+\alpha_{2p}(\iota_A)\boldsymbol{A}^2,$$

где коэффициенты α_{0p}, α_{1p}, α_{2p} — полиномиальные функции главных инвариантов ι_1, ι_2, ι_3 при $p\geqslant 0$, а при $p<0$ эти коэффициенты — полиномиальные функции от ι_1, ι_2, ι_3, умноженные на ι_3^p.

Замечания. (1) Равенство $\iota_2=\operatorname{tr}\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{A}$ вытекает из теоремы 1.1-1.

(2) Отображения ι_1, ι_{n-1}, ι_n: $\mathbb{M}^n\to\mathbb{R}$, введённые в § 1.2, служат обобщением понятия главных инвариантов матрицы третьего порядка на случай матриц произвольного порядка n. ■

3.6. Функция реакции изотропного упругого материала

Принятие аксиомы независимости материала от системы отсчёта и одновременно с этим учёт свойства изотропности материала в точке приводят к замечательно простому виду функций реакции для изотропных упругих материалов. Это вытекает из следующей *теоремы о представлении матричнозначных функций от матриц*, которая принадлежит Ривлину и Эриксену (Rivlin & Ericksen [1955, § 39]). Здесь мы опускаем индекс D и не указываем зависимость матриц от x.

Теорема 3.6-1 (теорема Ривлина—Эриксена о представлении). *Отображение* $\hat{\boldsymbol{T}}$: $\mathbb{M}^3_+\to\mathbb{S}^3$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QF})=\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\quad\text{и}\quad\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{FQ})=\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})\\ \text{для всех}\quad \boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+,\ \boldsymbol{Q}\in\mathbb{O}^3_+\end{array}}$$

в том и только в том случае, когда

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})=\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\quad\text{для всех}\quad\boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+,}$$

причём отображение $\bar{T}$: $\mathbb{S}^3_> \to \mathbb{S}^3$ *имеет вид*

$$\boxed{\bar{T}(B) = \beta_0(\iota_B)I + \beta_1(\iota_B)B + \beta_2(\iota_B)B^2 \quad \text{для всех } B \in \mathbb{S}^3_>,}$$

где β_0, β_1, β_2 *— вещественнозначные функции от трёх главных инвариантов матрицы* B.

Доказательство. (i) Согласно теореме 3.4-1, отображение $\hat{T}$: $\mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{S}^3$ удовлетворяет соотношению $\hat{T}(FQ) = \hat{T}(F)$ для всех $F \in \mathbb{M}^3_+ Q \in \mathbb{O}^3_+$ тогда и только тогда, когда найдётся отображение $\bar{T}$: $\mathbb{S}^3_> \to \mathbb{S}^3$, для которого $\hat{T}(F) = \bar{T}(FF^{\mathrm{T}})$ при всех $F \in \mathbb{M}^3_+$. Докажем, что *отображение* $\hat{T}$ *удовлетворяет дополнительному условию* $\hat{T}(QF) = Q\hat{T}(F)Q^{\mathrm{T}}$ *при всех* $F \in \mathbb{M}^3_+$, $Q \in \mathbb{O}^3_+$ *в том и только в том случае, когда для отображения* $\bar{T}$ *выполнено соотношение*

$$\bar{T}(QBQ^{\mathrm{T}}) = Q\bar{T}(B)Q^{\mathrm{T}} \quad \text{для всех} \quad B \in \mathbb{S}^3_>,\ Q \in \mathbb{O}^3_+.$$

Чтобы проверить это, рассмотрим матрицы $B \in \mathbb{S}^3_>$, $Q \in \mathbb{O}^3_+$. Тогда

$$\bar{T}(QBQ^{\mathrm{T}}) = \bar{T}(QB^{1/2}(QB^{1/2})^{\mathrm{T}}) = \hat{T}(QB^{1/2});$$

с другой стороны,

$$\hat{T}(QB^{1/2}) = Q\hat{T}(B^{1/2})Q^{\mathrm{T}} = Q\bar{T}(B)Q^{\mathrm{T}}$$

по теореме 3.3-1 (определение матрицы $B^{1/2}$ см. в § 3.2). Обратно, пусть $F \in \mathbb{M}^3_+$, $Q \in \mathbb{O}^3_+$. Учитывая, что $FF^{\mathrm{T}} \in \mathbb{S}^3_>$, получаем

$$\hat{T}(QF) = \bar{T}(QFF^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}) = Q\bar{T}(FF^{\mathrm{T}})Q^{\mathrm{T}} = Q\hat{T}(F)Q^{\mathrm{T}}.$$

(ii) Таким образом, достаточно *охарактеризовать только те отображения* $\bar{T}$: $\mathbb{S}^3_> \to \mathbb{S}^3$, *которые удовлетворяют соотношению*

$$\bar{T}(QBQ^{\mathrm{T}}) = Q\bar{T}(B)Q^{\mathrm{T}} \quad \text{для всех} \quad B \in \mathbb{S}^3_>,\ Q \in \mathbb{O}^3_+.$$

Для этого сначала заметим, что если отображение T имеет вид, указанный в теореме, то

$$\bar{T}(QBQ^{\mathrm{T}}) = \beta_0(\iota_B)I + \beta_1(\iota_B)QBQ^{\mathrm{T}} + \beta_2(\iota_B)QB^2Q^{\mathrm{T}} = Q\bar{T}(B)Q^{\mathrm{T}}$$

для всех $B \in \mathbb{S}^3_>$, $Q \in \mathbb{O}^3_+$, поскольку $\iota_B = \iota_{QBQ^{\mathrm{T}}}$.

Приведём теперь некоторые простые соображения для обоснования главного результата теоремы. Рассмотрим один специальный класс функций $\bar{T}$, удовлетворяющих равенству $\bar{T}(QBQ^{\mathrm{T}}) = Q\bar{T}(B)Q^{\mathrm{T}}$ для всех $B \in \mathbb{S}^3_>$, $Q \in \mathbb{O}^3_+$, а именно класс *многочленов по степеням* B:

$$\bar{T}(B) = a_0 I + a_1 B + \ldots + a_p B^p \quad \text{для всех} \quad B \in \mathbb{S}^3_>.$$

Во-первых, заметим, что *для каждой матрицы* $B \in \mathbb{S}^3_>$ *любая матрица, приводящая* B *к диагональному виду, также приводит к диагональному виду и матрицу* $\bar{T}(B)$; это свойство в общем случае устанавливается на следующем шаге доказательства. Во-вторых, согласно теореме Кэли—Гамильтона каждая степень B^p, $p \geqslant 3$, может быть представлена в виде многочлена от матриц I, B, B^2, коэффициенты которого — функции главных инвариантов матрицы B. Отсюда следует утверждение теоремы, когда $\bar{T}$ — многочлен. Это доказательство можно было бы распространить на все функции $\bar{T}$, представимые в виде бесконечных рядов по степеням B, при условии что все соответствующие ряды сходятся. Однако для этого необходимо наложить жёсткие ограничения на *регулярность* допустимых функций $\bar{T}$, которая на самом деле никак не связана с утверждением теоремы. Поэтому мы применим иной подход.

(iii) Покажем, что *если отображение* $\bar{T}\colon \mathbb{S}^3_> \to \mathbb{S}^3$ *удовлетворяет соотношению*

$$\bar{T}(QBQ^{\mathrm{T}}) = Q\bar{T}(B)Q^{\mathrm{T}} \quad \text{для всех} \quad B \in \mathbb{S}^3_>, \ Q \in \mathbb{O}^3_+,$$

то для любой $B \in \mathbb{S}^3_>$ *всякая матрица, диагонализующая* B, *диагонализует также и матрицу* $\bar{T}(B)$.

Фиксируем матрицу $B \in \mathbb{S}^3_>$. Пусть Q — любая ортогональная матрица, приводящая B к диагональному виду (Q зависит от B):

$$Q^{\mathrm{T}} B Q = \mathbf{Diag}\, \lambda_i.$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\det \mathbf{Q} = +1$, т. е. $Q \in \mathbb{O}^3_+$ (в противном случае нужно поменять знак одного из столбцов Q). Рассмотрим матрицы

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

которые, очевидно, принадлежат множеству $\mathbb{O}^3_+$. Равенство $Q^{\mathrm{T}} B Q = \mathbf{Diag}\, \lambda_i$ означает, что при $j = 1, 2, 3$ столбец с номером j матрицы $Q \in \mathbb{O}^3_+$ является собственным вектором матрицы B, отвечающим собственному значению λ_j. Аналогично имеем

$$(QQ_\beta)^{\mathrm{T}} B (QQ_\beta) = \mathbf{Diag}\, \lambda_i = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} B \mathbf{Q}, \qquad \beta = 1, 2,$$

поскольку умножение матрицы $\boldsymbol{Q}$ на $\boldsymbol{Q}_\beta$ справа меняет знак у двух столбцов $\boldsymbol{Q}$. Таким образом, в силу условия п. (iii) имеем

$$\boldsymbol{Q}_\beta^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}\right)\boldsymbol{Q}_\beta=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_\beta)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_\beta)=\bar{\boldsymbol{T}}\left((\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_\beta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_\beta)\right)$$
$$=\bar{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\right)=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q},\quad \beta=1,\ 2.$$

Как показывают непосредственные вычисления, из этих двух соотношений следует, что *матрица* $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}$ *диагональна.*

(iv) Установим теперь, что *функция* $\bar{\boldsymbol{T}}$ *должна иметь вид*

$$\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})=b_0(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}+b_1(\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+b_2(\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^2\ \text{для всех}\ \boldsymbol{B}\in\mathbb{S}^3_>,$$

где b_0, b_1, b_2 — *вещественнозначные функции от* $\boldsymbol{B}$. Следует различать три случая.

Предположим сначала, что *у матрицы* $\boldsymbol{B}$ *имеется три попарно различных собственных значения* λ_i, которым отвечают ортонормированные собственные векторы p_i. Тогда *линейные оболочки множеств* $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^2\}$ *и* $\{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}}\}$ *образуют одно и то же подпространство векторного пространства* $\mathbb{S}^3$. Действительно, заметим, что[1]

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{B}=\lambda_1\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}+\lambda_3\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{B}^2=\lambda_1^2\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2^2\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}+\lambda_3^2\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}},$$

причём определитель Вандермонда

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{pmatrix}$$

отличен от нуля, поскольку собственные значения попарно различны.

Обозначим через μ_i собственные значения симметрической матрицы $\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$. Тогда в силу результата, установленного в п. (iii), мы можем представить $\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$ в виде

$$\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})=\mu_1\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}+\mu_2\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}+\mu_3\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}},$$

и, значит,

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})=b_0(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}+b_1(\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+b_2(\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^2.$$

Коэффициенты $b_0(\boldsymbol{B})$, $b_1(\boldsymbol{B})$, $b_2(\boldsymbol{B})$ определены единственным

[1] Следующие равенства вытекают из известного разложения $x=(p_i, x)p_i$ для любого $x\in\mathbb{R}^3$. — *Прим. перев.*

образом, так как матрицы $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}^2$ в рассматриваемом случае линейно-независимы.

Пусть теперь *одно из собственных значений матрицы* $\boldsymbol{B}$ *имеет кратность 2*. Для определённости будем считать, что $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$. Тогда *линейные оболочки множеств* $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}\}$ *и* $\{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}}\}$ *совпадают*, поскольку в этом случае мы можем написать

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}}),$$
$$\boldsymbol{B} = \lambda_1\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} + \lambda_2(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}}),$$

причём

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Так как все ненулевые векторы из подпространства, натянутого на собственные векторы $\boldsymbol{p}_2$ и $\boldsymbol{p}_3$ матрицы $\boldsymbol{B}$, являются собственными для матрицы $\boldsymbol{B}$, то они будут собственными и для матрицы $\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$, в силу результата п. (iii). Следовательно, *матрица* $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})$ *также имеет двукратное собственное значение* $\mu_2 = \mu_3$, *соответствующее собственным векторам* $\boldsymbol{p}_2$ *и* $\boldsymbol{p}_3$. Действительно,

$$\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{p}_2 = \mu_2\boldsymbol{p}_2, \qquad \bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{p}_3 = \mu_3\boldsymbol{p}_3,$$
$$\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})(\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3) = \mu(\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3) \Rightarrow \mu_2 = \mu_3 = \mu.$$

Поэтому в рассматриваемом случае матрица

$$\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B}) = \mu_1\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}} + \mu(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}})$$

может быть представлена в виде

$$\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B}) = b_0(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I} + b_1(\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}.$$

И наконец предположим, что *матрица* $\boldsymbol{B}$ *имеет одно собственное значение кратности 3*. Поскольку в этом случае все ненулевые векторы являются собственными для матрицы $\boldsymbol{B}$, а значит и для $\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$, мы можем заключить, что $\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$ кратна единичной матрице, т. е. существует число $b_0(\boldsymbol{B})$, для которого

$$\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B}) = b_0(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}.$$

Таким образом, утверждение (iv) доказано.

(v) Остаётся показать, что *функции* b_0, b_1, b_2: $\boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^3_> \to \mathbb{R}$ *на самом деле являются функциями лишь главных инвариантов* $\iota_B = (\iota_1(\boldsymbol{B}), \iota_2(\boldsymbol{B}), \iota_3(\boldsymbol{B}))$ *матрицы* $\boldsymbol{B}$. Заметим сначала, что для этих функций должны выполняться равенства

$$\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{Q}\left[b_0(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{I} + b_1(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B} + b_2(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}^2\right]\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$
$$= \boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}\left[b_0(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I} + b_1(\boldsymbol{B})\boldsymbol{B} + b_2(\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^2\right]\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

при всех $\boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^3_>$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$. Поэтому они должны удовлетворять условиям

$$b_\alpha(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) = b_\alpha(\boldsymbol{B}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^3_>, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+, \quad \alpha = 0,\ 1,\ 2,$$

снова в силу единственности разложения матрицы $\overline{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$ по одному из базисов $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^2\}$, $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}\}$, $\{\boldsymbol{I}\}$, в зависимости от кратности собственных значений $\boldsymbol{B}$.

Обозначим через b какую-либо из функций b_α, $\alpha = 0, 1, 2$. Покажем, что имеет место импликация

$$\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^3_> \ \text{и} \ \iota_A = \iota_B \Rightarrow b(\boldsymbol{A}) = b(\boldsymbol{B}).$$

Если главные инварианты матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ совпадают, то совпадают и множества их собственных значений. Перенумеровав, если необходимо, собственные значения, мы можем написать

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_j = \delta_{ij},$$

$$\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{s}_i \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{s}_j = \delta_{ij};$$

кроме того, не ограничивая общности, мы можем считать, что $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{r}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, для некоторой матрицы $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$. В таком случае

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{Q} \boldsymbol{s}_i \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

и, значит, $b(\boldsymbol{A}) = b(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) = b(\boldsymbol{B})$ в силу инвариантности, установленной выше.

Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 3.4-1, приходим к заключению, что существует функция β: $\iota(\mathbb{S}^3_>) \to \mathbb{R}$, для которой

$$b(\boldsymbol{B}) = \beta(\iota_B) \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^3_>. \qquad \blacksquare$$

Весьма примечательной особенностью доказанной теоремы является полное отсутствие предположений относительно *гладкости* отображения $\overline{\boldsymbol{T}}$. Тем не менее предположения такого рода потребуются в дальнейшем, например, при разложении определяющего уравнения вблизи отсчётной конфигурации (§ 3.7). Отметим также существенную роль *симметричности* обеих матриц $\boldsymbol{B}$ и $\overline{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$ в доказательстве теоремы.

В качестве следствия теоремы Ривлина—Эриксена о представлении мы запишем в чрезвычайно простом виде функции реакции $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}$ и $\hat{\Sigma}$ для тензора напряжений Коши и второго тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа в случае изотропного упругого материала, удовлетворяющего аксиоме независимости от системы отсчёта. По поводу обобщений на случай анизотропных материалов см. Boehler [1978].

Теорема 3.6-2. *Пусть имеется упругий материал, функция реакции которого не зависит от системы отсчёта и изотропна в точке* $x \in \bar{\Omega}$. *Тогда для произвольной деформации* φ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ *тензор напряжений Коши в точке* $x^\varphi = \varphi(x)$ *задаётся соотношением*

$$\boxed{\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) = \hat{\boldsymbol{T}}^D(x, \nabla\varphi(x)) = \bar{\boldsymbol{T}}^D(x, \nabla\varphi(x)\nabla\varphi(x)^T),}$$

причём функция реакции $\bar{\boldsymbol{T}}^D(x, \cdot)$: $\mathbb{S}^3_> \to \mathbb{S}^3$ *имеет вид*

$$\boxed{\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{T}}^D(x, \boldsymbol{B}) = \beta_0(x, \iota_B)\boldsymbol{I} + \beta_1(x, \iota_B)\boldsymbol{B} + \beta_2(x, \iota_B)\boldsymbol{B}^2\\ &\text{для всех } \boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^3_>,\end{aligned}}$$

где $\beta_0(x, \cdot)$, $\beta_1(x, \cdot)$, $\beta_2(x, \cdot)$ — *вещественнозначные функции трёх главных инвариантов матрицы* $\boldsymbol{B}$; *второй тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа в точке* x *задаётся соотношением*

$$\boxed{\Sigma(x) = \hat{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)) = \tilde{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)^T\nabla\varphi(x)),}$$

причём функция реакции $\tilde{\Sigma}(x, \cdot)$: $\mathbb{S}^3_> \to \mathbb{S}^3$ *имеет вид*

$$\boxed{\begin{aligned}&\tilde{\Sigma}(x, \boldsymbol{C}) = \gamma_0(x, \iota_C)\boldsymbol{I} + \gamma_1(x, \iota_C)\boldsymbol{C} + \gamma_2(x, \iota_C)\boldsymbol{C}^2\\ &\text{для всех } \boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_>,\end{aligned}}$$

где $\gamma_0(x, \cdot)$, $\gamma_1(x, \cdot)$, $\gamma_2(x, \cdot)$ — *вещественнозначные функции трёх главных инвариантов матрицы* $\boldsymbol{C}$. *Справедливо и обратное утверждение, а именно: если какая-либо из функций реакции* $\bar{\boldsymbol{T}}^D$ *и* $\tilde{\Sigma}$ *имеет указанный вид, то выполняется аксиома независимости материала от системы отсчёта и материал является изотропным в точке* x.

Доказательство. Искомое представление для $\bar{\boldsymbol{T}}^D$ в виде многочлена второй степени от $\boldsymbol{B}$ вытекает из теорем 3.3-1, 3.4-1 и 3.6-1. Установим такое представление для $\tilde{\Sigma}$. Пусть $\boldsymbol{F}$ — произвольная матрица из $\mathbb{M}^3_+$. Положим

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T \text{ и } \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}.$$

Учитывая, что $\iota(\boldsymbol{B}) = \iota(\boldsymbol{C})$ (поскольку $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ в силу полярного разложения $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$; см. теорему 3.2-2), а также что

$$\det \boldsymbol{F} = \iota_3(\boldsymbol{F}) = \{\iota_3(\boldsymbol{B})\}^{1/2} = \{\iota_3(\boldsymbol{C})\}^{1/2},$$

получаем

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{F}) &= (\det \boldsymbol{F})\,\boldsymbol{F}^{-1}\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\\ &= (\det \boldsymbol{F})\left(\beta_0(\iota_B)\,\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} + \beta_1(\iota_B)\,\boldsymbol{I} + \beta_2(\iota_B)\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right)\\ &= \{\iota_3(\boldsymbol{C})\}^{1/2}\left(\beta_0(\iota_C)\,\boldsymbol{C}^{-1} + \beta_1(\iota_C)\,\boldsymbol{I} + \beta_2(\iota_C)\,\boldsymbol{C}\right)\end{aligned}$$

(здесь ради сокращения записи не указана явная зависимость от x). Поэтому искомое представление для $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ вытекает из соотношения

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \iota_3^{-1}(\boldsymbol{C})\left(\iota_2(\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{I} - \iota_1(\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^2\right). \qquad \blacksquare$$

Пользуясь тем же методом, мы могли бы получить различные эквивалентные выражения для функций реакции $\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}$ или $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$, например

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x,\ \boldsymbol{B}) = \beta'_{-1}(x,\ \iota_B)\,\boldsymbol{B}^{-1} + \beta'_0(x,\ \iota_B)\,\boldsymbol{I} + \beta'_1(x,\ \iota_B)\,\boldsymbol{B},\\ &\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x,\ \boldsymbol{B}) = \varkappa_0(x,\ \iota_V)\,\boldsymbol{I} + \varkappa_1(x,\ \iota_V)\,\boldsymbol{V} + \varkappa_2(x,\ \iota_V)\,\boldsymbol{V}^2, \qquad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}^{1/2},\\ &\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x,\ \boldsymbol{C}) = \gamma'_{-1}(x,\ \iota_C)\,\boldsymbol{C}^{-1} + \gamma'_0(x,\ \iota_C)\,\boldsymbol{I} + \gamma'_1(x,\ \iota_C)\,\boldsymbol{C}.\end{aligned}$$

В противоположность этому, первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа $\boldsymbol{T}(x)$ не может быть записан в виде функции какого-либо из симметрических тензоров $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ или $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$. В частности, пользуясь последним выражением для функции реакции $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$, получаем

$$\boldsymbol{T}(x) = \hat{\boldsymbol{T}}(x,\ \nabla\varphi(x)),$$

где

$$\hat{\boldsymbol{T}}(x,\ \boldsymbol{F}) = \gamma'_{-1}(x,\ \iota_C)\,\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} + \gamma'_0(x,\ \iota_C)\,\boldsymbol{F} + \gamma'_1(x,\ \iota_C)\,\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}.$$

Тем не менее, хотя определяющее уравнение в отсчётной конфигурации удобнее записать при помощи *второго*, а не первого тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа, именно *первый* тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа естественным образом возникает в *уравнениях равновесия* в отсчётной конфигурации (см. гл. 2), а также в *определяющем уравнении гиперупругого материала* (§ 4.1).

Пусть через

$$\boldsymbol{T}_R(x) := \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x,\ \boldsymbol{I}) = \hat{\boldsymbol{T}}(x,\ \boldsymbol{I}) = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(x,\ \boldsymbol{I}) = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x,\ \boldsymbol{I})$$

обозначен **тензор остаточных напряжений** в точке x отсчётной конфигурации, которая, таким образом, рассматривается как частный случай деформированной конфигурации, соответствующий $\varphi = id$. Тогда из теоремы 3.6-2 следует, что *для упругого материала, изотропного в точке* $x \in \bar{\Omega}$, *тензор остаточных напряжений в точке x является равномерным сжатием* (*растяжением*) (т. е. кратен единичной матрице согласно терминологии § 2.3), поскольку

$$\nabla\varphi(x) = \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi}) = \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{I}) = -\pi(x)\,\boldsymbol{I},$$

где $-\pi(x) = \beta_0(x, \iota_I) + \beta_1(x, \iota_I) + \beta_2(x, \iota_I)$.

Этот результат является следствием условия изотропности материала. Действительно, если свойства материала „одинаковы во всех направлениях", то естественно предположить, что тензор напряжений Коши будет равномерным сжатием (растяжением). Однако тот же самый упругий материал, подвергшийся произвольной деформации, как правило, утрачивает свойство изотропности, поскольку в силу теоремы 3.6-2 нельзя ожидать, что матрица $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F})$ будет пропорциональна единичной при любой матрице $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$. Таким образом, хотя априори и возможно выбрать в качестве отсчётной любую деформированную конфигурацию, в общем случае нельзя считать материал изотропным относительно произвольной отсчётной конфигурации. *Изотропность есть свойство, имеющее место лишь при определённом выборе отсчётной конфигурации.*

Замечание. Тензор остаточных напряжений для *анизотропных* материалов также не является произвольным; см. Coleman & Noll [1964], Hoger [1985, 1986]. ■

Говорят, что отсчётная конфигурация $\bar{\Omega}$ представляет собой **естественное состояние**, если тензор остаточных напряжений $\boldsymbol{T}_R(x)$ равен нулю во всех точках $x \in \bar{\Omega}$. Это определение соответствует *допущению*, что у данного тела существуют „ненапряжённые состояния" (когда все приложенные силы равны нулю).

Пусть отсчётная конфигурация является естественным состоянием. Тогда всякая деформированная конфигурация, соответствующая жёсткой деформации, также будет естественным состоянием, если принять её за новую отсчётную конфигурацию. Чтобы проверить это, рассмотрим жёсткую деформацию: φ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $\nabla\varphi(x) = \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$ для всех $x \in \bar{\Omega}$. Пользуясь теоремой 3.6-2, находим

$$\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{Q}) = \bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}.$$

Замечание. Основания допустить наличие „ненапряжённых состояний" имеются в случае *твёрдых упругих тел.* Газы, представляющие собой *упругие жидкости*, естественным состоянием не обладают. ■

3.7. Определяющее уравнение вблизи отсчётной конфигурации

В § 1.8 было показано, что тензор деформации Грина—Сен-Венана

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I}), \quad \text{где} \quad \boldsymbol{C}=\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{\varphi},$$

в определённом смысле служит мерой отклонения заданной деформации $\boldsymbol{\varphi}$ от жёсткой деформации, для которой $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$. Поэтому естественно вычислить с точностью до членов заданного порядка по $\|\boldsymbol{E}\|$ разность $(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \boldsymbol{I}+2\boldsymbol{E})-\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \boldsymbol{I}))$, выраженную через правый тензор деформации Коши — Грина $\boldsymbol{C}$, где $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \cdot)$ — функция реакции для второго тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа в точке $x\in\bar{\Omega}$. Иными словами, мы хотим вычислить с точностью до членов заданного порядка относительно тензора $\boldsymbol{E}$ асимптотическое разложение тензора напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$, соответствующего деформированной конфигурации, которая „близка" к отсчётной, при этом отсчётная конфигурация рассматривается как частный случай деформированной при отображении $\boldsymbol{id}$.

Как показывает следующая теорема, мы приходим к весьма неожиданному результату: *член первого порядка* в указанном разложении *содержит только две постоянные*, тогда как априори для разложения

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{E})=\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{I})+2\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{A}}}{\partial C_{ij}}(\boldsymbol{I})E_{ij}+o(\boldsymbol{E})\in\mathbb{S}^3, \qquad \boldsymbol{I}+2\boldsymbol{E}\in\mathbb{S}^3_>,$$

произвольной матричнозначной функции $\tilde{\boldsymbol{A}}$ в члене первого порядка имеется 36 постоянных $(\partial\tilde{A}_{ij}/\partial C_{kl})(\boldsymbol{I})$. Можно также показать, что член второго порядка содержит лишь 4 постоянные (упражнение 3.11) вместо ожидаемых 216 в общем случае. Столь значительные упрощения, очевидно, возникают благодаря теореме Ривлина—Эриксена о представлении, из которой следует (теоремы 3.6-1 и 3.6-2), что функция $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \cdot)$ имеет вид

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \boldsymbol{C})=\gamma_0(x, \iota_C)\boldsymbol{I}+\gamma_1(x, \iota_C)\boldsymbol{C}+\gamma_2(x, \iota_C)\boldsymbol{C}^2 \quad \text{для всех } \boldsymbol{C}\in\mathbb{S}^3_>.$$

Напомним, что множество $\left\{E=\frac{1}{2}\{F^{\mathrm{T}}F-I\}\in\mathbb{S}^3;\ F\in\mathbb{M}^3_+\right\}$ является окрестностью нуля в $\mathbb{S}^3$ (теорема 1.8-3); равенство $f^{\varepsilon}(x)=o(\varepsilon;\ x)$ означает, что $\lim_{\varepsilon\to 0}\{\|f^{\varepsilon}(x)\|/\varepsilon\}=0$.

Теорема 3.7-1. *Предположим, что имеется упругий материал и его функция реакции не зависит от системы отсчёта и изотропна в точке* $x\in\bar{\Omega}$. *Пусть, кроме того, функции* $\gamma_\alpha(x,\ \cdot)$, $\alpha=0,\ 1,\ 2,$ *дифференцируемы в точке* $\iota_I=(3,\ 3,\ 1)$. *Тогда существуют постоянные* $\pi(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)\in\mathbb{R}$, *такие что*

$$\boxed{\begin{aligned}&\tilde{\Sigma}(x,\ C)=-\pi(x)I+\lambda(x)(\operatorname{tr}E)I+2\mu(x)E+o(E;\ x)\\ &\text{для всех}\quad C=I+2E\in\mathbb{S}^3_>.\end{aligned}}$$

Доказательство. Из соотношения $C=I+2E$ следует, что

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}C&=3+2\operatorname{tr}E,\\ \operatorname{tr}C^2&=3+4\operatorname{tr}E+o(E),\\ \operatorname{tr}C^3&=3+6\operatorname{tr}E+o(E).\end{aligned}$$

Поэтому для каждого главного инварианта матрицы C сумма членов первого порядка по E пропорциональна числу $\operatorname{tr}E$, т. е.

$$\begin{aligned}\iota_1(C)&=\operatorname{tr}C=3+2\operatorname{tr}E,\\ \iota_2(C)&=\frac{1}{2}\{(\operatorname{tr}C)^2-\operatorname{tr}C^2\}=3+4\operatorname{tr}E+o(E),\\ \iota_3(C)&=\frac{1}{6}\{(\operatorname{tr}C)^3-3\operatorname{tr}C\operatorname{tr}C^2+2\operatorname{tr}C^3\}=1+2\operatorname{tr}E+o(E).\end{aligned}$$

, В силу предположения о дифференцируемости функций $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ в точке ι_I, из этих соотношений вытекает, что каждая функция γ_0, γ_1, γ_2 в свою очередь может быть представлена в виде (здесь опущены нижние индексы и не указана зависимость от x):

$$\gamma(\iota_C)=\gamma(\iota_I)+\dot{\gamma}(\iota_I)\operatorname{tr}E+o(E),$$

где

$$\dot{\gamma}(\iota_I):=2\frac{\partial\gamma}{\partial\iota_1}(\iota_I)+4\frac{\partial\gamma}{\partial\iota_2}(\iota_I)+2\frac{\partial\gamma}{\partial\iota_3}(\iota_I)$$

и $\iota_I=(3,\ 3,\ 1)$ — множество главных инвариантов единичной матрицы. Учитывая эти соотношения, а также равенство

$C^2 = I + 4E + o(E)$, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(C) &= \tilde{\Sigma}(I + 2E)\\ &= \tilde{\Sigma}(I) + \{\dot{\gamma}_0(\iota_I) + \dot{\gamma}_1(\iota_I) + \dot{\gamma}_2(\iota_I)\}(\operatorname{tr} E) I\\ &\qquad + \{2\gamma_1(\iota_I) + 4\gamma_2(\iota_I)\} E + o(E).\end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение теоремы, поскольку

$$\tilde{\Sigma}(I) = \{\gamma_0(\iota_I) + \gamma_1(\iota_I) + \gamma_2(\iota_I)\} I. \qquad \blacksquare$$

Замечания. (1) Полагая $\varphi = id$ в соотношении

$$T^{\varphi}(x^{\varphi}) = (\det \nabla\varphi(x))^{-1} \nabla\varphi(x) \tilde{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x))^{\mathrm{T}} \nabla\varphi(x) \nabla\varphi(x)^{-\mathrm{T}},$$

выводим из теоремы 3.7-1, что

$$T_R(x) = \tilde{\Sigma}(x, I) = -\pi(x) I,$$

т. е. тензор остаточных напряжений $T_R(x)$ является равномерным сжатием (растяжением). Этот факт был уже установлен в конце § 3.6 без каких-либо предположений о гладкости функций γ_0, γ_1, γ_2.

(2) Более короткое доказательство теоремы 3.7-1 можно дать в частном случае, когда функция реакции $\tilde{\Sigma}$ линейна по E; см. упражнение 3.12. $\blacksquare$

3.8. Постоянные Ламэ однородного изотропного упругого материала, отсчётная конфигурация которого является естественным состоянием

Если предположить, что упругий материал изотропен, однороден и к тому же его отсчётная конфигурация является естественным состоянием, мы получим следующий результат, вытекающий непосредственно из теоремы 3.7-1:

Теорема 3.8-1. *Предположим, что имеется однородный изотропный упругий материал, для которого отсчётная конфигурация является естественным состоянием. Пусть, кроме того, функции* γ_α, $\alpha = 0, 1, 2$, *из теоремы* 3.6-2 *дифференцируемы в точке* $\iota_I = (3, 3, 1)$. *Тогда существуют две постоянные* λ *и* μ, *такие что функция реакции* $\hat{\Sigma}\colon \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{S}^3$ *имеет вид*

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{\Sigma}(F) = \tilde{\Sigma}(C) = \Sigma(\check{E}) = \lambda(\operatorname{tr} E) I + 2\mu E + o(E),\\ &C = F^{\mathrm{T}}F = I + 2E, \qquad F \in \mathbb{M}^3_+.\end{aligned}} \qquad \blacksquare$$

В этом и *только в этом случае* постоянные λ и μ называются **постоянными Ламэ** рассматриваемого упругого материала.

Далее мы опишем три „идеальных" эксперимента и, основываясь на интуитивных физических представлениях о каждом из них, получим ограничения на допустимые *числовые значения* постоянных Ламэ для „реального" однородного изотропного упругого материала. В каждом из этих экспериментов мы поступим следующим образом:

(i) Рассмотрим тело, занимающее отсчётную конфигурацию $\bar{\Omega}$ достаточно простой геометрической формы (а именно, прямоугольный брус, шар и круговой цилиндр), и предположим, что $\bar{\Omega}$ — естественное состояние.

(ii) Далее, предположим, что тело можно подвергнуть некоторому *семейству деформаций* простейшего вида. В качестве индекса у этого семейства выступает „малый" параметр, и для каждого значения параметра *градиент деформации постоянен в $\bar{\Omega}$ в первом приближении относительно параметра*, а главная часть градиента деформации подсказывается опытом и физической интуицией. Более точно рассматриваются деформации вида

$$\varphi^{\varepsilon}\colon x \in \bar{\Omega} \to \varphi^{\varepsilon}(x) = x + \boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x) = x + \varepsilon\boldsymbol{\zeta}(x) + o(\varepsilon;\, x), \qquad \blacksquare$$

где ε — „малый" параметр, *векторное поле* $\boldsymbol{\zeta}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ *не зависит от* ε, *а его градиент*

$$\boldsymbol{G} := \nabla\boldsymbol{\zeta}$$

есть постоянная матрица в $\bar{\Omega}$. Запись $f^{\varepsilon}(x) = o(\varepsilon;\, x)$ означает, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \frac{\| f^{\varepsilon}(x) \|}{\varepsilon} = 0$$

при всех $x \in \bar{\Omega}$.

Замечание. В первом приближении указанные деформации представляют собой частный случай *однородных деформаций*, которые характеризуются постоянным градиентом в отсчётной конфигурации. Некоторые свойства однородных деформаций рассмотрены в упражнении 4.7. $\blacksquare$

Предположим, что функции $\{\varphi^{\varepsilon} - (\boldsymbol{id} + \varepsilon\boldsymbol{\zeta})\}$ дважды дифференцируемы в $\bar{\Omega}$ при всех ε, а их первые и вторые частные производные — также порядка $o(x;\, \varepsilon)$ при каждом $x \in \bar{\Omega}$. Если функция реакции $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}$ дважды дифференцируема в окрестности единичной матрицы, то тензор напряжений Коши

$$\boldsymbol{T}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) := \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\nabla\varphi^{\varepsilon}(x)), \qquad x^{\varepsilon} = \varphi^{\varepsilon}(x),$$

удовлетворяет соотношению

$$\boldsymbol{T}^\varepsilon\left(x^\varepsilon\right) = \widehat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}\left(\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{G} + o(\varepsilon;\ x)\right) = \widehat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}\left(\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{G}\right) + o(\varepsilon;\ x) \quad \text{для всех } x \in \overline{\Omega}$$

(во избежание громоздких обозначений верхний индекс φ^ε заменён на ε). Простые вычисления показывают, что соответствующий первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа удовлетворяет соотношению

$$\boldsymbol{T}(x) = \widehat{\boldsymbol{T}}\left(\nabla\varphi^\varepsilon(x)\right) = \det\left(\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{G}\right)\widehat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}\left(\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{G}\right)\left(\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{G}\right)^{-1} + o(\varepsilon;\ x).$$

Итак, *в первом приближении по ε оба тензора напряжений являются постоянными в отсчётной конфигурации.* Отсюда, в частности, следует, что

$$\mathbf{div}\,\widehat{\boldsymbol{T}}\left(\nabla\varphi^\varepsilon(x)\right) = o(\varepsilon;\ x)$$

и, значит, в первом приближении по параметру ε имеет место равенство $\mathbf{div}\,\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi^\varepsilon) = \boldsymbol{o}$ в Ω. Поэтому мы можем считать, что *рассматриваемые деформации φ^ε вызваны лишь приложенными поверхностными силами*, пренебрегая, таким образом, влиянием объёмных сил, и, следовательно, можем считать, что *форма тензора напряжений Коши зависит только от формы приложенных поверхностных сил.*

(iii) Из предположений о деформации φ^ε вытекает равенство

$$\nabla\varphi^\varepsilon(x)^{\mathrm{T}}\,\nabla\varphi^\varepsilon(x) = \boldsymbol{I} + \varepsilon\left(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\right) = o(\varepsilon;\ x) \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\Omega},$$

так что второй тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа задаётся соотношением

$$\Sigma(x) = \varepsilon\left(\lambda\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{G}\right)\boldsymbol{I} + \mu\left(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{G}\right)\right) + o(\varepsilon;\ x),$$

а потому соответствующее определяющее уравнение приобретает аналогичный вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^\varepsilon\left(x^\varepsilon\right) &= \left(\det\nabla\varphi^\varepsilon(x)\right)^{-1}\nabla\varphi^\varepsilon(x)\,\Sigma(x)\,\nabla\varphi^\varepsilon(x)^{-\mathrm{T}} \\ &= \varepsilon\left(\lambda\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{G}\right)\boldsymbol{I} + \mu\left(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{G}\right)\right) + o(\varepsilon;\ x) \\ &\qquad \text{для всех } x^\varepsilon = \varphi^\varepsilon(x),\ x \in \overline{\Omega}.\end{aligned}$$

С другой стороны, из соотношений $\boldsymbol{T}^\varepsilon(x^\varepsilon) = \widehat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{G}) + o(\varepsilon;\ x)$ и $\widehat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$ (отсчётная конфигурация считается естественным состоянием) следует, что тензор напряжений Коши имеет вид

$$\boldsymbol{T}^\varepsilon\left(x^\varepsilon\right) = \varepsilon\boldsymbol{T} + o(\varepsilon;\ x), \quad \text{где} \quad (\boldsymbol{T})_{ij} = \frac{\partial\widehat{T}^{\mathrm{D}}_{ij}}{\partial\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{I}),$$

и, таким образом, $\boldsymbol{T}$ — симметрический тензор, не зависящий от x. Приравнивая члены первого порядка по ε в правой и левой частях определяющего уравнения, получаем соотношенне

$$T = \lambda(\operatorname{tr} G) I + \mu (G^{T} + G).$$

(iv) Будем предполагать, что в первом приближении по ε тензор напряжений Коши обладает рядом простых свойств, которые подсказываются практикой и физической интуицией. Имеется в виду, например, что одна из его компонент сохраняет определённый знак, как в первом описанном ниже эксперименте, или же что этот тензор соответствует одному из частных случаев, рассмотренных на рис. 2.3-3, как во втором и третьем экспериментах. Затем мы напишем соотношение, выражающее тот факт,

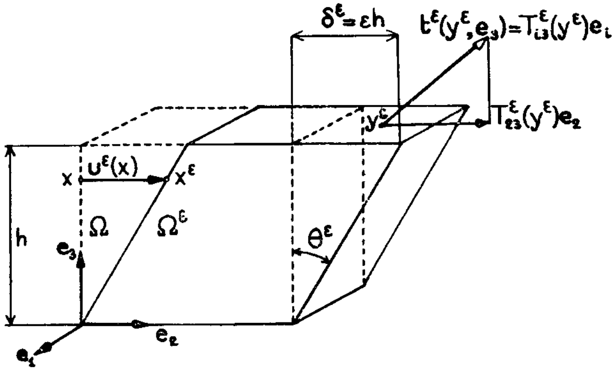

Рис. 3.8-1. «Простой сдвиг» прямоугольного бруса. Этот экспернмент показывает, что постоянная Ламэ $\mu = T^{\varepsilon}_{23}/\varepsilon$, где $\varepsilon = \delta^{\varepsilon}/h$, положительиа.

что *направление приложенных сил некоторым естественным образом связано с направлением возникающих перемещений*. Пользуясь таким соотношением и уравнением $T = \lambda(\operatorname{tr} G)I + \mu(G^{T} + G)$, мы получаем некоторое *неравенство, куда входят постоянные Ламэ* λ *и* μ.

Опишем теперь три упомянутых эксперимента. В *первом эксперименте* в качестве $\overline{\Omega}$ берётся прямоугольный брус. Предполагается, что этот брус можно подвергнуть деформациям, которым соответствуют перемещения вида (рис. 3.8-1)

$$u^{\varepsilon}(x) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + o(\varepsilon;\ x).$$

Замечания. (1) Говорят, что в первом приближении такая деформация есть *простой сдвиг* (дополнительные сведения см. в упражнении 3.13).

(2) На рисунках 3.8-1, 3.8-2 и 3.8-3 показан лишь главный член деформации, т. е. её линейная по ε часть. Отметим, что на каждом рисунке значение параметра ε положительно и для наглядности сильно превышает значения, наблюдаемые в реальных опытах. ■

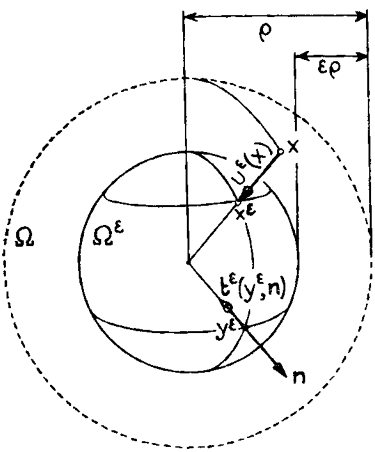

Рис. 3.8-2. «Равномерное сжатие» шара. Этот эксперимент показывает, что модуль объёмного сжатия $\varkappa = (3\lambda + 2\mu)/3 = |T^\varepsilon|/3\varepsilon$, где $\varepsilon = (\rho - \rho^\varepsilon)/\rho$, положителен.

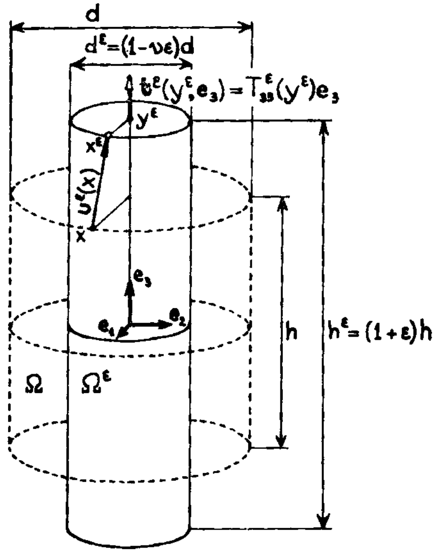

Рис. 3.8-3. «Равномерное растяжение» кругового цилиндра. Этот эксперимент устанавливает положительность коэффициента Пуассона

$$\nu = \left[\frac{d - d^\varepsilon}{d}\right]\left[\frac{h - h^\varepsilon}{h}\right]^{-1} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

и модуля Юнга

$$E = T_{33}^\varepsilon\left[\frac{h^\varepsilon - h}{h}\right]^{-1} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

В рассматриваемом случае естественно предположить, что компонента $T_{23}^\varepsilon(x^\varepsilon)$ соответствующего тензора напряжений Коши имеет вид

$$T_{23}^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon T_{23} + o(\varepsilon;\ x).$$

Поскольку в этом случае

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то из определяющего уравнения выводим

$$\varepsilon T_{23} = \varepsilon\mu + o(\varepsilon;\ x), \qquad x \in \overline{\Omega},$$

и, таким образом, получаем *первое неравенство*

$$\boxed{\mu > 0.}$$

Обратимся ко *второму эксперименту* (рис. 3.8-2). Будем считать, что множество $\overline{\Omega}$ — шар, который подвергается деформации, отвечающей перемещению

$$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x) = -\varepsilon\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + o(\varepsilon;\ x).$$

Сделаем теперь естественное предположение, что главная часть соответствующего тензора напряжений Коши при $\varepsilon > 0$ является *равномерным сжатием* (см. рис. 2.3-3(a)), т. е. $\boldsymbol{T}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon})$ имеет вид

$$\boldsymbol{T}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) = -\pi\varepsilon\boldsymbol{I} + o(\varepsilon;\ x), \qquad \pi > 0.$$

Поскольку $\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{I}$, из определяющего уравнения следует, что

$$-\pi\varepsilon\boldsymbol{I} = -\varepsilon(3\lambda + 2\mu)\boldsymbol{I} + o(\varepsilon;\ x).$$

Отсюда выводим *второе неравенство*

$$\boxed{3\lambda + 2\mu > 0.}$$

В *третьем эксперименте* (рис. 3.8-3) множество $\overline{\Omega}$ — прямой круговой цилиндр и семейство деформаций задаётся перемещениями

$$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x) = \varepsilon\begin{pmatrix} -\nu x_1 \\ -\nu x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + o(\varepsilon;\ x),$$

где постоянная $\nu > 0$ *подлежит определению* (будет показано, что она является функцией λ и μ). Примем естественное допущение, что соответствующий тензор напряжений Коши в первом приближении по ε есть *чистое растяжение в направлении* $\boldsymbol{e}_3$ (см. рис. 2.3-3(b)), т. е.

$$\boldsymbol{T}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon}) = \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} + o(\varepsilon;\ x) \quad \text{для некоторой постоянной } E > 0$$

(которая, как будет показано далее, также является функцией λ и μ). В этом случае матрица $\boldsymbol{G}$ имеет вид

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и потому, записывая определяющее уравнение по компонентам, получаем

$$\begin{aligned} &T^{\varepsilon}_{\alpha\alpha}(x^{\varepsilon})=\varepsilon(\lambda(1-2\nu)-2\nu\mu)+o(\varepsilon;\ x), \qquad \alpha=1,\ 2,\\ &T^{\varepsilon}_{ij}(x^{\varepsilon})=o(\varepsilon;\ x), \qquad i\neq j,\\ &T^{\varepsilon}_{33}(x^{\varepsilon})=\varepsilon(\lambda(1-2\nu)+2\mu)+o(\varepsilon;\ x). \end{aligned}$$

Из равенства $T^{\varepsilon}_{\alpha\alpha}(x^{\varepsilon})=o(\varepsilon;\ x)$ выводим соотношение $-2\nu(\lambda+\mu)+\lambda=0$. Поскольку $(\lambda+\mu)>0$ в силу неравенств $\mu>0$ и $(3\lambda+2\mu)>0$, мы можем разрешить последнее уравнение относительно постоянной ν:

$$\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Таким образом, ν является корректно определённой функцией постоянных Ламэ, и естественное предположение, что $\nu>0$, приводит к *третьему неравенству*

$$\boxed{\lambda>0.}$$

Очевидно, что совместное выполнение первого и третьего неравенств ($\mu>0$, $\lambda>0$) апостериори делает излишним второе неравенство ($(3\lambda+2\mu)>0$). Тем не менее, неравенство $(3\lambda+2\mu)>0$ было нужно на промежуточном этапе, чтобы обеспечить положительность числа $(\lambda+\mu)$.

Вычислим теперь компоненту $T^{\varepsilon}_{33}(x^{\varepsilon})$ тензора напряжений Коши, выражая ν через λ и μ. Имеем

$$T^{\varepsilon}_{33}(x^{\varepsilon})=\varepsilon E+o(\varepsilon;\ x),$$

где число

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

оказывается положительным в силу уже установленной положительности постоянных Ламэ.

Каждая из постоянных ν и E допускает весьма наглядное физическое истолкование, подсказываемое третьим экспериментом. Так, постоянная ν, называемая **коэффициентом Пуассона** для данного упругого материала, характеризует в первом приближении отношение поперечного сужения цилиндра к его удлинению (рис. 3.8-3), а постоянная E, называемая **модулем Юнга**, характеризует в первом приближении отношение компоненты $T^{\varepsilon}_{33}(x^{\varepsilon})$ тензора напряжений Коши к удлинению $\varepsilon = (h^{\varepsilon} - h)/h$ (рис. 3.8-3).

Подобным образом постоянная Ламэ μ задаёт в первом приближении отношение компоненты T^{ε}_{23} тензора напряжений Коши к величине $\varepsilon = \operatorname{tg} \vartheta^{\varepsilon}$ (в обозначениях рис. 3.8-1). Поэтому μ называется также *модулем сдвига* для данного материала. И наконец, число $(3\lambda + 2\mu)$ характеризует в первом приближении отношение давления $\pi^{\varepsilon} = \pi\varepsilon$ к относительному уменьшению диаметра шара ε (рис. 3.8-2). Постоянная

$$\varkappa = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$$

называется *модулем объёмного сжатия* для данного материала.

Приведённые здесь рассуждения, по существу, лежат в основе экспериментального нахождения постоянных Ламэ λ и μ, коэффициента Пуассона ν и модуля Юнга E для конкретных материалов. Средние значения этих постоянных для некоторых распространённых упругих материалов приведены в табл. 3.8-1.

Таблица 3.8-1

Средние значения постоянных E, ν, λ, μ для распространённых материалов

	E (10^5 кг/см^2)	ν	λ (10^5 кг/см^2)	μ (10^5 кг/см^2)	$\varkappa = \frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)$ (10^5 кг/см^2)
Сталь	21	0.28	10	8.2	16
Железо	20	0.28	9.9	7.8	15
Медь	11	0.34	8.7	4.1	11
Бронза	10	0.31	6.2	3.8	8.8
Алюминий	7.0	0.34	5.6	2.6	7.3
Стекло	5.5	0.25	2.2	2.2	3.7
Никель	2.2	0.30	1.3	0.85	1.8
Свинец	1.8	0.44	4.6	0.63	5.0
Резина	0.037	0.485	0.40	0.012	0.41

Следует отметить, что физическое истолкование, данное каждому из этих параметров, определяет соответствующие единицы измерения.

Постоянные Ламэ, коэффициент Пуассона и модуль Юнга связаны соотношениями

$$\boxed{\begin{aligned} \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, & E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned}}$$

и, значит,

$$\boxed{\lambda > 0 \text{ и } \mu > 0 \Leftrightarrow 0 < \nu < 1/2 \text{ и } E > 0.}$$

Замечания. (1) Первый и второй эксперименты, описанные выше, можно осуществить также и в случае несжимаемых материалов, поскольку „в первом приближении" соответствующие деформации сохраняют объём (при условии что $\nu = 1/2$ для кругового цилиндра). Однако *во втором эксперименте несжимаемые материалы не допускаются, поскольку при сделанных предположениях о виде перемещений имеем* $\mathrm{vol}\,\Omega^{\varepsilon} = (1 - 3\varepsilon + o(\varepsilon))\mathrm{vol}\,\Omega$. Подобного рода вопросы обсуждаются в работе Scott [1986].

(2) До сих пор мы рассматривали свойства определяющего уравнения для упругого материала при малых значениях $\|\boldsymbol{E}\|$, т. е. при „не слишком больших" деформациях. Определяющие уравнения при „бóльших" деформациях будут изучаться в § 4.6.

(3) Деформации „специального" вида, а также вызывающие их приложенные силы, типа рассмотренных в этом параграфе в связи с нахождением постоянных Ламэ, подробно обсуждаются в книге Green & Zerna [1968, гл. 3]; см. также Ogden [1984, § 5.2].

(4) По поводу многообразных конкретных приложений и интерпретаций определяющих уравнений для упругих материалов см., в частности: Murnaghan [1951], Varga [1966], Bell [1973], Chen & Saleeb [1982], Ogden [1984] [1]. ■

В заключение следует подчеркнуть, что в основу доказательства существования и экспериментального нахождения постоянных Ламэ было положено асимптотическое разложение определяющего уравнения по степеням тензора деформации Грина — Сен-Венана $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{u})$, а не *линеаризованного тензора деформации* $\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\boldsymbol{u})$, который часто используется для этой цели. Последний подход страдает недостатком общности, ибо может возникнуть ошибочное впечатление, что постоянные Ламэ относятся только к линеаризованной теории упругости.

3.9. Материалы Сен-Венана—Кирхгофа

Если пренебречь членами высокого порядка в асимптотическом разложении второго тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа, то мы получим отображение, которое естественно рассмо-

[1] На русском языке можно рекомендовать монографию Трусделла [1975]. — *Прим. перев.*

треть первым в качестве возможной функции реакции, что и было сделано Сен-Венаном (St Venant [1844]) и Кирхгофом (Kirhhoff [1852]). Упругий материал называется **материалом Сен-Венана — Кирхгофа**, если соответствующая функция реакции для второго тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа имеет вид

$$\boxed{\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \tilde{\Sigma}(\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E} \in \mathbb{S}^3_>,}$$

где λ и μ — некоторые постоянные. Очевидно, что такой материал однороден и отсчётная конфигурация является естественным состоянием. Кроме того,

$$\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{C}) = \left\{\frac{\lambda}{2}(\iota_1(\boldsymbol{C}) - 3) - \mu\right\}\boldsymbol{I} + \mu\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} + 2E,$$

где $\iota_1(\boldsymbol{C}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{C}$, так что этот материал не зависит от системы отсчёта и изотропен, в силу теоремы 3.6-2. Таким образом, числа λ и μ в точности являются постоянными Ламэ для материала Сен-Венана — Кирхгофа. Отметим, что, вводя модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν, соответствующее определяющее уравнение можно записать в эквивалентной форме

$$\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \frac{E}{(1+\nu)}\left\{\frac{\nu}{(1-2\nu)}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}\right\}.$$

Следовательно, отображение $\boldsymbol{E} \to \check{\Sigma}(\boldsymbol{E})$, отвечающее материалу Сен-Венана—Кирхгофа, линейно по определению. Укажем, однако, на нелинейность соответствующего отображения

$$\boldsymbol{u} \to \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})) = \lambda(\operatorname{tr}\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{I} + \mu(\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\boldsymbol{u}) + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{I} + \mu\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{u},$$

содержащего квадратичные члены, где зависимость тензора деформации $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ от вектора перемещений $\boldsymbol{u}$ задаётся соотношением

$$2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{u}.$$

Эта нелинейность очевидна также из координатной записи определяющего уравнения, которую мы сейчас приведём н которой будем пользоваться в дальнейшем. Полагая $\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = (\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}))$ и $\boldsymbol{E} = (E_{ij})$, имеем

$$\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}) = \lambda E_{kk}\delta_{ij} + 2\mu E_{ij},$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k),$$

что эквивалентно равенствам

$$\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}) = a_{ijkl}E_{kl},$$

$$\text{где}\quad a_{ijkl} := \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Поскольку материалы Сен-Венана—Кирхгофа представляют собой простейшую нелинейную модель упругих материалов (в том смысле, что класс таких материалов является простейшим из классов материалов, удовлетворяющих теореме 3.8-1), *их широко используют в конкретных расчётах* в качестве модели материала, часто в сочетании с методами конечных элементов (см., например, Oden [1972] и Washizu [1975]).

Тем не менее относительная простота практического применения этой модели не может восполнить целый ряд её недостатков. Так например, имеет место довольно неожиданный факт обратимости соответствующего линейного отображения

$$\check{\Sigma}\colon \boldsymbol{E} \in \mathbb{S}^3 \to \Sigma = \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} \in \mathbb{S}^3.$$

Легко видеть, что такое отображение обратимо в том и только в том случае, когда $\mu(3\lambda + 2\mu) \neq 0$ (в § 3.8 было показано, что для реальных материалов $\lambda > 0$, $\mu > 0$); при этом

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(\operatorname{tr}\Sigma)\boldsymbol{I} + \frac{1}{2\mu}\Sigma$$
$$= \frac{1}{E}\{-\nu(\operatorname{tr}\Sigma)\boldsymbol{I} + (1+\nu)\Sigma\},$$

что эквивалентно равенствам (при $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$)

$$E_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl},$$

$$\text{где}\quad A_{ijkl} := -\frac{v}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{(1+\nu)}{2E}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Однако рассмотрение некоторых „задач о выворачивании“ (§ 5.8) указывает на возможность бóльших деформаций при малых напряжениях (Antman [1979], Truesdell [1978]), тогда как линейная зависимость означает, что малым напряжениям соответствуют малые деформации и наоборот. В связи с этим представляет интерес весьма неожиданный результат, установленный Огденом (Ogden [1977]): в общем случае изотропных упругих твёрдых тел существует по крайней мере четыре различных градиента деформации $\boldsymbol{F}$, отвечающих произвольно заданному первому тензору напряжений Пиолы—Кирхгофа $\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})$.

Ещё один недостаток состоит в том, что, хотя такие материалы являются гиперупругими, соответствующая им функция запасённой энергии не обладает свойством поливыпуклости (понятия гиперупругости и поливыпуклости вводятся в следующей главе). В силу этого до настоящего времени для таких материалов получены лишь некоторые частные теоремы существования (приводимые ниже). Отсутствие в соответствующей функции запасённой энергии членов, не позволяющих определителю $\det \nabla \varphi$ принимать близкие к нулю значения (а тем более отрицательные), также указывает на существенное несовершенство рассмотренной модели как с математической точки зрения, так и с практической, поскольку всякая приемлемая модель должна исключать подобные явления (§ 4.6).

В лучшем случае материалы Сен-Венана—Кирхгофа целесообразно рассматривать при сильных ограничениях на „малость" деформаций $\boldsymbol{E}$, что вполне согласуется с их определением. Поэтому часто говорят, что такие материалы служат моделью с „большими перемещениями и малыми деформациями". Тем не менее, при всех указанных недостатках, материалы Сен-Венана—Кирхгофа представляются более приемлемыми с практической точки зрения, нежели широко используемые линеаризованные модели (гл. 6).

Упражнения

3.1. (1) Покажите, что отображения $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{U}$, задаваемые полярным разложением $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$, непрерывны, когда $\boldsymbol{F}$ пробегает множество всех обратимых матриц. Дифференцируемы ли эти отображения?

(2) Покажите, что отображение $\boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^n_> \to \boldsymbol{C}^{1/2} \in \mathbb{S}^n_>$ бесконечно дифференцируемо; вычислите его первую и вторую производные.

(3) Покажите, что отображение $\boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^n_> \to \{\boldsymbol{C}^{1/2}\}^{-1} \in \mathbb{S}^n$ бесконечно дифференцируемо; вычислите его первую и вторую производные.

Замечание. По поводу этих и других результатов в этом направлении см. Guo [1984], Hoger & Carlson [1984a, 1984b], Ting [1985].

3.2. Пусть задана матрица $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^n_+$.

(1) Покажите, что ортогональная матрица, входящая в полярное разложение матрицы $\boldsymbol{F}$ (теорема 3.2-2), является единственным решением следующей задачи на минимум: найти матрицу $\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n_+$, такую что

$$\|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{R}\| = \inf_{\boldsymbol{S} \in \mathbb{O}^n_+} \|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{S}\|.$$

(2) На основании п. (1) дайте ещё одно доказательство теоремы о полярном разложении.

Замечание. Эти результаты получены в работе Martins & Podio-Guidugli [1979]. См. также Martins & Podio-Guidugli [1980].

3.3. (1) Покажите, что полярное разложение вырожденной матрицы $\boldsymbol{F}$ неединственно; охарактеризуйте максимально точно возможное различие двух полярных разложений $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{U}_1$ и $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U}_2$ для такой матрицы.

(2) Покажите, что ранг матрицы равен числу её положительных сингулярных значений.

3.4. Цель этого упражнения — дать ещё одно доказательство теоремы 3.2-4.

(1) Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — симметрические матрицы с собственными значениями λ_i и μ_i соответственно, занумерованными в порядке невозрастания:

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n, \qquad \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n.$$

Покажите, что $\operatorname{tr} \boldsymbol{AB} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$ (Mirsky [1959]).

(2) Покажите, что утверждение теоремы 3.2-4 вытекает из (1). Для этого установите соответствие между сингулярными значениями произвольной квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ и собственными значениями симметрической матрицы

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

3.5. Цель этого упражнения — дать третье доказательство теоремы 3.2-4.

(1) Положим $\boldsymbol{D}_\alpha = \mathbf{Diag}\,\alpha_i$, $\boldsymbol{D}_\beta = \mathbf{Diag}\,\beta_i$, где числа α_i, β_i занумерованы в порядке невозрастания:

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0, \qquad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n \geqslant 0.$$

Пользуясь методом множителей Лагранжа (см., например, Ciarlet [1983, p. 149]), покажите, что

$$\max_{\boldsymbol{P},\, \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^n} |\operatorname{tr}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_\alpha \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_\beta)| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

(2) Покажите, что утверждение теоремы 3.2-4 вытекает из (1).

3.6. Дайте ещё одно доказательство эквивалентности условия (a) теоремы 3.3-1 аксиоме независимости от системы отсчёта; при этом считайте деформированную конфигурацию фиксированной и произведите поворот базиса. Для заданного поворота $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$ выпишите тензор напряжений Коши и градиент деформации в новом базисе $(\boldsymbol{e}'_i)$, где $\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}_i$.

3.7. (1) Покажите, что линейное отображение $\mathbb{M}^3$ в $\mathbb{M}^3$, сужение которого на множество $\mathbb{O}^3_+$ постоянно, тождественно равно нулю.

(2) Пусть отсчётная конфигурация является естественным состоянием. Покажите, что ни одна из функций реакции $\hat{\boldsymbol{T}}$ и $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}$ не может быть одновременно независимой от системы отсчёта и линейной по $\boldsymbol{F}$ (Fosdick & Serrin [1979]).

(3) Покажите, что функция реакции $\hat{\boldsymbol{T}}$ может одновременно быть независимой от системы отсчёта и линейной по $\boldsymbol{F}$, если отсчётная конфигурация не является естественным состоянием (Podio-Guidugli [1987a]).

(4) Покажите, что функция реакции $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}$ не может быть одновременно независимой от системы отсчёта и линейной по $\boldsymbol{F}$, даже если отсчётная конфигурация не является естественным состоянием (Podio-Guidugli [1987a]).

Замечание. Другие результаты такого типа можно найти в работах Bampi & Morro [1982], Dunn [1981].

3.8. Рассмотрим упругий материал, который может не быть изотропным в некоторой точке $x \in \bar{\Omega}$. Покажите, что множество всех матриц поворота $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$, удовлетворяющих соотношению

$$\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F}) = \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{FQ}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,$$

образует подгруппу группы $\mathbb{O}^3_+$.

3.9. Рассмотрим однородный и изотропный упругий материал, функция реакции которого $\tilde{\Sigma}$: $\mathbb{S}^3_> \to \mathbb{S}^3$ имеет вид (теорема 3.6-2)

$$\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{C}) = \gamma_0(\iota_C)\boldsymbol{I} + \gamma_1(\iota_C)\boldsymbol{C} + \gamma_2(\iota_C)\boldsymbol{C}^2 \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_>.$$

Очевидно, что функция $\tilde{\Sigma}$ дифференцируема в точке $\boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^2_>$, если функции γ_0, γ_1, γ_2 дифференцируемы в точке ι_C. Верно ли обратное?

Замечание. Дифференцируемость функций γ_α в точке $(3, 3, 1)$ являлась одним из предположений теорем 3.7-1 и 3.8-1.

3.10. Положим

$$\iota(\mathbb{S}^3_>) = \{\iota_A \in \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^3_>\}.$$

Дайте возможно более полное описание этого подмножества множества $]0, +\infty[^3$. Для этого охарактеризуйте его границу. В качестве следствия покажите, что теорема о сохранении области (теорема 1.2-5) неприменима к множеству $\iota(\mathbb{S}^3_>)$; тем не менее $\iota(\mathbb{S}^3_<)$ есть образ открытого подмножества в $\mathbb{S}^3$ при непрерывном отображении.

Замечание. Множество $\iota(\mathbb{S}^3_>)$ является областью определения функций $\beta_\alpha(x, \cdot)$ и $\gamma_\alpha(x, \cdot)$, $\alpha = 0, 1, 2$, из теоремы 3.6-2.

3.11. В этом упражнении обозначения и предположения те же, что и в теореме 3.7-1 (для сокращения записи зависимость от x не указана). Покажите, что если функции γ_0, γ_1, γ_2 дважды дифференцируемы в точке ι_I, то второй тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа имеет вид

$$\Sigma = \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = -\pi \boldsymbol{I} + \lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{E}) \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{E} \\ + \nu_1 (\operatorname{tr} \boldsymbol{E}^2) \boldsymbol{I} + \nu_2 (\operatorname{tr} E)^2 \boldsymbol{I} + \nu_3 (\operatorname{tr} \boldsymbol{E}) \boldsymbol{E} + \nu_4 \boldsymbol{E}^2 + o(\|\boldsymbol{E}\|^2),$$

где ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 — некоторые постоянные. Если в этом разложении пренебречь членом $o(\|\boldsymbol{E}\|^2)$, то мы получим определяющее уравнение, соответствующее так называемому *материалу Мёрнона* (по имени Ф. Мёрнона) (Murnaghan [1937], хотя, по-видимому, впервые этот случай рассмотрел В. Фойгт (Voigt [1893—1894])). Такая модель, в общем, шаг вперёд по сравнению с материалами Сен-Венана—Кирхгофа, тем не менее она представляет лишь ограниченный интерес, как с практической точки зрения, так и с теоретической. В частности, доводы, приведённые Новожиловым [1958], показывают, что реально приемлемыми являются лишь такие функции реакции $\check{\Sigma}$, в которые входят только нечётные функции тензора $\boldsymbol{E}$.

3.12. Пусть $\boldsymbol{G}: \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ — отображение, удовлетворяющее условию

$$(*) \qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^3_>,\ \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

(1) Покажите, что (соотношение $(*)$ выполнено для всех $\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^3_>$. $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3$.

(2) Покажите, что если $\boldsymbol{G}$ линейно, то $(*)$ выполняется для всех $\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^3$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3$.

(3) Покажите непосредственно, что при линейном $\boldsymbol{G}$ существуют постоянные λ и μ, для которых

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = \lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{A}) \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{A} \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^3.$$

Замечание. Эти результаты доказаны в работах Gurtin [1972, § 22; 1974; 1981b, p. 235], Martins & Podio-Guidugli [1978]. См. также Guo [1983a, 1983b], Telega [1984], de Boor [1985], где приведены обобщения на случай отображений $\boldsymbol{G}: \mathbb{M}^3 \to \mathbb{M}^3$, удовлетворяющих условию $(*)$.

(4) Покажите, что функция Σ удовлетворяет условию $(*)$ и что результат п. (3), таким образом, приводит к более короткому доказательству теоремы 3.8-1, когда функция реакции $\check{\Sigma}$ линейна по $\boldsymbol{E}$.

3.13. Рассмотрим прямоугольный брус из однородного изотропного материала, который занимает отсчётную конфигурацию $\overline{\Omega}$, указанную на рис. 3.8-1. Предположим, что этот брус подвергается *простому сдвигу*, т. е. деформации вида

$$\varphi: x \in \overline{\Omega} \to \varphi(x) = x + \alpha x_3 e_2, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(1) Покажите, что тензор напряжений Коши не зависит от x^{φ}, а также что $T_{12}^{\varphi} = T_{13}^{\varphi} = 0$ и T_{23}^{φ} — нечётная функция от α.

(2) Покажите, что $T_{22}^{\varphi} - T_{33}^{\varphi} = \alpha T_{23}^{\varphi}$.

Замечания. Из равенства, указанного в п. (2), вытекает, что $T_{22}^{\varphi} \neq T_{33}^{\varphi}$ при $\alpha \neq 0$ (это так называемый *эффект Пойтинга*). Отметим также, что это равенство справедливо независимо от того, из какого материала состоит тело; оно называется *универсальным соотношением Ривлина.* Обсуждение этих вопросов можно найти в работах Wang & Truesdell [1973, p. 280 и далее], Gurtin [1981a, гл. 6]. См. также Beatty [1987], Rajagopal & Wineman [1987].

ГЛАВА 4

ГИПЕРУПРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ

Введение

Если материал является упругим, то мы можем подставить в уравнения равновесия вместо первого тензора напряжений Коши $\boldsymbol{T}(x)$ функцию реакции $\hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x))$. Тогда мы получим систему, состоящую из трёх нелинейных уравнений с частными производными, а также граничных условий; неизвестными являются три компоненты деформации φ. Эта система имеет вид

$$\begin{cases} -\operatorname{\mathbf{div}} \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x)) = \hat{\boldsymbol{f}}(x, \varphi(x)), & x \in \Omega, \\ \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x))\,\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\varphi(x)), & x \in \Gamma_1, \\ \varphi(x) = \varphi_0(x), \quad x \in \Gamma_0. \end{cases}$$

Говорят, что упругий материал является *гиперупругим*, если существует так называемая *функция запасённой энергии* $\hat{W}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$, для которой (см. § 4.1)

$$\hat{\boldsymbol{T}}(x, \boldsymbol{F}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{F}) \quad \text{при всех} \quad x \in \bar{\Omega},\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

В этом случае при условии консервативности приложенных сил решение указанной краевой задачи формально эквивалентно нахождению стационарной точки некоторого функционала, называемого *полной энергией* (теоремы 4.1-1, 4.1-2), на множестве *допустимых деформаций* $\psi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих следующим ограничениям: $\det \nabla\psi > 0$ в Ω, $\psi = \varphi_0$ на Γ_0. Чтобы упростить изложение, мы не будем учитывать требование инъективности отображения ψ вплоть до гл. 5. Если приложенные силы являются замороженными нагрузками, то полная энергия выражается в виде

$$I(\psi) = \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\psi(x))\,\mathrm{d}x - \left\{ \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \psi\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g} \cdot \psi\,\mathrm{d}a \right\}.$$

Как будет показано (теорема 4.2-1), из ***аксиомы независимости материала от системы отсчёта*** вытекает, что в каждой точке $x \in \bar{\Omega}$ функция запасённой энергии $\hat{W}(x, \cdot)$ является функцией только тензора деформации $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$, т. е. существует отображение $\tilde{W}(x, \cdot)$, для которого

$$\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) = \tilde{W}(x, \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,$$

а также что в этом случае второй тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа имеет вид (теорема 4.2-2)

$$\tilde{\Sigma}(x, \boldsymbol{C}) = 2\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \boldsymbol{C}}(x, \boldsymbol{C}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_>.$$

Затем устанавливается (теорема 4.4-1), что для материала, *изотропного в точке* $x \in \bar{\Omega}$, функцию запасённой энергии в точке x можно записать в ещё более простом виде, поскольку в этом случае существует функция $\dot{W}(x, \cdot)$, такая что

$$\tilde{W}(x, \boldsymbol{C}) = \dot{W}(x, \iota_C) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_>.$$

Кроме того, для однородного и изотропного гиперупругого материала показано (теорема 4.5-1), что если отсчётная конфигурация является естественным состоянием, то в асимптотическом разложении функции запасённой энергии при малых значениях тензора деформации $\boldsymbol{E}$ члены низшего порядка имеют вид

$$\tilde{W}(\boldsymbol{C}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu \operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2 + o(\|\boldsymbol{E}\|^2), \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E},$$

где λ и μ — постоянные Ламэ данного материала.

Затем более подробно изучаются свойства функции запасённой энергии, которые будут положены в основу теории существования в гл. 7. Сначала мы характеризуем *поведение функции запасённой энергии при больших деформациях* (§ 4.6). Это поведение математически отражает интуитивное представление, согласно которому „экстремальным деформациям должны соответствовать бесконечно большие напряжения", и мы характеризуем его как в форме *асимптотики при* $\det \boldsymbol{F} \to 0^+$:

$$\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) \to +\infty \quad \text{при} \quad \det \boldsymbol{F} \to 0^+,$$

так и в форме *неравенства коэрцитивности*

$$\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) \geqslant \alpha\{\|\boldsymbol{F}\|^p + \|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^q + (\det \boldsymbol{F})^r\} + \beta$$
$$\text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,$$

где $\alpha > 0$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, и p, q, r — достаточно большие постоянные. *Отсутствие выпуклости по переменной* $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$ *у функции запасённой энергии* (теорема 4.8-1) служит основным препятствием при математическом исследовании соответствующей задачи на минимум. Чтобы обойтись без требования выпуклости, Дж. Болл ввёл фундаментальное понятие *поливыпуклых функций запасённой энергии*, которое мы обсудим в § 4.9.

Далее мы рассматриваем (теорема 4.9-2) введённый Огденом важный класс поливыпуклых функций, имеющих вид

$$\widehat{W}(\boldsymbol{F}) = \sum_{i=1}^{M} a_i \operatorname{tr} (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{\gamma_i/2} + \sum_{j=1}^{N} b_j \operatorname{tr} \mathbf{Cof} (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{\delta_j/2} + \Gamma(\det \boldsymbol{F}),$$

где $a_i > 0$, $b_j > 0$, $\gamma_i \geqslant 1$, $\delta_j \geqslant 1$ и Γ: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\delta \to 0^+} \Gamma(\delta) = +\infty \quad \text{и} \quad \Gamma(\delta) \geqslant c\delta^r + d$$

при $c > 0$ и достаточно большом r. В заключение этой главы (теорема 4.10-1) мы покажем, что можно найти очень простые функции запасённой энергии типа Огдена, в разложении которых относительно тензора деформации Грина—Сен-Венана $\boldsymbol{E}$ члены низшего порядка имеют вид $\frac{1}{2}\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu \operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2$ при произвольных постоянных Ламэ $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. Завершает главу ряд конкретных примеров функций запасённой энергии, широко используемых на практике.

4.1. Гиперупругие материалы

Уравнения равновесия в отсчётной конфигурации для первого тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа (теорема 2.6-1), определение упругого материала, а также предположение, что некоторое граничное условие на положения задано на подмножестве $\Gamma_0 = \Gamma - \Gamma_1$ границы, — всё это позволяет заключить, что деформация φ является решением следующей *краевой задачи*:

$$\boxed{\begin{aligned} &-\operatorname{\mathbf{div}} \widehat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x)) = \widehat{\boldsymbol{f}}(x, \varphi(x)), && x \in \Omega, \\ &\widehat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x))\boldsymbol{n} = \widehat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\varphi(x)), && x \in \Gamma_1, \\ &\varphi(x) = \varphi_0(x), && x \in \Gamma_0, \end{aligned}}$$

где $\widehat{\boldsymbol{T}}$: $\overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{M}^3$ — функция реакции для первого тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа, а функции $\widehat{\boldsymbol{f}}$ и $\widehat{\boldsymbol{g}}$ выбраны в соответствии с примерами § 2.7. Не вошедшие в эту систему уравнения равновесия, выражающие симметричность тензора напряжений Коши, налагают некоторое ограничение на функцию реакции $\widehat{\boldsymbol{T}}$. На данном этапе мы не будем учитывать это ограничение, поскольку, как выяснится далее, оно и так оказывается выполненным в силу предположений о гиперупругости материала (теорема 4.2-2).

В теореме 2.6-1 было показано, что первые два уравнения эквивалентны, по крайней мере формально, принципу виртуальной работы в отсчётной конфигурации, который может быть записан в виде уравнений

$$\int_\Omega \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x)) : \nabla\vartheta(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \hat{\boldsymbol{f}}(x, \varphi(x)) \cdot \vartheta(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\varphi(x)) \cdot \vartheta(x)\,\mathrm{d}a,$$

справедливых для всех достаточно регулярных векторных полей $\vartheta\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, равных нулю на Γ_0. В § 2.7 были выделены классы *объёмных и поверхностных приложенных сил, называемых консервативными.* Для таких сил интегралы, входящие в правую часть последнего равенства, могут быть представлены как производные Гато:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_\Omega \hat{\boldsymbol{f}}(x, \varphi(x)) \cdot \vartheta(x)\,\mathrm{d}x = F'(\varphi)\,\vartheta, \\ &\int_{\Gamma_1} \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\varphi(x)) \cdot \vartheta(x)\,\mathrm{d}a = G'(\varphi)\,\vartheta \end{aligned}}$$

функционалов F и G, имеющих вид

$$F(\psi) = \int_\Omega \hat{F}(x, \psi(x))\,\mathrm{d}x, \qquad G(\psi) = \int_{\Gamma_1} \hat{G}(x, \psi(x), \nabla\psi(x))\,\mathrm{d}a.$$

Естественно возникает вопрос о возможности подобного представления левой части равенства, выражающего принцип виртуальной работы, в виде производной Гато соответствующего функционала W, а именно в виде

$$\boxed{\int_\Omega \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x)) : \nabla\vartheta(x)\,\mathrm{d}x = W'(\varphi)\,\vartheta.}$$

Если такое представление имеет место, то принцип виртуальной работы становится эквивалентным утверждению, что производная Гато функционала $\{W - (F + G)\}$ равна нулю для всех „вариаций“, обращающихся в нуль на Γ_0. Исходя из этих соображений, дадим следующее определение, обоснованию которого посвящена теорема 4.1-1:

Упругий материал с функцией реакции $\hat{\boldsymbol{T}}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{M}^3$ называется **гиперупругим**, если существует функция

$$\hat{W}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R},$$

дифференцируемая по переменной $F \in \mathbb{M}^3_+$ при каждом $x \in \bar{\Omega}$ и такая, что

$$\boxed{\hat{T}(x, F) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, F) \quad \text{для всех} \quad x \in \bar{\Omega}, \quad F \in \mathbb{M}^3_+,}$$

или, в записи по компонентам,

$$\hat{T}_{ij}(x, F) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial F_{ij}}(x, F).$$

Обозначение $\partial/\partial F$ для градиента вещественнозначной функции на пространстве матриц было введено в конце § 1.2.

Функция $\hat{W}$ известна как **функция запасённой энергии**. Естественно, что в случае однородного материала она зависит лишь от аргумента $F \in \mathbb{M}^3_+$.

Замечания. (1) Подробное изложение вопросов, связанных с принципом виртуальной работы и его отношением к понятию энергии, содержится в работах Жермена (Germain [1972, 1973]).

(2) Функцию запасённой энергии иногда называют *функцией энергии деформации*; кроме того, некоторые авторы считают функцией запасённой энергии введённую выше функцию, умноженную на плотность массы в отсчётной конфигурации.

(3) Функция запасённой энергии конкретного упругого материала определена с точностью до слагаемого, являющегося произвольной функцией от $x \in \bar{\Omega}$.

(4) На первый взгляд, приведённое выше определение гиперупругого материала исходит из чисто математических соображений. Тем не менее оно допускает также истолкование, которое ближе к механической точке зрения, а именно: можно показать, что необходимым и достаточным условием гиперупругости материала является „неотрицательность работы в замкнутых процессах“, см. Gurtin [1973; 1981b, с. 186], а также Marques [1984], где приведен результат такого же типа. ■

Теорема 4.1-1. *Пусть имеется гиперупругий материал, к которому приложены консервативные объёмные и поверхностные силы. Тогда уравнения*

$$\boxed{\begin{aligned} -\mathbf{div}\, \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, \nabla\varphi(x)) &= \hat{f}(x, \varphi(x)), \qquad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, \nabla\varphi(x))\, n &= \hat{g}(x, \nabla\varphi(x)), \qquad x \in \Gamma_1, \end{aligned}}$$

формально эквивалентны уравнениям

$$\boxed{I'(\varphi)\vartheta = 0}$$

для всех гладких отображений ϑ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, *равных нулю на* Γ_0, *причём функционал* I *определён формулой*

$$\boxed{I(\psi) = \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\psi(x))\,dx - \{F(\psi) + G(\psi)\}}$$

для всех достаточно гладких отображений ψ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$.

Доказательство. Для любого достаточно гладкого отображения ψ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ положим

$$W(\psi) := \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\psi(x))\,dx.$$

Вычислим формально производную Гато $W'(\psi)\vartheta$, где ϑ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ — произвольное векторное поле. Пользуясь предположением о гиперупругости материала, получаем

$$\begin{aligned} W(\psi + \vartheta) - W(\psi) &= \int_\Omega \{\hat{W}(x, \nabla\psi(x) + \nabla\vartheta(x)) - W(x, \nabla\psi(x))\}\,dx \\ &= \int_\Omega \left\{ \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, \nabla\psi(x)) : \nabla\vartheta(x) + o(|\nabla\vartheta(x)|;\ x) \right\} dx \\ &= \int_\Omega \hat{T}(x, \nabla\psi(x)) : \nabla\vartheta(x)\,dx + \int_\Omega o(|\nabla\vartheta(x)|;\ x)\,dx. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство

$$W'(\psi)\vartheta = \int_\Omega \hat{T}(x, \nabla\psi(x)) : \nabla\vartheta(x)\,dx,$$

при условии что в пространстве отображений ψ введена норма $\|\cdot\|$, относительно которой линейная форма

$$\vartheta \to \int_\Omega \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, \nabla\psi(x)) : \nabla\vartheta(x)\,dx$$

непрерывна и

$$\int_\Omega o(|\nabla\vartheta(x)|;\ x)\,dx = o(\|\vartheta\|).$$

Например, это условие выполнено, если частные производные $\partial\hat{W}/\partial F_{ij}$ как функции $\boldsymbol{F}$ непрерывны по Липшицу, а в пространстве отображений $\boldsymbol{\psi}$ введена норма пространства $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ (подробности см. в упражнении 4.1).

Таким образом, мы показали, что

$$I'(\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{\vartheta} = \int_\Omega \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\boldsymbol{\varphi}(x)) : \nabla\boldsymbol{\vartheta}(x)\,\mathrm{d}x - \left\{\int_\Omega \hat{\boldsymbol{f}}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))\cdot\boldsymbol{\vartheta}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\boldsymbol{\varphi}(x))\cdot\boldsymbol{\vartheta}(x)\,\mathrm{d}a\right\},$$

для произвольного векторного поля $\boldsymbol{\vartheta}$: $\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^3$, и, значит, утверждение теоремы вытекает из принципа виртуальной работы в отсчётной конфигурации (теорема 2.6-1). ■

Функционал W, определённый формулой

$$\boxed{W(\boldsymbol{\psi}) = \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\boldsymbol{\psi}(x))\,\mathrm{d}x}$$

для всех достаточно гладких отображений $\boldsymbol{\psi}$, называется **энергией деформации**, а функционал I — **полной энергией**.

Приведём теперь полученный результат к более традиционному виду, когда функции, а также их вариации (в данном случае $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\vartheta}$ соответственно) принадлежат *одному и тому же* векторному пространству. Для этого предположим, что существует отображение из $\bar{\Omega}$ в $\mathbb{R}^3$, совпадающее с $\boldsymbol{\varphi}_0$ на Γ_0; обозначим его снова через $\boldsymbol{\varphi}_0$. Рассмотрим функционал I_0, определённый для любого отображения $\boldsymbol{\chi}$ с помощью формулы

$$I_0(\boldsymbol{\chi}) = I(\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\varphi}_0).$$

Функции $(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0)$ и $\boldsymbol{\vartheta}$ принадлежат *одному* векторному пространству, и мы можем заключить, что *функционал* I_0 *стационарен* (§ 1.2) в точке $(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0)$, поскольку

$$I_0'(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0) = 0 \Leftrightarrow I_0'(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0)\,\boldsymbol{\vartheta} = I'(\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{\vartheta} = 0$$

для всех $\boldsymbol{\vartheta}$, равных нулю на Γ_0. Несколько расширяя понятие стационарности, будем говорить, что *полная энергия I стационарна на деформации $\boldsymbol{\varphi}$ относительно вариаций, равных нулю на* Γ_0.

Заметим, что деформация, на которой достигается минимум полной энергии I, является одной из стационарных точек функционала I_0. Это наблюдение приводит к очень важному следствию из теоремы 4.1-1, а именно справедлива

Теорема 4.1-2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 4.1-1 *и приняты те же обозначения. Тогда любое достаточно гладкое отображение* φ, *удовлетворяющее условиям*

$$\boxed{\begin{aligned}&\varphi\in\Phi:=\{\psi\colon\bar\Omega\to\mathbb{R}^3;\ \psi=\varphi_0\ \text{на}\ \Gamma_0\}\\ &\text{и}\ I(\varphi)=\inf_{\psi\in\Phi} I(\psi),\quad\text{где}\\ &I(\psi)=\int_\Omega \hat W(x,\nabla\psi(x))\,dx-\{F(\psi)+G(\psi)\},\end{aligned}}$$

является решением следующей краевой задачи:

$$\boxed{\begin{aligned}&-\mathbf{div}\,\frac{\partial\hat W}{\partial F}(x,\nabla\varphi(x))=\hat f(x,\varphi(x)),\qquad x\in\Omega,\\ &\varphi(x)=\varphi_0(x),\qquad x\in\Gamma_0,\\ &\frac{\partial\hat W}{\partial F}(x,\nabla\varphi(x))\,n=\hat g(x,\nabla\varphi(x)),\qquad x\in\Gamma_1.\end{aligned}}\quad\blacksquare$$

В вариационном исчислении подобная краевая задача носит название *уравнений Эйлера—Лагранжа*, соответствующих полной энергии I. Под этим подразумевается, что любое достаточно гладкое **отображение** φ, **минимизирующее** полную энергию I на *множестве допустимых решений* Φ, т. е. любое $\varphi\in\Phi$, для которого $I(\varphi)=\inf_{\psi\in\Phi}I(\psi)$, является решением указанной краевой задачи.

Замечания. (1) В этой ситуации нетрудно учесть и условие сохранения ориентации $\det\nabla\varphi>0$, которому по определению должна удовлетворять в Ω всякая деформация. Для этого следует заметить, что множество

$$\{\chi\in\mathscr{C}^1(\bar\Omega;\ \mathbb{R}^3);\ \det(\nabla(\varphi_0+\chi))>0\ \text{в}\ \bar\Omega,\ \chi=o\ \text{на}\ \Gamma_0\}$$

открыто в векторном пространстве

$$\{\chi\in\mathscr{C}^1(\bar\Omega;\ \mathbb{R}^3);\ \chi=o\ \text{на}\ \Gamma_0\}$$

(напомним, что свойства дифференцируемости и стационарности имеют место для функций, заданиых на открытых множествах; см. § 1.2).

(2) Все рассмотрения, проведённые выше относительно деформаций, можно эквивалентным образом сформулировать в терминах перемещений.

(3) Имеется обширная литература по принципу виртуальной работы, который связан с минимизацией соответствующей

энергии, а также по различным „*дополнительным*“ *вариационным принципам*, которые связаны с минимизацией соответствующей „*дополнительной энергии*“. См., например: Bufler [1983], Bielski & Telega [1986], de Campos & Oden [1984], Gałka & Telega [1982], Guo [1980], Labisch [1982], Oden & Reddy [1983], Reissner [1984, 1986], Valid [1977], Washizu [1975]. ∎

Рассмотрим теперь вопрос о том, каким образом построения и результаты гл. 3, касающиеся *определяющего уравнения*, можно сформулировать в терминах *функции запасённой энергии* для гиперупругого материала. Если не сделать специальных предположений относительно функции запасённой энергии, вряд ли можно ожидать, что соответствующее определяющее уравнение будет удовлетворять аксиоме независимости материала от системы отсчёта, а сам материал будет изотропным. Отметим также, что нам ещё предстоит учесть соотношения, входящие в систему уравнений равновесия и устанавливающие симметричность второго тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа.

4.2. Независимость материала от системы отсчёта в случае гиперупругости

Естественным образом распространяя определение, данное в § 3.3, скажем, что *функция запасённой энергии удовлетворяет аксиоме независимости материала от системы отсчёта* (или, просто, **не зависит от системы отсчёта**), если функция реакции $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}$ для соответствующего тензора напряжений Коши не зависит от системы отсчёта. Следующий результат, предоставляющий два необходимых и достаточных условия независимости функции запасённой энергии от системы отсчёта, полезно сравнить с теоремой 3.3-1.

Теорема 4.2-1. *Функция запасённой энергии* $\hat{W}\colon \bar{\Omega}\times\mathbb{M}^3_+\to\mathbb{R}$ *гиперупругого материала не зависит от системы отсчёта в том и только в том случае, когда выполнено любое из следующих условий*:

(a) *при всех* $x\in\bar{\Omega}$

$$\boxed{\hat{W}(x, \boldsymbol{QF})=\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) \text{ для всех } \boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+,\ \boldsymbol{Q}\in\mathbb{O}^3_+;}$$

(b) *существует функция* $\tilde{W}\colon \bar{\Omega}\times\mathbb{S}^3_>\to\mathbb{R}$, *такая, что*

$$\boxed{\hat{W}(x, \boldsymbol{F})=\tilde{W}(x, \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+.}$$

Доказательство. Ради сокращения записи мы не будем здесь указывать зависимость функций от $x \in \bar{\Omega}$. Как показано в теореме 3.3-1, функция реакции $\hat{T}^D$ для тензора напряжений Коши не зависит от системы отсчёта тогда и только тогда, когда

$$\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{QF}) = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^T \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

Учитывая равенство $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = (\det \boldsymbol{F})\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-T}$, отсюда заключаем, что необходимое и достаточное условие независимости от системы отсчёта функции реакции $\hat{\boldsymbol{T}}$ для первого тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QF}) = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+,$$

что эквивалентно соотношению

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{Q}^T \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{QF}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

Вычислим производную отображения

$$\hat{W}_Q\colon \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{W}_Q(\boldsymbol{F}) := \hat{W}(\boldsymbol{QF})$$

при фиксированной матрице $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$. Имеем

$$\begin{aligned}\hat{W}_Q(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) &= \hat{W}(\boldsymbol{QF}+\boldsymbol{QG}) = \hat{W}(\boldsymbol{QF}) + \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{QF})\colon \boldsymbol{QG} + o(\boldsymbol{QG}) \\ &= \hat{W}_Q(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{Q}^T\frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{QF})\colon \boldsymbol{G} + o(\boldsymbol{G}),\end{aligned}$$

поскольку $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}:\boldsymbol{C}$ для любых матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и $o(\boldsymbol{QG}) = o(\boldsymbol{G})$ при фиксированной $\boldsymbol{Q}$. Таким образом,

$$(\partial \hat{W}_Q/\partial \boldsymbol{F})(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{Q}^T \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{QF}).$$

Приведённые выше соотношения показывают, что функция запасённой энергии не зависит от системы отсчёта в том и только том случае, когда

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{F}}(\hat{W}(\boldsymbol{F}) - \hat{W}_Q(\boldsymbol{F})) = \boldsymbol{0} \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

Если $\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \hat{W}(\boldsymbol{QF}) (= \hat{W}_Q(\boldsymbol{F}))$ для всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$, то, очевидно, производная $(\partial/\partial \boldsymbol{F})(\hat{W}(\boldsymbol{F}) - \hat{W}_Q(\boldsymbol{F}))$ равна нулю. Доказать обратное несколько сложнее. Поскольку множество $\mathbb{M}^3_+$ связно (упражнение 4.2), то из равенства $(\partial/\partial \boldsymbol{F})(\hat{W}(\boldsymbol{F}) - \hat{W}_Q(\boldsymbol{F})) = \boldsymbol{0}$ вытекает, что при каждом $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$ разность $\{\hat{W}(\boldsymbol{QF}) - \hat{W}(\boldsymbol{F})\}$ постоянна относительно $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$. Следовательно, существует отображение C: $\mathbb{O}^3_+ \to \mathbb{R}$, такое что

$$\hat{W}(QF) = \hat{W}(F) + C(Q) \quad \text{для всех} \quad F \in \mathbb{M}^3_+, \quad Q \in \mathbb{O}^3_+.$$

Полагая в этом соотношении $F = Q^r$, $r \geqslant 0$, находим, что

$$\hat{W}(Q^p) = \hat{W}(I) + pC(Q) \quad \text{для всех} \quad Q \in \mathbb{O}^3_+, \quad p \geqslant 1$$

и, значит,

$$|\hat{W}(Q^p)| \geqslant p|C(Q)| - |\hat{W}(I)|.$$

Если $C(Q) \neq 0$, то $\lim_{p\to\infty} \hat{W}(Q^p) = +\infty$. Так как множество $\mathbb{O}^3_+$ компактно (из равенства $\|Q\| = \{Q : Q\}^{1/2} = 1$, справедливого для всех $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}^3$, вытекает наличие у любой последовательности матриц из $\mathbb{O}^3_+$ подпоследовательности, сходящейся в $\mathbb{O}^3_+$), а функция $\hat{W}$ непрерывна ($\hat{W}$ дифференцируема по аргументу F согласно определению), мы приходим к заключению, что $C(Q) = 0$. Последнее равенство можно также получить, исходя из теории групп; см. упражнение 4.3.

Докажем теперь эквивалентность независимости от системы отсчёта условию (b). Пусть задана матрица $F \in \mathbb{M}^3_+$. В силу теоремы о полярном разложении (теорема 3.2-2)

$$F = RU, \quad \text{где} \quad R \in \mathbb{O}^3_+, \qquad U = (F^{\mathrm{T}}F)^{1/2} \in \mathbb{S}^3_>.$$

Отсюда и из условия (а) вытекает, что

$$\hat{W}(F) = \hat{W}(RU) = \hat{W}(U) = \tilde{W}(F^{\mathrm{T}}F),$$

где

$$\tilde{W}(C) := \hat{W}(C^{1/2}) \quad \text{для всех} \quad C \in \mathbb{S}^3_>.$$

С другой стороны, пусть $\hat{W}(F) = \tilde{W}(F^{\mathrm{T}}F)$. Тогда

$$\hat{W}(QF) = \tilde{W}(F^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QF) = \tilde{W}(F^{\mathrm{T}}F) = \hat{W}(F)$$
$$\text{для всех} \quad F \in \mathbb{M}^3_+, \quad Q \in \mathbb{O}^3_+$$

и, зиачит, справедливо условие (а), которое, как уже установлеио, эквивалентно независимости $\hat{W}$ от системы отсчёта. ■

Замечания. (1) Выражение $(\partial\hat{W}/\partial F)(QF)$, использованное в доказательстве, обозначает матрицу $\partial\hat{W}/\partial F$, вычисленную в точке QF, *а не* производную отображения $\hat{W}_Q$.

(2) Далее будет показано (теорема 4.8-1), почему условие $\hat{W}(QF) = \hat{W}(F)$ для всех $F \in \mathbb{M}^3_+$, $Q \in \mathbb{O}^3_+$ не совместимо с *выпуклостью* отображения $F \to \hat{W}(F)$. Это на первый взгляд безобидное обстоятельство служит источником серьёзнейших математических трудностей, которые побудили Дж. Болла ввести бо-

лее слабое условие *поливыпуклости* (§ 4.9), являющееся одним из основных предположений в теоремах существования гл. 7.

(3) Некоторые авторы называют функцию запасённой энергии $\hat{W}$ *объективной*, если она удовлетворяет следующему условию из теоремы 4.2-1: $\hat{W}(\boldsymbol{QF}) = \hat{W}(\boldsymbol{F})$ для всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$. ■

Функцию $\tilde{W}$, построенную в теореме 4.2-1, мы также будем называть **функцией запасённой энергии**. Теперь, по аналогии с равенством, выражающим *первый* тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа через градиент „первой“ функции запасенной энергии $\hat{W}$, мы установим соотношение между *вторым* тензором напряжений Пиолы—Кирхгофа и „второй“ функцией запасённой энергии $\tilde{W}$, а именно покажем, что этот тензор является удвоенным градиентом функции $\tilde{W}$. Таким образом мы получим ещё один удобный метод распознавания гиперупругих материалов (см. теорему 4.4-3, где он применяется в случае материалов Сен-Венана—Кирхгофа).

Приведём сначала некоторые вспомогательные факты. Заметим, что функция запасённой энергии $\tilde{W}\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{S}^3_> \to \mathbb{R}$ в каждой точке $x \in \bar{\Omega}$ удовлетворяет равенству

$$\tilde{W}(x, \boldsymbol{C}) = \hat{W}(x, \boldsymbol{C}^{1/2}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_>,$$

и, значит, *она дифференцируема на открытом подмножестве* $\mathbb{S}^3_>$ *векторного пространства* $\mathbb{S}^3$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим отображение

$$\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_> \to \boldsymbol{G}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}^2 \in \mathbb{S}^3.$$

Поскольку для любого $\boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_>$ уравнение $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}^{1/2}$, а отображение $\boldsymbol{G}$ дифференцируемо, то обратное отображение $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_> \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}^{1/2}$ также является дифференцируемым в силу теоремы о локальном обращении (теорема 1.2-4). Теперь заметим, что в каждой точке $x \in \bar{\Omega}$ производную $(\partial \tilde{W}/\partial \boldsymbol{C})(x, \boldsymbol{C})$ можно всегда считать *симметрическим* тензором. В противном случае достаточно вычислить производную отображения

$$\boldsymbol{C} \in \mathbb{M}^3 \to \tilde{W}\left(x, \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\right),$$

которое, очевидно, совпадает с $\tilde{W}(x, \cdot)$ на подмножестве $\mathbb{S}^3_>$ в $\mathbb{M}^3$. Например, если $\tilde{W}(\boldsymbol{C}) = C_{12} - 4C_{21}^2$, то $\tilde{W}(\boldsymbol{C})$ можно записать в виде

$$\tilde{W}(\boldsymbol{C}) = \tfrac{1}{2}(C_{12} + C_{21}) - (C_{12} + C_{21})^2.$$

Подробно этот вопрос обсуждается в работе Cohen & Wang [1984].

Теорема 4.2-2. *Пусть имеется гиперупругий материал, которому соответствует функция запасённой энергии* $\hat{W}: \bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3 \to \mathbb{R}$, *не зависящая от системы отсчёта, и пусть функция* $\tilde{W}: \bar{\Omega} \times \mathbb{S}^3_> \to \mathbb{R}$ *при каждом* $x \in \Omega$ *задана формулой*

$$\tilde{W}(x, \boldsymbol{C}) = \hat{W}(x, \boldsymbol{C}^{1/2}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{C} \in \mathbb{S}^3_>.$$

Предположим также (это не ограничивает общности), что производная $(\partial \tilde{W}/\partial \boldsymbol{C})(x, \boldsymbol{C})$ *есть симметрический тензор. Тогда функция реакции для второго тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа имеет вид*

$$\boxed{\hat{\Sigma}(x, \boldsymbol{F}) = \tilde{\Sigma}(x, \boldsymbol{C}) = 2\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \boldsymbol{C}}(x, \boldsymbol{C}), \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}, \quad \text{для всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,}$$

что эквивалентно соотношениям

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{\Sigma}(x, \boldsymbol{F}) = \check{\Sigma}(x, \boldsymbol{E}) = \frac{\partial \check{W}}{\partial \boldsymbol{E}}(x, \boldsymbol{E}),\\ &\text{где } \check{W}(x, \boldsymbol{E}) = \tilde{W}(x, \boldsymbol{C}), \quad \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+. \end{aligned}}$$

Обратно, упругий материал, которому соответствует функция реакции $\hat{\Sigma}$, *имеющая вид*

$$\hat{\Sigma}(x, \boldsymbol{F}) = 2\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \boldsymbol{C}}(x, \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,$$
$$\text{где } \tilde{W}: \bar{\Omega} \times \mathbb{S}^3_> \to \mathbb{R},$$

является гиперупругим, причём его функция запасённой энергии задается соотношением

$$\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) = \tilde{W}(x, \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

Доказательство. Зависимость функций от $x \in \bar{\Omega}$ в доказательстве не указывается. Поскольку

$$\hat{\Sigma}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}^{-1}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}^{-1}\frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}) \quad \text{и} \quad \hat{W}(\boldsymbol{F}) = \tilde{W}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})$$

для всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$, нам нужно выразить градиент $\partial \hat{W}/\partial \boldsymbol{F}$ через градиент $\partial \tilde{W}/\partial \boldsymbol{C}$. Так как отображение $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+ \to \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \in \mathbb{S}^3_>$ непрерывно, то и матрица $(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})$ принадлежит множеству $\mathbb{S}^3_>$ при достаточно малых $\|\boldsymbol{G}\|$, если матрица $(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})$ есть элемент множества $\mathbb{M}^3_+$. Для таких матриц $\boldsymbol{G}$ имеем

$$\begin{aligned}\hat{W}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) - \hat{W}(\boldsymbol{F}) &= \tilde{W}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}) - \tilde{W}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) \\ &= \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \boldsymbol{C}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) : (\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}) + o(\boldsymbol{G}) \\ &= \boldsymbol{F}\left(\left\{\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \boldsymbol{C}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})\right\}^{\mathrm{T}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \boldsymbol{C}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})\right) : \boldsymbol{G} + o(\boldsymbol{G})\end{aligned}$$

в силу соотношений $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} : \boldsymbol{C}$, справедливых для любых матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}) = \left\{\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \boldsymbol{C}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})\right\}^{\mathrm{T}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \boldsymbol{C}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) = 2\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \boldsymbol{C}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}),$$

поскольку матрица $\partial \tilde{W}/\partial \boldsymbol{C}$ предполагается симметрической. Теорема доказана. ■

В качестве первого вывода из этой теоремы отметим, что *в случае гиперупругого материала, удовлетворяющего аксиоме независимости от системы отсчёта, соответствующий второй тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа всегда оказывается симметрическим*, т. е. *для таких материалов неучтённые ранее уравнения равновесия выполняются автоматически.*

Ещё один вывод состоит в том, что *соответствующий второй тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа является функцией только матрицы* $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$; однако, как установлено в теореме 3.3-1, этот факт имеет место и без предположения о гиперупругости.

4.3. Изотропные гиперупругие материалы

По аналогии с определением, данным в § 3.4, будем говорить, что *функция запасённой энергии* **изотропной в точке** x отсчётной конфигурации $\bar{\Omega}$, если изотропной в точке x является соответствующая функция реакции $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}$, т. е. если $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}$ удовлетворяет соотношению

$$\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F}) = \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(x, \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

В этом случае мы получаем следующее необходимое и достаточное условие изотропности, которое полезно сравнить с утверждением теоремы 3.4-1:

Теорема 4.3-1. *Для гиперупругого материала изотропность в точке* x *функции запасённой энергии* $\hat{W}$: $\bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ *равносильна соотношению*

$$\boxed{\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) = \hat{W}(x, \boldsymbol{FQ}) \text{ при всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.}$$

Доказательство. Зависимость функций от $x \in \bar{\Omega}$ в доказательстве не указывается. Поскольку $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = (\det \boldsymbol{F}) \hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{F}) \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}$, то изотропность функции $\hat{\boldsymbol{T}}$ равносильна соотношению

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{FQ}) = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q} \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+,$$

т. е. соотношению

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{FQ})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

Далее доказательство проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 4.2-1; в его основе лежит формула для производной отображения

$$\hat{W}^{\boldsymbol{Q}}: \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{W}^{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{F}) := \hat{W}(\boldsymbol{FQ}),$$

а именно

$$\frac{\partial \hat{W}^{\boldsymbol{Q}}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{FQ})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}. \qquad \blacksquare$$

Как уже было указано при рассмотрении определяющих уравнений, независимость материала от системы отсчёта связана с умножением на матрицы из $\mathbb{O}^3_+$ *слева*, а свойство изотропности — с умножением на такие матрицы *справа*. Интересные дополнительные сведения, имеющие отношение к изотропности и независимости от системы отсчёта гиперупругих материалов, в частности описание *дифференциального исчисления на группе* $\mathbb{O}^3_+$, содержатся в работе Moreau [1979].

4.4. Функция запасённой энергии для изотропного гиперупругого материала

Объединяя аксиому о независимости материала от системы отсчёта и свойство изотропности, мы приходим к следующему результату, который полезно сравнить с теоремой 3.6-2. Напомним, что через ι_A обозначается строка, составленная из трёх главных инвариантов матрицы $\boldsymbol{A}$, причём $\iota_{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}} = \iota_{\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}}$ и

$$\iota(\mathbb{S}^3_>) = \{\iota_A \in \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^3_>\} \subset]0, +\infty[^3.$$

Теорема 4.4-1. *Функция запасённой энергии* $\hat{W}\colon \bar{\Omega}\times\mathbb{M}^3_+\to\mathbb{R}$ *гиперупругого материала не зависит от системы отсчёта и изотропна в точке x тогда и только тогда, когда существует функция* $\dot{W}(x, \cdot)\colon \iota(\mathbb{S}^3_>)\to\mathbb{R}$, *такая что*

$$\boxed{\hat{W}(x, F) = \dot{W}(x, \iota_{F^{\mathrm{T}}F}) = \dot{W}(x, \iota_{FF^{\mathrm{T}}}) \quad \text{для всех} \quad F\in\mathbb{M}^3_+.}$$

Доказательство. Здесь мы снова не будем отражать в обозначениях зависимость функций от $x\in\bar{\Omega}$. В силу теорем 4.2-1 и 4.3-1, при предположениях изотропности материала в точке x и его независимости от системы отсчёта имеем

$$\tilde{W}(F^{\mathrm{T}}F) = \hat{W}(F) = \tilde{W}(FQ) = \tilde{W}(Q^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}FQ)$$
$$\text{для всех } F\in\mathbb{M}^3_+,\quad Q\in\mathbb{O}^3_+.$$

Поскольку для любой матрицы $C\in\mathbb{S}^3_>$ матрица $F := C^{1/2}\in\mathbb{S}^3_> \subset\mathbb{M}^3_+$ удовлетворяет равенству $F^{\mathrm{T}}F = C$, мы можем заключить, что

$$\tilde{W}(C) = \tilde{W}(Q^{\mathrm{T}}CQ) \quad \text{для всех} \quad C\in\mathbb{S}^3_>,\quad Q\in\mathbb{O}^3_+.$$

Тогда рассуждения, использованные в части (v) доказательства теоремы 3.6-1, показывают, что $\tilde{W}$ в действительности есть функция только главных инвариантов матрицы $C = F^{\mathrm{T}}F$. Наоборот, если $\hat{W}(F) = \dot{W}(\iota_{F^{\mathrm{T}}F})$, то

$$\hat{W}(F) = \hat{W}(QF) = \hat{W}(FQ) \quad \text{для всех} \quad F\in\mathbb{M}^3_+,\quad Q\in\mathbb{O}^3_+,$$

поскольку главные инварианты матриц

$$(QF)^{\mathrm{T}}QF = F^{\mathrm{T}}F \quad \text{и} \quad (FQ)^{\mathrm{T}}FQ = Q^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}FQ$$

те же, что и у матрицы $F^{\mathrm{T}}F$. ■

Если имеется функция запасённой энергии, выраженная через главные инварианты матрицы $F^{\mathrm{T}}F$, оказывается возможным записать в удобной форме соответствующие определяющие уравнения. Это сделано в следующей теореме, которую также нужно сопоставить с теоремой 3.6-2.

Теорема 4.4-2. *Предположим, что в точке $x\in\bar{\Omega}$ функция запасённой энергии $\hat{W}$ имеет вид*

$$\hat{W}(x, F) = \dot{W}(x, \iota_{F^{\mathrm{T}}F}),\qquad F\in\mathbb{M}^3_+,$$

причём функция $\dot{W}(x, \cdot)\colon \iota(\mathbb{S}^3_>)\to\mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $\iota_{F^{\mathrm{T}}F}$, $F\in\mathbb{M}^3_+$. *Тогда соответствующие функции реак-*

ции $\hat{T}$ *и* $\tilde{\Sigma}$ *задаются соотношениями*

$$\frac{1}{2}\hat{T}(x, F) = \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_1} F + \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_2}(\iota_1 I - FF^{\mathrm{T}}) F + \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_3}\iota_3 F^{-\mathrm{T}},$$

$$\frac{1}{2}\tilde{\Sigma}(x, C) = \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_1} I + \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_2}(\iota_1 I - C) + \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_3}\iota_3 C^{-1}$$

$$= \left\{\frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_1} + \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_2}\iota_1 + \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_3}\iota_2\right\} I - \left\{\frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_2} + \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_3}\iota_1\right\} C + \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_3} C^2,$$

где

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_k} := \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_k}(x, \iota_C), \qquad \iota_k = \iota_k(C), \qquad C = F^{\mathrm{T}}F.$$

Доказательство. Зависимость функций от $x \in \bar{\Omega}$ не будет указываться при доказательстве. Рассматривая функцию $\hat{W}$ как композицию отображений и пользуясь цепным правилом, получаем

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(F): G = \hat{W}'(F)\, G = \frac{\partial \dot{W}}{\partial \iota_k}(\iota_C)\, \iota_k'(C)\, \Gamma'(F)\, G$$

$$\text{для всех } F \in \mathbb{M}^3_+, \quad G \in \mathbb{M}^3,$$

где производная Γ' функции

$$\Gamma\colon F \in \mathbb{M}^3_+ \to \Gamma(F) := F^{\mathrm{T}}F \in \mathbb{S}^3_>,$$

определяется равенством (§ 1.2)

$$\Gamma'(F)\, G = F^{\mathrm{T}}G + G^{\mathrm{T}}F.$$

В § 1.2 мы также вывели следующие формулы для производных Гато главных инвариантов:

$$\iota_1'(C)\, D = \operatorname{tr} D,$$

$$\iota_2'(C)\, D = \det C \operatorname{tr}(C^{-1}D) \operatorname{tr} C^{-1} - \det C \operatorname{tr}(C^{-1}DC^{-1}),$$

$$\iota_3'(C)\, D = \det C \operatorname{tr}(C^{-1}D) \quad \text{для всех } C \in \mathbb{S}^3_>, \quad D \in \mathbb{S}^3.$$

Следовательно,

$$\iota_1'(C)\,\Gamma'(F)\, G = \operatorname{tr}(F^{\mathrm{T}}G + G^{\mathrm{T}}F) = 2F : G,$$

$$\iota_2'(C)\,\Gamma'(F)\, G = \det C \operatorname{tr}(C^{-1}(F^{\mathrm{T}}G + G^{\mathrm{T}}F)) \operatorname{tr} C^{-1}$$
$$- \det C \operatorname{tr}(C^{-1}(F^{\mathrm{T}}G + G^{\mathrm{T}}F)\, C^{-1})$$
$$= 2 \det C \left\{(\operatorname{tr} C^{-1}) F^{-\mathrm{T}} - F^{-\mathrm{T}}F^{-1}F^{-\mathrm{T}}\right\} : G,$$

$$\iota_3'(C)\,\Gamma'(F)\, G = \det C \operatorname{tr}(C^{-1}(F^{\mathrm{T}}G + G^{\mathrm{T}}F)) = 2(\det C)\, F^{-\mathrm{T}} : G.$$

Чтобы получить требуемую формулу для функции реакции $\hat{T}(F) = (\partial \hat{W}/\partial F)(F)$, остаётся преобразовать приведённое выше выражение для $\iota_2'(\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{\Gamma}'(\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{G}$ с помощью теоремы Кэли—Гамильтона. Это приводит к равенствам

$$\det \boldsymbol{C}\left\{(\operatorname{tr}\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}} - \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right\}$$
$$= \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\left(\iota_2(\boldsymbol{C})\boldsymbol{I} - \iota_3(\boldsymbol{C})\boldsymbol{C}^{-1}\right) = \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\left(\iota_1(\boldsymbol{C})\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^2\right) = \iota_1(\boldsymbol{C})\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}.$$

Первое равенство в формуле для функции реакции $\bar{\Sigma}$ вытекает непосредственно из соотношения $\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}^{-1}\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})$, а второе получается при помощи теоремы Кэли—Гамильтона. ■

Замечание. Чтобы избежать трудностей, связанных с дифференцируемостью функции $\hat{W}(x, \cdot)$, достаточно предположить, что её область определения есть какое-либо открытое подмножество в $\mathbb{R}^3$, содержащее $\iota(\mathbb{S}^3_>)$ (последнее множество не является открытым; см. упражнение 3.10). Связь между свойствами дифференцируемости функций $\hat{W}$ и $\dot{W}$ устанавливается в упражнении 4.4. ■

В качестве первого наглядного приложения полученных результатов рассмотрим уже знакомый нам пример.

Теорема 4.4-3. *Материал Сен-Венана — Кирхгофа, обладающий функцией реакции*

$$\breve{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} = \left\{\frac{\lambda}{2}(\iota_1 - 3) - \mu\right\}\boldsymbol{I} + \mu\boldsymbol{C} = \tilde{\Sigma}(\boldsymbol{C}),$$
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E},$$

является гиперупругим, причём соответствующая ему функция запасённой энергии имеет вид

$$\boxed{\breve{W}(\boldsymbol{E}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2.}$$

Кроме того,

$$\breve{W}(\boldsymbol{E}) = \mu(\iota_1 - 3) + \frac{\lambda + 2\mu}{8}(\iota_1 - 3)^2 - \frac{\mu}{3}(\iota_2 - 3) = \dot{W}(\iota_C),$$

где $\iota_1 = \operatorname{tr}\boldsymbol{C}$; $\iota_2 = \det\boldsymbol{C}\operatorname{tr}\boldsymbol{C}^{-1}$.

Доказательство. В силу теоремы 4.2-2 достаточно проверить, что

$$\breve{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \frac{\partial\breve{W}}{\partial\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}).$$

Пользуясь выражением для $\breve{W}(\boldsymbol{E})$, приведённым в формулировке теоремы, после несложных вычислений получаем

$$\breve{W}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}) = \breve{W}(\boldsymbol{E}) + \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})(\operatorname{tr}\boldsymbol{H}) + 2\mu\operatorname{tr}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}) + O(\|\boldsymbol{H}\|^2)$$
$$= \breve{W}(\boldsymbol{E}) + (\lambda\operatorname{tr}\boldsymbol{E} + 2\mu\boldsymbol{E}) : \boldsymbol{H} + O(\|\boldsymbol{H}\|^2).$$

С другой стороны, мы можем воспользоваться выражением функции запасённой энергии через главные инварианты матрицы C, а именно функцией $\dot{W}(\iota_C)$, и применить теорему 4.4-2. Ещё раз проводя непосредственные вычисления, получим требуемое выражение для $\tilde{\Sigma}(C)$. ■

Отметим, между прочим, что, объединяя этот результат с теоремой 4.4-1, мы получим ещё одно доказательство независимости от системы отсчёта и изотропности материала Сен-Венана—Кирхгофа. Следует также обратить внимание на то, что третий главный инвариант $\iota_3 = \det C$ не входит в выражение для функции запасённой энергии материала Сен-Венана—Кирхгофа.

4.5. Функция запасённой энергии вблизи естественного состояния

Напомним, что вблизи естественного состояния определяющее уравнение изотропного и однородного упругого материала всегда имеет вид (теорема 3.8-1)

$$\Sigma = \check{\Sigma}(E) = \lambda(\operatorname{tr} E) I + 2\mu E + o(E),$$

где λ и μ — постоянные Ламэ. Наряду с этим результатом будет установлена

Теорема 4.5-1. *Пусть имеется однородный и изотропный гиперупругий материал, для которого отсчётная конфигурация является естественным состоянием, так что функция запасённой энергии имеет вид*

$$\hat{W}(F) \overset{/}{=} \dot{W}(\iota_{F^{\mathrm{T}}F}) = \check{W}(E), \qquad F^{\mathrm{T}}F = I + 2E, \quad F \in \mathbb{M}^3_+.$$

Тогда если функция $\dot{W}\colon \iota(\mathbb{S}^3_>) \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке ι_I, то

$$\boxed{\check{W}(E) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} E)^2 + \mu \operatorname{tr} E^2 + o(\|E\|^2), \qquad F^{\mathrm{T}}F = I + 2E.}$$

Доказательство. Из двукратной дифференцируемости функции $\dot{W}$ в точке ι_I вытекает дифференцируемость функций $(\partial\dot{W}/\partial\iota_k)(\iota_C)$ в точке $C = I$, и значит, в силу теоремы 4.4-2, выполнены предположения о дифференцируемости из теоремы 3.8-1. Следовательно,

$$\check{\Sigma}(E) = \frac{\partial\check{W}}{\partial E}(E) = \lambda(\operatorname{tr} E) I + 2\mu E + o(E).$$

Определим функцию $\breve{\Delta}$, полагая

$$\breve{\Delta}(\boldsymbol{E}) = \breve{W}(\boldsymbol{E}) - \left\{ \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr} \boldsymbol{E})^2 + \mu \operatorname{tr} \boldsymbol{E}^2 \right\}, \qquad \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E} \in \mathbb{S}^3_{>}.$$

В силу теоремы 4.4-3 имеем

$$\frac{\partial \breve{\Delta}}{\partial \boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}) = \frac{\partial \breve{W}}{\partial \boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}) - \{\lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{E}) \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{E}\},$$

так что функция $\breve{\Delta}$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial \breve{\Delta}}{\partial \boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}) = o(\boldsymbol{E}).$$

Ввиду непрерывной дифференцируемости функции $\hat{W}$ в окрестности точки ι_I (по предположению $\hat{W}$ дважды дифференцируема в этой точке), функция $\breve{\Delta}$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$. Поэтому, если норма $\|\boldsymbol{E}\|$ достаточно мала, то, пользуясь формулой Тэйлора с остаточным членом в интегральной форме (теорема 1.3-3), мы можем написать

$$\breve{\Delta}(\boldsymbol{E}) = \int_0^1 \frac{\partial \breve{\Delta}}{\partial \boldsymbol{E}}(t\boldsymbol{E}) : \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}t = O(\|\boldsymbol{E}\|^2).$$

Теорема доказана. ∎

З а м е ч а н и е. При условии еще большей дифференцируемости функции $\hat{W}$ можно показать, что остаточный член равен $O(\|\boldsymbol{E}\|^3)$ и выписать члены третьего порядка в явном виде (упражнение 4.8). ∎

4.6. Поведение функции запасённой энергии при больших деформациях

Желательно, чтобы определяющие уравнения каким-то образом отражали интуитивное представление, согласно которому „экстремальным деформациям соответствуют бесконечно большие напряжения" (Antman [1983]), о чём свидетельствует непосредственный физический опыт. Выразить подобное свойство посредством функции реакции совсем непросто, как показал Антман в своих новаторских работах (Antman [1970, 1983]). В случае гиперупругих материалов это свойство соответствует требованию неограниченного возрастания функции запасённой энергии $\hat{W}$ при стремлении к 0 или $+\infty$ какого-либо из собственных значений $\lambda_i(\boldsymbol{C})$ матрицы $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ (такое поведение собственных значений является одним из возможных способов охарактеризовать „экстремальные" деформации). В этом случае, если функция $\hat{W}$ „достаточно хорошая“, можно ожидать, что в силу теоремы о среднем значении (теорема 1.2-2) норма

$$\|\hat{\boldsymbol{T}}(x, \boldsymbol{F})\| = \left\| \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{F}) \right\|$$

будет неограниченно возрастать (это один из способов охарактеризовать „бесконечно большие“напряжения). Считая, что два собственных значения $\lambda_{i+1}(\boldsymbol{C})$ и $\lambda_{i+2}(\boldsymbol{C})$ всегда принадлежат некоторому компактному интервалу из $]0, +\infty[$, имеем следующие пары эквивалентных соотношений:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i(\boldsymbol{C}) \to 0^+ \quad \Leftrightarrow \det \boldsymbol{F} \to 0^+,\\
&\lambda_i(\boldsymbol{C}) \to +\infty \Leftrightarrow \|\boldsymbol{F}\| \to +\infty,\\
&\lambda_i(\boldsymbol{C}) \to +\infty \Leftrightarrow \|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\| \to +\infty,\\
&\lambda_i(\boldsymbol{C}) \to +\infty \Leftrightarrow \det \boldsymbol{F} \to +\infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы подошли к принятию некоторых *допущений* относительно функции запасённой энергии. Эти допущения задают её **поведение при больших деформациях** и имеют вид: в каждой точке $x \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned}
&\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) \to +\infty \quad \text{при} \quad \det \boldsymbol{F} \to 0^+, \qquad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,\\
&\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) \to +\infty \quad \text{при} \quad \{\|\boldsymbol{F}\| + \|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\| + \det \boldsymbol{F}\} \to +\infty,\\
&\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.
\end{aligned}$$

В случае первого допущения говорят о **поведении при** $\det \boldsymbol{F} \to 0^+$.

Более сильный вариант второго допущения можно записать в виде **неравенства коэрцитивности**, а именно: существуют постоянные α, β, p, q, r, такие что

$$\begin{aligned}
&\alpha > 0, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0,\\
&\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) \geqslant \alpha\{\|\boldsymbol{F}\|^p + \|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^q + (\det \boldsymbol{F})^r\} + \beta\\
&\text{для всех } (x, \boldsymbol{F}) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+.
\end{aligned}$$

Неравенство коэрцитивности характеризует скорость роста функции запасённой энергии, и есть веские основания полагать, что эта скорость является мерой „жёсткости“ материала, который должен „выдерживать“ достаточно большие деформации. Так например, в работе Антмана (Antman [1970]) показано, что если функция запасённой энергии не растёт достаточно быстро относительно $\|\boldsymbol{F}\|$, то краевая задача, описывающая заполненную газом мембрану, на границе которой задано давление, может не иметь решения. Подобное явление отмечают Simpson & Spector [1984а], именно, для существования „естественных" решений задач определённого типа необходимы соответствующие условия на скорость роста. В гл. 7 будет показано, что представляющие интерес результаты о существовании решений могут быть получены, только если на показатели p, q, r наложены более строгие ограничения, как правило имеющие вид

$$p \geqslant 2, \quad q \geqslant \frac{p}{p-1}, \quad r > 1.$$

Поведение функции запасённой энергии при „малых" значениях $\det \boldsymbol{F}$, отражённое в первом допущении, можно рассматривать как выражение в математической форме интуитивного представления, согласно которому „для аннигиляции объёмов необходима бесконечная энергия" (см. упражнение 4.9). Очевидно, что если функция запасённой энергии не зависит от $\det \boldsymbol{F}$ явно, то первое допущение отпадает само собой, а в неравенстве коэрцитивности не будет члена $(\det \boldsymbol{F})^r$, $r > 0$. К таким случаям можно отнести материалы Сен-Венана — Кирхгофа, поведение которых, как уже отмечалось в § 3.9, вряд ли будет „хорошим" при больших деформациях, поскольку определение таких материалов учитывает их поведение лишь при „малых" значениях $\|\boldsymbol{E}\|$.

В заключение отметим, что вопрос о соответствии реальных материалов какому-либо из указанных допущений носит чисто умозрительный характер: в отличие от поведения при малых деформациях, которое можно проверить опытным путем, любая характеристика поведения при больши́х деформациях (в математическом смысле) по своей сути является *математическим* допущением, так как численную информацию можно получить лишь для значений $\|\boldsymbol{F}\|$, $\|\mathbf{Cof}\, \boldsymbol{F}\|$, $\det \boldsymbol{F}$, $(\det \boldsymbol{F})^{-1}$, принадлежащих компактным интервалам.

* 4.7. Выпуклые множества и выпуклые функции

В последующем изложении нам часто придется иметь дело с понятием *выпуклости множеств* и *функций*. Поэтому здесь мы дадим краткий обзор основных определений и некоторых важнейших результатов, связанных с этим понятием. Общие сведения, касающиеся выпуклости, можно найти в книгах: Rockafellar [1970], Ekeland & Temam [1974], Roberts & Varberg [1973], Lay [1982], van Tiel [1984], Иоффе & Тихомиров [1974].

Подмножество векторного пространства называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя своими элементами u и v оно содержит замкнутый отрезок $[u, v]$. Приведённые ниже основные свойства выпуклых подмножеств нормированных векторных пространств доказаны, например, в книге Л. Шварца (Schwartz [1970, p. 258 и далее]).

Теорема 4.7-1. *Пусть U — выпуклое подмножество нормированного векторного пространства. Тогда множества $\bar{U}$ и $\operatorname{int} U$ выпуклы. Кроме того,*

$$u \in \operatorname{int} U \quad \text{и} \quad v \in \bar{U} \Rightarrow [u, v[\subset \operatorname{int} U,$$

так что $\overline{\operatorname{int} U} = \bar{U}$, *если* $\operatorname{int} U \neq \varnothing$. ■

В нормированном векторном пространстве V **гиперплоскость** определяется как подмножество V, имеющее вид

$$P(L; \alpha) = \{v \in V;\ L(v) = \alpha\}, \qquad L \in (V' - \{0\}), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

где V' — пространство, сопряжённое с V; **замкнутое полупространство** определяется как подмножество V, имеющее вид

$$H(L; \alpha) = \{v \in V;\ L(v) \leqslant \alpha\}, \qquad L \in (V' - \{0\}), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что $P(L; \alpha) = \partial H(L; \alpha)$. Существует весьма примечательная связь между замкнутыми выпуклыми подмножествами и замкнутыми полупространствами, которые, в свою очередь, являются замкнутыми выпуклыми множествами специального вида (см., например, Brezis [1983, p. 7]).

Теорема 4.7-2. (a) *Пусть U — непустое замкнутое выпуклое подмножество нормированного векторного пространства V, и пусть $w \notin U$. Тогда существуют элемент $L \in (V' - \{0\})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и число $\varepsilon > 0$, такие что*

$$L(w) \geqslant \alpha + \varepsilon \quad \text{и} \quad L(v) \leqslant \alpha - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad v \in U.$$

(b) *Непустое замкнутое выпуклое подмножество нормированного векторного пространства, не совпадающее с этим пространством, содержится по крайней мере в одном замкнутом полупространстве и является пересечением всех содержащих его полупространств.* ■

Пусть U — непустое подмножество векторного пространства V. **Выпуклой оболочкой** $\operatorname{co} U$ множества U называется пересечение всех выпуклых подмножеств V, содержащих U. Эквивалентным образом $\operatorname{co} U$ можно определить как наименьшее выпуклое подмножество из V, содержащее U. Выпуклая оболочка $\operatorname{co} U$ является также множеством, состоящим из всех *выпуклых комбинаций* v элементов U, т. е.

$$v = \sum_{p=1}^{N} \mu_p v_p, \quad v_p \in U, \qquad \sum_{p=1}^{N} \mu_p = 1, \quad \mu_p \geqslant 0,$$

где N — произвольное натуральное число.

Например, пусть заданы $(n+1)$ аффинно-независимых точек $a_j=(a_{ij})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, т. е. точек, не принадлежащих одной и той же гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ (это условие равносильно обратимости матрицы (a_{ij}) при $a_{n+1,j}=1$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$). Выпуклая оболочка множества $\bigcup_{j=1}^{n+1}\{a_j\}$

$$T=\left\{v \in \mathbb{R}^n;\ v=\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j,\quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j=1,\ \lambda_j \geqslant 0\right\}$$

называется *n-симплексом*, а точки a_j — его *вершинами*. Например, 2-симплекс — это треугольник, а 3-симплекс — тетраэдр. Заметим, что множество внутренних точек T непусто (это свойство оказывается важным для доказательства теоремы 4.7-4), а само множество T компактно (это частиый случай свойства (c) из теоремы 4.7-3).

Пусть U — подмножество нормированного векторного пространства V. **Выпуклым замыканием** $\overline{\text{co}}\,U$ множества U **называется** пересечение всех замкнутых выпуклых подмножеств V, содержащих U. Выпуклое замыкание является наименьшим замкнутым выпуклым подмножеством V, содержащим U. В следующей теореме приводятся некоторые полезные свойства выпуклых замыканий (доказательство см., например, в книгах Schwartz [1970, p. 260], Cheney [1966, p. 18]).

Теорема 4.7-3. (a) *Пусть U — непустое подмножество нормированного векторного пространства. Тогда*

$$\text{co}\,\bar{U} \subset \overline{\text{co}}\,U=\{\text{co}\,U\}^{-}.$$

(b) *Выпуклое замыкание множества U совпадает с пересечением всех замкнутых полупространств, содержащих U.*

(c) *Выпуклая оболочка компактного подмножества U в конечномерном пространстве является компактным множеством. Поэтому* $\text{co}\,\bar{U}=\overline{\text{co}}\,U$ *для таких U.* ■

Замечание. Рассмотрим замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^2$ вида

$$U=\left\{v \in \mathbb{R}^2;\ v_2 \geqslant \frac{1}{1+v_1^2}\right\}.$$

Тогда

$$\text{co}\,\bar{U}=\text{co}\,U=\{v \in \mathbb{R}^2;\ v_2>0\} \underset{\neq}{\subset} \overline{\text{co}}\,U=\{v \in \mathbb{R}^2;\ v_2 \geqslant 0\}. \quad ■$$

Приведём теперь полное описание двух выпуклых оболочек, которые особенно важны для теории упругости.

Теорема 4.7-4. *Пусть* $\mathbb{M}^3_+ = \{\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3;\ \det \boldsymbol{F} > 0\}$. *Тогда*

$$\operatorname{co} \mathbb{M}^3_+ = \mathbb{M}^3,$$

$$\operatorname{co}\{(\boldsymbol{F}, \operatorname{\mathbf{Cof}} \boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R};\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+\} = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[.$$

Доказательство. Матрица $-\boldsymbol{I}$ принадлежит множеству $\operatorname{co} \mathbb{M}^3_+$, поскольку, в частности,

$$-\boldsymbol{I} = \tfrac{1}{2} \operatorname{\mathbf{Diag}}(-3, 1, -1) + \tfrac{1}{2} \operatorname{\mathbf{Diag}}(1, -3, -1).$$

Любую матрицу $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{F} = \tfrac{1}{2}(\lambda \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{F}) + \tfrac{1}{2}(-\lambda \boldsymbol{I}) \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\det(\lambda \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{F})$ — многочлен третьей степени по λ с коэффициентом 1 при λ^3, существует $\lambda > 0$, такое что $(\lambda \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{F}) \in \mathbb{M}^3_+$. Отсюда следует, что любую матрицу $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3$ можно записать в виде выпуклой комбинации двух матриц из $\mathbb{M}^3_+$. Поэтому $\operatorname{co} \mathbb{M}^3_+ = \mathbb{M}^3$.

Положим теперь

$$\mathbb{U} := \operatorname{co}\{(\boldsymbol{F}, \operatorname{\mathbf{Cof}} \boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R};\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+\}.$$

Сначала мы докажем, что $\overline{\operatorname{co}} \mathbb{U} = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times [0, +\infty[$. Так как множество $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times [0, +\infty[$ замкнуто и выпукло, оно содержит $\overline{\operatorname{co}}\, \mathbb{U}$. Для доказательства обратного вложения в силу теоремы 4.7-3 (b) достаточно показать, что, коль скоро замкнутое полупространство в $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}$ содержит множество U, оно содержит также и множество $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[$. Замкнутое полупространство в пространстве $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}$ имеет вид

$$H(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K}, \varepsilon; \alpha) := \{(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R};\ \boldsymbol{G} : \boldsymbol{F} + \boldsymbol{K} : \boldsymbol{H} + \varepsilon\delta \leqslant \alpha\},$$

для некоторых фиксированных $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K} \in \mathbb{M}^3$ и $\varepsilon, \alpha \in \mathbb{R}$, таких что $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K}, \varepsilon) \neq (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, 0)$. Следовательно,

$$\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[\subset H(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K}, \varepsilon; \alpha) \Leftrightarrow \boldsymbol{G} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{K} = \boldsymbol{0},\ \varepsilon < 0,\ \alpha \geqslant 0.$$

Таким образом, нужно показать, что если замкнутое полупространство $H(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K}, \varepsilon; \alpha)$ содержит $\mathbb{U}$, т. е. если

$$\boldsymbol{G} : \boldsymbol{F} + \boldsymbol{K} : \operatorname{\mathbf{Cof}} \boldsymbol{F} + \varepsilon \det \boldsymbol{F} \leqslant \alpha \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,$$

то обязательно $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}$, $\varepsilon < 0$, $\alpha \geqslant 0$. Пользуясь сингулярным разложением матрицы $\boldsymbol{K}$ (теорема 3.2-3), мы можем найти две матрицы $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$, такие что

$$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{O}^3_+, \qquad \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{V}, \qquad \boldsymbol{D} = \operatorname{\mathbf{Diag}} d_i, \qquad |d_i| = v_i(\boldsymbol{K}).$$

Поэтому, в силу равенства $\operatorname{Cof} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$ при $\boldsymbol{U} \in \mathbb{O}^3_+$, имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} : \boldsymbol{F} + \boldsymbol{K} : \operatorname{Cof} \boldsymbol{F} + \varepsilon \det \boldsymbol{F} \\ = (\boldsymbol{V}\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}) : (\boldsymbol{V}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}) + \boldsymbol{D} : \operatorname{Cof}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}) + \varepsilon \det(\boldsymbol{V}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}). \end{aligned}$$

Полагая $\boldsymbol{V}\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = (\tilde{g}_{ij})$ и выбирая матрицу $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$ так, чтобы $\boldsymbol{V}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Diag}(\lambda^{-1}, \lambda^{1/2}, \lambda^{1/2})$, $\lambda > 0$, устанавливаем, что

$$\lambda^{-1}\tilde{g}_{11} + \lambda^{1/2}(\tilde{g}_{22} + \tilde{g}_{33}) + \lambda d_1 + \lambda^{-1/2}(d_2 + d_3) + \varepsilon \leqslant \alpha \quad \text{для всех } \lambda > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу сначала при $\lambda \to 0+$, а затем при $\lambda \to +\infty$, соответственно выводим, что $\tilde{g}_{11} \leqslant 0$ и $d_1 \leqslant 0$. Выбирая теперь $\boldsymbol{F}$ так, чтобы $\boldsymbol{V}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Diag}(-\lambda^{-1}, -\lambda^{1/2}, \lambda^{1/2})$, $\lambda > 0$, приходим к неравенству

$$-\lambda^{-1}\tilde{g}_{11} + \lambda^{1/2}(-\tilde{g}_{22} + \tilde{g}_{33}) - \lambda d_1 + \lambda^{-1/2}(-d_2 + d_3) + \varepsilon \leqslant \alpha \quad \text{для всех } \lambda > 0.$$

Снова осуществляя предельный переход при $\lambda \to 0+$ и $\lambda \to +\infty$ соответственно, находим, что $\tilde{g}_{11} \geqslant 0$ и $d_1 \geqslant 0$. Действуя и далее подобным образом, получаем равенства $\tilde{g}_{ii} = 0$ и $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$. Следовательно, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}$.

Мы можем найти матрицы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, такие что

$$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+, \qquad \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{Q}, \qquad \Delta = \mathbf{Diag}\,\delta_i, \qquad |\delta_i| = v_i(\boldsymbol{G})$$

и, значит,

$$\boldsymbol{G} : \boldsymbol{F} + \varepsilon \det \boldsymbol{F} = \Delta : (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}) + \varepsilon \det(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}) \leqslant \alpha.$$

Аналогично тому как были получены равенства $\tilde{g}_{ii} = 0$, отсюда выводим, что $\delta_i = 0$, т. е. $\Delta = \boldsymbol{0}$. Поэтому $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$ и, следовательно, $\varepsilon < 0$ (напомним, что $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{K}, \varepsilon) \neq (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, 0)$) и $\alpha \geqslant 0$. Таким образом доказано, что $\overline{\operatorname{co}}\, \mathbb{U} = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times [0, +\infty[$.

Поскольку $\mathbb{U}$ принадлежит выпуклому множеству $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[$, то в силу определения выпуклой оболочки имеем

$$\operatorname{co} \mathbb{U} \subset \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[.$$

Докажем обратное вложение. Для этого заметим, что $\operatorname{co} \mathbb{U} \neq \varnothing$. Действительно, возможны два случая. Во-первых, множество $\operatorname{co} \mathbb{U}$ может принадлежать некоторой гиперплоскости $\mathbb{H}$, но тогда в силу замкнутости и выпуклости $\mathbb{H}$ мы имели бы $\overline{\operatorname{co}}\, \mathbb{U} \subset \mathbb{H}$, что противоречит доказанному равенству $\overline{\operatorname{co}}\, \mathbb{U} = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times [0, +\infty[$. Во-вторых, $\operatorname{co} \mathbb{U}$ может содержать по крайней мере $(n+1)$ аффинно независимых точек $(n = 19)$, являющихся вершинами n-симплекса $\mathbb{S}$. Очевидно, $\mathbb{S}$

содержится в $\operatorname{co} \mathbb{U}$, так как n-симплекс — выпуклое множество, и, кроме того,

$$\varnothing \neq \operatorname{int} \mathbb{S} \subset \operatorname{int} \operatorname{co} \mathbb{U},$$

поскольку множество внутренних точек любого n-симплекса непусто.

Рассмотрим теперь элементы $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \delta) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[$ и $(\boldsymbol{F}_0, \boldsymbol{G}_0, \delta_0) \in \operatorname{int} \operatorname{co} \mathbb{U}$; в частности, $\delta_0 > 0$. Существует число t, удовлетворяющее условиям

$$0 < t < 1 \quad \text{и} \quad (1-t)\,\delta_0 \leqslant \delta.$$

Положим

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{t}(\boldsymbol{F} - (1-t)\,\boldsymbol{F}_0), \qquad \boldsymbol{G}_1 = \frac{1}{t}(\boldsymbol{G} - (1-t)\,\boldsymbol{G}_0),$$
$$\delta_1 = \frac{1}{t}(\delta - (1-t)\,\delta_0).$$

Тогда

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{G}_1, \delta_1) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times [0, +\infty[= \overline{\operatorname{co}} \mathbb{U},$$
$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \delta) = t(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{G}_1\ \delta_1) + (1-t)(\boldsymbol{F}_0, \boldsymbol{G}_0, \delta_0)$$
$$\in](\boldsymbol{F}_0, \boldsymbol{G}_0, \delta_0), (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{G}_1, \delta_1)[.$$

Поэтому в силу теоремы 4.7-1 получаем требуемое соотношение

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \delta) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[\Rightarrow (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \delta) \in \operatorname{int} \operatorname{co} \mathbb{U} \subset \operatorname{co} \mathbb{U}.$$

Теорема доказана. ■

Из равенства $\operatorname{co} \mathbb{M}^3_+ = \mathbb{M}^3$ немедленно следует, что *множество* $\mathbb{M}^3_+$ *не является выпуклым* (этот факт можно доказать и непосредственно; см. упражнение 4.2). Приведённое в теореме 4.7-4 полное описание множества $\operatorname{co} \mathbb{U}$ принадлежит Боллу (Ball [1977, теорема 4.3]). Первоначальное доказательство Болла по существу аналогично данному здесь; основные его этапы намечены в упражнении 4.11. Ещё один вариант доказательства предлагается в упражнении 4.12.

Теперь мы сформулируем несколько результатов, касающихся *выпуклости* и *минимизации функций* (доказательства можно найти, например, в книге Ciarlet [1985, p. 151 и далее]). Как известно, для того чтобы в точке u достигался локальный минимум функционала J, определённого на *открытом* множестве, содержащем u, необходимо, чтобы $J'(u) = 0$. Это необходимое условие допускает следующее обобщение для функций, определённых на *выпуклом* множестве (для выпуклых функций справедливо и обратное утверждение; см. теорему 4.7-8):

Теорема 4.7-5 (необходнмое условне локального минимума). *Пусть J: $U \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на выпуклом подмножестве U нормированного векторного пространства. Если $u \in U$ — точка локального минимума функции J: $U \to \mathbb{R}$ и J дифференцируема в точке u, то*

$$J'(u)(v-u) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad v \in U. \qquad \blacksquare$$

Эти соотиошеиия иосят назваиие *неравенств Эйлера.*

Замечание. Согласно определеиию диффереицируемости (§ 1.2), фуикция J должна быть определеиа в окрестности каждой точки, где она имеет производиую. Для краткости, предположения такого типа в зтой и последующих теоремах подразумеваются, ио не формулируются явно. $\blacksquare$

Функция J: $U \to \mathbb{R}$, задаииая на *выпуклом* подмиожестве U векториого простраиства V, иазывается **выпуклой** иа U, если

$$u, v \in U \quad \text{и} \quad \vartheta \in [0, 1]$$
$$\Rightarrow J(\vartheta u + (1-\vartheta) v) \leqslant \vartheta J(u) + (1-\vartheta) J(v).$$

Говорят, что J **строго выпукла** иа U, если

$$u, v \in U, \ u \neq v \quad \text{и} \quad \vartheta \in [0, 1]$$
$$\Rightarrow J(\vartheta u + (1-\vartheta) v) < \vartheta J(u) + (1-\vartheta) J(v).$$

В следующих двух теоремах указаны полезные соотиошеиия между выпуклостью и дифференцируемостью.

Теорема 4.7-6 (о выпуклости и первой производной). *Пусть функция J: $U \subset V \to \mathbb{R}$ определена и дифференцируема на выпуклом подмножестве U нормированного векторного пространства. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *функция J выпукла на U в том и только в том случае, когда*

$$J(v) \geqslant J(u) + J'(u)(v-u) \quad \text{для всех} \quad u, v \in U;$$

(b) *функция J строго выпукла на U в том и только в том случае, когда*

$$J(v) > J(u) + J'(u)(v-u) \quad \text{для всех} \quad u, v \in U, \ u \neq v. \qquad \blacksquare$$

Геометрическая интерпретация зтих неравенств очевидна (см. рис. 4.7-1): график фуикции J „расположеи иад любой касательной плоскостью к иему".

Теорема 4.7-7 (о выпуклости и второй производной). *Пусть функция J: $U \subset V \to \mathbb{R}$ определена и дважды дифференцируема на выпуклом подмножестве U нормированного векторного пространства. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *функция J выпукла на U тогда и только тогда, когда*

$$J''(u)(v-u,\ v-u) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u,\ v \in U;$$

(b) *если*

$$J''(u)(v-u,\ v-u) > 0 \quad \text{для всех} \quad u,\ v \in U,\ u \neq v,$$

то функция J строго выпукла на U. ■

Замечания. (1) *Вообще говоря*, утверждение (b) не допускает обращения. Действительно, $v \in \mathbb{R} \to J(v) = v^4$ — строго выпуклая функция, для которой $J''(0) = 0$.

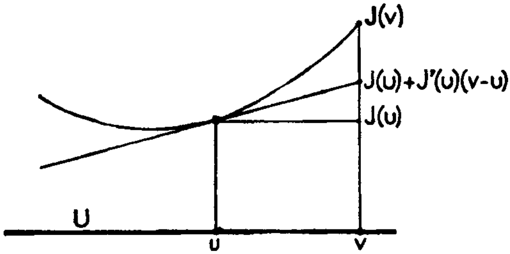

Рис. 4.7-1. Геометрическое описание выпуклых функций:
$J(u) + J'(u)(v-u) \leqslant J(v)$.

(2) Теорему 4.7-7 полезно сравнить с теоремами 1.3-1 и 1.3-2. ■

В качестве первого приложения теоремы 4.7-7 мы устанавливаем, что *функция*

$$g\colon\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^n \to \|\boldsymbol{F}\|^2 = \operatorname{tr} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$$

строго выпукла, поскольку её вторая производная удовлетворяет неравенству

$$g''(\boldsymbol{F})(\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{G}) = 2\|\boldsymbol{G}\|^2 \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{G} \in \mathbb{M}^n.$$

Пусть $J\colon U \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на произвольном множестве U. Элемент $u \in U$ называется **точкой минимума** функции J на U, если $J(u) \leqslant J(v)$ для всех $v \in U$ и **точкой строгого минимума**, если $J(u) < J(v)$ для всех $v \in U$, $v \neq u$. Далее мы будем постоянно использовать следующие простые свойства точек минимума выпуклых функций:

Теорема 4.7-8 (о точках минимума выпуклых функций). *Пусть выпуклая функция $J\colon U \to \mathbb{R}$ определена на выпуклом подмножестве нормированного векторного пространства. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *Всякая точка локального минимума функции J на U является точкой минимума.*

(b) *Если функция J строго выпукла, то она имеет не более одной точки минимума на U, причём последняя является точкой строгого минимума.*

(c) *Пусть функция J дифференцируема в точке $u \in U$. Для того чтобы эта точка была точкой минимума функции J на U, необходимо и достаточно, чтобы*

$$J'(u)(v-u) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad v \in U.$$

(d) *Если множество U открыто, то $u \in U$ является точкой минимума функции J на U тогда и только тогда, когда $J'(u) = 0$.* ■

Определение выпуклой функции допускает обобщение в двух направлениях. Во-первых, можно ввести понятие выпуклости

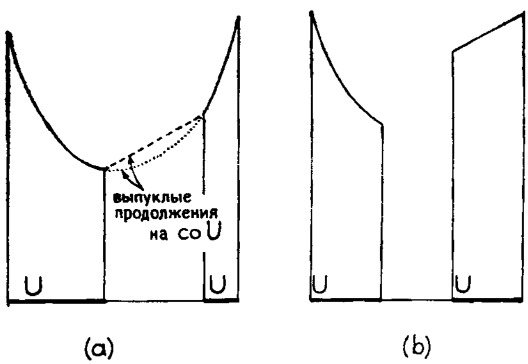

Рис. 4.7-2. Выпуклая (a) и невыпуклая (b) функции на невыпуклом множестве U.

для функций, заданных на множестве, которое само выпуклым не является. А именно, пусть U — произвольное непустое подмножество векторного пространства V и $\operatorname{co} U$ — его выпуклая оболочка. Функция J^*: $U \to \mathbb{R}$ называется **выпуклой**, если существует выпуклая (в смысле прежнего определения) функция J: $\operatorname{co} U \to \mathbb{R}$, такая что $J^*(v) = J(v)$ для всех $v \in U$. На рис. 4.7-2 дан пример функции, которая выпукла на невыпуклом подмножестве U из $\mathbb{R}$, а также функции, которая не является выпуклой на этом множестве. Необходимое и достаточное условие выпуклости функций, заданных на невыпуклых множествах, приведено в упражнении 4.13.

Напомним, что *расширенным множеством вещественных чисел* называется множество $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, на котором естественным образом вводятся арифметические операции и отношение порядка, индуцированные с вещественной прямой $\mathbb{R}$; при этом имеются некоторые тонкости в обращении с символами $-\infty$ и $+\infty$ (подробности см., например, в книгах Bourbaki [1966, гл. IV, § 4], Taylor [1965, pp. 29, 178]). Тогда понятие выпуклости можно распространить на функции со значениями из $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (значение $-\infty$ исключается с целью избежать некоторых патологических случаев, как это объясняется, например, в книге Ekeland & Temam [1974]).

А именно, пусть U — выпуклое подмножество векторного пространства V. Функция J: $U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется **выпуклой**, если

$$J(\lambda u + (1-\lambda) v) \leqslant \lambda J(u) + (1-\lambda) J(u)$$
$$\text{для всех} \quad u, v \in U, \ \lambda \in [0, 1].$$

Заметим, что правая часть этого неравенства есть корректно определённое число из множества $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, поскольку значение $-\infty$ исключается. Важно подчеркнуть, что теперь, допустив среди значений функции $+\infty$, мы можем считать, что любая выпуклая функция со значениями из $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ определена на *всём* пространстве; точнее, справедлива

Теорема 4.7-9. *Пусть U — подмножество векторного пространства V, J: $U \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция и функция $\bar{J}$: $V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ определена соотношением*

$$\bar{J}: v \in V \to \begin{cases} J(v) & \text{при} \quad v \in U, \\ +\infty & \text{при} \quad v \notin U. \end{cases}$$

Тогда функция $\bar{J}$ выпукла в том и только в том случае, когда выпуклыми являются множество U и функция J: $V \to \mathbb{R}$. ■

В заключение приведём ещё три важных свойства выпуклых функций со значениями в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Первые два свойства элементарны, а доказательство третьего можно найти, например, в книге Ekeland & Temam [1974].

Теорема 4.7-10. (a) *Пусть V — векторное пространство. Функция J: $V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ выпукла в том и только в том случае, когда её* **надграфик** (рис. 4.7-3)

$$\operatorname{epi} J := \{(v, \alpha) \in V \times \mathbb{R}; \quad J(v) \leqslant \alpha\}$$

является выпуклым подмножеством пространства $V \times \mathbb{R}$.

(b) *Пусть V — векторное пространство и*

$$(J_\lambda: V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\})_{\lambda \in \Lambda}$$

— произвольное семейство выпуклых функций. Тогда функция

$$J = \sup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$$

также является выпуклой.

(c) *Пусть V — конечномерное пространство. Выпуклая функция J: $V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ непрерывна во внутренних точках множества $\{v \in V;\ J(v) < +\infty\}$.* ■

Как видно из рис. 4.7-3, выпуклая функция J может не быть непрерывной на границе множества $\{v \in V;\ J(v) < +\infty\}$. Предположение конечномерности пространства V в утверждении (c)

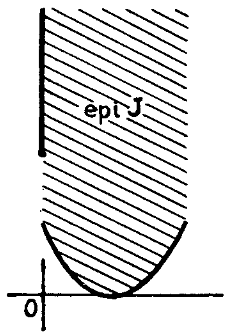

Рис. 4.7-3. Надграфик функции J: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, заданной соотношеииями: $J(v) = +\infty$ при $v < 0$ и $2 \leqslant v$, $J(0) = 2$, $J(v) = (v-1)^2$ при $0 < v < 2$.

существенно. Например, выпуклый функционал $J(p) = p(2)$ не является непрерывным на пространстве всех многочленов p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|p\| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |p(x)|$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрите последовательность многочленов p_n: $x \in \mathbb{R} \to x^n/n$, для которой $p_n \to 0$ и $J(p_n) \to +\infty$. По поводу обобщения свойства (c) на случай бесконечномерных пространств см. Ekeland & Temam [1974].

В гл. 7 мы изучим соотношение между понятием выпуклости и весьма важным понятием полунепрерывных снизу функционалов, главным образом в связи с вопросами существования минимизирующих элементов для таких функционалов.

4.8. Невыпуклость функции запасённой энергии

Наличие свойства выпуклости у функции запасённой энергии по аргументу $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$ в каждой точке $x \in \bar{\Omega}$ позволило бы применить стандартные математические методы к исследованию соответствующей задачи минимизации (теорема 7.3-2). Если бы удалось обосновать справедливость этого свойства, то столь простые выпуклые функции, как $\boldsymbol{F} \to \operatorname{tr} \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \|\boldsymbol{F}\|^2$ (теорема 4.7-7), или, в более общем виде, $F \to \operatorname{tr}(F^{\mathrm{T}}F)^{\gamma/2}$, $\gamma \geqslant 1$ (теорема 4.9-2), целесообразно было бы использовать для построения функций запасённой энергии. Тем не менее *такие не вызывающие на первый взгляд никаких сомнений примеры следует исключить из рассмотрения, ибо*, как мы сейчас покажем, *они противоречат непосредственному физическому опыту*. Для начала получим некоторые *математические* следствия из предположения о выпуклости функции запасённой энергии (определение выпуклых функций, заданных на невыпуклых множествах, дано в предыдущем параграфе).

Теорема 4.8-1. *Пусть в точке* $x \in \bar{\Omega}$ *функция*

$$\hat{W}(x, \cdot)\colon F \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{W}(x, F) \in \mathbb{R}$$

является выпуклой. Тогда справедливы следующие утверждения:

(a) *Это свойство несовместимо со сходимостью*

$$\hat{W}(x, F) \to +\infty \quad \text{при} \quad \det F \to 0^+, \quad F \in \mathbb{M}^3_+.$$

(b) *Из аксиомы независимости материала от системы отсчёта вытекает, что для любой деформации* φ *отсчётной конфигурации* $\bar{\Omega}$ *собственные значения* τ_i *тензора напряжений Коши* $T^\varphi(x^\varphi)$ *в каждой точке* $x^\varphi = \varphi(x)$ *деформированной конфигурации удовлетворяют неравенствам*

$$\tau_1 + \tau_2 \geqslant 0, \quad \tau_2 + \tau_3 \geqslant 0, \quad \tau_3 + \tau_1 \geqslant 0, \quad \tau_i = \lambda_i(T^\varphi(x^\varphi)).$$

Доказательство. (i) Поскольку множество $\mathbb{M}^3_+$ *не* является выпуклым (теорема 4.7-4), найдутся число μ_0 и матрицы F_0, F_1, такие что

$$\mu_0 \in]0, 1[, \quad F_0 \in \mathbb{M}^3_+, \quad G_0 \in \mathbb{M}^3_+,$$
$$\{(1-\mu_0)F_0 + \mu_0 G_0\} \notin \mathbb{M}^3_+.$$

Обозначим через $\hat{W}^*(x, \cdot)\colon \mathbb{M}^3 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ любое выпуклое продолжение функции $\hat{W}(x, \cdot)\colon \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ на множество $\operatorname{co}\mathbb{M}^3_+ = \mathbb{M}^3$ (теорема 4.7-4) и рассмотрим выпуклую функцию

$$\omega\colon \lambda \in [0, 1] \to \omega(\lambda) := \hat{W}^*(x, (1-\lambda)F_0 + \lambda G_0) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

С одной стороны, очевидно, что должно выполняться неравенство

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \omega(\lambda) \leqslant \max\{\omega(0), \omega(1)\} < +\infty.$$

С другой стороны, существует $\lambda_0 \in]0, \mu_0]$, такое что

$$\det\{(1-\lambda)\boldsymbol{F}_0 + \lambda\boldsymbol{G}_0\} > 0 \text{ при } 0 \leqslant \lambda < \lambda_0,$$
$$\det\{(1-\lambda_0)\boldsymbol{F}_0 + \lambda_0\boldsymbol{G}_0\} = 0$$

(функция $\lambda \to \det\{(1-\lambda)\boldsymbol{F}_0 + \lambda\boldsymbol{G}_0\}$ — многочлен степени $\leqslant 3$). Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0^-} \omega(\lambda) = +\infty,$$

что невозможно.

(ii) Как показано в теореме 4.2-1, для гиперупругих материалов аксиома независимости от системы отсчёта равносильна соотношению

$$\hat{W}(x, \boldsymbol{QF}) = \hat{W}(x, \boldsymbol{F}) \text{ при всех } \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+, \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

Допустим, что функция $\hat{W}(x, \cdot)\colon \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ выпукла. На основании критерия выпуклости, приведённого в теореме 4.7-6, заключаем, что для любых заданных матриц $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$ и $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$ выполняется неравенство

$$\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) + \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{F}) : (\boldsymbol{QF} - \boldsymbol{F}) \leqslant \hat{W}(x, \boldsymbol{QF}).$$

Следует отметить, что здесь не нужно заменять функцию $\tilde{W}(x, \cdot)$ её продолжением на множество $\mathbb{M}^3$, поскольку оба аргумента $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{QF}$ принадлежат $\mathbb{M}^3_+$. Заметим также, что точка $\boldsymbol{F}$ принадлежит открытому множеству $\mathbb{M}^3_+$, на котором функция $\hat{W}(x, \cdot)$ дифференцируема по предположению. Таким образом, в силу равенства $\hat{W}(x, \boldsymbol{QF}) = \hat{W}(x, \boldsymbol{F})$ должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{F}) : (\boldsymbol{QF} - \boldsymbol{F}) \leqslant 0 \text{ при всех } \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+, \ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AC}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{B}$ и $\det \boldsymbol{F} > 0$, получаем

$$(\det \boldsymbol{F})^{-1} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{F}) \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} : (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{I}) \leqslant 0 \text{ при всех } \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+, \ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

Полагая $\boldsymbol{F} = \nabla\varphi(x)$ в последнем неравенстве, выводим, что тензор напряжений Коши в точке $x^\varphi = \varphi(x)$ (§ 2.5)

$$\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) = (\det \nabla\varphi(x))^{-1} \boldsymbol{T}(x) \nabla\varphi(x)^{\mathrm{T}},$$
$$\text{где } \boldsymbol{T}(x) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \nabla\varphi(x)),$$

удовлетворяет неравенству

$$\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) : (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{I}) \leqslant 0 \text{ при всех } \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+,$$

и потому нам остаётся только охарактеризовать собственные значения таких тензоров $\boldsymbol{T}$, для которых

$$\boldsymbol{T} \in \mathbb{S}^3 \text{ и } \boldsymbol{T} : (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{I}) \leqslant 0 \text{ при всех } \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

Пусть тензор $\boldsymbol{T}$ удовлетворяет этому неравенству и тензор $\boldsymbol{P}$ приводит $\boldsymbol{T}$ к диагональному виду:

$$\boldsymbol{P} \in \mathbb{O}^3_+, \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{P}, \quad \text{при } \boldsymbol{D} = \mathbf{Diag}\, \tau_i$$

(мы всегда можем считать, что ортогональная матрица, диагонализующая симметрическую, обладает положительным определителем; в противном случае нужно поменять знак одного из её столбцов). В силу соотношений $\boldsymbol{AB} : \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{CB}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ также имеем

$$\boldsymbol{T} : (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{P} : \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{P} : \boldsymbol{I} = \boldsymbol{D} : \left(\boldsymbol{P} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{I}\right).$$

Поэтому можно ограничиться описанием лишь таких *диагональных* матриц $\mathbf{Diag}\, \tau_i$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\mathbf{Diag}\, \tau_i : (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}) \leqslant 0 \text{ для всех } \boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^3_+.$$

Полагая в этом соотношении

$$\boldsymbol{R} = \mathbf{Diag}\,(1, -1, -1), \qquad \boldsymbol{R} = \mathbf{Diag}\,(-1, 1, -1),$$
$$\boldsymbol{R} = \mathbf{Diag}\,(-1, -1, 1),$$

устанавливаем, что $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}'$, где

$$\mathbb{T} := \{\mathbf{Diag}\, \tau_i \in \mathbb{M}^3;\ \ \mathbf{Diag}\, \tau_i : (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}) \leqslant 0 \text{ при всех } \boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^3_+\},$$
$$\mathbb{T}' := \{\mathbf{Diag}\, \tau_i \in \mathbb{M}^3;\ \ \tau_1 + \tau_2 \geqslant 0, \quad \tau_2 + \tau_3 \geqslant 0, \quad \tau_3 + \tau_1 \geqslant 0\}.$$

Докажем обратное вложение. Для этого сначала заметим, что множества $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}'$ являются конусами с вершинами в начале координат ($\lambda \boldsymbol{D} \in \mathbb{T}$ для всех $\lambda \geqslant 0$, если $\boldsymbol{D} \in \mathbb{T}$) и потому достаточно доказать, что

$$\mathbb{T}' \cap \mathbb{P} \subset \mathbb{T} \cap \mathbb{P},$$

где $\mathbb{P}$ — плоскость, определённая соотношением

$$\mathbb{P} := \{\mathbf{Diag}\, \tau_i \in \mathbb{M}^3;\ \ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1\}.$$

Каждую матрицу, принадлежащую треугольнику $\mathbb{T}' \cap \mathbb{P}$, можно представить в виде выпуклой комбинации трёх его вершин $\mathbf{Diag}(-1, 1, 1)$, $\mathbf{Diag}(1, -1, 1)$, $\mathbf{Diag}(1, 1, -1)$, и, кроме того, оба множества $\mathbb{T}' \cap \mathbb{P}$ и $\mathbb{T} \cap \mathbb{P}$ выпуклы. Поэтому достаточно установить, что множество $\mathbb{T} \cap \mathbb{P}$ содержит эти три вершины. Пусть $\boldsymbol{S}$ — любая из трёх указанных диагональных матриц. Поскольку

$$-\boldsymbol{S} \in \mathbb{O}^3_+ \quad \text{и} \quad (-\boldsymbol{S}) : (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}) = \operatorname{tr}(-\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}) + 1,$$

наша задача сводится к доказательству неравенства

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{Q} \geqslant -1 \text{ при всех } \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

Заметим, что след матрицы является инвариантом и потому, не ограничивая общности, мы можем рассматривать лишь ортогональные матрицы частного вида

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

которые, очевидно, удовлетворяют неравенству $\operatorname{tr} \boldsymbol{Q} \geqslant -1$. Теорема доказана. (Другое доказательство намечено в упражнении 4.14.) ■

Первое утверждение теоремы 4.8-1 означает, что функции запасённой энергии, зависящие от $\det \boldsymbol{F}$ явно, не могут быть выпуклыми, поскольку, как показано в § 4.6, есть веские основания считать, что для таких функций $\lim\limits_{\det \boldsymbol{F} \to 0^+} \widehat{W}(x, \boldsymbol{F}) = +\infty$.

Второе утверждение теоремы 4.8-1 приводит к ещё более серьёзным противоречиям, поскольку нельзя ожидать, чтобы собственные значения $\tau_i = \lambda_i(\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi))$ тензора напряжений Коши удовлетворяли неравенствам $\tau_i + \tau_{i+1} \geqslant 0$ во *всех* точках x^φ и во *всех* деформированных конфигурациях. Это видно на примере шара, испытывающего равномерное сжатие, когда $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi) = -\pi \boldsymbol{I}$, $\pi > 0$ (рис. 3.8-2). Неравенства $\tau_i + \tau_{i+1} \geqslant 0$ были впервые получены Коулманом и Ноллом (Coleman & Noll [1959], см. также Truesdell & Noll [1965, p. 163]). Тот факт, что выпуклость функции запасённой энергии несовместима с её поведением при $\det \boldsymbol{F} \to 0^+$, был впервые обнаружен Антмаиом (Antman [1970]; см. также Antman [1983]).

Замечание. Если помимо прочего предположить, что фуикция запасённой энергии *строго* выпукла, то соответствующий функционал энергии, рассмотренный в теореме 4.1-1, может иметь не более одной стационарной точки (упражнение 4.15), а это противоречит примерам неединственности решений, приведенным ниже в § 5.8. Дополнительные сведения по этим вопросам содержатся в работах Hill [1957, 1968, 1970], Rivlin [1973], Sidoroff [1974]. ■

4.9. Понятие поливыпуклости Джона Болла; поливыпуклые функции запасённой энергии

Джон Болл впервые обратил внимание на следующий очень важный факт. При несостоятельности требования выпуклости функции запасённой энергии $\hat{W}(x, \boldsymbol{F})$ возможно принять *более слабое* допущение относительно $\hat{W}$, а именно: фуикция $\mathbb{W}^*(x, \cdot)$, определённая соотношением $\mathbb{W}^*(x, \boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) := \hat{W}(x, \boldsymbol{F})$ для всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$, должна быть выпуклой на множестве $\{(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R},\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+\}$. В отличие от условия выпуклости (теорема 4.8-1), такое предположение не противоречит каким-либо физическим требованиям и, более того, оно справедливо для практически приемлемых моделей (теоремы 4.9-2 и 4.10-1). Но самое главное достоинство этого предположения заключается в возможности получить глубокие *результаты о существовании решений* (см. гл. 7).

Перейдём теперь к более подробному изложению этих вопросов. Джон Болл (Ball [1977, p. 359]) предложил следующее общее определение. Функция $\hat{W}$: $\mathbb{F} \to \mathbb{R}$, заданная на произвольном подмножестве $\mathbb{F}$ множества $\mathbb{M}^3$, называется *поливыпуклой*, если найдётся выпуклая функция $\mathbb{W}^*$: $\mathbb{U} \to \mathbb{R}$, где

$$\mathbb{U} := \{(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R};\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{F}\},$$

такая что

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \mathbb{W}^*(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \text{ для всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{F}.$$

Используя понятие выпуклых функций на невыпуклых множествах (§ 4.7), можно дать эквивалентное определение: функция $\hat{W}$: $\mathbb{F} \to \mathbb{R}$ называется *поливыпуклой*, если найдётся выпуклая функция $\mathbb{W}$: $\mathrm{co}\,\mathbb{U} \to \mathbb{R}$, такая что

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \mathbb{W}(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \text{ для всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{F}.$$

Согласно теореме 4.7-4,

$$\mathrm{co}\,\{(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R};\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+\} \\ = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \,]0, +\infty[\,;$$

поэтому приведённое определение применимо к следующему частному случаю, который и представляет для нас основной интерес. *Функция запасённой энергии* $\hat{W}$: $\bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ *называется* **поливыпуклой**, *если при каждом* $x \in \bar{\Omega}$ *найдётся выпуклая функ-*

ция

$$\mathbb{W}(x,\ \cdot)\colon \mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times\,]0,\ +\infty[\,\to\mathbb{R},$$

такая что

$$\boxed{\hat{W}(x,\ \boldsymbol{F})=\mathbb{W}(x,\ \boldsymbol{F},\ \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F},\ \det\boldsymbol{F})\ \text{для всех}\ \boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+.}$$

Замечания. (1) Поскольку выпуклое множество $\mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times\,]0,\ +\infty[$ открыто в $\mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times\mathbb{R}$, выпуклая функция $\mathbb{W}(x,\ \cdot)\colon \mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times\,]0,\ +\infty[\,\to\mathbb{R}$ непрерывна (теорема 4.7-10). С другой стороны, функция

$$\overline{\mathbb{W}}\colon (x,\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{H},\ \delta)\in\mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times\mathbb{R}\to\begin{cases}\mathbb{W}(x,\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{H},\ \delta) & \text{при}\ \delta>0,\\ +\infty & \text{при}\ \delta\leqslant 0\end{cases}$$

со значениями в множестве $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ является выпуклой (теорема 4.7-9), но она может не быть непрерывной при $\delta=0$, если функция $\mathbb{W}$ не удовлетворяет условию

$$\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{F}_k,\ \boldsymbol{H}_k)\to(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{H})\ \text{в}\ \mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\\ \delta_k\to 0^+\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbb{W}(x,\ \boldsymbol{F}_k,\ \boldsymbol{H}_k,\ \delta_k)\to+\infty.$$

Отметим, что из этой сходимости вытекает сходимость $\hat{W}(x,\ \boldsymbol{F})\to+\infty$ при $\det\boldsymbol{F}\to 0^+$, но обратное, вообще говоря, *неверно* (см. упражнение 7.11).

(2) В случае *двумерного пространства* определение *функций запасённой энергии* можно ввести на основе исследования „предельного" перехода к уравнениям Кармана для пластин; см. Ciarlet & Quintela-Estevez [1987]. ■

Чтобы убедиться в преимуществах понятия поливыпуклости, для начала рассмотрим функцию

$$\hat{W}\colon \boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+\to\hat{W}(\boldsymbol{F})=\operatorname{tr}\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^2.$$

Эта функция не является выпуклой. Действительно, пусть матрицы $\boldsymbol{F}_\lambda$ имеют вид

$$\boldsymbol{F}_\lambda=\lambda\,\mathbf{Diag}(2,\ 1,\ 1)+(1-\lambda)\,\mathbf{Diag}(1,\ 2,\ 1)\in\mathbb{M}^3_+,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

Тогда соответствующая функция

$$\lambda\in[0,\ 1]\to\operatorname{tr}\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}_\lambda^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_\lambda=9+2\lambda-\lambda^2-2\lambda^3+\lambda^4$$

не является выпуклой в окрестности точки 0. Тем не менее функция $\hat{W}$ поливыпукла в силу выпуклости (теорема 4.7-7) функции

$$\mathbb{W}\colon \boldsymbol{H}\in\mathbb{M}^3\to\mathbb{W}(\boldsymbol{H})=\operatorname{tr}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\|\boldsymbol{H}\|^2.$$

Рассмотрим также функцию

$$\hat{W}\colon\ F \in \mathbb{M}_+^3 \to \hat{W}(F) = \det F.$$

Эта функция не будет выпуклой, поскольку определённым выше матрицам F_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, отвечает невыпуклая функция

$$\lambda \in [0,\ 1] \to \det F_\lambda = 2 + \lambda - \lambda^2.$$

Однако $\hat{W}$ обладает свойством поливыпуклости, благодаря выпуклости функции $\mathbb{W}(\delta) = \delta$.

Учитывая все эти примеры, мы приходим к заключению, что функция запасённой энергии

$$\hat{W}\colon\ F \in \mathbb{M}_+^3 \to \hat{W}(F) = a\|F\|^2 + b\|\operatorname{Cof} F\|^2 + \Gamma(\det F),$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $\Gamma\colon\ ]0,\ +\infty[\, \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, является поливыпуклой, поскольку функция $\mathbb{W}$, заданная равенством

$$\mathbb{W}(x,\ F,\ H,\ \delta) = a\|F\|^2 + b\|H\|^2 + \Gamma(\delta),$$

выпукла на множестве $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times\,]0,\ +\infty[$. *Наша цель — обобщить последний пример, введя в рассмотрение новый важный класс поливыпуклых функций запасённой энергии.*

В качестве вспомогательного результата установим сначала общий критерий выпуклости для функций от матриц (различные дополнения к этому результату приведены в упражнениях 4.16—4.19). Напомним, что *сингулярные числа* $v_i(F)$ матрицы $F \in \mathbb{M}^3$ определяются как квадратные корни из собственных значений положительно-полуопределённой матрицы $F^T F$ (§ 3.2). Следующий результат принадлежит Томпсону и Фриду (Thompson & Freede [1971]); здесь мы воспроизводим доказательство, данное Боллом (Ball [1977, теорема 5.1]).

Теорема 4.9-1. *Пусть задана симметрическая выпуклая функция* $\Phi\colon\ [0,\ +\infty[^n \to \mathbb{R}$, *которая является неубывающей по каждому аргументу. Тогда функция*

$$W\colon\ F \in \mathbb{M}^n \to W(F) = \Phi(v_1(F),\ v_2(F),\ \ldots,\ v_n(F))$$

выпукла.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{S}_n$ группу перестановок множества $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Свойство симметричности функции Φ означает, что

$$\Phi(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n) = \Phi(v_{\sigma(1)},\ v_{\sigma(2)},\ \ldots,\ v_{\sigma(n)}) \text{ для всех } \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

(i) Нам нужно показать, что для любых двух матриц F, $G \in \mathbb{M}^n$ и любого $\lambda \in\,]0,\ 1[$ справедливо неравенство

$$W(\lambda F + (1-\lambda) G) \leqslant \lambda W(F) + (1-\lambda) W(G),$$

т. е.

$$\Phi(a) \leqslant \lambda\Phi(\boldsymbol{u}) + (1-\lambda)\Phi(v),$$

где

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0, \qquad u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant 0,$$
$$v_1 \geqslant v_2 \geqslant \ldots \geqslant v_n \geqslant 0$$

— сингулярные числа матриц $\lambda\boldsymbol{F} + (1-\lambda)\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ соответственно и $\boldsymbol{a} = (a_i)$, $\boldsymbol{u} = (u_i)$, $\boldsymbol{v} = (v_i)$. Полагая (см. рис. 4.9-1, где $n = 2$)

$$\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v} = (c_i),$$
$$\boldsymbol{c}^0 = \boldsymbol{o} = (\boldsymbol{c}_i^0), \qquad c^l = (c_1, c_2, \ldots, c_l, 0, 0, \ldots, 0) = (c_i^l),$$
$$\boldsymbol{c}_\sigma^l = \left(c_{\sigma(i)}^l\right), \qquad 0 \leqslant l \leqslant n, \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

мы покажем (в части (iii) доказательства), что вектор $\boldsymbol{a} = (a_i)$ можно записать в виде выпуклой комбинации векторов $\boldsymbol{c}_\sigma^l$, т. е.

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = \sum\limits_{l=0}^{n} \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mu_\sigma^l \boldsymbol{c}_\sigma^l, \\ 1 = \sum\limits_{l=0}^{n} \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mu_\sigma^l, \qquad \mu_\sigma^l \geqslant 0. \end{cases}$$

Мы утверждаем, что отсюда вытекает выпуклость функции W. Действительно, поскольку Φ выпукла, имеем

$$\Phi(\boldsymbol{a}) \leqslant \sum_{l=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mu_\sigma^l \Phi\left(\boldsymbol{c}_\sigma^l\right),$$

а так как Φ симметрична и не убывает по каждому из аргументов, то

$$\Phi\left(\boldsymbol{c}_\sigma^l\right) = \Phi\left(\boldsymbol{c}^l\right) \leqslant \Phi(\boldsymbol{c}).$$

Таким образом, снова пользуясь выпуклостью функции Φ, получаем

$$\Phi(\boldsymbol{a}) \leqslant \Phi(\boldsymbol{c}) = \Phi(\lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}) \leqslant \lambda\Phi(\boldsymbol{u}) + (1-\lambda)\Phi(\boldsymbol{v}).$$

(ii) В качестве промежуточного результата покажем, что *для любых заданных чисел* $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n \geqslant 0$ *функция*

$$\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3 \to \vartheta_r(\boldsymbol{F}) := \sum_{i=1}^{n} r_i v_i(\boldsymbol{F})$$

является выпуклой, где сингулярные числа матрицы $\boldsymbol{F}$ *занумерованы в порядке невозрастания*:

$$v_1(\boldsymbol{F}) \geqslant v_2(\boldsymbol{F}) \geqslant \ldots \geqslant v_n(\boldsymbol{F}) \geqslant 0.$$

Для этого достаточно представить ϑ_r в виде

$$\vartheta_r(\boldsymbol{F}) = \max_{\boldsymbol{Q},\, \boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n} \operatorname{tr}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_r\boldsymbol{R}), \qquad \boldsymbol{D}_r = \operatorname{Diag} r_i,$$

поскольку каждая функция $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^n \to \operatorname{tr}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_r\boldsymbol{R})$ линейна и, значит, выпукла, и, кроме того, поточечная верхняя грань семейства выпуклых функций выпукла (теорема 4.7-10(b)). Докажем требуемое представление для ϑ_r. Во-первых, на основании теоремы 3.2-4 имеем

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_r\boldsymbol{R}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} v_i(\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q})\, v_i(\boldsymbol{D}_r\boldsymbol{R}) = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i(\boldsymbol{F}) \text{ для всех } \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n.$$

Во-вторых, пользуясь теоремой о сингулярном разложении матриц (теорема 3.2-3), мы можем представить $\boldsymbol{F}$ в виде

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{D}_v\boldsymbol{T} \text{ при } \boldsymbol{D}_v = \operatorname{Diag} v_i(\boldsymbol{F}), \qquad \boldsymbol{F}, \boldsymbol{T} \in \mathbb{O}^n,$$

так что при $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T}^{-1}$ и $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S}^{-1}$ получаем

$$\max_{\boldsymbol{Q},\, \boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^n} \operatorname{tr}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_r\boldsymbol{R}) \geqslant \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}_v\boldsymbol{D}_r\boldsymbol{S}^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i(\boldsymbol{F}).$$

(iii) Остаётся показать, что вектор a можно представить как выпуклую комбинацию векторов c_σ^l, $0 \leqslant l \leqslant n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, опреде-

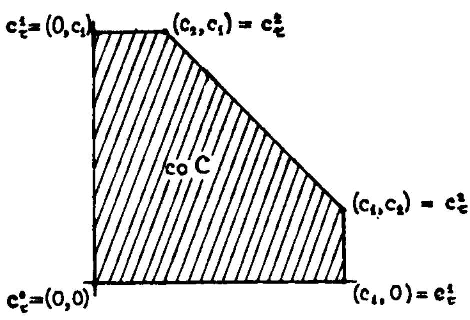

Рис. 4.9-1. Выпуклая оболочка конечного множества $C = \{c_\sigma^l;\ l = 0, 1, 2,\ \sigma \in \mathfrak{S}_2\}$, $\mathfrak{S}_2 = \{\iota, \tau\}$.

лённых в части (i) доказательства, т. е. что a принадлежит выпуклой оболочке множества (рис. 4.9-1)

$$C := \{c_\sigma^l \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant l \leqslant n,\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

Множество C конечно, а потому его выпуклая оболочка $\operatorname{co} C$ замкнута, и, значит, $\operatorname{co} C$ является пересечением всех замкнутых полупространств $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{d} \leqslant \delta\}$, содержащих C (теорема 4.7-2). Иными словами, нам нужно доказать следующую импликацию:

$$c_\sigma^l \cdot d \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant l \leqslant n, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n \Rightarrow a \cdot d \leqslant \delta.$$

Чтобы установить, как связаны векторы a с векторами c (а значит, и с векторами c_σ^l), воспользуемся результатом п. (ii). Мы показали, что для любых чисел $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\vartheta_r(\lambda F + (1-\lambda) G \leqslant \lambda\vartheta_r(F) + (1-\lambda)\vartheta_r(G),$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^n r_i a_i \leqslant \lambda \sum_{i=1}^n r_i u_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^n r_i v_i = \sum_{i=1}^n r_i c_i.$$

Следовательно, векторы a и c удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^n r_i a_i \leqslant \sum_{i=1}^n r_i c_i \text{ для всех } r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n \geqslant 0.$$

Пусть теперь $d \in \mathbb{R}^n$ и $\delta \in \mathbb{R}$ таковы, что $c_\sigma^l \cdot d \leqslant \delta$, $0 \leqslant l \leqslant n$ $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Поскольку $c_\sigma^0 = 0$, заключаем, что $\delta \geqslant 0$. Если все компоненты d_i отрицательны, то, очевидно, $a \cdot d \leqslant \delta$; поэтому мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда по крайней мере одна из компонент d_i неотрицательна. Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ таково, что

$$d_{\sigma^{-1}(1)} \geqslant \ldots \geqslant d_{\sigma^{-1}(l)} \geqslant 0 > d_{\sigma^{-1}(l+1)} \geqslant \ldots \geqslant d_{\sigma^{-1}(n)},$$

где $1 \leqslant l \leqslant n$ (если $l = n$, то члены справа от нуля отсутствуют). Мы можем написать

$$\begin{aligned} a \cdot d = \sum_{i=1}^n a_{\sigma^{-1}(i)} d_{\sigma^{-1}(i)} &\leqslant \sum_{i=1}^n a_i d_{\sigma^{-1}(i)} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^l a_i d_{\sigma^{-1}(i)} \leqslant \sum_{i=1}^l c_i d_{\sigma^{-1}(i)} = c_\sigma^l \cdot d \leqslant \delta; \end{aligned}$$

здесь учтено неравенство $\sum_{i=1}^n r_i a_i \leqslant \sum_{i=1}^n r_i c_i$ с

$$r_i = d_{\sigma^{-1}(i)} \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant l, \quad r_i = 0 \text{ при } l+1 \leqslant i \leqslant n.$$

Теорема доказана. ■

Замечание. В доказательстве теоремы было использовано соотношение

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \\ \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \geqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_{\sigma(i)} \text{ для всех } \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

которое легко устанавливается индукцией по n. ■

Введём теперь один общий класс поливыпуклых функций запасённой энергии. Ради простоты обозначений мы рассматриваем лишь однородные материалы; обобщение на случай неоднородных материалов очевидно.

Теорема 4.9-2. *Пусть функция запасённой энергии* $\hat{W}$ *имеет вид*

$$\hat{F} \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{W}(F) = \sum_{i=1}^{M} a_i\left(v_1^{\gamma_i} + v_2^{\gamma_i} + v_3^{\gamma_i}\right) + \sum_{j=1}^{N} b_j\left((v_2v_3)^{\delta_j} + (v_3v_1)^{\delta_j} + (v_1v_2)^{\delta_j}\right) + \Gamma(\det F),$$

где

$v_i = v_i(F)$ — сингулярные числа матрицы F;
$a_i > 0$ и $\gamma_i \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant M$;
$b_j > 0$ и $\delta_j \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant N$;
Γ: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ — выпуклая функция.

Тогда функция $\hat{W}$ *поливыпукла и удовлетворяет следующему неравенству коэрцитивности*:

$\hat{W}(F) \geqslant \alpha\{\|F\|^p + \|\mathbf{Cof}\, F\|^q\} + \Gamma(\det F)$ для всех $F \in \mathbb{M}^3_+$,
где $\alpha > 0$, $p = \max\limits_i \gamma_i$, $q = \max\limits_j \delta_j$.

Доказательство. (i) Функция

$$\Phi_\gamma(v_1, v_2, v_3) := v_1^\gamma + v_2^\gamma + v_3^\gamma, \qquad \gamma \geqslant 1,$$

удовлетворяет всем предположениям теоремы 4.9-1. Она является симметрической и неубывающей по каждой переменной. Кроме того, она выпукла на множестве $[0, +\infty[^3$ в силу своей выпуклости на множестве $]0, +\infty[^3$ (матрица $\gamma(\gamma-1)\,\mathbf{Diag}\, v_i^{\gamma-2}$, задающая её вторую производную, является положительно-полуопределённой при $\gamma \geqslant 1$; см. теорему 4.7-7), а также непрерывна на множестве $[0, +\infty[^3$. Следовательно, функция Φ_γ выпукла при $\gamma \geqslant 1$.

(ii) Сингулярные числа матрицы $\mathbf{Cof}\, F$ в точности равны v_2v_3, v_3v_1, v_1v_2 (теорема 1.1-1). Поэтому функция $\hat{W}$ имеет вид

$$\hat{W}(F) = A(F) + B(\mathbf{Cof}\, F) + \Gamma(\det F) := \mathbb{W}(F, \mathbf{Cof}\, F, \det F),$$

где функции A: $\mathbb{M}^3 \to \mathbb{R}$ и B: $\mathbb{M}^3 \to \mathbb{R}$ выпуклы в силу п. (i), а функция Γ: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ выпукла по условию теоремы.

Таким образом, функция $\mathbb{W}\colon \mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times]0, +\infty[\to\mathbb{R}$ является выпуклой, и, значит, $\hat{W}$ поливыпукла.

(iii) Наконец, установим неравенство коэрцитивности. Поскольку при $\gamma\geqslant 1$ отображение

$$(v_i)\in\mathbb{R}^3\to(|v_1|^\gamma+|v_2|^\gamma+|v_3|^\gamma)^{1/\gamma}$$

задаёт норму в пространстве $\mathbb{R}^3$, а все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны, то для каждого $\gamma\geqslant 1$ существует постоянная c_γ, такая что

$$(|v_1|^\gamma+|v_2|^\gamma+|v_3|^\gamma)\geqslant c_\gamma(|v_1|^2+|v_2|^2+|v_3|^2)^{\gamma/2}.$$

Поэтому при $v_i=v_i(\boldsymbol{F})$ имеем

$$v_1^\gamma+v_2^\gamma+v_3^\gamma\geqslant c_\gamma(v_1^2+v_2^2+v_3^2)^{\gamma/2}=c_\gamma(\operatorname{tr}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{\gamma/2}=c_\gamma\|\boldsymbol{F}\|^\gamma.$$

Теорема доказана. ■

Замечания. (1) Хотя доказательство выпуклости функции $\boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3\to(v_1^\gamma+v_2^\gamma+v_3^\gamma)$ весьма просто при $\gamma=2$ (как мы видели, этот факт немедленно вытекает из теоремы 4.7-7), при $\gamma\neq 2$ оно оказывается неожиданно трудным. Выпуклость же функции $\mathbf{F}\in\mathbb{M}^3\to\|\boldsymbol{F}\|^\gamma$, $\gamma\geqslant 1$, устанавливается без всяких затруднений (упражнение 4.20).

(2) Для доказательства выпуклости какой-либо функции, заданной на $\mathbb{M}^3_+$, нужно, следуя определению, найти для неё подходящее выпуклое продолжение на множество $\mathbb{M}^3=\operatorname{co}\mathbb{M}^3_+$ что в общем случае может быть непросто (упражнение 4.13). Однако в данном случае функция $(v_1^\gamma+v_2^\gamma+v_3^\gamma)$ допускает непосредственное продолжение такого рода. ■

Характер зависимости функции запасённой энергии от самой матрицы $\boldsymbol{F}$ можно яснее увидеть на примере функции из теоремы 4.9-2. Для этого заметим, что если $\boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+$, то матрица $(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{1/2}$ определена единственным образом и её можно записать в виде

$$(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{1/2}=\boldsymbol{P}\,\mathbf{Diag}\,v_i\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{P}\in\mathbb{O}^3,\qquad v_i=v_i(\boldsymbol{F})=\{\lambda_i(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})\}^{1/2}.$$

Для любого $\delta>0$ определим симметрическую матрицу

$$(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{\delta/2}:=\boldsymbol{P}\,\mathbf{Diag}\,v_i^\delta\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}},$$

которая, как нетрудно показать, не зависит от конкретной матрицы $\boldsymbol{P}$, диагонализующей матрицу $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ (упражнение 4.21). Пользуясь этим определением, мы можем написать

$$v_1^\gamma+v_2^\gamma+v_3^\gamma=\operatorname{tr}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{\gamma/2},$$
$$(v_2v_3)^\delta+(v_3v_1)^\delta+(v_1v_2)^\delta=\operatorname{tr}(\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{\delta/2}.$$

Тогда функция запасённой энергии из теоремы 4.9-2 приобретает вид

$$\boxed{\hat{W}(F)=\sum_{i=1}^{M} a_i \operatorname{tr}\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{\gamma_i/2}+\sum_{j=1}^{N} b_j \operatorname{tr}\left(\operatorname{Cof} F^{\mathrm{T}}F\right)^{\delta_j/2}+\Gamma(\det F).}$$

Гиперупругий материал, которому соответствует функция запасённой энергии такого вида, удовлетворяющая предположениям теоремы 4.9-2, а также дополнительному условию $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\Gamma(\delta)=+\infty$, называется **материалом Огдена**. Материалы подобного типа, введённые впервые Огденом (Ogden [1972b]), представляют большой интерес как с практической, так и с теоретической точек зрения.

В заключение этой главы построим несколько конкретных примеров материалов Огдена.

4.10. Примеры материалов Огдена и других гиперупругих материалов

Как следует из теоремы 4.4-3, материал Сен-Венана—Кирхгофа является гиперупругим и его функция запасенной энергии имеет вид

$$\hat{W}(F)=\breve{W}(E)=\frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} E)^2+\mu \operatorname{tr} E^2, \qquad I+2E=F^{\mathrm{T}}F,$$

что эквивалентно соотношениям

$$\begin{aligned}\hat{W}(F)&=-\left(\frac{3\lambda+2\mu}{4}\right)\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)+\left(\frac{\lambda+2\mu}{8}\right)\left(v_1^4+v_2^4+v_3^4\right)\\&\quad+\frac{\lambda}{4}\left(v_2^2v_3^2+v_3^2v_1^2+v_1^2v_2^2\right)+\left(\frac{6\mu+9\lambda}{8}\right)\\&=-\left(\frac{3\lambda+2\mu}{4}\right)\operatorname{tr} C+\left(\frac{\lambda+2\mu}{8}\right)\operatorname{tr} C^2+\frac{\lambda}{4}\operatorname{tr}\operatorname{Cof} C\\&\quad+\left(\frac{6\mu+9\lambda}{8}\right), \qquad v_i=v_i(F), \quad C=F^{\mathrm{T}}F.\end{aligned}$$

Хотя второе выражение для $\hat{W}$ напоминает функцию запасённой энергии из теоремы 4.9-2 для материала Огдена, мы сейчас покажем, что *функция запасённой энергии материала Сен-Венана—Кирхгофа не является поливыпуклой*, в основном за счёт того, что функция $\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)$ входит в неё с отрицательным коэффициентом. Однако данное наблюдение не может служить доказательством, поскольку указанное выше представление в виде функции от (F, $\operatorname{Cof} F$, $\det F$) неединственно (отсутствие слагаемого вида $\Gamma(\det \boldsymbol{F})$, где Γ — выпуклая функция, не влияет на поливыпуклость: если функция запасённой энергии поливыпукла, она сохраняет это свойство при добавлении такого слагаемого). Остроумное доказательство, приведённое ниже, принадлежит Раулю (Raoult [1986]).

Теорема 4.10-1. *Функция запасённой энергии вида*

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = a_1 \operatorname{tr} \boldsymbol{C} + a_2 \operatorname{tr} \boldsymbol{C}^2 + b \operatorname{tr} \operatorname{Cof} \boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F},$$

где $a_2 > 0,\ b > 0,$

не является поливыпуклой, если $a_1 < 0$.

Доказательство. При каждом $\varepsilon > 0$ матрицы

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon := \varepsilon \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{G}_\varepsilon := \varepsilon \operatorname{Diag}(1,\ 1,\ 3)$$

приидалежат множеству $\mathbb{M}^3_+$ и удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Cof} \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}_\varepsilon + \boldsymbol{G}_\varepsilon) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{Cof} \boldsymbol{F}_\varepsilon + \operatorname{Cof} \boldsymbol{G}_\varepsilon),$$
$$\det \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}_\varepsilon + \boldsymbol{G}_\varepsilon) = \tfrac{1}{2}(\det \boldsymbol{F}_\varepsilon + \det \boldsymbol{G}_\varepsilon).$$

Пусть $\hat{W}\colon \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ — поливыпуклая функция запасённой энергии. Согласно определению найдётся выпуклая функция $\mathbb{W}$: $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, такая что

$$\begin{aligned}
&\hat{W}\left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}_\varepsilon + \boldsymbol{G}_\varepsilon)\right) \\
&\quad = \mathbb{W}\left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}_\varepsilon + \boldsymbol{G}_\varepsilon),\ \operatorname{Cof} \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}_\varepsilon + \boldsymbol{G}_\varepsilon),\ \det \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}_\varepsilon + \boldsymbol{G}_\varepsilon)\right) \\
&\quad = \mathbb{W}\left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}_\varepsilon + \boldsymbol{G}_\varepsilon),\ \tfrac{1}{2}(\operatorname{Cof} \boldsymbol{F}_\varepsilon + \operatorname{Cof} \boldsymbol{G}_\varepsilon),\ \tfrac{1}{2}(\det \boldsymbol{F}_\varepsilon + \det \boldsymbol{G}_\varepsilon)\right) \\
&\quad \leqslant \tfrac{1}{2}\mathbb{W}(\boldsymbol{F}_\varepsilon,\ \operatorname{Cof} \boldsymbol{F}_\varepsilon,\ \det \boldsymbol{F}_\varepsilon) + \tfrac{1}{2}\mathbb{W}(\boldsymbol{G}_\varepsilon,\ \operatorname{Cof} \boldsymbol{G}_\varepsilon,\ \det \boldsymbol{G}_\varepsilon) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}(\hat{W}(\boldsymbol{F}_\varepsilon) + \hat{W}(\boldsymbol{G}_\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Для функции запасённой энергии вида

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = a_1 \operatorname{tr} \boldsymbol{C} + a_2 \operatorname{tr} \boldsymbol{C}^2 + b \operatorname{tr} \operatorname{Cof} \boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F},$$

неравенство $\hat{W}\left(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}_\varepsilon + \boldsymbol{G}_\varepsilon)\right) \leqslant \tfrac{1}{2}(\hat{W}(\boldsymbol{F}_\varepsilon) + \hat{W}(\boldsymbol{G}_\varepsilon))$ равносильно неравенству

$$0 \leqslant a_1\varepsilon^2 + (25a_2 + 2b)\,\varepsilon^4,$$

которое не выполняется при достаточно малых ε, если $a_1 < 0$. ■

С другой стороны, среди функций запасённой энергии однородных и изотропных гиперупругих материалов простейшая функция, допускающая разложение вида (теорема 4.5-1)

$$\breve{W}(\boldsymbol{E}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu \operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2 + o(\|\boldsymbol{E}\|^2)$$

вблизи естественного состояния, характеризует материалы Сен-Венана—Кирхгофа. Введём теперь семейство *материалов Огдена* с функциями запасённой энергии, имеющими очень простой вид и в то же время удовлетворяющими сразу двум требованиям — это, во-первых, возможность указанного разложения из теоремы 4.5-1 (должны допускаться произвольные значения постоянных Ламэ $\lambda > 0$ и $\mu > 0$) и, во-вторых, поливыпуклость. Следующий результат доказан в работе Ciarlet & Geymonat [1982].

Теорема 4.10-2. *Пусть заданы постоянные Ламэ $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. Существуют поливыпуклые функции запасённой энергии, имеющие вид*

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{W}(\boldsymbol{F}) = a\|\boldsymbol{F}\|^2 + b\|\operatorname{Cof}\boldsymbol{F}\|^2 + \Gamma(\det\boldsymbol{F}) + e, \\ \text{где } a > 0,\ b > 0,\ \Gamma(\delta) = c\delta^2 - d\operatorname{Log}\delta, \quad c,\ d > 0,\ e \in \mathbb{R}, \end{array}}$$

и удовлетворяющие соотношениям

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{W}(\boldsymbol{F}) = \breve{W}(\boldsymbol{E}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2 + O(\|\boldsymbol{E}\|^3), \\ \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}. \end{array}}$$

Для таких функций запасённой энергии справедливо неравенство коэрцитивности

$$\boxed{\hat{W}(\boldsymbol{F}) \geqslant \alpha(\|\boldsymbol{F}\|^2 + \|\operatorname{Cof}\boldsymbol{F}\|^2 + (\det\boldsymbol{F})^2) + \beta, \ \alpha > 0.}$$

Доказательство. Имеют место следующие соотношения:

$$\|\boldsymbol{F}\|^2 = \operatorname{tr}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}) = 3 + 2\operatorname{tr}\boldsymbol{E},$$

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Cof}\boldsymbol{F}\|^2 &= \operatorname{tr}\operatorname{Cof}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E})\}^2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E})^2 \\ &= 3 + 4\operatorname{tr}\boldsymbol{E} + 2(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2 - 2\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} &= \tfrac{1}{6}\{\operatorname{tr}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\}^3 - \tfrac{1}{2}\{\operatorname{tr}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\}\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^2\} + \tfrac{1}{3}\operatorname{tr}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^3 \\ &= 1 + 2\operatorname{tr}\boldsymbol{E} + 2(\operatorname{tr}\boldsymbol{F})^2 - 2\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2 + O(\|\boldsymbol{E}\|^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\det \boldsymbol{F}) &= \Gamma\left(\{\det \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\}^{1/2}\right)\\ &= \Gamma\left(1+\operatorname{tr}\boldsymbol{E}+\tfrac{1}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2-\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2+O(\|\boldsymbol{E}\|^3)\right)\\ &= \Gamma(1)+\Gamma'(1)\left\{\operatorname{tr}\boldsymbol{E}+\tfrac{1}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2-\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2\right\}\\ &\qquad +\tfrac{1}{2}\Gamma''(1)(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2+O(\|\boldsymbol{E}\|^3),\end{aligned}$$

причём мы пока не конкретизируем вид функции $\Gamma\colon\ ]0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$, а предполагаем лишь, что она выпукла и дважды дифференцируема в точке 1. Для того чтобы выполнялось равенство

$$a\|\boldsymbol{F}\|^2+b\|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^2+\Gamma(\det\boldsymbol{F})+e = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2+\mu\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2+O(\|\boldsymbol{E}\|^3),$$

необходимо иметь соотношения

$$\begin{cases} 3a+3b+\Gamma(1)+e=0,\\ 2a+4b+\Gamma'(1)=0,\\ 2b+\frac{1}{2}\Gamma'(1)+\frac{1}{2}\Gamma''(1)=\frac{\lambda}{2},\\ -2b-\Gamma'(1)=\mu. \end{cases}$$

Покажем, что эти уравнения можно разрешить таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$a>0,\qquad b>0,\qquad \Gamma''(1)\geqslant 0.$$

Из двух последних уравнений вытекает, что

$$\Gamma''(1)=(\lambda+2\mu)+\Gamma'(1),$$

а неравенства $a>0$ и $b>0$ равносильны соответственно неравенствам $\Gamma'(1)>-2\mu$ и $\Gamma'(1)<-\mu$. Таким образом, любая точка $(\Gamma'(1), \Gamma''(1))$ открытого отрезка с концами $(-2\mu, \lambda)$ и $(-\mu, \lambda+\mu)$ удовлетворяет всем указанным выше требованиям (см. рис. 4.10-1). Остаётся установить наличие чисел $c>0$ и $d>0$, таких что точка, координаты которой суть производные $\Gamma'(1)$ и $\Gamma''(1)$ функции

$$\Gamma\colon\ \delta>0\to\Gamma(\delta)=c\delta^2-d\operatorname{Log}\delta,$$

принадлежит этому открытому отрезку. Поскольку $\Gamma''(\delta)=2c+d/\delta^2>0$ для всех $\delta>0$, функция Γ выпукла. Так как $\Gamma'(1)=2c-d$ и $\Gamma''(1)=2c+d$, неравенства $c>0$ и $d>0$ равносильны неравенству

$$\Gamma''(1)>|\Gamma'$$

из которого вытекает, что множество допустимых пар $(\Gamma'(1), \Gamma''(1))$ сводится к открытому отрезку (рис. 4.10-1)

$$S = \left]\left(-\frac{\lambda}{2}-\mu,\ \frac{\lambda}{2}+\mu\right),\ (-\mu,\ \lambda+\mu)\right[.$$

Подводя итог, рассмотрим любую точку $(\Gamma'(1), \Gamma''(1))$ открытого отрезка S и положим

$$a = \mu + \tfrac{1}{2}\Gamma'(1), \qquad b = -\frac{\mu}{2} - \tfrac{1}{2}\Gamma'(1),$$
$$c = \tfrac{1}{2}(\Gamma'(1) + \Gamma''(1)), \qquad d = \tfrac{1}{2}(\Gamma''(1) - \Gamma'(1)).$$

Тогда функция запасённой энергии $\hat{W}$, заданная соотношением

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = a\|\boldsymbol{F}\|^2 + b\|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^2 + c(\det \boldsymbol{F})^2 - d\operatorname{Log}\det \boldsymbol{F}$$
$$-(3a+3b+c) \text{ для всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,$$

удовлетворяет всем требованиям теоремы. Справедливость неравенства коэрцитивности очевидна. ■

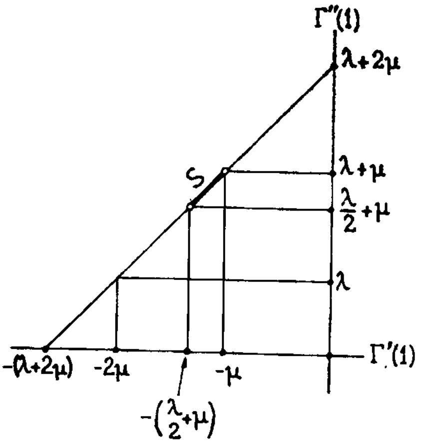

Рис. 4.10-1. Построение материала Огдена, функция запасённой энергии которого $\hat{W}(\boldsymbol{F}) = a\|\boldsymbol{F}\|^2 + b\|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^2 + \Gamma(\det \boldsymbol{F})$ вблизи естественного состояния удовлетворяет условию

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \breve{W}(\boldsymbol{E}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2 + O(\|\boldsymbol{E}\|^3),$$

где $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}$, λ и μ — постоянные Ламэ. Множество S образоваио допустимыми парами $(\Gamma'(1), \Gamma''(1))$.

Замечания. (1) Результат, аналогичный теореме 4.10-2, можно доказать для материалов Огдена, функция запасённой энергии которых даже ещё более похожа на соответствующую функцию для материалов Сен-Венана—Кирхгофа (упражнение 4.23).

(2) Некоторые указания по поводу определяющих уравнений, связанных с рассмотренными здесь функциями, содержатся в упражнении 4.23. ■

Таким образом, в силу теоремы 4.10-2 функции запасённой энергии материала Огдена можно всегда придать вид, соответствующий данному гиперупругому материалу с известными постоянными Ламэ, которые, в свою очередь, определяются из экспериментов, описанных в § 3.8.

В заключение этой главы приведём перечень уже встречавшихся нам функций запасённой энергии, а также некоторые другие близкие примеры.

(i) *Материалы Огдена* (Ogden [1972b]):

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \sum_{i=1}^{M} a_i \left(v_1^{\gamma_i} + v_2^{\gamma_i} + v_3^{\gamma_i}\right) + \sum_{j=1}^{N} b_j \left((v_2 v_3)^{\delta_j} + (v_3 v_1)^{\delta_j} + (v_1 v_2)^{\delta_j}\right) + \Gamma(\det \boldsymbol{F})$$

$$= \sum_{i=1}^{M} a_i \operatorname{tr} \boldsymbol{C}^{\gamma_i/2} + \sum_{j=1}^{N} b_j \operatorname{tr} (\mathbf{Cof}\, \boldsymbol{C})^{\delta_j/2} + \Gamma(\det \boldsymbol{F}),$$

где $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$, $v_i = \{\lambda_i(\boldsymbol{C})\}^{1/2}$, $a_i > 0$, $\gamma_i \geqslant 1$, $b_j > 0$, $\delta_j \geqslant 1$ и Γ: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, такая что $\Gamma(\delta) \to +\infty$ при $\delta \to 0^+$, причём Γ удовлетворяет подходящим условиям роста при $\delta \to +\infty$. Такие материалы подробно были рассмотрены в § 4.9. Отметим, что в литературе часто вводится нормировочная постоянная $3 = \operatorname{tr} \boldsymbol{I}$ — как, например, в случае

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \sum_{i=1}^{M} a_i \left\{\operatorname{tr} \boldsymbol{C}^{\gamma_i/2} - 3\right\} + \sum_{j=1}^{N} b_j \left\{\operatorname{tr} (\mathbf{Cof}\, \boldsymbol{C})^{\delta_j/2} - 3\right\} + \Gamma(\det \boldsymbol{F}),$$

— для того чтобы первые члены обратились в нуль при $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$.

(ii) *Сжимаемые неогуковы материалы* (Blatz [1971]):

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = a\|\boldsymbol{F}\|^2 + \Gamma(\det \boldsymbol{F}), \qquad a > 0.$$

Напомним, что $\|\boldsymbol{F}\|^2 = \operatorname{tr} \boldsymbol{C}$.

(iii) *Сжимаемые материалы Муни — Ривлина* (Ciarlet & Geymonat [1982]; см. также теорему 4.10-2):

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = a\|\boldsymbol{F}\|^2 + b\|\mathbf{Cof}\, \boldsymbol{F}\|^2 + \Gamma(\det \boldsymbol{F}),$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $\Gamma(\delta) = c\delta^2 - d \operatorname{Log} \delta$, $c > 0$, $d > 0$.

Материалы в примерах (ii) и (iii) получили своё название по аналогии с материалами, функция запасённой энергии которых не содержит члена $\Gamma(\det \boldsymbol{F})$ и которые соответственно носят названия *несжимаемого неогукова материала* и *несжимаемого материала Муни—Ривлина*. Пример (iii) допускает обобщение вида

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = a_1 \operatorname{tr} \boldsymbol{C} + a_2 \operatorname{tr} \boldsymbol{C}^2 + b \operatorname{tr} \mathbf{Cof}\, \boldsymbol{C} + \Gamma(\det \boldsymbol{F}),$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b > 0$ и $\Gamma(\delta) = c\delta^2 - d \operatorname{Log} \delta$, $c > 0$, $d > 0$ (Ciarlet & Geymonat [1982]; см. также упражнение 4.23).

(iv) Функция запасённой энергии

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{F}\|^2 + \frac{1}{\sigma}(\det \boldsymbol{F})^{-\sigma}, \ \sigma > 0,$$

применялась в работах Burgess & Levinson [1972], Simpson & Spector [1984b]. Она является частным случаем функций запасённой энергии вида

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = a_0(\operatorname{tr} \boldsymbol{C}^{1/2})^\rho + a_1(\operatorname{tr} \boldsymbol{C})^\rho + c(\det \boldsymbol{F})^{-\sigma},$$

где $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $\rho > 0$, $\sigma > 0$. Такие функции были введены Антманом (Antman [1979]) в связи с задачами о выворачивании сферических оболочек.

(v) *Материалы Сен-Венана—Кирхгофа* (см. § 3.9, теоремы 4.4-3 и 4.10-1):

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = -\left(\frac{3\lambda + 2\mu}{4}\right) \operatorname{tr} \boldsymbol{C} + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{8}\right) \operatorname{tr} \boldsymbol{C}^2 + \frac{\lambda}{4} \operatorname{tr} \mathbf{Cof}\, \boldsymbol{C} + \left(\frac{6\mu + 9\lambda}{8}\right) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} \boldsymbol{E})^2 + \mu \operatorname{tr} \boldsymbol{E}^2,$$

где $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}$, $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ — постоянные Ламэ рассматриваемого материала.

(vi) *Материалы Адамара — Грина* (Simpson & Spector [1984a]; см. также упражнение 5.18):

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{F}\|^2 + \frac{\beta}{4}\{\|\boldsymbol{F}\|^4 - \|\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\|^2\} + \Gamma(\det \boldsymbol{F}),$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Другие примеры функций запасённой энергии для *сжимаемых* материалов приведены в работах: Blatz & Ko [1962], Ogden [1970, 1976, 1984], Knowles & Sternberg [1973, 1975], Flory & Tatara [1975], Fong & Penn [1975], Peng & Landel [1975], Charrier, Dacorogna, Hanouzet & Laborde [1985] (см. также обзор Davet [1985]), а для *несжимаемых* материалов — в работах: Ogden [1972a, 1984], Treloar [1975], Storåkers [1979], Davet [1985]. В этих работах содержатся подробнейшие указания по поводу того, каким образом функцию запасённой энергии, априорно заданную в какой-то конкретной форме, можно *привести в соответствие с экспериментами.*

Упражнения

4.1. Пусть $\hat{W}$ — функция запасённой энергии, такая что отображение $\partial\hat{W}/\partial\boldsymbol{F}$: $\bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{M}^3$ непрерывно и удовлетворяет следующему условию: для любого $r > 0$ найдётся $l(r)$, такое что

$$\left|\frac{\partial\hat{W}}{\partial\boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{F}) - \frac{\partial\hat{W}}{\partial\boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{G})\right| \leqslant l(r)\|\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}\|$$

для всех $x \in \overline{\Omega}$ и всех $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G} \in \mathbb{M}^3_+$, удовлетворяющих неравенствам $\|\boldsymbol{F}\| \leqslant r$ и $\|\boldsymbol{G}\| \leqslant r$. Покажите, что отображение

$$W\colon \psi \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega};\ \mathbb{R}^3) \to W(\psi) = \int_\Omega \widehat{W}(x,\ \nabla\psi(x))\,\mathrm{d}x$$

дифференцируемо, причём

$$W'(\psi)\,\vartheta = \int_\Omega \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x,\ \nabla\psi(x)) : \nabla\vartheta(x)\,\mathrm{d}x.$$

В пространстве $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega};\ \mathbb{R}^3)$ введена обычная норма

$$\|\psi\|_{\mathscr{C}^1(\overline{\Omega};\ \mathbb{R}^3)} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |\psi(x)| + \max_{x \in \overline{\Omega}} \|\nabla\psi(x)\|.$$

4.2. (1) Докажите, что подмножество $\mathbb{M}^3_+$ множества $\mathbb{M}^3$ связно.

(2) Покажите непосредственно (т. е. не пользуясь теоремой 4.7-4), что множество $\mathbb{M}^3_+$ не является выпуклым подмножеством $\mathbb{M}^3$.

4.3. Пусть $C\colon \mathbb{O}^3_+ \to \mathbb{R}$ — отображение, входящее в соотношение $\widehat{W}(\boldsymbol{QF}) = \widehat{W}(\boldsymbol{F}) + C(\boldsymbol{Q})$ при всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$, $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$, установленное при доказательстве теоремы 4.2-1.

(1) Покажите, что отображение C — гомоморфизм групп $\mathbb{O}^3_+$ и $\mathbb{R}$, т. е.

$$C(\boldsymbol{PQ}) = C(\boldsymbol{P}) + C(\boldsymbol{Q}) \text{ для всех } \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+.$$

(2) Не предполагая непрерывности отображения C, покажите, что из указанного соотношения вытекает равенство $C(\boldsymbol{Q}) = 0$ при всех $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$.

4.4. Рассмотрим однородный и изотропный упругий материал с функцией запасённой энергии $\widehat{W}\colon \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ (теорема 4.4-1) вида

$$\widehat{W}(\boldsymbol{F}) = \dot{W}\left(\iota_{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}}\right) \text{ для всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

Очевидно, что $\widehat{W}$ дифференцируема, если дифференцируема функция $\dot{W}$. Верно ли обратное утверждение?

З а м е ч а н и е. Дифференцируемость функции $\dot{W}$ являлась одним из предположений теоремы 4.4-2.

4.5. Предположим, что определяющее уравнение некоторого упругого материала имеет вид (теорема 3.6-2)

$$\overline{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{B}) = \beta_0(\iota_{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{I} + \beta_1(\iota_{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{B} + \beta_2(\iota_{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{B}^2.$$

Выпишите систему из трёх уравнений относительно частных производных функций β_α, которая задаёт необходимые н достаточные условия гиперупругости этого материала.

4.6. Покажите, что имеются соотношения, связывающие тензор иапряжений Коши с производной соответствующей функции запасённой энергии, записанной в переменных *деформированной* конфигурации. Этот факт впервые замечен в работе Doyle & Ericksen [1956] (см. также Marsden & Hughes [1983, p. 197], Simo & Marsden [1984a, 1984b]).

4.7. Если однородное упругое тело испытывает *однородную деформацию* φ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ (т. е. градиент деформации в $\bar{\Omega}$ есть постоянная матрнца), то первое уравнение равновесия приобретает вид $-\operatorname{div} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{o}$ в Ω. Следовательно, такая деформация однородного упругого тела может быть вызвана приложением одних лишь поверхностных сил. Весьма примечателен тот факт, что это утверждение в случае гиперупругих материалов допускает следующее обращение.

Пусть φ: $\Omega \to \mathbb{R}^3$ — достаточно гладкая деформация, обладающая тем свойством, что она может возникнуть для *любого* однородного и изотропного гиперупругого тела в результате приложения одних лишь поверхностных сил (которые могут зависеть от рассматриваемого тела). Покажите, что тогда деформация φ однородна.

Замечание. Этот результат носит название *теоремы Эриксена* (Ericksen [1955a]). Варианты доказательства см. в работах: Truesdell & Noll [1965, p. 336], Marsden & Hughes [1983], Wang & Truesdell [1973, p. 276], Shield [1971]. Аналогичное утверждение, также принадлежащее Эриксену, справедливо для несжимаемых тел (Ericksen [1954]).

4.8. (1) Пусть имеется однородный и изотропный гиперупругий материал, для которого отсчётная конфигурация является естественным состоянием. Предполагая необходимую гладкость соответствующих функций, покажите, что

$$\check{W}(\boldsymbol{F}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} \boldsymbol{E})^2 + \mu \operatorname{tr} \boldsymbol{E}^2 + \alpha_1 (\operatorname{tr} \boldsymbol{E})^3 + \alpha_2 (\operatorname{tr} \boldsymbol{E}) \operatorname{tr} \boldsymbol{E}^2 + \alpha_3 \operatorname{tr} \boldsymbol{E}^3 + O(\|\boldsymbol{E}\|^3),$$

где α_1, α_2, α_3 — постоянные (дальнейшие подробностн можно найти в книге Новожилова [1958]).

(2) Вычислите соответствующую функцню реакции $\check{\Sigma}$ и сравннте её с разложением, установленным в упражнении 3.11 (обратите внимание на сделанные там замечания).

(3) Почему предположение о гиперупругости приводит к уменьшению числа произвольных постоянных (с 4 до 3) в члене разложения третьего порядка?

(4) Сравните свойства гладкости в точке (0, 0, 0) функций W_1 и W_2, заданных соотношениями

$$\dot{W}(\iota_{I+2E}) = W_1(\iota_E) = W_2(\operatorname{tr} E, \operatorname{tr} E^2, \operatorname{tr} E^3),$$

со свойствами гладкости функции $\dot{W}$ в точке ι_I.

4.9. Рассмотрим однородный и изотропный гиперупругий материал, для которого отсчётная конфигурация есть единичный шар $\bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| \leqslant 1\}$. Предположим, что он подвергается деформации вида $\varphi_\varepsilon = \varepsilon\,\boldsymbol{id}$, $\varepsilon > 0$, когда *к границе приложена равномерно сжимающая нагрузка* (обозначения § 2.7)

$$\boldsymbol{g}(x) = -\pi_\varepsilon(\det \nabla\varphi(x))\,\nabla\varphi(x)^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{n}(x),\ \ \pi_\varepsilon > 0,$$

и что при каждом $\alpha > 0$ соответствующая полная энергия

$$I(\psi) = \int_\Omega \hat{W}(\nabla\psi(x))\,\mathrm{d}x - G(\psi)$$

(функция G определена в теореме 2.7-1) удовлетворяет соотношению

$$I(\varphi_\varepsilon) = \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi),$$

где (как обычно, гладкость не уточняется)

$$\Phi = \left\{\psi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3;\ \det \nabla\psi > 0,\ \ \int_\Omega \psi(x)\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{o}\right\}.$$

Покажите, что в этом случае

$$\lim_{\det F \to 0^+} \hat{W}(\boldsymbol{F}) = +\infty \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \pi_\varepsilon = +\infty.$$

Иными словами „для аннигиляции объёма требуется бесконечно большое давление".

Замечание. Для корректной постановки такого рода задач с „граничными условиями на напряжения" требуется дополнительное ограничение типа $\int_\Omega \psi(x)\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{o}$ при задании множества допустимых деформаций Φ (эти вопросы обсуждаются в § 5.1).

4.10. Покажите, что функция запасённой энергии материала Сен-Венана—Кирхгофа удовлетворяет следующему неравенству коэрцитивности:

$$\widehat{W}(\boldsymbol{F}) \geqslant \alpha (\|\boldsymbol{F}\|^4 + \|\mathbf{Cof}\, \boldsymbol{F}\|^2) + \beta, \qquad \alpha > 0.$$

4.11. (1) Пусть $\delta \in \mathbb{R}$ и

$$\mathbb{U}_\delta = \{(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\, \boldsymbol{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3;\ \det \boldsymbol{F} = \delta\}.$$

Покажите, что со $\mathbb{U}_\delta = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3$.

(2) В качестве следствия из (1) докажите, что со $\mathbb{U} = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[$, где

$$\mathbb{U} = \{(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\, \boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R};\ \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+\}.$$

З а м е ч а н и е. По существу, здесь намечен первоначальный вариант доказательства теоремы 4.7-4, предложенный Боллом (Ball [1977, теорема 4.3]).

4.12. Следующее остроумное доказательство теоремы 4.7-4 принадлежит А. Мильке.

(1) Покажите, что

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta) \in \mathrm{co}\, \mathbb{U} \text{ и } \boldsymbol{G} \in \mathbb{M}^3_+ \Rightarrow (\boldsymbol{GF}, (\mathbf{Cof}\, \boldsymbol{G})\boldsymbol{H}, (\det \boldsymbol{G})\delta) \in \mathrm{co}\, \mathbb{U}.$$

(2) Покажите, что

$$(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{0}, \delta),\ (-\boldsymbol{I}, \boldsymbol{0}, \delta),\ (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}, \delta),\ (\boldsymbol{0}, -\boldsymbol{I}, \delta) \in \mathrm{co}\, \mathbb{U} \quad \text{для всех} \quad \delta > 0.$$

(3) Покажите, что

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{0}, \delta),\ (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{H}, \delta) \in \mathrm{co}\, \mathbb{U} \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H} \in \mathbb{M}^3, \quad \delta > 0.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь методом, применённым при доказательстве равенства со $\mathbb{M}^3_+ = \mathbb{M}^3$ в теореме 4.7-4.

(4) Выведите соотношение со $\mathbb{U} = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[$.

4.13. (1) Следуя работе Busemann, Ewald & Shephard [1963], покажите, что функция $J\colon U \subset V \to \mathbb{R}$, где U — непустое подмножество конечномерного векторного пространства V, выпукла в том и только в том случае, когда найдётся аффинная функция $G\colon V \to \mathbb{R}$, такая что $J(v) \geqslant G(v)$ для всех $v \in V$ и

$$J\left\{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i\right\} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \lambda_i J(v_i)$$

для всех точек $v_i \in U$ и выпуклых комбинаций $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i$, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, принадлежащих множеству U.

(2) Покажите, что одним из возможных выпуклых продолжений $\bar{J}$: co $U \to \mathbb{R}$ функции J является функция

$$\bar{J}(v) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i J(v_i);\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i = v,\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geqslant 0\right\}$$
$$\text{при} \quad v \in \operatorname{co} U.$$

4.14. (1) Используя *углы Эйлера* (Euler [1758]; см. также Synge [1960, p. 18]), найдите общий вид элементов матрицы $\boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^3_+$. Исходя из полученных выражений для элементов главной диагонали, дайте ещё одно доказательство эквивалентности (установленной при доказательстве теоремы 4.8-1) следующих соотношений:

$$\mathbf{Diag}\,\tau_i\colon (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{R} \in \mathbb{O}^3_+ \Leftrightarrow \tau_i + \tau_{i+1} \geqslant 0,$$
$$i = 1,\ 2,\ 3\ (\mathrm{mod}\ 3).$$

(2) Также пользуясь углами Эйлера, дайте для случая $n = 3$ другое доказательство соотношения

$$|\operatorname{tr} \boldsymbol{AB}| \leqslant \sum_{i=1}^{N} v_i(\boldsymbol{A})\, v_i(\boldsymbol{B}),$$

которое было установлено для произвольного n в теореме 3.2-4 и нашло применение в доказательстве теоремы 4.9-1.

Замечание. Другие полезные представления произвольных ортогональных матриц третьего порядка приведены в работе Guo [1981].

4.15. (1) Предположим, что функция запасённой энергии $\hat{W}$: $\mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ строго выпукла. Исходя из формальных соображений покажите, что полная энергия, рассмотренная в теореме 4.1-1, может иметь не более одной стационарной точки.

(2) Объясните, почему, тем не менее, *строгая поливыпуклость* функции запасённой энергии совместима с существованием нескольких совершенно различных решений соответствующей краевой задачи.

4.16. Пусть g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Покажите, что функция $\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n \to \sum_{i=1}^{n} g(\lambda_i(\boldsymbol{A}))$ также является выпуклой (Yang [1980]).

4.17. Пусть Φ: $[0, +\infty[^n \to \mathbb{R}$ — симметрическая функция. Покажите, что необходимым и достаточным условием выпуклости функции

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{S}^n_{\geqslant} \to \Phi(\lambda_1(\boldsymbol{A}), \ldots, \lambda_n(\boldsymbol{A}))$$

является выпуклость функции Φ (см. Ball [1977, теорема 5.1(i)), а также Marques & Moreau [1982], где даётся обобщение этого утверждения).

4.18. Пусть Φ: $[0, +\infty[^n \to \mathbb{R}$ — симметрическая функция, такая что функция

$$F \in \mathbb{M}^n \to \Phi(v_1(F), \ldots, v_n(F))$$

выпукла. Покажите, что Φ является выпуклой и неубывающей по каждой переменной (Ball [1977, теорема 5.1(ii)]).

Замечание. Этот результат представляет собой обращение теоремы **4.9-1.**

4.19. Рассмотрим функцию запасённой энергии вида

$$\hat{W}: F \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{W}(F) = \Theta(v_1, v_2, v_3, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_1v_2v_3),$$
$$v_i = v_i(F),$$

где Θ: $([0, +\infty[^6 \times]0, +\infty[) \to \mathbb{R}$ — выпуклая неубывающая по переменным v_i и v_iv_{i+1} функция, удовлетворяющая условию

$$\Theta(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, \delta) = \Theta(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}, w_{\tau(1)}, w_{\tau(2)}, w_{\tau(3)}, \sigma$$
$$\text{для всех } \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_3.$$

Покажите, что функция $\hat{W}$ поливыпукла (Ball [1977, теорема 5.2]).

Замечание. Теорема 4.9-2 является частным случаем этого утверждения.

4.20. Пусть U — выпуклое подмножество векторного пространства и J: $U \to \mathbb{R}$ — выпуклая неотрицательная функция. Покажите, что функция J^p: $U \to \mathbb{R}$ выпукла при всех $p \geqslant 1$. Как следствие этого установите выпуклость функции $F \in \mathbb{M}^n \to \|F\|^p)$ $p \geqslant 1$.

4.21. Пусть K — симметрическая положительно-определённая матрица порядка n, приведённая к диагональному виду:

$$K = P(\mathbf{Diag}\,\lambda_i)P^{\mathrm{T}} = Q(\mathbf{Diag}\,\lambda_{\sigma(i)})Q^{\mathrm{T}}, \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

Покажите, что для любого $\delta > 0$

$$P(\mathbf{Diag}\,\lambda_i^\delta)P^{\mathrm{T}} = Q(\mathbf{Diag}\,\lambda_{\sigma(i)}^\delta)Q^{\mathrm{T}}.$$

Замечание. Этот результат показывает корректность определения матрицы $K^\delta \in \mathbb{S}^n_>$ для любой матрицы $K \in \mathbb{S}^n_>$, которое использовалось для представления функций запасённой энергии, отвечающих материалам Огдена (теорема 4.9-2).

4.22. Пусть $\widehat{W}(\boldsymbol{F}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2$ для всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3$, где $\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ (функцию $\widehat{W}$ можно рассматривать как фунцию запасённой энергии, отвечающую „предельному случаю" материалов Сен-Венана—Кирхгофа при $\lambda = 0$, $\mu = 1$).

(1) Покажите, что $\widehat{W}(\boldsymbol{F}) \to +\infty$ при $\|\boldsymbol{F}\| \to +\infty$.

(2) Пусть $\mathbb{V}$ — произвольная выпуклая окрестность точки $\boldsymbol{I}$ в $\mathbb{M}^3$. Покажите, что $\widehat{W}$ не является выпуклой на $\mathbb{V}$.

(3) Покажите, что найдётся окрестность $\mathbb{V}$ точки $\boldsymbol{I}$ в $\mathbb{M}^3$, на которой $\widehat{W}$ поливыпукла. Почему это свойство не противоречит теореме 4.10-1?

Замечание. Подробности см. в работе Atteia & Rassouli [1986].

4.23. Это упражнение дополняет теорему 4.10-2. Пусть $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ — заданные постоянные Ламэ.

(1) Покажите, что существуют функции запасённой энергии, имеющие вид

$$\widehat{W}(\boldsymbol{F}) = a_1 \operatorname{tr}\boldsymbol{C} + a_2 \operatorname{tr}\boldsymbol{C}^2 + b \operatorname{tr}\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{C} + \Gamma(\det\boldsymbol{F}) + e,$$

где

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad b > 0,$$
$$\Gamma(\delta) = c\delta^2 - d\operatorname{Log}\delta, \quad c > 0, \quad d > 0, \quad e \in \mathbb{R},$$

и удовлетворяющие условию

$$\widehat{W}(\boldsymbol{F}) = \breve{W}(\boldsymbol{E}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2 + O(\|\boldsymbol{E}\|^3), \qquad \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}.$$

Указание. Доказательство этого утверждения очень похоже на доказательство теоремы 4.10-2; в частности, множество допустимых пар $(\Gamma'(1), \Gamma''(1))$ (см. рис. 4.10-1) в этом случае совпадает с множеством внутренних точек некоторого треугольника (Ciarlet & Geymonat [1982]).

(2) Запишите соответствующее определяющее уравнение в виде (теорема 4.2-2)

$$\breve{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \frac{\partial\breve{W}}{\partial\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + \breve{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{E}).$$

Найдите явное выражение для остаточного члена $\breve{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{E})$ и покажите непосредственно, что имеет место равенство $\breve{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{E}) = O(\|\boldsymbol{E}\|^2)$, согласующееся с утверждением теоремы 3.8-1.

ГЛАВА 5

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТРЁХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Введение

В предыдущих главах нам встречались два типа граничных условий: *граничное условие на положения*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x), \qquad x \in \Gamma_0 \subset \Gamma,$$

и *граничное условие на напряжения*

$$\hat{T}(x, \nabla\varphi(x))\,n = \hat{g}(x, \nabla\varphi(x)), \qquad x \in \Gamma_1 \subset \Gamma.$$

Краевая задача трёхмерной теории упругости, содержащая граничные условия только указанных двух типов, называется *задачей с граничными условиями на перемещения и напряжения* (§ 5.1). Тем не менее на практике часто приходится иметь дело и с другими граничными условиями, например *нелокальными* или же условиями, частично задающими положения и напряжения (§ 5.2). Особенно важными являются так называемые *односторонние граничные условия* на положения (§ 5.3), которые можно записать в виде

$$\varphi(x) \in C, \qquad x \in \Gamma_2 \subset \Gamma,$$

где C — произвольное замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^3$. Когда такое условие налагается на функции, минимизирующие полную энергию, его можно рассматривать как математическую модель *контакта с препятствием без трения* (теорема 5.3-1).

С физической точки зрения приемлемой является только такая деформация φ, которая *инъективна на открытом множестве* Ω (отсутствие инъективности может иметь место лишь на Γ при самосоприкосновении точек границы). Для решений *задачи с граничными условиями на перемещения* ($\varphi = \varphi_0$ на всей Γ) инъективность обычно вытекает из следующего утверждения (теорема 5.5-2): если отображение $\varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, где Ω — ограниченное открытое связное множество в $\mathbb{R}^3$, сохраняет ориентацию (т. е. $\det \nabla\varphi > 0$ в $\bar{\Omega}$) и совпадает на границе Ω с некоторым инъективным отображением $\varphi_0\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, то и само φ инъективно на $\bar{\Omega}$.

Однако этот результат неприменим в реальных ситуациях, когда деформация задаётся лишь на части множества Γ (или же вообще не задаётся на Г). Чтобы охватить подобные случаи, мы предлагаем несколько иной подход (§ 5.6), а именно к условию сохранения ориентации $\det \nabla\varphi > 0$ в $\bar{\Omega}$ нужно добавить следующее *условие инъективности*:

$$\int_\Omega \det \nabla\varphi(x)\,dx \leqslant \mathrm{vol}\,\varphi(\Omega)$$

на отображения $\varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, минимизирующие полную энергию. Тогда соответствующая задача минимизации представляет собой математическую модель тела, допускающую *самокасание без трения при отсутствии взаимопроникновения частей тела* (теорема 5.6-3).

Таким образом, с каждой конкретной краевой задачей трёхмерной теории упругости естественно связать некоторое *множество допустимых деформаций*. Это множество состоит из всех достаточно гладких отображений $\varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, которые удовлетворяют, согласно нашему выбору, тем или иным *геометрическим ограничениям* (*связям*), как например условию сохранения ориентации, условию инъективности, граничному условию (возможно одностороннему) на положения и т. п. (§ 5.7).

Затем мы более подробно останавливаемся на *нелинейности*, присущей краевой задаче трёхмерной теории упругости, поскольку это свойство обнаруживается как экспериментально — в *неединственности* решений в различных физических ситуациях (§ 5.8), так и математически — в *квазилинейном* характере уравнений равновесия и нелинейных условиях на допустимые деформации (§ 5.9). И наконец (§ 5.10), мы приводим перечень *определяющих допущений*, таких как изотропность, поливыпуклость, поведение функции запасённой энергии при больши́х и малых деформациях и т. п. Эти математические предположения играют решающую роль при построении теорий существования, изложенных в последующих главах.

5.1. Задачи с краевыми условиями на перемещения и напряжения

Принимая во внимание различные понятия, введённые в предыдущих главах, мы можем сформулировать простейшие *краевые задачи трёхмерной теории упругости*. Будем рассматривать *изотропные сжимаемые упругие материалы*, которые могут быть и неоднородными. Заданными считаются следующие объекты:

— область Ω в $\mathbb{R}^3$, т. е. открытое ограниченное связное множество с липшицевой границей Γ, которая содержит два непересекающихся подмножества Γ_0 и Γ_1, открытых в относительной топологии и таких, что $da\text{-meas}\,\{\Gamma - (\Gamma_0 \cup \Gamma_1)\} = 0$;

— функция $\hat{\boldsymbol{T}}$: $\overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{M}^3$ со значениями в пространстве тензоров, являющаяся функцией реакции для первого тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа; вместо $\hat{T}$ можно считать заданной функцию $\hat{\Sigma}$: $\Omega \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{S}^3$ со значениями в пространстве симметрических тензоров, которая представляет собой функцию реакции для второго тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа, причём имеет место соотношение $\hat{\boldsymbol{T}}(x, \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(x, \boldsymbol{F})$ для всех $x \in \overline{\Omega}$, $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$ (§§ 2.5 и 3.1);

— вектор-функция $\hat{f}$: $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, характеризующая плотность приложенных сил на единицу объёма отсчётной конфигурации (§§ 2.6 и 2.7);

— вектор-функция $\hat{g}$: $\Gamma_1 \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}^3$, характеризующая плотность приложенных поверхностных сил на единицу площади в отсчётной конфигурации (§§ 2.6 и 2.7).

Требуется найти деформацию φ: $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, которая является решением следующей краевой задачи:

$$\boxed{\begin{cases} -\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x)) = \hat{\boldsymbol{f}}(x, \varphi(x)), & x \in \Omega, \\ \varphi(x) = \varphi_0(x), & x \in \Gamma_0, \\ \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x))\,\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\varphi(x)), & x \in \Gamma_1, \end{cases}}$$

или, в сокращённой записи,

$$\boxed{\begin{cases} -\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) = \hat{\boldsymbol{f}}(\varphi) & \text{в} \quad \Omega, \\ \varphi = \varphi_0 & \text{на} \quad \Gamma_0, \\ \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\,\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{g}}(\nabla\varphi) & \text{на} \quad \Gamma_1. \end{cases}}$$

Эта краевая задача эквивалентна задаче

$$\boxed{\begin{cases} -\operatorname{div} \nabla\varphi(x)\,\hat{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)) = \hat{\boldsymbol{f}}(x, \varphi(x)), & x \in \Omega, \\ \varphi(x) = \varphi_0(x), & x \in \Gamma_0, \\ \nabla\varphi(x)\,\hat{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x))\,\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\varphi(x)), & x \in \Gamma_1, \end{cases}}$$

или, в сокращённой записи,

$$\boxed{\begin{cases} -\operatorname{div} \nabla\varphi\hat{\Sigma}(\nabla\varphi) = \hat{\boldsymbol{f}}(\varphi) & \text{в} \quad \Omega, \\ \varphi = \varphi_0 & \text{на} \quad \Gamma_0, \\ \nabla\varphi\hat{\Sigma}(\nabla\varphi)\,\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{g}}(\nabla\varphi) & \text{на} \quad \Gamma_1. \end{cases}}$$

Замечания. (1) Предположение об относительной открытости множеств Γ_0 и Γ_1 на Γ сделано лишь с целью облегчить математические построения (см., например, доказательство теоремы 5.3-1). Таким образом, мы можем не принимать во внимание подмножества нулевой da-меры на Γ.

(2) Конкретные виды зависимости приложенных сил от деформации, а именно $\boldsymbol{f}(x) = \hat{\boldsymbol{f}}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))$, $x \in \Omega$, и $\boldsymbol{g}(x) = \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\boldsymbol{\varphi}(x))$, $x \in \Gamma_1$, не охватывают всех возможных случаев, но находятся в соответствии с рассмотренными ранее примерами.

(3) В некоторых случаях (например, в гл. 6) удобнее рассматривать в качестве неизвестной функции *вектор перемещений* $\boldsymbol{u}: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$. Указанные выше краевые задачи могут быть легко записаны относительно неизвестной $\boldsymbol{u}$, поскольку $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u}$, $\nabla\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}$. ■

Условия сохранения ориентации и инъективности (всюду, кроме, быть может, точек Γ), налагаемые на неизвестную деформацию $\boldsymbol{\varphi}$, не включаются непосредственно в формулировку краевой задачи, так как они обычно проверяются апостериори (§§ 5.5 и 6.9). Напротив, эти условия могут быть легко учтены, когда задача ставится как задача минимизации некоторого функционала, если материал является гиперупругим (§ 5.6).

Напомним, что уравнение $-\mathbf{div}\,\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi}) = \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\varphi})$ в Ω и *граничное условие на напряжения* $\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{g}}(\nabla\boldsymbol{\varphi})$ на Γ_1 входят в состав *системы уравнений равновесия в отсчётной конфигурации* (см. § 2.6; остальные уравнения этой системы выражают симметричность второго тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа), а также, что равенство $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0$ на Γ_0 представляет собой *граничное условие на положения*.

Будем говорить, что указанная выше краевая задача есть **задача с граничными условиями на перемещения**, если $\Gamma_1 = \varnothing$, **задача с граничными условиями на перемещения и напряжения**, если $\operatorname{area}(\Gamma_0) > 0$ и $\operatorname{area}(\Gamma_1) > 0$, и **задача с граничными условиями на напряжения**, если $\Gamma_0 = \varnothing$.

В случае гиперупругого материала (§ 4.1), т. е. когда

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{F}) \quad \text{для всех} \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,}$$

при условии консервативности приложенных сил (§ 2.7) каждая из этих задач формально эквивалентна задаче нахождения стационарных точек функционала полной энергии (теорема 4.1-1)

$$\boxed{\begin{aligned} I(\psi) = & \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\psi(x))\,dx \\ & - \left\{\int_\Omega \widehat{F}(x, \psi(x))\,dx + \int_{\Gamma_1} \widehat{G}(x, \psi(x), \nabla\psi(x))\,da\right\}\end{aligned}}$$

на множестве допустимых отображений φ, имеющем вид

$$\boxed{\Phi = \{\varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3;\ \det\nabla\varphi > 0 \ \text{ в } \ \bar{\Omega},\ \ \varphi = \varphi_0 \ \text{ на } \ \Gamma_0\}.}$$

Если приложенные силы консервативны, то потенциал $\widehat{F}\colon \bar{\Omega}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ приложенной объёмной силы и потенциал $\widehat{G}\colon \Gamma_1\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ приложенной поверхностной силы задаются соответственно плотностями $\hat{f}$ и $\hat{g}$ (§ 2.7).

Как было указано в § 4.1, нас интересуют только такие стационарные точки, которые *минимизируют* энергию на множестве Φ, т. е. такие отображения φ, для которых

$$\boxed{\varphi \in \Phi \quad \text{и} \quad I(\varphi) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\psi).}$$

К простейшему типу консервативных приложенных сил относятся *замороженные нагрузки*, т. е. такие приложенные силы, которым в отсчётной конфигурации соответствуют плотности, не зависящие от деформации. Примером реальной приложенной поверхностной силы, не являющейся замороженной нагрузкой, служит *равномерно сжимающая нагрузка* (*давление*), которой отвечает *краевое условие равномерного сжатия* (*давления*) (§ 2.7)

$$\widehat{T}(\nabla\varphi)\,\boldsymbol{n} = -\pi(\det\nabla\varphi)\,\nabla\varphi^{-T}\boldsymbol{n} \quad \text{на} \quad \Gamma_1,$$

где π — заданное вещественное число (соответствующее краевое условие в деформированной конфигурации имеет вид $\boldsymbol{T}^\varphi\boldsymbol{n}^\varphi = -\pi\boldsymbol{n}^\varphi$ на $\Gamma_1^\varphi = \varphi(\Gamma_1)$). Краевая задача с таким граничным условием носит название **задачи с граничными условиями на перемещения и давление**, если $\operatorname{area}(\Gamma_0) > 0$ и $\operatorname{area}(\Gamma_1) > 0$, и **задачи с условием давления**[1] **на границе**, если $\Gamma_0 = \varnothing$. По-

[1] Говорят также «с условием равномериого сжатия (растяжения) по всем иаправлеииям» или просто «с условием всестороннего сжатия». — *Прим. перев.*

скольку равномерно сжимающая нагрузка консервативна (теорема 2.7-1), то в случае гиперупругих материалов каждая из двух упомянутых задач с условиями давления также формально эквивалентна задаче о нахождении стационарных точек энергии.

Во всём дальнейшем изложении мы ограничимся преимущественно случаем, когда все приложенные силы представляют собой замороженные нагрузки, предоставляя рассмотрение сил более общего вида читателю в качестве упражнений. В соответствии с этим условимся считать, что *если не оговорено противное, то все приложенные объёмные и поверхностные силы, которые встречаются далее и входят в краевые задачи с граничными условиями каждого из трёх типов* (*на перемещения, на перемещения и напряжения, на напряжения*), *являются замороженными нагрузками.*

Несмотря на то что мы уделим большое внимание математическому исследованию *краевой задачи с граничными условиями на перемещения*, главным образом в гл. 6, следует иметь в виду, что этот случай не так уж часто встречается на практике, хотя он и представляет собой достаточно реалистический пример. Задание деформации по всей границе соответствует телу, целиком лежащему в некоторой охватывающей его конструкции и прикреплённому к ней вдоль всей своей поверхности. Другими крайними случаями являются *задача с граничными условиями на напряжения* и *задача с условием давления на границе*, которые также соответствуют реальным ситуациям (например, подводная лодка или мыльный пузырь, движущиеся с постоянной скоростью). В приложениях чаще встречаются смешанные *задачи с граничными условиями на перемещения и напряжения*, хотя ими далеко не исчерпываются все остальные возможные случаи, как будет показано в следующих параграфах.

Задача с граничными условиями на напряжения

$$\boxed{\begin{aligned} -\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi}) &= \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{g} \quad \text{на} \quad \Gamma \end{aligned}}$$

обладает некоторыми особенностями, которые усложняют её исследование. В частности, применение теоремы о дивергенции тензорных полей показывает, что должно выполняться соотношение

$$\int_\Omega \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{o},$$

являющееся *условием совместности*, которому должны удовлетворять приложенные силы, чтобы рассматриваемая задача имела решение. В силу равенств $\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{f}^{\varphi}\,\mathrm{d}x^{\varphi}$ и $\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{g}^{\varphi}\,\mathrm{d}a^{\varphi}$ это условие можно записать в виде эквивалентного соотношения

$$\int_{\varphi(\Omega)} \boldsymbol{f}^{\varphi}\,\mathrm{d}x^{\varphi} + \int_{\varphi(\Gamma)} \boldsymbol{g}^{\varphi}\,\mathrm{d}a^{\varphi} = \boldsymbol{o},$$

которое есть не что иное, как *аксиома баланса сил* (§ 2.2) в случае конкретной области $\bar{\Omega}^{\varphi} = \varphi(\bar{\Omega})$ (применение аксиомы баланса моментов обсуждается в упражнении 5.1).

Замечание. В случае задачи с граничными условиями на перемещения и напряжения это условие выполняется без дополнительного априорного ограничения на силы, поскольку значения первого вектора напряжений Пиолы—Кирхгофа $\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n}$ на подмножестве Γ_0 границы области не задаются. Таким образом, любая деформация, являющаяся решением этой задачи, сама по себе приобретает такой вид на Γ_0, чтобы обеспечилось выполнение аксиомы баланса сил. ■

Предположение о гиперупругости материала приводит к ещё одному доказательству необходимости указанного условия совместности. Действительно, пусть φ — элемент соответствующего множества

$$\boldsymbol{\Phi} = \{\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3;\ \ \det\nabla\psi > 0 \ \text{ в } \ \Omega\},$$

удовлетворяющий условию

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \boldsymbol{\Phi}} I(\psi).$$

Поскольку для любого вектора $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$ отображение $\varphi + \boldsymbol{d}$ также принадлежит множеству $\boldsymbol{\Phi}$, должно выполняться неравенство

$$I(\varphi) \leqslant I(\varphi + \boldsymbol{d}) = I(\varphi) - \left\{\int_{\Omega} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma} \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a\right\}\cdot\boldsymbol{d}$$

для всех $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$.

Выбирая

$$\boldsymbol{d} = \int_{\Omega} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma} \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a,$$

приходим к заключению, что для существования минимума должно выполняться равенство $\int_{\Omega} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma} \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{o}$. Так как искомая деформация определена *с точностью до жёсткого сдвига*, то, чтобы исключить *неоднозначность*, обычно налагается дополнительное условие на отображения $\psi \in \boldsymbol{\Phi}$ типа

$$\int_{\Omega} \psi\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{e},$$

где e — произвольный вектор из $\mathbb{R}^3$. Как мы увидим в гл. 7, такое условие необходимо и при доказательстве теорем существования (некоторые дополнительные результаты в связи с этим содержатся в упражнении 5.2).

И наконец, следует обратить особое внимание на тот факт, что граничное условие на положения и граничное условие на напряжения являются лишь *приближёнными моделями* „истинных" граничных условий. На практике всегда имеется некоторое взаимодействие между упругим телом и окружающей его средой (обычно состоящей из другого упругого материала), причём это взаимодействие оказывается не учтённым в рассмотренных идеальных граничных условиях. Такого рода вопросы изучаются в работах: Batra [1972], Podio-Guidugli, Vergara-Caffarelli & Virga [1987].

5.2. Некоторые другие примеры граничных условий

Граничными условиями на положения, напряжения или давление далеко не исчерпываются все случаи, встречающиеся на практике. Чтобы стало ясным разнообразие других возможностей, приведём некоторые примеры.

Следуя Ноллу (Noll [1878]), рассмотрим сперва **задачу о воздушном шаре** (рис. 5.2-1), когда к внешней части Γ_e^φ границы шара приложено давление, характеризуемое постоянной π_e, не зависящей от деформации, а к внутренней части границы Γ_i^φ также приложено давление, характеризуемое известной функцией π_i, зависящей от ограниченного воздушным шаром объёма $v_i(\varphi)$. Соответствующее граничное условие на Γ_i

$$\boldsymbol{T}(\nabla\varphi(x))\,\boldsymbol{n}_i(x) = -\pi_i(v_i(\varphi))\det\nabla\varphi(x)\,\nabla\varphi(x)^{-T}\,\boldsymbol{n}_i(x), \qquad x\in\Gamma_i,$$

служит примером *нелокального граничного условия*, поскольку значение в точке $x\in\Gamma_i$ правой части зависит от значений деформации в других точках (некоторые дополнительные сведения по этому поводу можно найти в упражнении 5.3).

В качестве второго примера рассмотрим пластину, для которой отсчётная конфигурация есть прямоугольный параллелепипед (рис. 5.2-2). Можно представить, что при помощи некоторого механического приспособления к грани Γ_0' приложена сила в направлении вектора e_2 и что грань Γ_0' может подвергаться лишь параллельному сдвигу в том же направлении как абсолютно твёрдое тело. Соответствующее граничное условие имеет вид

$$\varphi = \boldsymbol{id} + \alpha e_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_0', \quad \alpha\in\mathbb{R},$$

где число α является одним из неизвестных задачи.

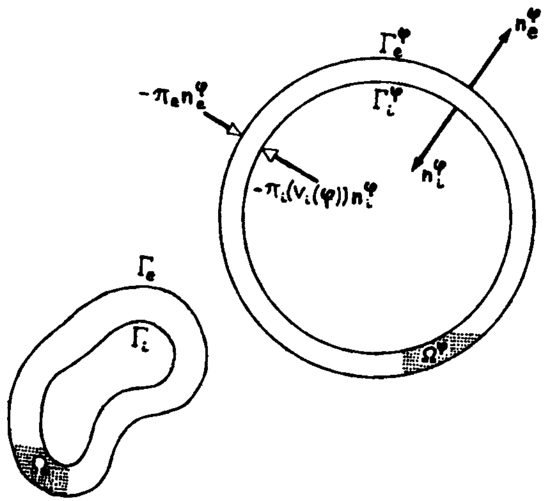

Рис. 5.2-1. Задача о воздушном шаре. Внешняя граница подвергается давлению, не зависящему от деформации, а внутренняя граница — давлению, зависящему от объёма, ограниченного воздушным шаром (пример нелокального граничного условия).

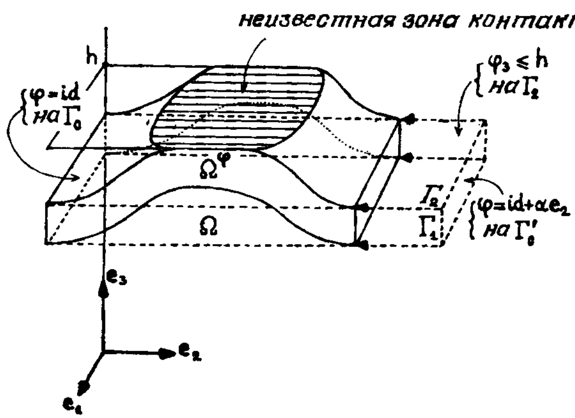

Рис. 5.2-2. Задача о пластине. Торец Γ_0' может лишь сдвигаться как абсолютно твёрдое тело параллельно e_2 на неизвестную величину; верхняя часть границы Γ_2 должна лежать под неподвижной плоскостью $x_3 = h$.

Существуют и другие граничные условия, часто встречающиеся в практических задачах, например когда определённые части границы тела должны принадлежать некоторым подмножествам $\mathbb{R}^3$. Так, верхняя часть пластины, рассмотренной на рис. 5.2-2, должна лежать ниже плоскости $x_3 = h$. Это ограничение можно записать в виде краевого условия

$$\varphi_3 \leqslant h \quad \text{на} \quad \Gamma_2,$$

или

$$\varphi(\Gamma_2) \subset C, \quad \text{где} \quad C := \{x \in \mathbb{R}^3;\ x_3 \leqslant h\}.$$

Следует отметить, что *зона контакта* $\{\varphi_3(x) = h;\ x \in \Gamma_2\}$ *является одним из неизвестных задачи*. Такое граничное условие есть частный случай **одностороннего граничного условия на положения**, которое в общем виде можно записать следующим образом:

$$\boxed{\varphi(\Gamma_2) \subset C,}$$

где Γ_2 — часть границы Γ отсчётной конфигурации, а C — некоторое заданное (возможно и неограниченное) подмножество в $\mathbb{R}^3$. Условие этого типа означает, что определённые части границы тела должны „всегда располагаться по одну сторону“ границы ∂C множества C, и в таком случае говорят, что ∂C является **препятствием**. Ввиду важности односторонних краевых условий на положения им отводится весь следующий параграф (см., в первую очередь, теорему 5.3-1).

Пока же мы более подробно рассмотрим краевое условие на грани Γ_0'. Пусть $-\lambda(\operatorname{area} \Gamma_0')$ обозначает соответствующую вектору e_2 компоненту главного вектора сил, приложенных к деформированной грани $\varphi(\Gamma_0')$ (так что при $\lambda > 0$ пластина подвергается сжатию). Тогда, применяя аксиому баланса сил (§ 2.2) к деформированной грани $\varphi(\Gamma_0')$, получаем

$$\left\{ \int_{\varphi(\Gamma_0')} \boldsymbol{T}^{\varphi} \boldsymbol{n}^{\varphi} \, \mathrm{d}a^{\varphi} \right\} \cdot \boldsymbol{e}_2 = -\lambda (\operatorname{area} \Gamma_0').$$

Замечание. Внимательный читатель, конечно же, заметил, что множество $\varphi(\Gamma_0')$ не является областью, так как оно не содержит внутренних точек в топологии $\mathbb{R}^3$. Поэтому в данной ситуации остается лишь *принять на веру* правомерность использоваиия аксиомы баланса сил. ∎

Объединяя это соотношение с равенством

$$\int_{\varphi(\Gamma_0')} \boldsymbol{T}^{\varphi} \boldsymbol{n}^{\varphi} \, \mathrm{d}a^{\varphi} = \int_{\Gamma_0'} \boldsymbol{T} \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}a,$$

$$\text{где } \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_2 \text{ на } \Gamma_0', \quad (\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_2 = T_{22},$$

мы приходим к ещё одному примеру *нелокального граничного условия*

$$\frac{1}{\operatorname{area}\Gamma_0'}\int_{\Gamma_0'} \widehat{T}_{22}(\nabla\varphi)\,\mathrm{d}a = -\lambda,$$

$$\text{где } \lambda \in \mathbb{R} \text{ — заданное число, } \mathrm{d}a = \mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_3.$$

Поскольку предполагается, что грань Γ_0' может подвергаться лишь жёстким сдвигам по направлению вектора $\boldsymbol{e}_2$, имеющиеся граничные условия на Γ_0' приобретают вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{area}\Gamma_0'}\displaystyle\int_{\Gamma_0'} \widehat{T}_{22}(\nabla\varphi)\,\mathrm{d}a = -\lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \text{ задано}, \\ \varphi = \boldsymbol{id} + \alpha\boldsymbol{e}_2, & \alpha \in \mathbb{R} \text{ неизвестно}. \end{cases}$$

Следует обратить внимание на одно новое обстоятельство: на грани Γ_0' *одновременно* должны быть заданы некоторые соотношения, куда входят и деформация, и первый вектор напряжений Пиолы—Кирхгофа $\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2$. Каким образом эти деформации связаны с напряжениями на Γ_0', определяется либо исходя из аксиомы баланса сил (в её обобщенном варианте), либо, как мы сейчас покажем, посредством проверки выполнения соответствующего *принципа виртуальной работы*, который, в свою очередь, равносилен условию стационарности некоторого функционала. Ради большей ясности мы не будем на данном этапе принимать во внимание краевое условие $\varphi_3 \leqslant h$ на Γ_2.

Теорема 5.2-1. *Примем обозначения рис.* 5.2-2. *Краевая задача*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) = \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \\ \varphi = \boldsymbol{id} \text{ на } \Gamma_0, \\ \left.\begin{array}{l} \varphi = \boldsymbol{id} + \alpha\boldsymbol{e}_2 \text{ на } \Gamma_0', \ \alpha \in \mathbb{R} \text{ неизвестно}, \\ \dfrac{1}{\operatorname{area}\Gamma_0'}\displaystyle\int_{\Gamma_0'} \widehat{T}_{22}(\nabla\varphi)\,\mathrm{d}a = -\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \text{ задано}, \end{array}\right\} \text{ на } \Gamma_0', \\ \widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \text{ на } \Gamma_1' := \Gamma - \{\Gamma_0 \cup \Gamma_0'\} \end{cases}$$

формально эквивалентна следующим вариационным уравнениям:

$$\int_\Omega \widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) : \nabla\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\Gamma_0'} \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}a + \int_{\Gamma_1'} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}a$$

для всех достаточно гладких отображений $\boldsymbol{\vartheta}$ *из пространства*

$$T_\varphi\Phi := \{\boldsymbol{\vartheta}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma_0,\quad \boldsymbol{\vartheta} = \beta \boldsymbol{e}_2,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ на } \Gamma_0'\}.$$

Если материал является гиперупругим (т. е. $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = (\partial \hat{W}/\partial \boldsymbol{F})(\boldsymbol{F})$*), то вариационные уравнения эквивалентны уравнениям*

$$I'(\varphi)\boldsymbol{\vartheta} = 0 \quad \textit{при всех} \quad \boldsymbol{\vartheta} \in T_\varphi\Phi,$$

где функционал I *определён для произвольных деформаций* $\boldsymbol{\psi}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ *посредством формулы*

$$I(\boldsymbol{\psi}) = \int_\Omega \hat{W}(\nabla\boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}x - \left\{\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\psi}\,\mathrm{d}x - \lambda \int_{\Gamma_0'} \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{\psi}\,\mathrm{d}a + \int_{\Gamma_1'} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\psi}\,\mathrm{d}a\right\}.$$

Доказательство. Как и в теоремах 2.4-1, 2.6-1, эквивалентность краевой задачи вариационным уравнениям основана на интегральном тождестве

$$\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}a,$$

справедливом для всех достаточно гладких тензорных полей $\boldsymbol{T}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{M}^3$ и векторных полей $\boldsymbol{\vartheta}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$. Теперь остаётся лишь применить это тождество совместно с соотношениями

$$\int_{\Gamma_0'} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}a = \left(\int_{\Gamma_0'} T_{22}\,\mathrm{d}a\right)\beta, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{\vartheta} = \beta\boldsymbol{e}_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_0',\ \beta \in \mathbb{R},$$

и

$$-\lambda \int_{\Gamma_0'} \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}a = -\lambda(\operatorname{area}\Gamma_0')\beta, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{\vartheta} = \beta\boldsymbol{e}_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_0', \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Эквивалентность вариационных уравнений условию стационарности соответствующего функционала очевидна. ∎

Поскольку изложенный здесь подход по существу тот же, что и в §§ 2.6, 4.1, где он применялся к задачам с граничными условиями на перемещения и напряжения, мы вправе говорить, что вариационные уравнения теоремы 5.2-1 выражают *принцип виртуальной работы*, а соответствующий функционал задаёт *полную энергию* в случае задачи, рассмотренной в настоящем параграфе. Отметим также, что пространство $T_\varphi\Phi$, определённое в условии теоремы 5.2-1, есть не что иное, как касательное пространство (отсюда и его обозначение) в точке φ к соответствующему *многообразию допустимых решений*

$$\Phi = \{\psi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3;\ \det \nabla\psi > 0 \text{ в } \Omega,\ \psi = \boldsymbol{id} \text{ на } \Gamma_0,$$
$$\psi = \boldsymbol{id} + \alpha \boldsymbol{e}_2 \text{ на } \Gamma_0',\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Конечно, возможны и другие „комбинации" граничных условий, куда входят одновременно деформация и первый вектор напряжений Пиолы—Кирхгофа. В связи с этим в упражнении 5.4 обсуждается ещё один пример (также заимствованный из теории пластин).

5.3. Односторонние граничные условия на положения в задачах для гиперупругих материалов

Рассмотрим теперь случай, когда на подмножестве Γ_2 границы отсчётной конфигурации заданы *односторонние граничные условия на положения* вида $\varphi(\Gamma_2) \subset C$, где C — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^3$. Для того чтобы полностью охарактеризовать соответствующую краевую задачу и, в особенности, чтобы определить, какого рода дополнительное граничное условие следует наложить на первый вектор напряжений Пиолы—Кирхгофа в точках множества Γ_2, мы применим *новый подход*. Как показано в следующей теореме, установленной в работе Ciarlet & Nečas [1985]), такую информацию нетрудно получить, если априори известны полная энергия и множество допустимых решений и, кроме того, предполагается, что полная энергия достигает минимума. Этот „обратный" подход обладает также тем преимуществом, что он позволяет непосредственно вывести соответствующий принцип виртуальной работы, поскольку при таком подходе выявляется конкретный вид „вариаций", входящих в формулировку этого принципа (упражнение 5.5). Напротив, принцип виртуальной работы и выражение для полной энергии до сих пор всегда выводили, исходя из априори известной краевой задачи.

Теорема 5.3-1 (задача с граничными условиями на перемещения и напряжения при одностороинем граничном условии на положения). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ и Γ_0, Γ_1, Γ_2 — взаимно непересекающиеся относительно открытые подмножества $\Gamma = \partial\Omega$, такие что*

$$\operatorname{area}\{\Gamma - (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)\} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{area}\Gamma_2 > 0.$$

Предположим, что множество допустимых решений имеет вид

$$\boxed{\Phi = \{\psi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3;\ \det \nabla\psi > 0 \text{ в } \bar{\Omega},\ \psi = \varphi_0 \text{ на } \Gamma_0,\ \psi(\Gamma_2) \subset C\},}$$

где C — заданное замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^3$, и пусть полная энергия определена формулой

$$\boxed{I(\psi) = \int_\Omega \widehat{W}(\nabla\psi)\,dx - \left\{\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\psi}\,dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\psi}\,da\right\}.}$$

Тогда если φ — достаточно гладкое решение задачи на минимум

$$\boxed{\varphi \in \Phi \quad \textit{и} \quad I(\varphi) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\psi),}$$

то φ является, по крайней мере формально, решением следующей краевой задачи:

$$\boxed{\begin{aligned}
&-\mathbf{div}\,\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{f} \ \text{ в } \ \Omega, \ \text{ где } \ \widehat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) := \frac{\partial\widehat{W}}{\partial\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}), \quad \boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+,\\
&\varphi = \varphi_0 \ \text{ на } \ \Gamma_0,\\
&\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \ \text{ на } \ \Gamma_1,\\
&\varphi(\Gamma_2) \subset C,\\
&\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi}(x))\,\boldsymbol{n}(x) = \boldsymbol{o}, \ \text{ если } \ x\in\Gamma_2 \ \text{ и } \ \varphi(x)\in \operatorname{int} C,\\
&\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi}(x))\,\boldsymbol{n}(x) = \lambda(x)\,\boldsymbol{n}^\varphi(x^\varphi), \ \text{ где } \ \lambda(x)\leqslant 0, \ \text{ если}\\
&\qquad\qquad\qquad x\in\Gamma_2 \ \textit{ и } \ x^\varphi = \varphi(x)\in\partial C;
\end{aligned}}$$

здесь $\boldsymbol{n}^\varphi$ — единичный вектор внешней нормали к деформированной поверхности $\varphi(\Gamma)$.

Доказательство. Мы будем неоднократно пользоваться хорошо известной формулой Грина

$$\int_\Omega \boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{\vartheta}\,dx = -\int_\Omega \mathbf{div}\,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,dx + \int_\Gamma \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,da,$$

которая справедлива для всех достаточно гладких тензорных полей $\boldsymbol{T}$: $\overline{\Omega}\to\mathbb{M}^3$ и векторных полей $\boldsymbol{\vartheta}$: $\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$. Допустим сначала, что $\boldsymbol{\vartheta}=0$ в окрестности множества $\Gamma_0\cup\Gamma_2$. Тогда найдётся $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\boldsymbol{\vartheta})$, такое что $\varphi^\varepsilon := \varphi + \varepsilon\boldsymbol{\vartheta}\in\Phi$ при $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$. Неравенство $I(\varphi^\varepsilon)) \geqslant I(\varphi)$, вытекающее из условия теоремы, можно записать в виде

$$\int_\Omega \{\widehat{W}(\nabla\boldsymbol{\varphi}+\varepsilon\nabla\boldsymbol{\vartheta}) - \widehat{W}(\nabla\boldsymbol{\varphi})\}\,dx - \varepsilon\left\{\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,dx + \int_{\Gamma_1}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,da\right\} \geqslant 0.$$

Отсюда, пользуясь соотношением $\widehat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}) = (\partial\widehat{W}/\partial\boldsymbol{F})(\boldsymbol{F})$ и формулой Грина, формально выводим неравенство

$$\varepsilon\left\{\int_\Omega (-\operatorname{\mathbf{div}}\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) - \boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,dx + \right.$$
$$\left. + \int_{\Gamma_1} (\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} - \boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,da + O(\varepsilon)\right\} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0,$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega (-\operatorname{\mathbf{div}}\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) - \boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,dx + \int_{\Gamma_1} (\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} - \boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,da = 0.$$

Рассматривая сначала поля $\boldsymbol{\vartheta}$ с носителями в Ω, устанавливаем, что $-\operatorname{\mathbf{div}}\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) = \boldsymbol{f}$ в Ω; затем, рассматривая такие $\boldsymbol{\vartheta}$, что $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{0}$ в окрестности $\Gamma_0 \cup \Gamma_2$, получаем равенство $\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}$ на Γ_1.

Далее, пусть $x \in \Gamma_2$ и $\varphi(x) \in \operatorname{int} C$. Выберем такое число $r > 0$, что $B_r(x) \cap \Gamma \subset \Gamma_2$ и φ может быть продолжено на $B_r(x)$, причём $\varphi(B_r(x)) \subset \operatorname{int} C$. Для любого фиксированного гладкого поля $\boldsymbol{\vartheta}$: $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{supp}\boldsymbol{\vartheta} \subset B_r(x)$, существует $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\boldsymbol{\vartheta}) > 0$, такое что $\varphi^\varepsilon := \varphi + \varepsilon\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Phi}$ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$. Снова записывая неравенство $I(\varphi^\varepsilon) \geqslant I(\varphi)$ для таких функций φ^ε и принимая во внимание предшествующие вычисления, получаем неравенство

$$\varepsilon\left\{\int_{\Gamma_2} \widehat{\mathbf{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,da + O(\varepsilon)\right\} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1,$$

из которого выводим, что $\int_{\Gamma_2} \widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\,da = 0$. Так как это равенство имеет место для любых гладких полей $\boldsymbol{\vartheta}$ с носителями в шаре $B_r(x)$, мы можем заключить, что граничное условие $\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{o}$ выполнено в тех точках $x \in \Gamma_2$, для которых $\varphi(x) \in \operatorname{int} C$.

И наконец, пусть $y \in \Gamma_2$ и $\varphi(y) \in \partial C$. Предположим, что поверхности ∂C и $\varphi(\Gamma_2)$ в точке $\varphi(y)$ обладают одним и тем же касательным пространством. Хотя наше доказательство носит формальный характер, последнее допущение является оправданным, если границы обоих множеств C и $\varphi(\Omega)$ достаточно гладкие. Пусть $\boldsymbol{t}_1^\varphi$, $\boldsymbol{t}_2^\varphi$ — гладкие векторные поля, заданные в некоторой окрестности V^φ точки $\varphi(y)$ и обладающие свойствами

$$\begin{cases} |\boldsymbol{t}_1^\varphi| = |\boldsymbol{t}_2^\varphi| = 1 \quad \text{в} \quad V^\varphi; \\ \boldsymbol{t}_1^\varphi(\boldsymbol{z}^\varphi) \text{ и } \boldsymbol{t}_2^\varphi(\boldsymbol{z}^\varphi) \text{ — базис касательной плоскости} \\ \text{к поверхности } \varphi(\Gamma_2) \text{ в каждой точке } \boldsymbol{z}^\varphi \in \varphi(\Gamma_2) \cap V^\varphi. \end{cases}$$

Обозначим через $B_\rho(y)$ открытый шар с центром в точке y, такой что

$$B_\rho(y) \cap \Gamma \subset \Gamma_2 \quad \text{и} \quad \varphi(B_\rho(y)) \subset V^\varphi.$$

Для любых гладких функций ζ_1, ζ_2: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ с носителями в $B_\rho(y)$ можно найти число $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\zeta_1, \zeta_2) > 0$ и функции λ_1^ε, λ_2^ε: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ с носителями в $B_\rho(y)$, такие что

$$\begin{cases} \varphi_\alpha^\varepsilon := \varphi + \varepsilon\left(\zeta_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha^\varphi + \lambda_\alpha^\varepsilon \boldsymbol{n}^\varphi\right) \circ \varphi \in \boldsymbol{\Phi} \quad \text{при} \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_2, \\ \sup\limits_{z \in B_\rho(y)} |\lambda_\alpha^\varepsilon(z)| = O(\varepsilon), \qquad \alpha = 1,\ 2, \end{cases}$$

где суммирование по α не производится. Как и выше, при помощи формулы Грина устанавливаем, что

$$\varepsilon \left\{ \int_{\Gamma_2} \zeta_\alpha \left\{ \widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\, \boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{t}_\alpha^\varphi \circ \varphi\right)\right\} \mathrm{d}a + O(\varepsilon) \right\} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_2$$

и, значит, $\int_{\Gamma_2} \zeta_\alpha \left\{\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\, \boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{t}_\alpha^\varphi \circ \varphi\right)\right\} \mathrm{d}a = 0$ при $\alpha = 1,\ 2$. Поскольку это соотношение выполнено для любых гладких функций ζ_1, ζ_2 с носителями в $B_\rho(y)$, отсюда заключаем, что $\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\, \boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{t}_\alpha^\varphi \circ \varphi\right) = 0$ при $\alpha = 1,\ 2$, т. е. вектор $\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\, \boldsymbol{n}$ либо равен нулю, либо параллелен вектору $\boldsymbol{n}^\varphi$.

Для любой гладкой неотрицательной функции ξ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ с носителем в шаре $B_\rho(y)$ существует $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\xi) > 0$, такое что

$$\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\xi\,(\boldsymbol{n}^\varphi \circ \varphi) \in \boldsymbol{\Phi} \quad \text{при} \quad -\varepsilon_3 \leqslant \varepsilon \leqslant 0.$$

Поэтому

$$\varepsilon \left\{ \int_{\Gamma_2} \xi \left\{ \widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\, \boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{n}^\varphi \circ \varphi\right)\right\} \mathrm{d}a + O(\varepsilon) \right\} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad -\varepsilon_3 \leqslant \varepsilon \leqslant 0.$$

Отсюда выводим, что

$$\int_{\Gamma_2} \xi \left\{ \widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\, \boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{n}^\varphi \circ \varphi\right)\right\} \mathrm{d}a \leqslant 0.$$

Это неравенство имеет место для всех неотрицательных гладких функций ξ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ с носителями в $B_\rho(y)$, следовательно $\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\, \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}^\varphi \circ \varphi) \leqslant 0$. Как мы только что показали, вектор $\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\, \boldsymbol{n}$ параллелен $\boldsymbol{n}^\varphi$ и, значит, в силу последнего неравенства, должен иметь вид $\lambda \boldsymbol{n}^\varphi$, где $\lambda \leqslant 0$. ■

Замечание. При $C = \mathbb{R}^3$ рассмотренная выше задача является, по существу, смешанной краевой задачей с условиями на перемещения и напряжения, причём граничные условия на напряжения имеют вид $\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}$ на Γ_1 и $\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ на Γ_2. ■

Поясним теперь, каким образом граничные условия на Γ_2 в предыдущей теореме могут быть истолкованы с механической точки зрения. Для этого напомним (теорема 1.7-1), что первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа $\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)$, вектор нормали $\boldsymbol{n}$ и элемент площади $\mathrm{d}a$ в точке $x \in \Gamma$ связаны соотношением $\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi\,\mathrm{d}a^\varphi$ с соответствующими тензором напряжений Коши $\boldsymbol{T}^\varphi$, вектором нормали $\boldsymbol{n}^\varphi$ и элементом площади $\mathrm{d}a^\varphi$ в точке $\varphi(x)$. В частности, вектор напряжений Пиолы—Кирхгофа $\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}$ параллелен вектору напряжений Коши $\boldsymbol{T}^\varphi\boldsymbol{n}^\varphi$. Следовательно, *краевое условие в точках множества* Γ_2 *можно записать в эквивалентной форме как краевое условие на вектор напряжений Коши* $\boldsymbol{T}^\varphi\boldsymbol{n}^\varphi$ *в точках множества* $\varphi(\Gamma_2)$, *а именно*:

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\boldsymbol{n}^\varphi(x^\varphi) = \boldsymbol{o} \quad \text{при} \quad x^\varphi \in \operatorname{int} C,\\ &\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\boldsymbol{n}^\varphi(x^\varphi) = \lambda^\varphi(x^\varphi)\boldsymbol{n}^\varphi(x^\varphi), \qquad \lambda^\varphi(x^\varphi) \leqslant 0, \quad \text{при} \quad x^\varphi \in \partial C. \end{aligned}}$$

Таким образом, вектор напряжений Коши $\boldsymbol{T}^\varphi\boldsymbol{n}^\varphi$, который характеризует плотность приложенной поверхностной силы на единицу площади деформированной поверхности $\varphi(\Gamma)$, нормален к поверхности ∂C и направлен внутрь C в тех точках множества $\varphi(\Gamma_2)$, где имеет место контакт с ∂C. Поэтому *одностороннее граничное условие на положения в точках множества* Γ_2 можно рассматривать как *модель* **контакта без треиия с препятствием** ∂C (рис. 5.3-1). Возникающая в связи с этим функция $\lambda^\varphi\colon \varphi(\Gamma_2) \to \mathbb{R}$, характеризующая интенсивность контактной нагрузки, есть не что иное, как *множитель Куна—Таккера, соответствующий ограничению* $\varphi(\Gamma_2) \subset C$ (подробности об этом хорошо известном понятии теории оптимизации см., например, в работе Ciarlet [1982]).

В завершение параграфа рассмотрим частный случай, когда $\Gamma_0 = \varnothing$, т. е. когда мы имеем *задачу с граничными условиями на напряжения при одностороннем граничном условии на положения.* Этот случай заслуживает особого внимания, поскольку он охватывает очень широкий класс практических задач. Следуя работе Ciarlet & Nečas [1985], дадим в указанной ситуации математическое обоснование естественного, но не совсем чёткого интуитивного представления: *если приложенные силы „в среднем" составляют тупой угол с „направлениями беспрепятствен-*

ного выхода для тела" (эти понятия, конечно, нуждаются в уточнении), *то можно ожидать, что решения существуют без каких-либо дополнительных условий типа* $\int_\Omega \varphi\, da = e$.

Чтобы более чётко сформулировать это утверждение, предположим, что на тело действуют „вертикальные" силы, а множество C является бесконечным усечённым конусом, как на

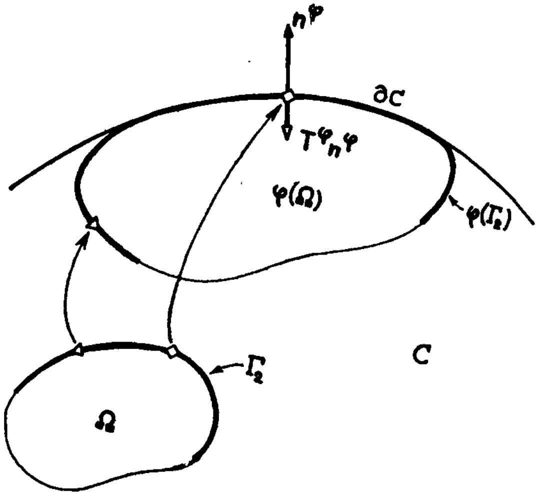

Рис. 5.3-1. Краевое условие контакта без трения. В тех точках, где у деформированной поверхности $\varphi(\Gamma_2)$ и у поверхности ∂C общая касательная плоскость, вектор напряжений Коши $T^\varphi n^\varphi$ имеет вид $\lambda^\varphi n^\varphi$, $\lambda^\varphi \leqslant 0$. В точках деформированной поверхности $\varphi(\Gamma_2)$, которые являются внутренними для множества C, вектор напряжений Коши равен нулю.

рис. 5.3-2 (где ради простоты $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{o}$). Очевидно, что существуют векторы $\boldsymbol{d}$, такие что $|\boldsymbol{d}| = 1$ и для любого элемента $\boldsymbol{\psi}$ из множества допустимых решений отображения $\psi + \varepsilon \boldsymbol{d}$ также являются допустимыми при всех $\varepsilon \geqslant 0$. Следовательно, если φ минимизирует полную энергию, должно выполняться неравенство

$$I(\varphi) \leqslant I(\varphi + \varepsilon \boldsymbol{d}) = I(\varphi) - \varepsilon \left\{ \int_\Omega \boldsymbol{f}\, dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\, da \right\} \cdot \boldsymbol{d}$$

$$\text{при всех} \quad \varepsilon \geqslant 0.$$

Поэтому *положения равновесия могут иметь место, только если выполнено неравенство*

$$\left\{ \int_\Omega \boldsymbol{f}\, dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\, da \right\} \cdot \boldsymbol{d} \leqslant 0$$

для всех таких „направлений беспрепятственного выхода" $\boldsymbol{d}$.

В частном случае, когда $C = \mathbb{R}^3$, мы имеем задачу с граничными условиями на напряжения, и любой вектор $\boldsymbol{d}$, $|\boldsymbol{d}| = 1$, задаёт „направление беспрепятственного выхода". Поэтому установленные неравенства сводятся к условию $\int_\Omega \boldsymbol{f} dx + \int_\Gamma \boldsymbol{g}\, da = \boldsymbol{o}$,

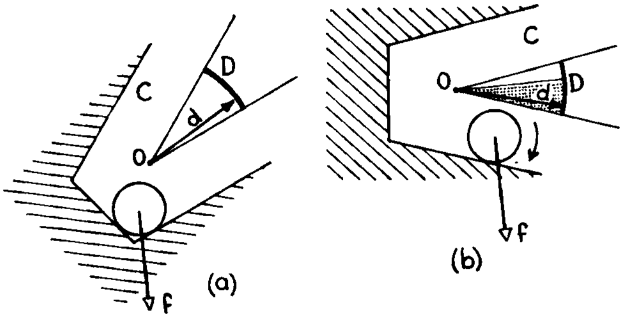

Рис. 5.3-2. (a) Все возможные «направления выхода» $\boldsymbol{d}$ составляют тупые углы с направлением приложенной силы $\boldsymbol{f}$. (b) Некоторые «направления выхода» составляют острые углы с направлением $\boldsymbol{f}$, чем исключается возможность равновесия, если не наложены дополнительные условия.

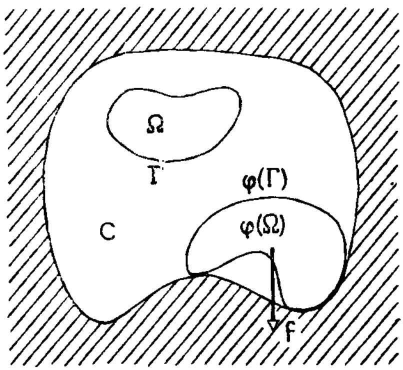

Рис. 5.3-3. Краевое условие полной изоляции: деформированная поверхность $\varphi(\Gamma)$ должна лежать в пределах ограниченного множества C; при этом направления выхода отсутствуют.

упомянутому в § 5.1. Напротив, когда $\Gamma = \Gamma_2$ и множество C ограничено, „направления беспрепятственного выхода" отсутствуют; соответствующее условие „$\varphi(\Gamma) \subset C$, где C ограничено" носит название **краевого условия полной изоляции** (рис. 5.3-3).

В § 7.8 эти идеи найдут дальнейшее применение: каждой задаче с односторонними ограничениями на положения будет сопоставлено некоторое *множество „направлений беспрепятственного выхода"* D (для случая, рассмотренного на рис. 5.3-2, это множество „согласуется" с данным выше „определением"), и будет показано, что решения существуют при несколько более сильных допущениях, а именно если выполняются *строгие* неравенства $\left\{\int_\Omega f\,dx + \int_{\Gamma_1} g\,da\right\} \cdot d < 0$ для всех векторов $d \in D$ (теорема 7.8-2).

* 5.4. Топологическая степень в $\mathbb{R}^n$

Далее в настоящей главе мы будем обсуждать свойства сохранения ориентации ($\det \nabla\varphi > 0$ в $\overline{\Omega}$) и внутренней инъективности (отображение φ: $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ инъективно, кроме, быть может точек Γ), которыми, очевидно, должна обладать деформация, приемлемая с физической точки зрения. Как станет ясно в следующем параграфе, весьма эффективным средством доказательства инъективности отображений служит фундаментальное понятие *топологической степени*, введённое Брауэром (Brower [1912]) и обобщённое на случай бесконечномерных пространств Лерэ и Шаудером (Leray & Schauder [1934]). Поэтому прежде всего мы кратко остановимся на этом понятии, которое также оказывается очень полезным при доказательстве и других свойств отображений, например сюръективности, наличия неподвижных точек, неединственности решений и т. п. Доказательства и дополнительные результаты можно найти в книгах: Rado & Reichelderfer [1955], Schwartz [1967, гл. VI], Nirenberg [1974], Rabinowitz [1975], Berger [1977], Lloyd [1978], Deimling [1985], Zeidler [1986], Дубровин, Новиков & Фоменко [1979] [1].

Определение топологической степени основано на следующем свойстве непрерывно дифференцируемых отображений, которое также прдставляет самостоятельный интерес и имеет многочисленные применения в анализе:

Теорема 5.4-1 (теорема Сарда). *Пусть Ω — ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, φ — отображение класса $\mathscr{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и*

$$S_\varphi = \{x \in \Omega;\ \det \nabla\varphi(x) = 0\}, \quad \text{где} \quad \nabla\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right).$$

Тогда

$$dx\text{-meas}\,\varphi(S_\varphi) = 0. \qquad \blacksquare$$

Пусть теперь заданы ограниченное открытое подмножество Ω в $\mathbb{R}^n$, отображение $\varphi \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap \mathscr{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и точка $b \in \varphi(\overline{\Omega}) - \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$, где множество S_φ — то же, что и в теореме Сарда. Прообраз $\varphi^{-1}(b) = \{x \in \overline{\Omega};\ \varphi(x) = b\}$ есть непустое подмножество в Ω (из открытости Ω вытекает, что $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$ и

[1] См. также Понтрягин [1976]'. — *Прим. ред.*

$\Omega \cap \partial\Omega = \varnothing$), и все точки $x \in \varphi^{-1}(b)$ удовлетворяют условию $\det \nabla\varphi(x) \neq 0$. Кроме того, множество $\varphi^{-1}(b)$ состоит из конечного числа точек. Действительно, согласно теореме о локальном обращении (теорема 1.2-4) каждая точка $x \in \varphi^{-1}(b) \in \Omega$ обладает окрестностью $V_x \subset \Omega$, такой что сужение $\varphi|_{V_x} \to \mathbb{R}^n$ есть $\mathscr{C}^1$-диффеоморфизм на некоторую окрестность W_x точки b. Поэтому $y \notin \varphi^{-1}(b)$ при всех $y \in V_x - \{x\}$, и, значит, множество $\varphi^{-1}(b)$ дискретно, т. е. каждая принадлежащая ему точка x обладает окрестностью V_x, такой что $(V_x - \{x\}) \cap \varphi^{-1}(b) = \varnothing$. С другой стороны, множество $\varphi^{-1}(b)$ компактно (оно замкнуто в силу непрерывности φ на $\bar{\Omega}$ и ограничено в силу ограниченности Ω). Таким образом, множество $\varphi^{-1}(b)$ состоит из конечного числа точек, и, следовательно, выражение

$$\boxed{\begin{array}{l} \deg(\varphi, \Omega, b) := \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(b)} \operatorname{sgn}\{\det \nabla\varphi(x)\} \\ \text{при } b \in \varphi(\bar{\Omega}) - \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi), \end{array}}$$

где $\operatorname{sgn}\{\alpha\} = +1$ при $\alpha > 0$ и $\operatorname{sgn}\{\alpha\} = -1$ при $\alpha < 0$, корректно определяет целое число $\deg(\varphi, \Omega, b) \in \mathbb{Z}$. Положим

$$\boxed{\deg(\varphi, \Omega, b) := 0 \quad \text{при} \quad b \in \mathbb{R}^n - \varphi(\bar{\Omega}).}$$

Можно доказать, что *для любых двух точек b и b' из множества $\varphi(\bar{\Omega}) - \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$, принадлежащих одной и той же компоненте связности множества $\mathbb{R}^n - \varphi(\partial\Omega)$, выполняется равенство* $\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega, b')$. Принимая во внимание этот результат, мы можем распространить определение числа $\deg(\varphi, \Omega, b)$ на все точки $b \in \mathbb{R}^n - \varphi(\partial\Omega)$. А именно, пусть задана точка $b \in \varphi(S_\varphi) - \varphi(\partial\Omega)$ (это единственный случай, который осталось рассмотреть) и C_b — связная компонента открытого множества $\mathbb{R}^n - \varphi(\partial\Omega)$, содержащая b. Поскольку множество C_b непусто ($b \in C_b$) и открыто, то dx-meas $C_b > 0$. Следовательно, по теореме Сарда (теорема 5.4-1) множество C_b должно содержать точки $b' \notin \varphi(S_\varphi)$. Поэтому мы можем положить

$$\boxed{\begin{array}{l} \deg(\varphi, \Omega, b) := \deg(\varphi, \Omega, b') \quad \text{при} \quad b \in \varphi(S_\varphi) - \varphi(\partial\Omega), \\ \text{где } b' \text{ — любая точка множества } C_b - \varphi(S_\varphi) \neq \varnothing. \end{array}}$$

Таким образом, каждому отображению $\varphi \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap \mathscr{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и каждой точке $b \in \mathbb{R}^n - \varphi(\partial\Omega)$ мы поставили в соответствие *целое число* $\deg(\varphi, \Omega, b) \in \mathbb{Z}$, задаваемое одной из приведённых выше формул, в зависимости от b.

Даиное определение можно распространить иа отображения $\varphi\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, которые лишь иепрерывны иа миожестве $\overline{\Omega}$. Для этого воспользуемся следующим фактом. Пусть заданы отображение $\varphi \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ и точка $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Обозначим через $d(b, \varphi(\partial\Omega))$ расстояние от b до множества $\varphi(\partial\Omega)$ (это расстояние положительно в силу компактности $\varphi(\partial\Omega)$). Тогда найдётся число $\varepsilon = \varepsilon(d(b, \varphi(\partial\Omega)))$, такое что

$$0 < \varepsilon < d(b, \varphi(\partial\Omega)) \quad \text{и} \quad \deg(\psi^1, \Omega, b) = \deg(\psi^2, \Omega, b)$$

для всех $\psi^1, \psi^2 \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap \mathscr{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\|\psi^\alpha - \varphi\|_{\mathscr{C}^0(\overline{\Omega};\, \mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon, \qquad \alpha = 1, 2$$

(числа $\deg(\psi^\alpha, \Omega, b)$ корректио определеиы, поскольку из неравенства $\varepsilon < d(b, \varphi(\partial\Omega))$ вытекает, что $b \notin \psi^\alpha(\partial\Omega)$). Поэтому мы можем положить

$$\boxed{\begin{array}{l} \deg(\varphi, \Omega, b) = \lim\limits_{k\to\infty} \deg(\psi^k, \Omega, b) \\ \text{для любой последовательности } (\psi^k) \text{, такой что} \\ \psi^k \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap \mathscr{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \quad \lim\limits_{k\to\infty} \|\psi^k - \varphi\|_{\mathscr{C}^0(\overline{\Omega};\, \mathbb{R}^n)} = 0. \end{array}}$$

Целое число $\deg(\varphi, \Omega, b) \in \mathbb{Z}$, определённое таким образом для любого отображения $\varphi \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ и любой точки $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, иазывается **топологической степенью** *отображения* φ *в точке* b *относительно множества* Ω. Само название введённого понятия отражает его *топологическую* природу, поскольку оно опирается лишь на понятие непрерывной функции. В связи с этим отметим, что формулу, которую мы применили вначале для определения степени отображения, можно считать просто удобным *средством вычисления* топологической степени в частном случае непрерывно дифференцируемых отображений.

Замечание. Когда отображение φ непрерывно дифференцируемо, топологическую степеиь можно также определить с помощью интеграла:

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \int\limits_{\Omega} \rho_b^\varepsilon(\varphi(x)) \det \nabla\varphi(x)\, dx$$

$$\text{при } b \in \varphi(\overline{\Omega}) - \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi),$$

где функция $\rho_b^\varepsilon \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_b^\varepsilon(y)\,dy = 1, \quad \operatorname{supp} \rho_b^\varepsilon \subset B_\varepsilon(b)$$

и ε достаточно мало (упражнение 5.6). ■

Приведём теперь ряд важных свойств топологической степени (среди них есть и уже упомянутые), которые отчасти поясняются рисунками 5.4-1 ($n = 1$) и 5.4-2 ($n = 2$). Мы не будем здесь касаться других фундаментальных свойств степени отображения, таких как зависимость от разбиений множества Ω, свойство вырезания и т. д., поскольку они не потребуются в дальнейшем изложении.

Теорема 5.4-2 (свойства топологической степени). *Пусть Ω — ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $\deg(\varphi, \Omega, b)$ — топологическая степень отображения $\varphi \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ в точке $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ относительно множества Ω. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) $b \notin \varphi(\bar{\Omega}) \Rightarrow \deg(\varphi, \Omega, b) = 0$, т. е.

$$\deg(\varphi, \Omega, b) \neq 0 \Rightarrow b \in \varphi(\Omega).$$

(b) *Если b и b' принадлежат одной и той же связной компоненте множества $\mathbb{R}^n - \varphi(\partial\Omega)$, то $\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega, b')$.*

(c) *Имеет место непрерывность относительно отображения φ. А именно, пусть $\varphi \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ и $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое что*

$$\psi \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \|\psi - \varphi\|_{\mathscr{C}^0(\bar{\Omega};\, \mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon$$
$$\Rightarrow b \notin \psi(\partial\Omega) \quad \text{и} \quad \deg(\psi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega, b).$$

(d) *Имеет место свойство гомотопической инвариантности. А именно, пусть*

$$t \in [0, 1] \to \varphi_t \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$$

— непрерывно зависящее от t семейство отображений, причём $b \notin \varphi_t(\partial\Omega)$ для всех $t \in [0, 1]$. Тогда

$$\deg(\varphi_t, \Omega, b) = \deg(\varphi_0, \Omega, b) \quad \text{для всех} \quad t \in [0, 1].$$

(e) *Предположим, что множество Ω связно и отображение $\varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ инъективно. Тогда либо $\deg(\varphi, \Omega, b) = +1$ для всех $b \in \varphi(\Omega)$, либо $\deg(\varphi, \Omega, b) = -1$ для всех $b \in \varphi(\Omega)$.*

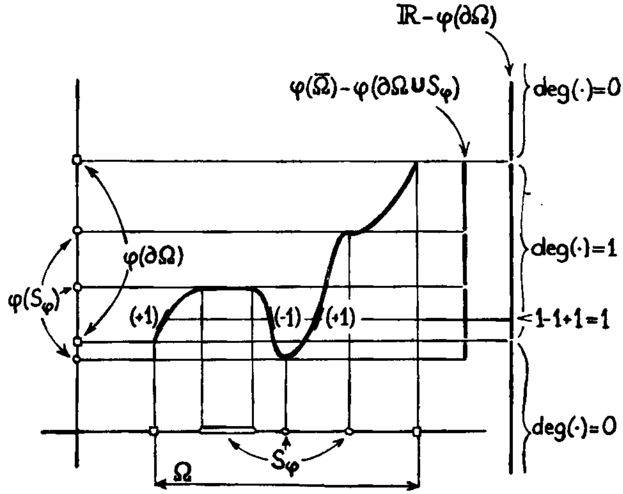

Рис. 5.4-1. Топологическая степень функции $\varphi : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

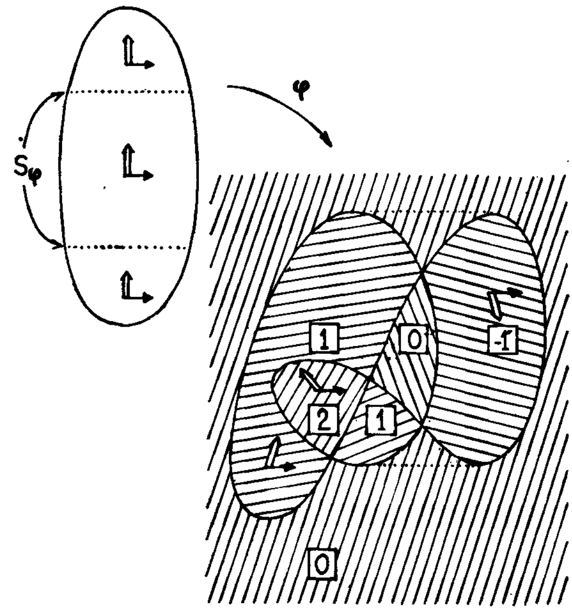

Рис. 5.4-2. Топологическая степень отображения $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Каждая заштрихованиая область является связной компонентой $\mathbb{R}^2 - \varphi(\partial\Omega)$, в которой топологическая степень постоянна (её значение указано в рамочке).

(f) *Если отображение* φ *непрерывно дифференцируемо на* Ω, то

$$\deg(\varphi, \Omega, b) := \sum_{x \in \varphi^{-1}(b)} \operatorname{sgn}\{\det \nabla\varphi(x)\}$$

$$\text{для всех } b \in \varphi(\overline{\Omega}) - \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi),$$

где

$$S_\varphi = \{x \in \Omega;\ \det \nabla\varphi(x) = 0\}. \qquad \blacksquare$$

Полезным следствием гомотопической инвариантности степени является тот факт, что *„степень отображения зависит только от его граничных значений"*. Точнее, *пусть* φ *и* ψ *— отображения класса* $\mathscr{C}^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющие условию*

$$\varphi = \psi \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Тогда

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b) \quad \text{при всех} \quad b \notin \varphi(\partial\Omega).$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть следующее непрерывно зависящее от t семейство отображений:

$$t \in [0, 1] \to \varphi_t = (1 - t)\varphi + t\psi, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

5.5. Сохранение ориентации и инъективность отображений

Прежде всего заметим, что *отображение* $\varphi \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, *сохраняющее ориентацию, т. е. удовлетворяющее условию* $\det \nabla\varphi(x) > 0$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$, *является локально обратимым*, т. е. каждая точка Ω обладает окрестностью, сужение на которую отображения φ инъективно (это свойство имеет место для всех $x \in \overline{\Omega}$, если φ принадлежит классу $\mathscr{C}^1$ на открытом множестве, содержащем $\overline{\Omega}$). Указанная инъективность вытекает из теоремы о неявной функции (теорема 1.2-3), поскольку производная Фреше отображения φ обратима в каждой точке $\overline{\Omega}$ (эта производная задаётся в каноническом базисе матрицей $\nabla\varphi$, которая обратима, так как $\det \nabla\varphi > 0$).

Тем не менее *из локальной обратимости отображения, вообще говоря, не следует его инъективность*. Действительно, рассмотрим, например, отображение

$$\varphi\colon x \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 \to \varphi(x) = (x_1 \cos(x_2/l),\ x_1 \sin(x_2/l),\ x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

где $\overline{\Omega}$ — прямоугольный стержень длины $2\vartheta l$, принадлежащий множеству $\{x \in \mathbb{R}^3, x_1 > 0\}$ и параллельный вектору e_2, как показано на рис. 5.5-1. Тогда $\det \nabla\varphi(x) = x_1/l > 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$, однако при $\vartheta \geqslant \pi$ это отображение не инъективно, поскольку $\varphi(x_1, \pi l, x_3) = \varphi(x_1, -\pi l, x_3)$. При $\vartheta = \pi$ инъективность отсутствует в точках границы, а при $\vartheta > \pi$ имеет место „взаимопроникновение" частей тела.

Приведём теперь два полезных достаточных условия, обеспечивающих инъективность отображения φ: $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Согласно первому из этих условий отображение φ сохраняет ориента-

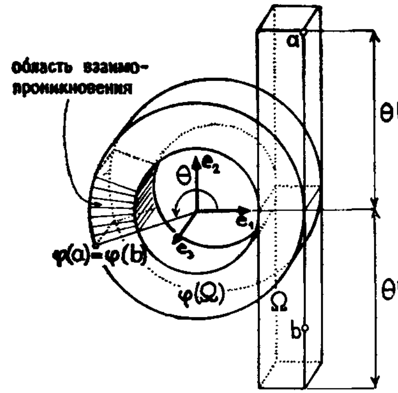

Рис. 5.5-1. Отображение $\varphi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, которое сохраняет ориентацию, но не является инъективным.

цию и инъективно, если соответствующий вектор перемещений $\boldsymbol{u} = \varphi - \boldsymbol{id}$ имеет градиент с достаточно малой нормой в $\overline{\Omega}$. Напомним, что через $|\boldsymbol{B}| = \sup\limits_{v \in \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{B}v|/|v|$ обозначается норма матрицы, соответствующая норме эвклидова пространства.

Теорема 5.5-1 (достаточное условие сохранения ориентации и инъективности). (a) *Пусть* $\varphi = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u}$: $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *дифференцируемое в точке* $x \in \Omega$ *отображение. Тогда*

$$|\nabla \boldsymbol{u}(x)| < 1 \Rightarrow \det \nabla\varphi(x) > 0.$$

(b) *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда существует постоянная* $c(\Omega) > 0$, *такая что любое отображение* $\varphi = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u} \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющее условию*

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla \boldsymbol{u}(x)| < c(\Omega),$$

является инъективным.

Доказательство. Пусть в точке x выполняется неравенство $|\nabla \boldsymbol{u}(x)| < 1$. Тогда

$$\det(\boldsymbol{I} + t\nabla \boldsymbol{u}(x)) \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

поскольку все матрицы вида $(\boldsymbol{I} + t\nabla \boldsymbol{u}(x))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, обратимы.

С другой стороны, функция

$$\delta\colon t \in [0, 1] \to \delta(t) := \det(\boldsymbol{I} + t\nabla\boldsymbol{u}(x))$$

непрерывна, и, следовательно, интервал $\delta([0, 1])$ замкнут в $\mathbb{R}$. Так как $\delta([0, 1])$ содержит точку $1 = \delta(0)$, но не содержит точки 0, очевидно, что $\det(\boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}(x)) = \delta(1) > 0$. Отсюда вытекает утверждение (a).

Для доказательства утверждения (b) предположим сначала, что множество Ω *выпукло* (в силу теоремы 4.7-1, $\bar{\Omega}$ также является выпуклым множеством). Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки из $\bar{\Omega}$. Применяя теорему о среднем значении (теорема 1.2-2) к функции $\varphi = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u}$, получаем

$$\begin{aligned}|\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - (x_1 - x_2)| &= |\boldsymbol{u}(x_1) - \boldsymbol{u}(x_2)| \\ &\leqslant \sup_{x \in]x_1, x_2[} |\nabla\boldsymbol{u}(x)|\,|x_1 - x_2|.\end{aligned}$$

Следовательно, если $\sup\limits_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla\boldsymbol{u}(x)| < 1$, то

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - (x_1 - x_2)| < |x_1 - x_2| \quad \text{при} \quad x_1 \neq x_2$$

и, значит,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2).$$

Таким образом, в случае выпуклого множества Ω можно положить $c(\Omega) = 1$.

Если не делать предположения о выпуклости Ω, то можно воспользоваться следующим геометрическим свойством открытого множества Ω, являющегося областью (доказательство этого свойства довольно просто, но не очень интересно; см. упражнение 1.9). Существует постоянная $c(\Omega) > 0$, такая что для любых точек x_1, x_2, принадлежащих $\bar{\Omega}$, найдётся конечное число точек y_k, $1 \leqslant k \leqslant l + 1$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}&y_1 = x_1, \quad y_k \in \Omega \quad \text{при} \quad 2 \leqslant k \leqslant l, \quad y_{l+1} = x_2, \\ &]y_k, y_{k+1}[\subset \Omega \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant l, \\ &\sum_{k=1}^{l} |y_k - y_{k+1}| \leqslant \frac{1}{c(\Omega)} |x_1 - x_2|.\end{aligned}$$

Пользуясь этим свойством в предположении, что $\sup\limits_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla\boldsymbol{u}(x)| < c(\Omega)$, устанавливаем, что

$$\begin{aligned}|\varphi(x_1) - \varphi(x_2) - (x_1 - x_2)| &= |\boldsymbol{u}(x_1) - \boldsymbol{u}(x_2)| \\ &\leqslant \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla\boldsymbol{u}(x)| \sum_{k=0}^{l} |y_k - y_{k+1}| < |x_1 - x_2| \quad \text{при} \quad x_1 \neq x_2.\end{aligned}$$

Отсюда снова вытекает инъективность отображения φ. ■

Замечание. Доказательство утверждения (b) для случая выпуклых Ω автору сообщил Франко Брецци. ■

Приведём теперь ещё один набор достаточных условий инъективности отображения $\varphi\colon \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которые, по существу, сводятся к тому, что φ *должно сохранять ориентацию* Ω *и совпадать на границе* $\partial\Omega$ *с непрерывным инъективным отображением* $\varphi_0\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$. Как уже отмечалось, *локальная* обратимость является простым следствием свойства сохранения ориентации, установление же *глобальной* обратимости при наличии этого свойства намного труднее. Доказательство глобальной обратимости требует значительно более тонких методов, которые существенно опираются на свойства *топологической степени* (§ 5.4). Напомним, что равенство $\operatorname{int} \overline{\Omega} = \Omega$, являющееся одним из предположений следующей теоремы, имеет место, когда Ω — область, однако может не быть справедливым для открытых множеств более общего вида (упражнение 1.7).

Теорема 5.5-2 (достаточное условие инъективности). *Пусть* Ω *— ограниченное открытое связное подмножество в* $\mathbb{R}^n$, *такое что* $\operatorname{int} \overline{\Omega} = \Omega$. *Пусть* $\varphi_0 \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *— инъективное отображение и* $\varphi \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap \mathscr{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ *— отображение, которое удовлетворяет условиям*

$$\begin{cases} \det \nabla\varphi(x) > 0 & \text{для всех} \quad x \in \Omega, \\ \varphi(x) = \varphi_0(x) & \text{для всех} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Тогда отображение $\varphi\colon \overline{\Omega} \to \varphi(\overline{\Omega})$ *является гомеоморфизмом (в частности,* $\varphi\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *инъективно), отображение* $\varphi\colon \Omega \to \varphi(\Omega)$ *является* $\mathscr{C}^1$*-диффеоморфизмом и, кроме того,*

$$\varphi(\Omega) = \varphi_0(\Omega), \quad \varphi(\overline{\Omega}) = \varphi_0(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. (i) В силу теоремы 5.4-2(e) из связности множества Ω и инъективности отображения φ_0 вытекает, что

$$\deg(\varphi_0, \Omega, b) = 1 \quad \text{или} \quad -1 \quad \text{для всех} \quad b \in \varphi_0(\Omega).$$

С другой стороны (теорема 5.4-2(a)),

$$\deg(\varphi_0, \Omega, b) = 0 \quad \text{для всех} \quad b \notin \varphi_0(\overline{\Omega}).$$

Поскольку отображение φ_0 инъективно и $\varphi(\partial\Omega) = \varphi_0(\partial\Omega)$, никакая точка b, принадлежащая множеству $\varphi_0(\Omega)$, не может принадлежать $\varphi(\partial\Omega)$. Следовательно, на основании свойства гомотопической инвариантности (теорема 5.4-2(d)) и условия

$\varphi = \varphi_0$ на $\partial\Omega$ заключаем, что

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\varphi_0, \Omega, b) = \begin{cases} 1 \quad \text{или} \quad -1 & \text{если} \quad b \in \varphi_0(\Omega), \\ 0, & \text{если} \quad b \notin \varphi_0(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

(ii) Пусть $b \in \varphi_0(\Omega)$, так что $\deg(\varphi, \Omega, b) = 1$ или -1 в силу п. (i). Соотношение $b \notin \varphi(\bar{\Omega})$ не может иметь места, ибо в противном случае степень $\deg(\varphi, \Omega, b)$ обратилась бы в нуль (теорема 5.4-2(a)); как указано выше, соотношение $b \in \varphi(\partial\Omega)$ также не может быть выполнено. Единственная оставшаяся возможность — это $b \in \varphi(\Omega)$, и, значит,

$$\varphi_0(\Omega) \subset \varphi(\Omega).$$

Предположение $\det \nabla\varphi(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$ и теорема 5.4-2(f) показывают, что

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(b)} \operatorname{sgn}\{\det \nabla\varphi(x)\} = \operatorname{card} \varphi^{-1}(b) \geqslant 1$$

$$\text{для всех} \quad b \in \varphi(\bar{\Omega}) - \varphi(\partial\Omega)$$

(в этом случае S_φ — пустое множество). Ввиду импликации

$$b \in \varphi_0(\Omega) \Rightarrow b \in \varphi(\Omega) \subset \varphi(\bar{\Omega}) - \varphi(\partial\Omega)$$

мы можем заключить, что $\deg(\varphi, \Omega, b) = 1$, если $b \in \varphi_0(\Omega)$, т. е.

$$\operatorname{card} \varphi^{-1}(b) = 1 \quad \text{для всех} \quad b \in \varphi_0(\Omega).$$

(iii) Пусть $b \notin \varphi_0(\bar{\Omega})$, так что $\deg(\varphi, \Omega, b) = 0$ в силу п. (i). С другой стороны, поскольку $b \notin \varphi_0(\partial\Omega) = \varphi(\partial\Omega)$, должно либо выполняться неравенство $\deg(\varphi, \Omega, b) \geqslant 1$, если $b \in \varphi(\bar{\Omega})$, либо равенство $\deg(\varphi, \Omega, b) = 0$, если $b \notin \varphi(\bar{\Omega})$. Таким образом, возможен лишь случай $b \notin \varphi(\bar{\Omega})$ и, значит,

$$\varphi(\bar{\Omega}) \subset \varphi_0(\bar{\Omega}).$$

В итоге мы имеем следующие включения:

$$\varphi_0(\Omega) \subset \varphi(\Omega) \subset \varphi(\bar{\Omega}) \subset \varphi_0(\bar{\Omega}).$$

(iv) Переходя в этом соотношении к замыканиям и учитывая, что

$$\varphi(\bar{\Omega}) = \{\varphi(\Omega)\}^-$$

(теорема 1.2-7 или 1.2-8), получаем

$$\varphi(\bar{\Omega}) = \varphi_0(\bar{\Omega}).$$

Из теоремы о сохранении области и предположения $\operatorname{int}\overline{\Omega}=\Omega$ вытекает, что (теорема 1.2-8)

$$\varphi_0(\Omega)=\operatorname{int}\{\varphi_0(\Omega)\}^-.$$

Отсюда выводим равенство

$$\varphi(\Omega)=\varphi_0(\Omega),$$

учитывая, что внутренность множества является наибольшим открытым множеством, в нём содержащемся, а также что $\varphi(\Omega)$ — открытое подмножество в $\{\varphi_0(\Omega)\}^-$ (в силу п. (iii) и принципа сохранения области; см. теорему 1.2-6).

Таким образом, последнее свойство, установленное в п. (ii), показывает, что отображение φ: $\Omega\to\varphi(\Omega)$ *инъективно*. Поскольку множество $\varphi(\partial\Omega)=\varphi_0(\partial\Omega)$ не пересекается с $\varphi_0(\Omega)$ (отображение φ_0 инъективно на $\overline{\Omega}$ по предположению), мы можем заключить, что φ инъективно на $\overline{\Omega}$. Следовательно, φ — гомеоморфизм множества $\overline{\Omega}$ на $\varphi(\overline{\Omega})$ в силу классического свойства инъективных непрерывных отображений на компактных множествах. Тот факт, что сужение φ на Ω является $\mathscr{C}^1$-диффеоморфизмом множеств Ω и $\varphi(\Omega)$, вытекает из теоремы о сохранении области (теорема 1.2-5). ■

Теорему 5.5-2 можно обобщить на случай отображений φ, непрерывных по Липшицу (Pourciau [1983]), а также отображений φ из пространств Соболева $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ при $p>n$ (Ball [1981b, теорема 1]; см. также упражнение 5.7).

Замечания. (1) Хотя неравенство $\varphi'(x)>0$ для всех точек x интервала Ω вещественной прямой $\mathbb{R}$ является достаточным условием инъективности функции $\varphi\in\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})\cap\mathscr{C}^1(\Omega)$, очевидно, что при $n\geqslant 2$ к предположению $\det\nabla\varphi(x)>0$ в Ω следует добавить ещё некоторое условие (например, совпадение φ на границе с инъективным отображением), чтобы обеспечить инъективность φ. В связи с этим см. контрпример на рис. 5.5-1.

(2) Частный случай $\varphi_0=id$ заслуживает особого внимания. Отметим, что на первый взгляд „очевидные" равенства $\varphi(\Omega)=\Omega$ и $\varphi(\overline{\Omega})=\overline{\Omega}$, имеющие место в этом случае, доказать совсем не просто. ■

Применимость теоремы 5.5-2 в теории упругости ограничивается условием совпадения деформации φ с инъективным отображением *во всех* точках границы $\partial\Omega$ (такое ограничение отсутствует в теореме 5.5-1), тогда как в реальных ситуациях деформация часто задаётся лишь на *подмножествах, строго содержащихся в* $\partial\Omega$ (в следующем параграфе будет показано, как обеспечить инъективность в этом случае). Тем не менее, результат теоремы

5.5-2 весьма эффективен при изучении *задачи с граничными условиями на перемещения*, как мы увидим в следующей главе.

Замечания. (1) В ситуациях, когда условие теоремы 5.5-2 „$\det \nabla\varphi(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$“ является следствием более сильного условия „$|\nabla u(x)| < 1$ для всех $x \in \Omega$“ из теоремы 5.5-1, область применимости теоремы 5.5-1 для доказательства инъективности отображения φ шире, чем у теоремы 5.5-2, ввиду отсутствия условий на граничные значения φ (кроме того, предположения теоремы 5.5-1 гораздо проще проверить). Иллюстрацией этого положения может служить доказательство теоремы 6.9-1.

(2) Однако в ряде случаев теорема 5.5-2 приводит к более сильным результатам об инъективности, чем теорема 5.5-1, ввиду отсутствия в теореме 5.5-2 предположения $\sup\limits_{x\in\bar\Omega}|\nabla u(x)| < 1$. В качестве примера можно рассмотреть задачу с граничными условиями на перемещения для *несжимаемых материалов*: её решение $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет равенству

$$\det(\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u})(x) = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \qquad \blacksquare$$

Предположения, что φ совпадает на $\partial\Omega$ с инъективным в $\bar\Omega$ отображением и что $\det \nabla\varphi(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$, могут быть ослаблены. Это вытекает из следующего результата, который установлен в работе Meisters & Olech [1963].

Теорема 5.5-3 (достаточное условие инъективности). *Пусть O — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ и K — компактное подмножество O со связной границей ∂K. Предположим, что отображение φ: $O \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям*

$$\begin{cases} \varphi \in \mathscr{C}^1(O; \mathbb{R}^n); \\ \det \nabla\varphi > 0 \text{ на } \operatorname{int} K, \quad \text{кроме, быть может, конечного} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{множества точек;} \\ \det \nabla\varphi > 0 \quad \text{по крайней мере в одной точке } \partial K; \\ \varphi \text{ инъективно на } \partial K. \end{cases}$$

Тогда отображение φ: $K \to \mathbb{R}^n$ инъективно. $\blacksquare$

Этот результат имеет силу независимо от регулярности границы ∂K, однако для его справедливости существенным является предположение о принадлежности отображения φ классу $\mathscr{C}^1$ на открытом множестве, содержащем K. В связи с этим напомним, что в теореме 5.5-1 граница открытого множества Ω предполагалась достаточно гладкой (Ω считалось областью), а также что условие $\operatorname{int}\bar\Omega = \Omega$ из теоремы 5.5-2 в некотором смысле есть предположение о гладкости границы $\partial\Omega$. Аналогично этому ослабленные предположения теоремы 5.5-3 компенсируются условием связности границы ∂K, которое ненужно в теоремах 5.5-1 и 5.5-2. В работе Weinstein [1985] показано, однако, что и условие связности ∂K также может быть опущено.

5.6. Внутренняя инъективность, самокасание и отсутствие взаимопроникновения частей тела в гиперупругости

Инъективность сохраняющего ориентацию отображения φ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, которое является решением краевой задачи теории упругости, может быть выведена из теоремы 5.5-2 или 5.5-3 только в случае *задачи с граничными условиями на перемещения*, поскольку решение лишь такой задачи должно совпадать с известным инъективным отображением вдоль *всей* границы $\partial\Omega$. Во

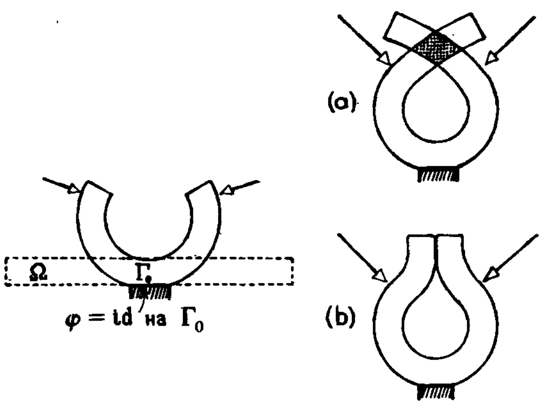

Рис. 5.6-1. Задача с граничными условиями на перемещения и давлеиие. При увеличении нагрузки может произойти взаимопроникновение частей тела, если математическая модель учитывает лишь условие сохранения ориентации (a). Физически приемлемая модель должна включать дополнительиое условие внутренней инъективности, т. е. условие отсутствия взаимопроиикиовеиия частей тела при допустимости самокасання (b).

всех остальных случаях необходимо дополнительное условие, которое бы обеспечило **внутреннюю инъективность** φ, т. е. инъективность φ на множестве Ω (если допустить самокасания, то отсутствие инъективности отображения φ может иметь место на $\partial\Omega$), как показывает пример задачи с граничными условиями на перемещения и давление, представленный на рис. 5.6-1.

Покажем теперь, что в случае *гиперупругих материалов* внутреняя инъективность обеспечивается добавлением к условию сохранения ориентации „$\det \nabla\varphi > 0$ в $\bar{\Omega}$“ так называемого **усло-**

вия инъективности

$$\boxed{\int_\Omega \det \nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \operatorname{vol}\varphi(\Omega)}$$

на отображения $\varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, минимизирующие энергию, и вообще на все допустимые решения. Мы приведём следующие результаты. Сначала будет установлено, что из условия инъективности вытекает внутренняя инъективность отображения φ (теорема 5.6-1); затем будет исследована „геометрия самокасания“ в точках границы, где нарушается инъективность φ (теорема 5.6-2); и наконец, будет доказана *внутренняя инъективность отображений, минимизирующих энергию, в случае задач со смешанными граничными условиями на перемещения и напряжения* (теорема 5.6-3). В этом параграфе изложение следует работе Ciarlet & Nečas [1986].

Прежде всего установим инъективность на открытом множестве Ω отображения $\varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, которое сохраняет ориентацию и удовлетворяет условию инъективности.

Теорема 5.6-1 (достаточное условие инъективности). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ и $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ удовлетворяет условиям*

$$\det \nabla\varphi > 0 \text{ в } \Omega, \qquad \int_\Omega \det \nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \operatorname{vol}\varphi(\Omega).$$

Тогда отображение φ инъективно на множестве Ω.

Доказательство. Предположим, что существуют две различные точки x и y, принадлежащие множеству Ω и такие, что $\varphi(x) = \varphi(y)$. Поскольку матрицы $\nabla\varphi(x)$ и $\nabla\varphi(y)$ обратимы, в силу теоремы о неявной функции найдутся открытые множества U, V, W', такие что

$$\begin{cases} x \in U \subset \Omega,\ y \in V \subset \Omega,\ U \cap V = \varnothing,\ \varphi(x) = \varphi(y) \in W' \subset \varphi(\Omega) \\ \text{и } \varphi\colon U \to W',\ \varphi\colon V \to W' \text{ суть } \mathscr{C}^1\text{-диффеоморфизмы.} \end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{card}\varphi^{-1}(x') \geqslant 2$ при всех $x' \in W'$. Учитывая, что (соответствующие ссылки на литературу см. в § 1.5)

$$\int_{\varphi(\Omega)} \operatorname{card}\varphi^{-1}(x')\,\mathrm{d}x' = \int_\Omega \det \nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

если существует хотя бы один из этих интегралов (в данном случае — второй, так как $\det \nabla\varphi \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$ по условию теоремы), а также принимая во внимание, что $\operatorname{vol} W' > 0$, получаем неравенство

$$\operatorname{vol}\varphi(\Omega) = \int\limits_{\varphi(\Omega)} \mathrm{d}x' < \int\limits_{\varphi(\Omega)} \operatorname{card}\varphi^{-1}(x')\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} \det\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

которое противоречит неравенству $\int\limits_{\Omega} \det\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \operatorname{vol}\varphi(\Omega)$.

Следовательно, отображение φ инъективно в Ω. ■

В дополнение к предположениям, сформулированным в теореме 5.6-1, можно также наложить на допустимые деформации φ **условие изоляции**

$$\boxed{\varphi(\bar{\Omega}) \subset B,}$$

рассмотренное Ноллом (Noll [1978]); здесь B — произвольное замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^3$. Поскольку граница множества B играет роль **препятствия**, условие изоляции имеет сходство с односторонним граничным условием на положения $\varphi(\Gamma_2) \subset C$ (см. § 5.2, а также упражнение 5.8). Используемое здесь определение границы класса $\mathscr{C}^1$ — то же, что и у Нечаса (Nečas [1971]), в случае когда граница является ограниченным множеством (§ 1.6). Если же граница представляет собой неограниченное множество (неограниченной может быть, например, граница B), в указанное определение следует внести всего лишь одно изменение, а именно допустить бесконечное число систем локальных координат.

Теорема 5.6-2. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$ класса $\mathscr{C}^1$ и $\varphi \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega};\ \mathbb{R}^3)$ — отображение, удовлетворяющее условиям*

$$\det\nabla\varphi > 0 \text{ в } \bar{\Omega}, \quad \int\limits_{\Omega} \det\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \operatorname{vol}\varphi(\Omega)$$

и

$$\varphi(\bar{\Omega}) \subset B.$$

Тогда отображение φ, которое в силу теоремы 5.6-1 *инъективно в Ω, удовлетворяет также соотношениям*

$$\varphi(\Omega) \subset \operatorname{int} B, \quad \varphi(\Omega) \cap \varphi(\partial\Omega) = \varnothing,$$
$$x' \in \partial B \cap \varphi(\partial\Omega) \Rightarrow \operatorname{card}\varphi^{-1}(x') = 1,$$

причём касательные плоскости к поверхностям ∂B и $\varphi(\partial\Omega)$ в точке x' совпадают, и

$$x' \in \varphi(\partial\Omega) \cap \operatorname{int} B \Rightarrow \operatorname{card}\varphi^{-1}(x') = 1 \text{ или } 2.$$

Если $\varphi^{-1}(x') = \{x, y\}$, *то* $x \in \partial\Omega$, $y \in \partial\Omega$ *и векторы внешней нормали к поверхности* $\varphi(\partial\Omega)$ *в точках* $\varphi(x) = \varphi(y)$ *имеют противоположные направления (а значит, касательные плоскости совпадают).*

Доказательство. Пусть $x \in \Omega$. В силу теоремы о неявной функции существует открытое множество $U \subset \Omega$, содержащее x и такое, что отображение φ: $U \to \varphi(U)$ является $\mathscr{C}^1$-диффеоморфизмом. Множество $\varphi(U)$, открытое по теореме о сохранении области, содержит точку $\varphi(x)$ и содержится в множестве B, так как по условию теоремы $\varphi(\overline{\Omega}) \subset B$. Следовательно, $\varphi(x) \in \operatorname{int} B$, и, значит, включение $\varphi(\Omega) \subset \operatorname{int} B$ доказано.

Пусть $x \in \partial\Omega$. Поскольку $\partial\Omega$ — граница класса $\mathscr{C}^1$ и отображение φ принадлежит пространству $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, найдутся открытое множество $A \subset \mathbb{R}^3$, содержащее x, и продолжение φ (обозначаемое снова через φ) $\varphi \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega} \cup A; \mathbb{R}^3)$, такие что $\det \nabla\varphi > 0$ на множестве $\overline{\Omega} \cup A$. Это продолжение можно построить при помощи известных методов продолжения функций, заданных в областях с гладкой границей (см. Nečas [1967]). Тогда по теореме о неявной функции существуют открытые множества $U \subset A$ и U', содержащие точки x и $x' := \varphi(x)$ соответственно и такие, что φ: $U \to U'$ есть $\mathscr{C}^1$-диффеоморфизм.

Предположим, что существует точка $y \in \Omega$, для которой $x' = \varphi(y)$. Уменьшая, если необходимо, окрестность U', мы можем найти окрестность V точки y, такую что U и V не пересекаются и φ: $V \to U'$ является $\mathscr{C}^1$-диффеоморфизмом. Поскольку U — окрестность точки $x \in \partial\Omega$, она содержит некоторую точку $z \in \Omega$, и, таким образом, множеству $\varphi^{-1}(\varphi(z))$ принадлежат по крайней мере две точки, что противоречит инъективности отображения φ на Ω (теорема 5.6-1).

Пусть теперь $x' \in \partial B \cap \varphi(\partial\Omega)$. Наличие у поверхностей ∂B и $\varphi(\partial\Omega)$ разных касательных плоскостей в точке x' привело бы к соотношению $\partial B \cap \varphi(\Omega) \neq \varnothing$ (чтобы убедиться в этом, нужно рассмотреть плоскость, содержащую единичный вектор внешней нормали $\boldsymbol{n}'$ к поверхности ∂B в точке x' и пересекающую обе касательных плоскости по двум различным прямым), которое противоречит включению $\varphi(\Omega) \subset \operatorname{int} B$. Следовательно, касательные плоскости совпадают, и, так как $\varphi(\overline{\Omega}) \subset B$, единичные векторы внешней нормали к поверхностям ∂B и $\varphi(\partial\Omega)$ должны быть направлены в одну сторону.

Предположим, что множество $\varphi^{-1}(x')$ помимо x содержит точку $y \neq x$; она, как и x, принадлежит $\partial\Omega$, поскольку $\varphi(\Omega) \cap \varphi(\partial\Omega) = \varnothing$. Пользуясь теоремой о неявной функции, мы можем найти открытые множества U_x, U_y, U', содержащие точки

x, y, x' соответственно и такие, что $U_x \cap U_y = \varnothing$ и оба отображения

$$\varphi\colon U_x \cap \Omega \to U' \cap \varphi(\Omega), \quad \varphi\colon U_y \cap \Omega \to U' \cap \varphi(\Omega)$$

являются $\mathscr{C}^1$-диффеоморфизмами. Отсюда вытекает, что φ не инъективно в Ω, а это противоречит теореме 5.6-1. Следовательно, множество $\varphi^{-1}(x')$ состоит из одной точки.

Допустим, что $x' \in \varphi(\partial\Omega) \cap \operatorname{int} B$ и $\operatorname{card} \varphi^{-1}(x') \geqslant 2$. Тогда существуют точки $x \in \partial\Omega$ и $y \in \bar\Omega$, такие что $x \neq y$ и $x' = \varphi(x) = \varphi(y)$. Если $y \in \Omega$, то аналогично предыдущему устанавливается, что φ не инъективно на Ω, что снова противоречит теореме 5.6-1. Поэтому $y \in \partial\Omega$.

Далее, существуют открытые множества V и U', содержащие x' и y соответственно и такие, что $\varphi\colon V \cap \bar\Omega \to U' \cap \varphi(\bar\Omega)$ есть $\mathscr{C}^1$-диффеоморфизм. Теперь достаточно повторить приведённые выше рассуждения, отведя роль множества $\operatorname{int} B$ множеству $U' \cap \varphi(\Omega)$. Таким образом доказывается, что, кроме точки y, только x принадлежит прообразу $\varphi^{-1}(x')$, а также что касательные плоскости к поверхности $\varphi(\partial\Omega)$ в точках $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ совпадают и имеют векторы внешней нормали взаимно противоположного направления. ■

Замечания. (1) В отличие от теоремы 5.6-1, справедливой при условии $\det \nabla\varphi > 0$ в Ω, в теореме 5.6-2 необходимо более сильное условие $\det \nabla\varphi > 0$ в $\bar\Omega$, чтобы продолжение отображения φ на открытое множество, обозначенное в доказательстве через A, также удовлетворяло неравенству $\det \nabla\varphi > 0$ на A.

(2) Предположения о регулярности в теореме 5.6-2 существенны. В частности, нетрудно найти примеры, показывающие, что обе импликации из этой теоремы неверны, если отображение φ и границы $\partial\Omega$ и ∂B обладают меньшей гладкостью. ■

Дадим теперь формальную интерпретацию отображений, минимизирующих полную энергию на множестве допустимых решений $\psi\colon \bar\Omega \to \mathbb{R}^3$, которые сохраняют ориентацию и, кроме того, удовлетворяют условию инъективности $\int_\Omega \det \nabla\psi(x)\, dx \leqslant \operatorname{vol} \psi(\Omega)$. Ради простоты предполагается, что приложенные поверхностные силы отсутствуют.

Теорема 5.6-3 (задача с граничными условиями на перемещения и напряжения и условием инъективности). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей Γ. Пусть Γ_0 и Γ_1 — взаимно непересекающиеся относительно открытые подмножества Γ, такие что $\operatorname{area}\{\Gamma - (\Gamma_0 \cup \Gamma_1)\} = 0$, а B — замкнутое* *подмножество в* $\mathbb{R}^3$ *с достаточно гладкой границей* ∂B. *Пусть множество допустимых решений имеет вид*

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}=\Big\{\boldsymbol{\psi}\colon \overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3;\quad \det\nabla\boldsymbol{\psi}>0 \text{ в } \overline{\Omega},\quad \boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\varphi}_0 \text{ на } \Gamma_0,\\ \boldsymbol{\psi}(\overline{\Omega})\subset B,\quad \int_\Omega \det\nabla\boldsymbol{\psi}(x)\,\mathrm{d}x\leqslant \operatorname{vol}\boldsymbol{\psi}(\Omega)\Big\}.\end{aligned}}$$

Предположим, что $\boldsymbol{\varphi}_0(\Gamma_0)\subset\partial B$, *и пусть полная энергия задана соотношением*

$$\boxed{I(\boldsymbol{\psi})=\int_\Omega \widehat{W}(\nabla\boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}x-\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\psi}\,\mathrm{d}x.}$$

Тогда отображение $\boldsymbol{\varphi}$, *являющееся достаточно гладким решением задачи на минимум*

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi} \text{ и } I(\boldsymbol{\varphi})=\inf_{\boldsymbol{\psi}\in\boldsymbol{\Phi}} I(\boldsymbol{\psi}),}$$

инъективно в Ω *и служит решением следующей краевой задачи:*

$$\boxed{\begin{aligned}&-\mathbf{div}\,\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi})=\boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \text{ где } \widehat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F})=\frac{\partial\widehat{W}}{\partial\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}) \quad\text{при всех}\quad \boldsymbol{F}\in\mathbb{M}^3_+,\\ &\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}_0 \text{ на } \Gamma_0,\\ &\boldsymbol{\varphi}(\overline{\Omega})\subset B,\\ &\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi}(x))\,\boldsymbol{n}(x)=\lambda(x)\,\boldsymbol{n}^{\varphi}(x^{\varphi}),\quad \text{где}\quad \lambda(x)\leqslant 0,\quad x\in\Gamma_1,\end{aligned}}$$

причём условия на Γ_1 *соответствуют одному из следующих трёх взаимоисключающих случаев (рис.* 5.6-2):

$$\boxed{\begin{aligned}&(\mathrm{a})\ \boldsymbol{\varphi}(x)\in\operatorname{int}B \text{ и } \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}(x))=\{x\} \text{ — тогда } \lambda(x)=0;\\ &(\mathrm{b})\ \boldsymbol{\varphi}(x)\in\partial B \text{ — тогда } \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}(x))=\{x\};\\ &(\mathrm{c})\ \boldsymbol{\varphi}(x)\in\operatorname{int}B \text{ и } \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}(x))=\{x,\,y\},\quad y\in\Gamma_1\text{ —}\\ &\qquad\text{тогда } \boldsymbol{n}^{\varphi}(x)+\boldsymbol{n}^{\varphi}(y)=\boldsymbol{0} \text{ и } \lambda(x)\,\mathrm{d}a(x)=\lambda(y)\,\mathrm{d}a(y),\end{aligned}}$$

где $\boldsymbol{n}(z)$ *и* $\boldsymbol{n}^{\varphi}(z^{\varphi})$ *обозначают векторы единичной внешней нормали к поверхностям* Γ *и* $\boldsymbol{\varphi}(\Gamma)$ *в точках* z *и* $z^{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(z)$ *соответственно, а* $\mathrm{d}a(z)$ *— элемент площади поверхности* Γ *в точке* z.

Доказательство. Доказательство этой теоремы сводится к построению *вблизи минимизирующего отображения* φ *подходящих „вариаций"* $\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\vartheta$, *которые помимо условий* $\det \nabla\varphi^\varepsilon > 0$ *в* $\bar{\Omega}$, $\varphi^\varepsilon = \varphi_0$ *на* Γ_0, $\varphi^\varepsilon(\bar{\Omega}) \subset B$ *удовлетворяют также условию инъективности* $\int_\Omega \det \nabla\varphi^\varepsilon \, dx \leqslant \operatorname{vol} \varphi^\varepsilon(\Omega)$; *это требование равносильно их инъективности на множестве* Ω (см. теорему 5.6-1; обратное очевидно).

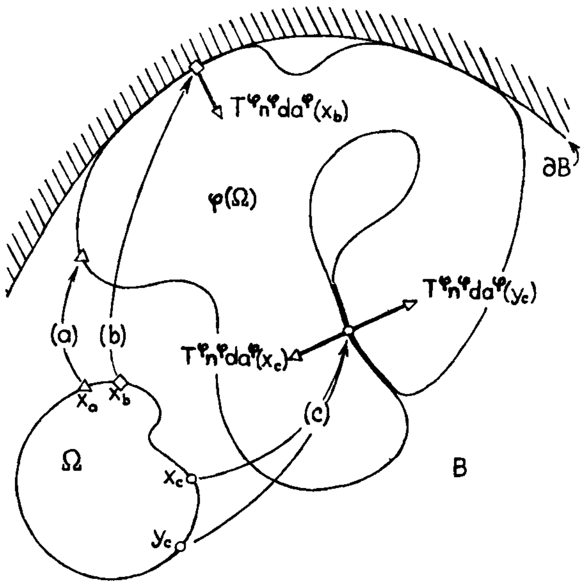

Рис. 5.6-2. Различные типы граничных условий на Γ_1, описанные в теореме 5.6-3. Поверхностная сила $T^\varphi n^\varphi da^\varphi$ отсутствует в случае (a) и направлена вдоль внешней нормали к препятствию в случае (b) (контакт с препятствием без трения); в случае (c) поверхностные силы $T^\varphi(x_c)\, n^\varphi(x_c)\, da^\varphi(x_c)$ и $T^\varphi(y_c)\, n^\varphi(y_c)\, da^\varphi(y_c)$ ортогональны к поверхности $\varphi(\Gamma_1)$, направлены внутрь и отличаются лишь знаком (самокасание без трения).

(i) Пусть φ — достаточно гладкое решение задачи на минимум, x — точка Ω, а $B_r(x)$ — открытый шар с центром в x, $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$. Для любой заданной функции $\vartheta \in \mathcal{D}(B_r(x))$ и любого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ положим $\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\vartheta$. Очевидно, что $\varphi^\varepsilon = \varphi_0$ на Γ_0 и существует число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\vartheta) > 0$, такое что $\det \nabla\varphi^\varepsilon > 0$ в $\bar{\Omega}$ и $\varphi^\varepsilon(\bar{\Omega}) \subset B$ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$.

Применяя теорему 5.5-2 в случае открытого множества $B_r(x)$, устанавливаем, что φ^ε инъективно на $\overline{B_r(x)}$ и

$$\varphi^\varepsilon(B_r(x)) = \varphi(B_r(x)) \quad \text{при} \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$$

(в силу теоремы 5.6-1 отображение φ инъективно на множестве Ω, по предположению содержащем $\overline{B_r(x)}$). Инъективность φ^ε на Ω вытекает из инъективности φ^ε на $\Omega - B_r(x)$ (так как $\varphi = \varphi^\varepsilon$ на $\Omega - B_r(x)$) и соотношений

$$\varphi^\varepsilon(\Omega - B_r(x)) \cap \varphi^\varepsilon(B_r(x)) = \varphi(\Omega - B_r(x)) \cap \varphi(B_r(x)) = \varnothing.$$

Выписывая неравенство $I(\varphi^\varepsilon) \geqslant I(\varphi)$ и пользуясь формулой Грина

$$\int_\Omega \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) : \nabla\vartheta \, dx = -\int_\Omega \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) \cdot \vartheta \, dx + \int_\Gamma \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} \cdot \vartheta \, da,$$

находим, что

$$\varepsilon \int_\Omega \{-\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) - \boldsymbol{f}\} \cdot \vartheta \, dx \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0.$$

Из этих неравенств выводим уравнение $-\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) = \boldsymbol{f}$ в Ω. Граничное условие $\varphi = \varphi_0$ на Γ_0 выполняется в силу определения множества Φ.

(ii) Пусть $x \in \Gamma_1$ и выполнены условия $\varphi(x) \in \operatorname{int} B$, $\operatorname{card} \varphi^{-1}(\varphi(x)) = 1$ (случай (a)). Можно найти содержащее x открытое множество $V_x \subset \mathbb{R}^3$, а также гладкое продолжение отображения φ (снова обозначаемое через φ), такие что $\det \nabla \;\; > 0$ в $\overline{\Omega} \cup V_x$. Прежде всего установим наличие *открытого шара* $B_r(x)$, *такого что*

$$B_r(x) \subset V_x \ \text{и} \ \varphi\colon \Omega \cup B_r(x) \to \mathbb{R}^3 \ \text{инъективно.}$$

По теореме о неявной функции существует такое $r_0 > 0$, для которого отображение φ: $B_{r_0}(x) \to \mathbb{R}^3$ инъективно, и кроме того, в теореме 5.6-1 доказано, что φ инъективно на Ω. Если допустить, что шара $B_r(x)$ с указанными свойствами не существует, то можно найти последовательности (x^k) и (y^k), удовлетворяющие условиям

$$x^k \in B_{1/k}(x), \quad y^k \in \Omega - B_{1/k}(x), \quad \varphi(x^k) = \varphi(y^k) \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 1.$$

В силу ограниченности множества $\overline{\Omega}$ найдётся подпоследовательность (y^l), сходящаяся к $y \in \overline{\Omega}$. Поскольку $\lim\limits_{l\to\infty} x^l = x$, должны выполняться соотношения

$$\varphi(x) = \lim_{l\to\infty} \varphi(x^l) = \lim_{l\to\infty} \varphi(x^l) = \varphi(y).$$

Таким образом, из условия $\operatorname{card} \varphi^{-1}(\varphi(x)) = 1$ вытекает, что $x = y$. Следовательно, точки x^l и y^l лежат в шаре $B_{r_0}(x)$ при достаточно больших l, что противоречит инъективности φ на

$B_{r_0}(x)$. Тем самым установлено существование шара $B_r(x)$ с указанными выше свойствами.

Уменьшая, если необходимо, радиус r, мы можем считать, что $B_r(x) \cap \Gamma_0 = \varnothing$, $\varphi(\overline{\Omega} \cup \overline{B_r(x)}) \subset B$ (здесь предполагается, что $\varphi(x) \subset \operatorname{int} B$), а также что φ инъективно на множестве $\Omega \cup \overline{B_r(x)}$ (последнее свойство будет использовано немедленно).

Для произвольной заданной функции $\vartheta \in \mathcal{D}(B_r(x))$ и любого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ положим $\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\vartheta$. Очевидно, что $\varphi^\varepsilon = \varphi_0$ на Γ_0 и существует число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\vartheta) > 0$, такое что $\det \nabla\varphi^\varepsilon > 0$ в $\overline{\Omega}$ и $\varphi^\varepsilon(\overline{\Omega}) \subset B$ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Тогда инъективность отображения φ^ε на множестве $\Omega \cup B_r(x)$ (и тем более на Ω) вытекает из инъективности отображения φ на $\Omega \cup B_r(x)$; это доказывается методом, применённым в п. (i).

Снова выписывая неравенство $I(\varphi^\varepsilon) \geqslant I(\varphi)$ для таких φ^ε и применяя формулу Грина, получаем

$$\varepsilon \left\{ \int_{\Gamma_1} \widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} \cdot \theta \, \mathrm{d}a + O(\varepsilon) \right\} \geqslant 0$$

при всех $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Отсюда выводим граничное условие $\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi(x))\boldsymbol{n}(x) = \boldsymbol{o}$ в случае (a).

(iii) Пусть $x \in \Gamma_1$ и $\varphi(x) \in \partial B$, так что $\operatorname{card} \varphi^{-1}(\varphi(x)) = 1$ в силу теоремы 5.6-2 (случай (b)). Рассуждая, как и в п. (ii), мы можем построить шар $B_r(x)$ и продолженное отображение $\varphi\colon \Omega \cup B_r(x) \to \mathbb{R}^3$, которое инъективно.

Пусть $(\boldsymbol{t}'_1, \boldsymbol{t}'_2, \boldsymbol{t}'_3)$ — гладкое поле линейно-независимых векторов, заданных в окрестности V' точки $\varphi(x)$, содержащей открытое множество $\varphi(B_r(x))$ (возможно, что для того, чтобы такая окрестность нашлась, нужно будет уменьшить r), причём имеют место следующие свойства:

$$\begin{cases} |\boldsymbol{t}'_1(z)| = |\boldsymbol{t}'_2(z)| = |\boldsymbol{t}'_3(z)| = 1 \quad \text{при всех} \quad z \in V', \\ \boldsymbol{t}'_1(\varphi(y)) \text{ и } t'_2(\varphi(y)) \text{ — базис касательной плоскости} \\ \qquad \text{к поверхности } \partial\varphi(\Omega) \text{ в каждой точке } \varphi(y) \in \partial\varphi(\Omega) \cap V', \\ \boldsymbol{t}'_3(\varphi(y)) \text{ — единичный вектор внешней нормали } \boldsymbol{n}'(\varphi(y)) \\ \qquad \text{к поверхности } \partial\varphi(\Omega) \text{ в каждой точке } \varphi(y) \in \partial\varphi(\Omega) \cap V'. \end{cases}$$

Для любых заданных функций $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathcal{D}(B_r(x))$ найдутся число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\vartheta_1, \vartheta_2) > 0$ и функции $\lambda_1^\varepsilon, \lambda_2^\varepsilon\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, такие что

$$\operatorname{supp} \lambda_\alpha^\varepsilon \subset B_r(x), \qquad \sup_{y \in B_r(x)} |\lambda_\alpha^\varepsilon(y)| = O(\varepsilon), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\text{при всех } |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0,$$

причём функции

$$\varphi_\alpha^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\left(\vartheta_\alpha \boldsymbol{t}'_\alpha \circ \varphi + \lambda_\alpha^\varepsilon \boldsymbol{t}'_3 \circ \varphi\right), \qquad \alpha = 1,\ 2,$$

удовлетворяют условиям

$$\varphi_\alpha^\varepsilon(\overline{\Omega}) \subset B \text{ и } \det \nabla\varphi_\alpha^\varepsilon > 0 \text{ в } \overline{\Omega} \quad \text{при всех} \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0, \quad \alpha = 1,\ 2.$$

Тем же методом, что и в п. (ii), устанавливается инъективность функций $\varphi_\alpha^\varepsilon$ на множестве Ω. Ещё раз пользуясь формулой Грина, выводим соотношение

$$\varepsilon\left\{\int_{\Gamma_1} \vartheta_\alpha \{\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{t}'_\alpha \circ \varphi)\}\, da + O(\varepsilon)\right\} \geqslant 0 \quad \text{при всех } |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0.$$

Следовательно, должно выполняться равенство $\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}'_\alpha = 0$ при $\alpha = 1, 2$, т. е. *вектор $\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n}$ должен быть параллелен единичному вектору внешней нормали $\boldsymbol{n}^\varphi$ в точке x множества* Γ_1.

Аналогично можно доказать, что для любой заданной неотрицательной функции $\vartheta \in \mathscr{D}(B_r(x))$ существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\vartheta) > 0$, для которого

$$\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\vartheta \boldsymbol{t}'_3 \circ \varphi \in \Phi \quad \text{при} \quad -\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0.$$

Учитывая равенство $\boldsymbol{t}'_3 = \boldsymbol{n}^\varphi$ на Γ_1 и применяя формулу Грина, получаем неравенство

$$\varepsilon\left\{\int_{\Gamma_1} \vartheta \{\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}^\varphi \circ \varphi)\}\, da + O(\varepsilon)\right\} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad -\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0,$$

которое показывает, что *вектор $\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n}$ должен иметь вид $\lambda\boldsymbol{n}^\varphi$, где $\lambda \leqslant 0$* (ранее было показано, что он параллелен $\boldsymbol{n}^\varphi$). Таким образом мы доказали справедливость граничного условия

$$\widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi(x))\boldsymbol{n}(x) = \lambda(x)\boldsymbol{n}^\varphi(x^\varphi), \qquad \lambda(x) \leqslant 0, \quad x \in \Gamma_1,$$

в случае (b).

(iv) Пусть $x \in \Gamma_1$ и $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x, y\}$, где $y \in \Gamma_1$, $y \neq x$ (случай (c)). В силу теоремы 5.6-2 касательные плоскости к поверхности $\varphi(\partial\Omega)$ в точке $x' := \varphi(x) = \varphi(y)$ совпадают и соответствующие единичные векторы внешней нормали направлены в противоположные стороны. По теореме о неявной функции существуют непересекающиеся открытые шары $B_{2r}(x)$ и $B_r(y)$, такие что сужение отображения φ на каждое из множеств $B_{2r}(x) \cap \overline{\Omega}$ и $B_r(y) \cap \overline{\Omega}$ есть $\mathscr{C}^1$-диффеоморфизм. Кроме того, имеем

$$\varphi(B_{2r}(x) \cap \Omega) \cap \varphi(B_r(y) \cap \Omega) = \varnothing,$$

поскольку φ инъективно на Ω в силу теоремы 5.6-1. Применим теперь рассуждения из п. (iii). Рассмотрим сначала гладкое поле линейно-независимых векторов (t'_1, t'_2, t'_3) в окрестности V' точки x', которое обладает теми же свойствами, что и в п. (iii); при этом вместо множества $\partial\varphi(\Omega) \cap V'$ следует взять множество $\varphi(\Gamma_1 \cap B_{2r}(x))$. Затем рассмотрим вариации вида

$$\varphi_\alpha^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\left(\vartheta_\alpha t'_\alpha \circ \varphi + \lambda_\alpha^\varepsilon t'_3 \circ \varphi\right), \quad \alpha = 1,\ 2,$$

с функциями ϑ_1, $\vartheta_2 \in \mathcal{D}(B_r(x))$. Таким образом, множество $\varphi(B_r(y) \cap \overline{\Omega})$ считается фиксированным, а φ варьируется на функциях с носителями в $B_r(x) \cap \overline{\Omega}$. Построенные вариации инъективны на множестве $\overline{B_{2r}(x)} \cap \Omega$ при достаточно малых $|\varepsilon|$.

Далее, можно найти функции λ_1^ε, λ_2^ε: $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, такие что $\sup\limits_{z \in B_r(x)} |\lambda_\alpha^\varepsilon(z)| = O(\varepsilon)$ и

$$\varphi_\alpha^\varepsilon(B_r(x) \cap \Omega) \cap \varphi_\alpha^\varepsilon(B_r(y) \cap \Omega) = \varnothing$$

(здесь имеется аналогия с доказательством вложения $\varphi_\alpha^\varepsilon(\overline{\Omega}) \subset B$ в п. (iii)). Следовательно, такие вариации $\varphi_\alpha^\varepsilon$ инъективны на Ω. Рассматривая затем вариации вида

$$\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\vartheta t'_3 \circ \varphi \quad \text{при} \quad -\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0$$

и следуя рассуждениям п. (iii), заключаем, что граничное условие

$$\hat{T}(\nabla\varphi(x))\, n(x) = \lambda(x)\, n^\varphi(x^\varphi), \qquad \lambda(x) \leqslant 0,$$

справедливо и в случае (c).

Наконец, выберем такое число $r' > 0$, что

$$\varphi^{-1}(B_{r'}(x') \cap \varphi(\overline{\Omega})) \subset (B_r(x) \cap \overline{\Omega}) \cup (B_r(y) \cap \overline{\Omega}).$$

Пусть (t'_3) — векторное поле того же вида, что и в п. (iii), определённое в окрестности точки x', которая содержит шар $B_{r'}(x')$, причём вместо множества $\partial\varphi(\Omega) \cap V'$ рассматривается множество $\varphi(\Gamma_1 \cap B_r(x))$. Пусть $\eta \in \mathcal{D}(B_{r'}(x'))$ — заданная функция. Тогда при достаточно малых $|\varepsilon|$ вариации φ^ε, определяемые формулами

$$\varphi^\varepsilon(z) = \varphi(z) + \varepsilon\eta(\varphi(z))\, t'_3(\varphi(z)) \quad \text{при} \quad z \in \overline{\Omega},$$

инъективны (убедиться в этом можно, обратившись к рассуждениям того же типа, что и раньше). Записывая неравенство

$I(\varphi^\varepsilon) \geqslant I(\varphi)$, получаем

$$\varepsilon\left\{\int_{\Gamma_1\cap B_r(x)} (\eta\circ\varphi)\{\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{t}_3'\circ\varphi)\}\,\mathrm{d}a + \int_{\Gamma_1\cap B_r(y)} (\eta\circ\varphi)\{\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{t}_3'\circ\varphi)\}\,\mathrm{d}a + o(\varepsilon)\right\}\geqslant 0$$

при достаточно малых $|\varepsilon|$. Пользуясь соотношениями

$$\boldsymbol{t}_3'(\varphi(z)) = \boldsymbol{n}^\varphi(z^\varphi) \quad \text{при} \quad z\in\Gamma_1\cap B_r(x),$$

$$\boldsymbol{n}^\varphi(u^\varphi) + \boldsymbol{n}^\varphi(v^\varphi) = \boldsymbol{o}, \quad \text{если} \quad u\in\Gamma_1\cap B_r(x), \quad v\in\Gamma_1\cap B_r(y) \quad \text{и} \quad \varphi(u) = \varphi(v),$$

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi(u))\,\boldsymbol{n}(u) = \lambda(u)\,\boldsymbol{n}^\varphi(u^\varphi) \quad \text{при} \quad u\in\Gamma_1,$$

$$\lambda(u) = 0, \quad \text{если} \quad u\in\Gamma_1\cap B_r(x) \ \text{и}\ \varphi^{-1}(\varphi(u)) = \{u\},$$

устанавливаем, что

$$\int_{\Gamma_1\cap B_r(x)} (\eta\circ\varphi)\,\lambda\,\mathrm{d}a - \int_{\Gamma_1\cap B_r(y)} (\eta\circ\varphi)\,\lambda\,\mathrm{d}a = 0.$$

Поскольку $(\eta\circ\varphi)(x) = (\eta\circ\varphi)(y)$, отсюда заключаем, что $\lambda(x)\,\mathrm{d}a(x) = \lambda(y)\,\mathrm{d}a(y)$. Таким образом, все соотношения, указанные для случая (c), доказаны. ■

Замечание. Если не делать предположения, что $\varphi_0(\Gamma_0)$ является частью границы ∂B, то остаётся ещё рассмотреть случай, когда $x\in\Gamma_1$ и $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x, y\}$ при $y\in\Gamma_0$. В этой ситуации можно применить тот же подход, что и в случае (c). ■

Чтобы дать интерпретацию граничного условия, установленного в точках множества Γ_1, напомним, что первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа $\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi(x)) = (\partial\hat{W}/\partial\boldsymbol{F})(\nabla\varphi(x))$ в точке x на границе Γ отсчётной конфигурации $\bar{\Omega}$ и тензор напряжений Коши $\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)$ в соответствующей точке $x^\varphi = \varphi(x)$ на границе деформированной конфигурации $\varphi(\bar{\Omega})$ связаны соотношением

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi(x))\,\boldsymbol{n}(x)\,\mathrm{d}a(x) = \boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{n}^\varphi(x^\varphi)\,\mathrm{d}a^\varphi(x^\varphi),$$

где $\boldsymbol{n}(x)$, $\boldsymbol{n}^\varphi(x^\varphi)$, $\mathrm{d}a(x)$ определяются так же, как в теореме 5.6-3, и $\mathrm{d}a^\varphi(x^\varphi)$ обозначает элемент площади на $\partial\varphi(\bar{\Omega})$ в точке $\varphi(x)$ (теорема 1.7-1). Следовательно, граничное условие на Γ_1 можно также записать в виде

$$\boldsymbol{T}^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{n}^\varphi(x^\varphi) = \lambda^\varphi(x^\varphi)\,\boldsymbol{n}^\varphi(x^\varphi), \qquad \lambda^\varphi(x^\varphi)\leqslant 0 \quad \text{при} \quad x\in\Gamma_1.$$

Поскольку вектор напряжений Коши $\boldsymbol{T}^{\varphi}\boldsymbol{n}^{\varphi}$ характеризует плотность поверхностных сил на единицу площади границы деформированной конфигурации, различные случаи, приведённые в теореме 5.6-3, можно истолковать следующим образом.

Случай (a): $\varphi(x)\in \operatorname{int} B$ *и* $\varphi^{-1}(\varphi(x))=\{x\}$. Контакт с препятствием, а также самокасание, отсутствуют; поверхностная сила $\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})\boldsymbol{n}^{\varphi}\mathrm{d}a^{\varphi}$ равна нулю, как это имеет место при нулевом граничном условии на напряжения.

Случай (b): $\varphi(x)\in\partial B$. Имеется контакт с препятствием; поверхностная сила $\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})\boldsymbol{n}^{\varphi}\mathrm{d}a^{\varphi}$ ортогональна к препятствию ∂B и направлена от него. Такое граничное условие служит моделью **контакта с препятствием без трения.**

Случай (c): *имеются две различные точки* $x, y\in\Gamma_1$, *такие что* $\varphi(x)=\varphi(y)$. Тогда

$$\boldsymbol{n}^{\varphi}(x^{\varphi})+\boldsymbol{n}^{\varphi}(y^{\varphi})=\boldsymbol{o},\quad \lambda(x)\,\mathrm{d}a(x)=\lambda(y)\,\mathrm{d}a(y)$$

и, значит,

$$\boxed{\boldsymbol{T}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\boldsymbol{n}^{\varphi}(x^{\varphi})\,\mathrm{d}a^{\varphi}(x^{\varphi})+\boldsymbol{T}^{\varphi}(y^{\varphi})\,\boldsymbol{n}^{\varphi}(y^{\varphi})\,\mathrm{d}a^{\varphi}(y^{\varphi})=\boldsymbol{o}.}$$

Следовательно, поверхностные силы в точках x^{φ} и y^{φ} ортогональны к поверхности $\partial\varphi(\Gamma_1)$; они направлены внутрь деформированной конфигурации и отличаются лишь направлением — это модель **самокасания без трения.**

В заключение отметим, что *функцию* $\lambda\colon\Gamma_1\to\,]-\infty, 0]$ *из теоремы* 5.6-3 *или отвечающую ей функцию* $\lambda^{\varphi}\colon \varphi(\Gamma_1)\to\,]-\infty, 0]$ *можно рассматривать как множитель Куна — Таккера, соответствующий ограничениям* $\varphi(\bar\Omega)\subset B$ (случаи (a), (b)) *и* $\int_\Omega \det\nabla\varphi\times\mathrm{d}x\leqslant \operatorname{vol}\varphi(\Omega)$ (случай (c)). Укажем также, что функция λ^{φ} допускает механическую интерпретацию как *реакция контакта.*

Замечание. Условие инъективности $\int_\Omega\det\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\leqslant\operatorname{vol}\varphi(\Omega)$ можно заменить на эквивалентное условие $\int_\Omega\det\nabla\varphi\,\mathrm{d}x=\operatorname{vol}\varphi(\Omega)$ (обратное неравенство всегда имеет место). ■

5.7. Внутренние и внешние геометрические ограничения на допустимые деформации

Помимо условий сохранения ориентации и инъективности в Ω на деформацию $\varphi\colon\bar\Omega\to\mathbb{R}^3$ в реальных ситуациях могут быть наложены дополнительные *геометрические условия*, зависящие от конкретного материала, из которого состоит рассматриваемое тело, или от воздействий „внешней среды“.

В частности, на φ может быть наложено то или иное **внутреннее ограничение**, которое учитывает *геометрические свойства материала и имеет место для всех тел, состоящих из одного и того же материала.* Например, *несжимаемое тело* состоит из так называемого **несжимаемого материала**, т. е. материала, не допускающего каких-либо изменений объёма. Поэтому для таких тел физически приемлемыми являются только те деформации, которые удовлетворяют **условию несжимаемости**

$$\boxed{\det \nabla\varphi = 1 \text{ в } \bar{\Omega}.}$$

(Заметим, кстати, что всем деформациям несжимаемых тел присуще свойство сохранять ориентацию; соответствующая краевая задача формулируется в упражнении 5.9.) С другой стороны, тело или материал, для которого предполагается лишь, что значения $\det \nabla\varphi(x)$ положительны при $x \in \Omega$ (условие сохранения ориентации), называется **сжимаемым**; однако это название в теории упругости обычно опускается. Хорошее введение в теорию несжимаемых материалов и соответствующих им функций реакции содержится в работе Le Dret [1985]. См. также Cohen & Wang [1987].

Таким образом, примерами внутренних ограничений служат: *условие сохранения ориентации* $\det \nabla\varphi > 0$ в $\bar{\Omega}$; *условие несжимаемости* $\det \nabla\varphi = 1$ в $\bar{\Omega}$; *условие инъективности* $\int_\Omega \det \nabla\varphi \, dx \leqslant \leqslant \operatorname{vol} \varphi(\Omega)$ (§ 5.6).

Ещё один пример внутреннего ограничения в линейной теории упругости даётся материалами, которые „упрочняются“, когда „мера деформации“ достигает некоторого критического уровня. Такие ограничения были введены Прагером (Prager [1957, 1958, 1964]) и изучались в работах: Duvaut & Lions [1972, p. 269], Demengel [1985a], Demengel & Suquet [1986]. В этом случае на материал налагается *ограничение, характеризующее упрочнение* (**ограничение упрочнения**), имеющее вид

$$\boxed{\hat{L}(\nabla\varphi) \leqslant 0 \text{ в } \bar{\Omega},}$$

где $\hat{L}\colon \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ — заданная *функция упрочнения* (следует отметить, что здесь неравенство не является строгим, в отличие от условия сохранения ориентации). Для случая нелинейной теории упругости в работе Ciarlet & Nečas [1985] предложено рассматривать функции упрочнения вида

$$\hat{L}\colon \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{L}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{E}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{E}^{\mathrm{d}} - \alpha, \quad \alpha > 0,$$

где $\boldsymbol{E}^{\mathrm{d}} = \boldsymbol{E} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I}$ — *девиатор* тензора деформации Грина—Сен-Венана $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\nabla\varphi^{\mathrm{T}}\nabla\varphi - \boldsymbol{I})$. Этот пример обсуждается в упражнении 5.10.

„Экстремальный" случай внутренних ограничений

$$\nabla\varphi(x) = \boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+ \quad \text{для всех} \quad x \in \bar{\Omega}$$

соответствует *абсолютно твёрдому телу*, т. е. телу, которое может подвергаться только жёстким деформациям (§ 1.8). Вполне понятно, что механика абсолютно твёрдых тел (упражнение 5.11) намного проще механики упругих тел.

В отличие от внутренних **внешние ограничения** *представляют собой геометрические условия на места, занимаемые в пространстве точками тела в рамках конкретной задачи, причём такие условия не зависят от материала, образующего это тело.* Например, *граничное условие на положения* (§§ 2.6 и 4.1) сводится к заданию деформации на подмножестве Γ_0 границы отсчётной конфигурации. А именно, задаётся некоторое отображение φ_0: $\Gamma_0 \to \mathbb{R}^3$ и требуется, чтобы деформация удовлетворяла краевому условию

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0,$$

т. е. тело „закреплено" вдоль части $\varphi_0(\Gamma_0)$ своей границы. Это условие можно ослабить, например задавая деформацию лишь „частично", на подмножестве границы Γ, как в случае задачи о пластине (см. § 5.2 и рис. 5.2-2).

Внешние ограничения могут также иметь вид *одностороннего граничного условия на положения* $\varphi(\Gamma_2) \subset C$, $\Gamma_2 \subset \Gamma$ (§ 5.3), а также *условия изоляции* $\varphi(\bar{\Omega}) \subset B$ (§ 5.6).

Теперь мы можем дать определение **множества допустимых деформаций**, соответствующего какой-либо конкретной задаче: *это множество состоит из всех достаточно гладких отображений, которые удовлетворяют всем внутренним и внешним ограничениям, входящим в условие задачи.* Например, задаче о пластине, рассмотренной на рис. 5.2-2, соответствует множество допустимых деформаций

$$\begin{aligned}\Phi = \Big\{\psi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3\colon\ & \psi = \mathbf{id} \text{ на } \Gamma_0, \quad \psi = \mathbf{id} + \alpha\boldsymbol{e}_2 \text{ на } \Gamma_0', \\ & \alpha \in \mathbb{R}, \quad \psi_3 \leqslant h \text{ на } \Gamma_2, \quad \det\nabla\psi > 0 \text{ в } \bar{\Omega}, \\ & \int_{\Omega} \det\nabla\psi\,dx \leqslant \operatorname{vol}\psi(\Omega)\Big\}\end{aligned}$$

(пока мы не будем уточнять гладкость входящих сюда функций).

Замечание. Если материал является гиперупругим и функция запасённой энергии поливыпукла, то, как мы увидим в гл. 7, гладкость допустимых деформаций существенным образом определяется неравенством коэрцитивности для функции запасённой энергии. Точнее, при выполнении неравенства

$$\hat{W}(\boldsymbol{F}) \geqslant \alpha \{\|\boldsymbol{F}\|^p + \|\operatorname{Cof} \boldsymbol{F}\|^q + (\det \boldsymbol{F})^r\} + \beta \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,$$

где $\alpha > 0$, $p \geqslant 2$, $q \geqslant \frac{p}{p-1}$, $r > 1$, допустимые деформации ψ должны удовлетворять условиям

$$\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega), \quad \operatorname{Cof} \nabla\psi \in \boldsymbol{L}^q(\Omega), \quad \det \nabla\psi \in L^r(\Omega)$$

(пространства Соболева $W^{1,p}(\Omega)$ определены в следующей главе). ■

5.8. Физические примеры неединственности

Одной из самых примечательных особенностей трёхмерной теории упругости является отсутствие *единственности, наблюдаемое в реальных физических ситуациях*. Поэтому соответствующие краевые задачи трёхмерной теории упругости можно считать приемлемыми математическими моделями, только если они не исключают возможность наличия нескольких различных решений, а в некоторых случаях и бесконечного их числа. Цель данного параграфа — пояснить свойство неединственности на нескольких примерах, заимствованных из повседневного физического опыта. Мы поочерёдно рассмотрим задачи с граничными условиями на напряжения, на перемещения и напряжения и на одни перемещения. В каждом из указанных случаев предполагается, что отсчётная конфигурация соответствует естественному состоянию.

В качестве первого примера, несколько видоизменяя построения Нолла (Noll [1978]), рассмотрим *задачу с граничными условиями на напряжения*, которая соответствует следующему легко осуществимому опыту. Разрежем теннисный мяч над экватором, как указано на рис. 5.8-1(a). Взяв из двух получившихся частей бо́льшую и достаточно сильно надавив на неё снизу около точки b, обнаружим, что она придёт в *вывернутое состояние* (рис. 5.8-1(b)), которому, очевидно, соответствует деформация, отличная от исходной. Напряжённое состояние также будет иным, поскольку, если сделать небольшой надрез вблизи точки $a = \varphi_1(a)$, его края будут прижаты друг к другу, тогда как края того же надреза вблизи точки $\varphi_2(a)$ разойдутся.

Замечания. (1) Напротив, если аналогичный опыт по выворачиванию провести с верхней, меньшей, частью разрезанного мяча, мы обнаружим, что она придёт в исходное состояние.

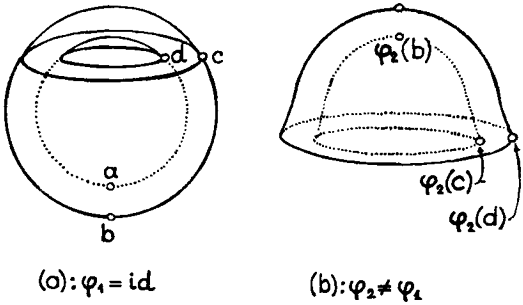

Рис. 5.8-1. Опыт Нолла, показывающий, что задача с граничными условиями на напряжения может иметь два различных решеиия.

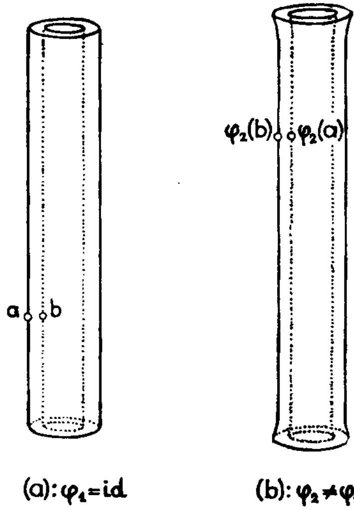

Рис. 5.8-2. Опыт Трусделла — второй пример задачи с граничиыми условиями на напряжения, имеющей два различных решения. Вывернутаи трубка немиого длиниее исходной, её внешний диаметр и толщина чуть меньше, и оиа расширяется вблизи торцов.

(2) Нолл (Noll [1978]) описывает аналогичный опыт, выявляющий ещё большее число различных решений. ■

Другой осуществимый (хотя и не столь просто) опыт заключается в выворачивании цилиндрической резиновой трубы (см. рис. 5.8-2; в качестве модели резины обычно берётся почти несжимаемый гиперупругий материал). Этот пример, с блеском и не без юмора разобранный в работе Truesdell [1978], также касается *задачи с граничными условиями на напряжения* (при отсутствии приложенных поверхностных сил), которая имеет по крайней мере два физически различных решения. Подробности о выворачивании цилиндрических труб и сферических оболочек см. в работах: Ericksen [1955b], Chadwick [1972], Chadwick &

Haddon [1972], Wang & Truesdell [1973, p. 310 и далее], Antman [1979], Adeleke [1983].

В этих примерах неединственность обнаруживается посредством физического опыта, однако имеются случаи, когда можно,

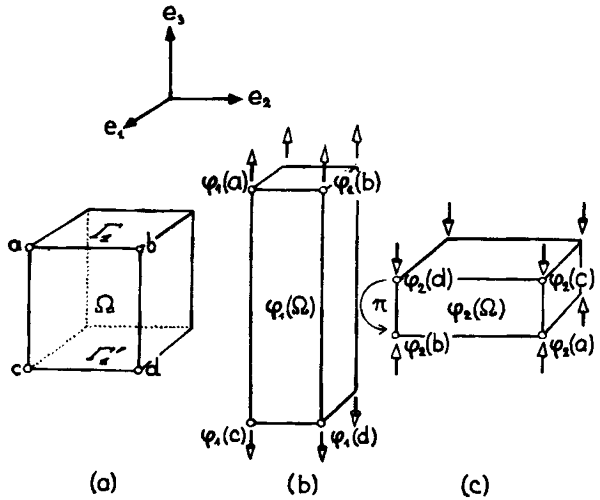

Рис. 5.8-3. Опыт Эриксена — третий пример задачи с граничными условиями на напряжения, имеющей два различных решения, которые соответствуют осевому растяжению (b) или осевому сжатию (c).

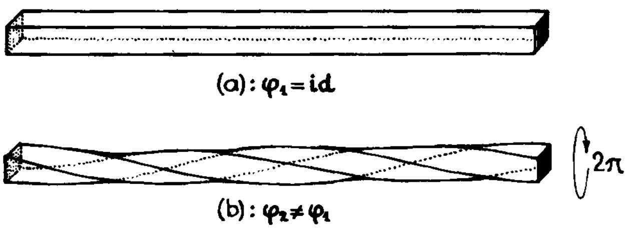

Рис. 5.8-4. Опыт Гёртиил — пример задачи с граничными условиями на перемещеиия и напряжения, имеющей бесконечиое число различных решений.

и не прибегая к реальному опыту, предсказать, что определённые комбинации граничных условий дадут неединственность. Так, Дж. Л. Эриксен заметил, что *задача с граничными условиями на напряжения*, моделирующая прямоугольный брус (отсчётная конфигурация; см. рис. 5.8-3(a)) при осевом растяжении (рис. 5.8-3(b)), должна одновременно описывать осевое сжатие бруса, которому отвечает „перевёрнутая“ отсчётная конфигурация (рис. 5.8-3(c)). Действительно, обе деформации φ_1 и φ_2 обязаны быть решением одной и той же задачи (для определённости здесь предполагается, что объёмными силами можно пренебречь и что поверхностные силы являются замороженными нагрузками; обозначения те же, что и на рис. 5.8-3)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)=\boldsymbol{o} \text{ в } \Omega, \\ \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi)\,\boldsymbol{e}_3=\pi\boldsymbol{e}_3 \text{ на } \Gamma_1\cup\Gamma_1',\ \pi>0, \\ \hat{T}(\nabla\varphi)\,\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma-(\Gamma_1\cup\Gamma_1'). \end{cases}$$

Следующий пример принадлежит Гёртину (Gurtin [1978]). Рассмотрим резиновую полоску, концы которой закреплены (см. рис. 5.8-4). Предположим, что её боковая поверхность свободна от внешних нагрузок и что весом полоски можно пренебречь. Тогда деформация вида $\varphi_1=\boldsymbol{id}$ должна быть решением (рис. 5.8-4(a)) соответствующей *задачи с граничными условиями на перемещения и напряжения*. Представим теперь, что мы повернули правый конец полосы на угол 2π (или же левый конец — на угол -2π), как указано на рис. 5.8-4(b). Тогда соответствующая деформация φ_2 также удовлетворяет граничному условию $\varphi=\boldsymbol{id}$ на каждом конце и, очевидно, является решением, отличным от предыдущего. В действительности, поскольку мы можем повернуть каждый конец полосы на угол $2k\pi$ для любого $k\in\mathbb{Z}$, в данном случае мы имеем пример задачи, множество решений которой бесконечно и имеет мощность $\geqslant\aleph_0$ ($\aleph_0$ — мощность множества $\mathbb{N}$). Интуитивно ясно, что избавиться от такого рода неопределённости можно путём рассмотрения соответствующей *динамической* задачи, когда деформация известна в „начальный“ момент и возможные повороты концов оказываются учтёнными в граничном условии на положения, которое непрерывно меняется во времени (однако этот подход пока представляется практически нереализуемым). В случае интересующих нас статических задач подобную неоднозначность, по-видимому, столь же трудно устранить. Тем не менее для случая, когда задачи такого типа допускают приближение одномерными моделями, Александер и Антман (Alexander & Antman [1982]) предложили эффективный подход, введя подходящим образом *меру кручения* на основе *числа зацепления Гаусса*.

Ещё один апект неединственности в нелинейной теории упругости мы поясним следующим примером, который соответствует реальному эксперименту (рис. 5.8-5). Рассмотрим круглую стальную пластину толщины 2ε, весом которой можно пренебречь и на которую наложены граничные условия

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\boldsymbol{T}^{\varphi}\boldsymbol{n}^{\varphi}\,\mathrm{d}x_3=-\lambda\boldsymbol{n}^{\varphi},$$

$$u_\alpha \text{ не зависит от } x_3,\ u_3=0,$$

вдоль боковой поверхности Γ_0 (такие граничные условия подробно разбираются в томе II). Экспериментально устанавливается, что $\varphi = id$ является единственным решением в случае, когда боковая поверхность подвергается растяжению ($\lambda < 0$) или сжатию посредством достаточно малых сил ($0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$). Однако для достаточно больших приложенных поверхностных сил ($\lambda_1 < \lambda$) решение $\varphi = id$ (оно существует всегда) оказывается

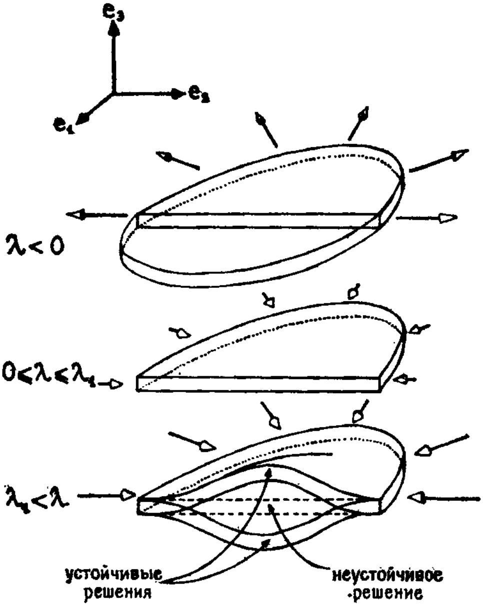

Рис. 5.8-5. Выпучивание пластины (для удобства здесь изображена лишь половина пластины). При достаточно больших сжимающих приложенных силах существует три различных решения (два «устойчивых» и одно «неустойчивое»).

неустойчивым: любое возмущение, даже очень малое, вызывает внезапное выпучивание пластины — она принимает форму, отвечающую одному из двух симметричных устойчивых решений (слова „устойчивый“ и „неустойчивый“ здесь употребляются лишь в интуитивном смысле). Таким образом, при достаточно больших λ следует ожидать наличия по крайней мере *трёх* решений, включая и неустойчивое (в действительности, при бо́льших значениях λ можно наблюдать и бо́льшее число различных решений). В томе II будет показано, что такого рода свойства неединственности в случае пластин, а именно свойства, связанные с *выпучиванием*, довольно хорошо описываются двумерными *уравнениями Кармана* (Berger [1967, 1977], Berger & Fife [1968], Ciarlet & Rabier [1980]).

Свойства неединственности, проявляющиеся в двух предыдущих задачах, имеют различную природу. В последней задаче неединственность, связанная с выпучиванием, возникает без какой-лнбо „вре́менной“ замены граничных условий, тогда как неединственность, связанная с поворотамн концов полосы (рнс. 5.8-4), предполагает некоторое „промежуточное высвобождение концов с последующим нх закреплением“ — операция, которая, хотя и не отражается в математической модели, должна быть реально осуществлена.

В заключение этого параграфа приведём пример неединственности в случае *задачи с граничными условиями на перемещения* (John [1964]). Рассмотрим упругое тело, которое в своей отсчётной конфнгурацин занимает пространство между двумя концентрическими сферами (рис. 5.8-6) и удовлетворяет граничному

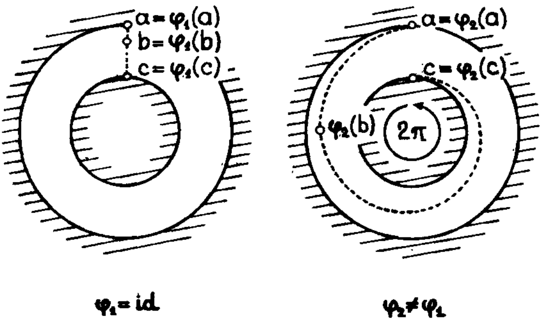

Рис. 5.8-6. Мысленный эксперимент Джона. Пример задачи с граничными условиями на перемещения, нмеющей бесконечное число различных решений.

условню на положення $\varphi=\mathrm{id}$ в точках этих сфер. Таким образом, если пренебречь приложенными объёмными силами, отображение $\varphi_1=\mathrm{id}$ оказывается решением задачи. Поворачивая одну из ограничивающих тело сфер на угол $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, вокруг какой-либо оси, проходящей через их общий центр (илн даже осуществляя несколько подобных операций в любой последовательности), получим бесконечное число различных решений. Очевидно, что мощность множества решений в этом случае $\geqslant\aleph_1$ ($\aleph_1$ — мощность множества $\mathbb{R}$).

Помимо уже упомянутых работ, имеется обширная литература, посвящённая вопросам единственностн и неединственности решенні краевых задач нелннейной теории упругости, а также связанным с этим проблемам получения априорных оценок решений соответствующих задач минимизации и непрерывной зависимостн этнх решений от параметра. По поводу единственности н неединственности решений см. Ericksen & Toupin [1956], Hill [1957, 1961], Truesdell & Toupin [1963], Aron [1978], Gurtin [1978, 1982], Gurtin & Spector [1979], Spector [1980, 1982], Capriz & Podio-Guidugli [1981], Knops & Stuart [1984], Stuart

[1986]; различные априорные оценки рассматривались в работах Villagio [1972], Aron & Roseman [1977], Breuer & Roseman [1978, 1979, 1980], Roseman [1981]; в связи с оценками решений следует особо отметить работы John [1961, 1972a, 1972b, 1975], Kohn [1982]; непрерывная зависимость минимизирующих отображений от параметра исследуется в статьях Aron [1979], Breuer & Aron [1982].

Наконец, стоит отметить, что, даже не формулируя краевых задач трёхмерной теории упругости, в силу рассмотренных примеров можно заранее предсказать, что *эти задачи должны быть нелинейными*, поскольку для *линейных* задач характерна единственность решения (хотя бы и в факторпространстве).

5.9. Нелинейности в трёхмерной теории упругости; тензор упругости

Просто утверждать, что краевая задача трёхмерной теории упругости *нелинейна*, означало бы принять крайне упрощённый взгляд на истинное положение вещей, поскольку в формулировку этой задачи входит целое множество разного рода нелинейностей:

(i) Правый тензор деформации Коши—Грина $\boldsymbol{C} = \nabla\varphi^{\mathrm T}\nabla\varphi$ является нелинейной (квадратичной) функцией неизвестной деформации φ; это равносильно тому, что тензор деформации Грина—Сен-Венана $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm T} + \nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm T}\nabla\boldsymbol{u})$ является нелинейной функцией неизвестного перемещения $\boldsymbol{u}$.

(ii) Определяющее уравнение $\Sigma(x) = \tilde{\Sigma}(x, \boldsymbol{C}) = \check{\Sigma}(x, \boldsymbol{E})$ нелинейно относительно $\boldsymbol{C}$, а также относительно $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})$, за исключением случая материалов Сен-Венана—Кирхгофа.

(iii) Левые части уравнений равновесия $-\mathbf{div}\,\nabla\varphi(x)\Sigma(x)$, $x \in \Omega$, и $\nabla\varphi(x)\Sigma(x)\boldsymbol{n}$, $x \in \Gamma_1$ (при наличии граничного условия на напряжения в точках подмножества $\Gamma_1 \subset \Gamma$), являются нелинейными (билинейными) функциями от φ и Σ. Переход в уравнениях равновесия к первому тензору напряжений Пиолы—Кирхгофа $\boldsymbol{T} = \nabla\varphi\Sigma$ лишь на первый взгляд представляется линеаризацией, поскольку он „компенсируется“ введением другой нелинейности (умножение слева на градиент деформации) в определяющее уравнение.

(iv) За исключением некоторых частных случаев типа замороженных нагрузок, нелинейности относительно деформации φ также присутствуют в правых частях уравнений равновесия. Например, условие, задающее давление на границе и имеющее вид $\boldsymbol{g}(x) = \hat{\boldsymbol{g}}(x, \nabla\varphi(x)) = -\pi(\det\nabla\varphi(x))\nabla\varphi(x)^{-\mathrm T}\boldsymbol{n}(x)$, $x \in \Gamma_1$ (§ 2.7), является нелинейным.

(v) Условие сохранения ориентации $\det \nabla\varphi > 0$ в Ω и условие несжимаемости $\det \nabla\varphi = 1$ в Ω — примеры нелинейных ограничений на неизвестную деформацию φ.

(vi) Условие инъективности $\int_\Omega \det \nabla\varphi \, dx \leqslant \operatorname{vol} \varphi(\Omega)$ нелинейно относительно φ.

(vii) Другие внутренние ограничения типа ограничений упрочиения, равно как и внешние ограиичения типа одиостороинего граничного условия на положения (§ 5.7) выражаются нелинейными соотношениями, которым должна удовлетворять неизвестная деформация.

Выписывая уравнение равновесия в Ω

$$-\operatorname{\mathbf{div}} \hat{\boldsymbol{T}}(x, \nabla\varphi(x)) = \hat{f}(x, \varphi(x)), \qquad x \in \Omega,$$

по компонентам, получаем следующую *систему из трёх нелинейных уравнений с частными производными второго порядка относительно трёх компонент* φ_i *неизвестной деформации*:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \hat{t}_{ij}(x, \nabla\varphi(x)) = \hat{f}_i(x, \varphi(x)).$$

Предполагая необходимую гладкость, мы можем записать эти уравнения в виде

$$\boxed{-\frac{\partial \hat{t}_{ij}}{\partial F_{kl}}(x, \nabla\varphi(x)) \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_j \partial x_l}(x) - \frac{\partial \hat{t}_{ij}}{\partial x_j}(x, \nabla\varphi(x)) = \hat{f}_i(x, \nabla\varphi(x)),}$$

а в случае гиперупругих материалов — в виде

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}(x, \nabla\varphi(x)) \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_j \partial x_l}(x) - \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial x_j \partial F_{ij}}(x, \nabla\varphi(x)) \\ = \hat{f}_i(x, \varphi(x)). \end{aligned}}$$

Таким образом, эти уравнения являются „почти полностью нелинейными“. Только благодаря их „дивергентной структуре“ они оказываются линейными относительно членов высшего порядка, т. е. относительно частных производных $\partial^2\varphi_k/\partial x_j \partial x_l$.

В теории уравнений с частными производными подобные уравнения, главные члены которых нелинейны, но линейно зависят от старших производных, называются *квазилинейными*, в отличие от *полулинейных уравнений*, которые проще поддаются исследованию и у которых члены старшего порядка линейны, а нелинейности встречаются только в членах низшего порядка. Довольно неожиданным является тот факт (см. том II), что уравнення, описывающие двумерные нелинейные моделн пластин, оказываются полулнннейнымн, хотя онн выводятся непосредственно нз приведенных здесь квазилинейных уравнений трёхмерной теорнн упругостн. Вследствие этого математнческое нсследование моделей упругнх пластнн несколько проще н его результаты отлнчаются бо́льшей завершенностью, чем в трёхмерном случае. Множество примеров полулинейных задач, а также методы их решення можно найти в книге Lions [1969].

Старшне члены в уравнениях равновесня определяются *тензором четвёртого ранга* $\mathsf{A}(x, \boldsymbol{F})$, заданным для всех точек $x \in \Omega$ н всех матриц $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$ прн помощи соотношения

$$\boxed{\begin{aligned} A(x, \boldsymbol{F}) &= (a_{ijkl}(x, \boldsymbol{F})) := \left(\frac{\partial \hat{t}_{ij}}{\partial F_{kl}}(x, \boldsymbol{F})\right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial F_{ij}\, \partial F_{kl}}(x, \boldsymbol{F})\right). \end{aligned}}$$

Это так называемый **тензор упругости.** Поскольку тензором $\mathsf{A}(x, \boldsymbol{F})$ определяются старшне члены уравнений равновесия, он служит объектом разлнчных математических допущений, заимствованных, в частности, из теории эллиптическнх систем, которые мы вкратце обсуднм далее. Как станет ясно из § 6.2, решающую роль в *линеаризованной теории упругости* нграет значение этого тензора при $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$, имеющее вид

$$\boxed{\mathsf{A}(\boldsymbol{I}) = (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}))}$$

в случае однородного изотропного материала, отсчётная конфигурацня которого соответствует естественному состоянию (см. также упражнение 5.17).

5.10. Определяющие допущения

Поскольку вторая часть этой книгн посвящена главным образом математическим средствам, которые позволяют преодолеть трудностн, связанные с нелинейностями рассмотренных здесь задач н вызванные в первую очередь структурой левой части $-\operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla \varphi)$ уравнення равновесия, будет уместно завершить первую часть книги перечнем *всех имеющихся у нас сведений, как старых, так и новых, которые касаются определяющего уравнения*, незавнсимо от того в какой форме оно записано — в терминах первого нли второго тензора напряженнй Пиолы—Кирхгофа лнбо посредством функцнн запасённой энергин, еслн материал является гиперупругим. Предположения такого рода носят название **определяющих допущений.** Они могут быть подсказаны нашим восприятием „реального мира“ (сюда относятся независимость материала от системы отсчёта, поведение напряжений при больших деформациях и т. п.). Некоторые из них можно трактовать как чисто математические условия (таково, например, допущение о поливыпуклости — удобное средство для получения результатов о существовании). В них могут сочетаться и сразу оба этих аспекта (как в случае условия коэрцитивности для функции запасённой энергии, характеризующего поведение при больших деформациях).

В соответствии с этим приведём сперва в сжатой форме уже встречавшиеся в тексте четыре типа определяющих допущений, а затем введём ещё одно новое. Ради простоты записи мы ограничиваемся случаем однородных материалов, однако следует иметь в виду, что каждое из определяющих допущений применимо и к неоднородным материалам.

(i) *Изотропность.* В сочетании с условием независимости материала от системы отсчета (которое является аксиомой, а не допущением) это допущение позволяет записать функцию реакции для второго тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа в виде (теорема 3.6-2)

$$\boxed{\hat{\Sigma}(\boldsymbol{F}) = \tilde{\Sigma}(\boldsymbol{C}) = \gamma_0(\iota_C)\boldsymbol{I} + \gamma_1(\iota_C)\boldsymbol{C} + \gamma_2(\iota_C)\boldsymbol{C}^2, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F},}$$

а функцию запасённой энергии — в виде (теорема 4.4-1)

$$\boxed{\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \dot{W}(\iota_C).}$$

(ii) *Поведение при малых деформациях.* В предположении что отсчётная конфигурация соответствует естественному состоянию и что материал является однородным и изотропным, должно выполняться равенство (теорема 3.8-1)

$$\boxed{\hat{\Sigma}(\boldsymbol{F}) = \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + o(\|\boldsymbol{E}\|), \quad \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E},}$$

и функция запасённой энергии должна иметь вид (теорема 4.4-1)

$$\boxed{\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2 + \mu\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2 + o(\|\boldsymbol{E}\|^2),}$$

причём экспериментальные данные показывают, что постоянные Ламэ λ и μ положительны (§ 3.8).

(iii) *Поведение при больших деформациях.* Как указано в § 4.6, тот факт, что „экстремальным деформациям должны соответствовать бесконечно большие напряжения“ (Antman [1983]), математически выражается в виде допущений, что функция запасённой энергии удовлетворяет условию

$$\boxed{\lim \hat{W}(\boldsymbol{F}) = +\infty \quad \text{при} \quad \det \boldsymbol{F} \to 0^+, \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,}$$

и *неравенству коэрцитивности* вида

$$\boxed{\hat{W}(\boldsymbol{F}) \geqslant \alpha(\|\boldsymbol{F}\|^p + \|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^q + (\det \boldsymbol{F})^r) + \beta \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,}$$

при некоторых постоянных $\alpha > 0$, $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

(iv) *Поливыпуклость функции запасённой энергии.* Свойство выпуклости, которым не могут обладать приемлемые функции запасённой энергии $\hat{W}$ (теорема 4.8-1), можно с успехом заменить более слабым условием их *поливыпуклости*, которая означает наличие такой выпуклой функции $\mathbb{W}: \mathbb{M} \times \mathbb{M} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, что (§ 4.9)

$$\boxed{\hat{W}(\boldsymbol{F}) = \mathbb{W}(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.}$$

В свою очередь, требование поливыпуклости можно заменить ещё более слабым требованием *квазивыпуклости* функции запасённой энергии. Это фундаментальное понятие вариационного исчисления было введено Морри (Morrey [1952]), который показал, что квазивыпуклость является необходимым и достаточным условием секвенциально слабой полунепрерывности снизу для соответствующего интеграла (см. упражнение 7.1). Определение квазивыпуклости и описание её связи с поливыпуклостью даны в упражнении 5.14.

Поливыпуклость можно также рассматривать как частный случай *выпуклости по рангу* 1. Последнее понятие является ещё более общим, чем понятие квазивыпуклости. Определение выпуклых по рангу 1 функций и некоторые их свойства приведены в упражнении 5.15.

(v) *Условия эллиптичности для тензора упругости.* Здесь определяющее допущение, непосредственно взятое из теории *эллиптических систем*, заключается в том, что тензор упругости (§ 5.9)

$$\mathsf{A}(\boldsymbol{F}) = (a_{ijkl}(\boldsymbol{F})) = \left(\frac{\partial \hat{T}_{ij}}{\partial F_{kl}}(\boldsymbol{F})\right) = \left(\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial F_{ij}\,\partial F_{kl}}(\boldsymbol{F})\right)$$

для какой-либо конкретной матрицы $F \in \mathbb{M}^3_+$ или же для всех матриц $F \in \mathbb{M}^3_+$ должен удовлетворять следующему **условию эллиптичности,** которое также называют **условием Адамара—Лежандра:**

$$\boxed{a_{ijkl}(\boldsymbol{F})\, b_i b_k c_j c_l \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{c} = (c_i) \in \mathbb{R}^2.}$$

Это условие называют *условием сильной эллиптичности* или *сильным условием Адамара—Лежандра,* если для всех ненулевых векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ выполняется *строгое* неравенство. Приведём теперь некоторые возможные обоснования этих условий.

При выполнении в точке $F = I$ сильного условия Адамара—Лежандра удаётся построить приемлемую теорию существования для уравнений *линеаризованной теории упругости* (§ 6.3), включая и динамический случай (Duvaut & Lions [1972, гл. 3, § 4], Marsden & Hughes [1983, § 6.3]). В самой же линеаризованной теории это условие оказывается необходимым и достаточным для существования бегущих волн с вещественными скоростями распространения (см., например, Marsden & Hughes [1983, p. 240]); исторически именно последнее обстоятельство послужило исходным пунктом для исследований Адамара и Лежандра. Поэтому тензор упругости также называют *акустическим тензором.*

В нелинейной теории упругости сильное условие Адамара—Лежандра является необходимым для существования „в малом“, т. е. „на коротком“ временно́м интервале, решений задачи с граничными условиями на перемещения в *динамическом случае* (Hughes, Kato & Marsden [1977], Kato [1977], Wheeler [1977]) и в случае *вязкоупругости* (Potier-Ferry [1982]). Оно также играет значительную роль в вариационном исчислении вообще при изученин *регулярности* решений. См. Hildebrandt [1977], Giusti [1983], Giaquina [1983a, 1983b] и особенно Nečas [1981, 1983a, 1983b], в связи с приложениями теории упругости.

В пользу условия сильной эллиптичности говорит и тот факт (см. Antman [1978]), что оно служит математическим подтверждением экспериментальных данных, согласно которым „*тело испытывает удлинение в направлении приложенных сил*“. В соответствии с этим, как показал Оуэн (Owen [1986, 1987]), условие сильной эллиптичности, будучи сведённым к надлежащему одномерному условию (Antman [1976b]), играет важную роль при описании деформаций стержней, приводящих к образованию „шеек“. Условие сильной эллиптичности и его связь с теорией упругости обсуждаются также в следующих работах: Antman

[1978a, 1983, 1984], Ericksen [1983], Knowles & Sternberg [1975, 1977, 1978], Simpson & Spector [1983], Zee & Sternberg [1983]. По поводу роли *условия Адамара—Лежандра в теории упругости несжимаемых сред* см. Fosdick & MacSithigh [1986].

В упражнениях 5.14—5.17 приведены и другие факты, указывающие на оправданность условий эллиптичности, главным образом благодаря их связи с другими определяющими допущениями, такими как поливыпуклость.

Упражнения

5.1. Рассмотрим задачу с граничными условиями на напряжения: $-\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi})=\boldsymbol{f}$ в Ω, $\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{n}=\boldsymbol{g}$ на Γ. Покажите, что если $\boldsymbol{\varphi}$ является её решением, то выполнено условие

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varphi}\wedge\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x+\int_\Gamma \boldsymbol{\varphi}\wedge\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a=\boldsymbol{o}.$$

Замечание. В отличие от необходимого условия $\int_\Omega \mathbf{f}\,\mathrm{d}x+{}$ $+\int_\Gamma \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a=\boldsymbol{o}$, которому априори должны удовлетворять приложенные силы в задаче с граничными условиями на напряжения, приведённое здесь условие автоматически выполняется для любого решения указанной задачи (в связи с этим см. Gurtin [1981, p. 183]).

5.2. Предположим, что полная энергия имеет вид

$$I(\boldsymbol{\psi})=\int_\Omega \hat{W}(\nabla\boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}x-\left\{\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\psi}\,\mathrm{d}x+\int_\Gamma \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\psi}\,\mathrm{d}a\right\},$$

и пусть

$$\boldsymbol{\Phi}=\left\{\boldsymbol{\psi}\colon\ \bar{\Omega}\to\mathbb{R}^3;\quad \det\nabla\boldsymbol{\psi}>0\ \text{ в }\ \Omega,\int_\Omega \boldsymbol{\psi}\,\mathrm{d}x=\boldsymbol{e}\right\},$$

где $\boldsymbol{e}$ — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^3$. Положим

$$\boldsymbol{b}:=\int_\Omega \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x+\int_\Gamma \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a.$$

Покажите, что функционал I стационарен в точке $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\varphi}$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\dfrac{\partial\hat{W}}{\partial\boldsymbol{F}}(\nabla\boldsymbol{\varphi})=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{b}\ \text{ в }\ \Omega,\\[2mm] \dfrac{\partial\hat{W}}{\partial\boldsymbol{F}}(\nabla\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{n}=\boldsymbol{f}\ \text{ на }\ \Gamma.\end{cases}$$

Указания. Докажите сначала, что функционал I стационарен относительно „вариаций" $\boldsymbol{\vartheta}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию $\int_\Omega \boldsymbol{\vartheta}\, dx = \boldsymbol{o}$ (т. е. $I'(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\vartheta} = 0$ для всех таких вариаций $\boldsymbol{\vartheta}$). Доказательство в обратную сторону получается применением *теоремы о множителях Лагранжа* (см., например, Ciarlet [1982, теорема 7.2-2]), которая показывает, что вектор $\boldsymbol{b}$ является *множителем Лагранжа, соответствующим ограничению* $\int_\Omega \boldsymbol{\psi}\, dx = \boldsymbol{e}$.

5.3. Рассмотрим *задачу о воздушном шаре* (рис. 5.2-1). Пусть $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ — инъективное в $\bar{\Omega}$ отображение. Каким образом можно вычислить объём $v_i(\boldsymbol{\varphi})$?

5.4. Пусть область ω с границей γ лежит на плоскости, базис которой образуют единичные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Пусть, далее,

$$\Omega = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \Gamma_0 = \gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon],$$
$$\Gamma_1 = (\omega \times \{-\varepsilon\}) \cup (\omega \times \{\varepsilon\}), \qquad \varepsilon > 0,$$

так что отсчётная конфигурация $\bar{\Omega}$ соответствует пластине.

(1) Сформулируйте и докажите аналог теоремы 5.2-1 в случае, когда к деформированной пластине приложены замороженные нагрузки двух типов: объёмные силы в Ω и горизонтальные силы на боковой поверхности Γ_0, относительно которых известной является лишь их результирующая при интегрировании по толщине пластины. Иными словами,

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sum_{\alpha, \beta = 1}^{2} \hat{T}_{\alpha\beta}(\nabla\boldsymbol{\varphi})\, n_\beta\, dx_3 = h_\alpha \quad \text{на} \quad \gamma, \ \alpha = 1, 2,$$

где обе функции $h_\alpha\colon \gamma \to \mathbb{R}$ заданы.

(2) Покажите, что следующие краевые условия на боковой поверхности Γ_0 могут быть также учтены в теореме 5.2-1:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{id} + \sum\limits_{\alpha=1}^{2} u_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha, & u_\alpha \text{ не зависит от } x_3, \\ \dfrac{1}{2\varepsilon} \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \boldsymbol{T}^\varphi \boldsymbol{n}^\varphi\, dx_3 = -\pi \boldsymbol{n}^\varphi & \text{на } \gamma, \quad \pi \in \mathbb{R} \text{ задано.} \end{cases}$$

З а м е ч а н и я. Случай (2) соотносится с случаем (1) подобно тому, как давление на границе — с приложенной поверхностной силой, которая является замороженной нагрузкой. Такие краевые условия естественно возникают при переходе от трёхмерных моделей к уравнениям Кармана (см. Ciarlet [1980], Ciarlet & Paumier [1986] по поводу случая (1), и Blanchard & Ciarlet [1983] — по поводу случая (2); см. также том II).

5.5. Это упражнение дополняет теорему 5.3-1. Сохраняются обозначения теоремы, и предполагается, что граница множества C обладает любой необходимой гладкостью.

(1) Покажите, что множество

$$\boldsymbol{\Phi} := \{\boldsymbol{\psi} \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega};\ \mathbb{R}^3);\quad \det \nabla\boldsymbol{\psi} > 0 \text{ в } \Omega,\quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0 \text{ на } \Gamma_0,\quad \boldsymbol{\psi} \in C \text{ на } \Gamma_2\}$$

можно наделить структурой многообразия. Выведите из доказательства теоремы 5.3-1 определение соответствующего касательного пространства в точке $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi}$.

(2) Дополнительно предположив выпуклость множества C, покажите, что каждая точка множества $\boldsymbol{\Phi}$ принадлежит ему вместе с некоторой выпуклой окрестностью. Применяя это наблюдение, а также свойства точек минимума функций на выпуклых множествах (теорема 4.7-5), докажите теорему 5.3-1 иным способом.

5.6. Пусть заданы ограниченное открытое подмножество Ω в $\mathbb{R}^n$, отображение $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega};\ \mathbb{R}^n) \cap \mathscr{C}^1(\Omega;\ \mathbb{R}^n)$ и точка $b \in \boldsymbol{\varphi}(\bar{\Omega}) - \boldsymbol{\varphi}(\partial\Omega \cup S_{\boldsymbol{\varphi}})$, где $S_{\boldsymbol{\varphi}}$ определено в теореме 5.4-1. Для каждого $\varepsilon > 0$ пусть ρ_b^ε — функция, удовлетворяющая условиям

$$\rho_b^\varepsilon \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^n),\quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_b^\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y = 1,\quad \operatorname{supp} \rho_b^\varepsilon \subset B_\varepsilon(b).$$

Покажите, что существует $\varepsilon(b) > 0$, такое что

$$\deg(\boldsymbol{\varphi}, \Omega, b) = \int_\Omega \rho_b^\varepsilon(\boldsymbol{\varphi}(x)) \det \nabla\boldsymbol{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{при всех} \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon(b)$$

(топологическая степень $\deg(\boldsymbol{\varphi}, \Omega, b)$ определена в § 5.4).

Замечание. Интегральное представление более общего вида приведено в книге Ниренберга (Nirenberg [1974, теорема 1.5-5]).

5.7. Следующее нетривиальное обобщение теоремы 5.5-2 принадлежит Боллу (Ball [1981b, теоремы 1 и 2]). Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\varphi}_0 \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega};\ \mathbb{R}^n)$ инъективно в Ω и $\boldsymbol{\varphi}: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) & \text{при некотором} \quad p > n, \\ \det \nabla\boldsymbol{\varphi} > 0 & \text{п. в.} \quad \text{в } \Omega, \\ \boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\varphi}_0(x) & \text{при всех} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

(1) Покажите, что $\varphi(\bar{\Omega}) = \varphi_0(\bar{\Omega})$ и что $\varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ *инъективно почти всюду*, т. е.

$$\operatorname{card} \varphi^{-1}(x') = 1 \quad \text{при почти всех} \quad x' \in \varphi(\bar{\Omega}).$$

(2) Предположим дополнительно, что множество $\varphi_0(\Omega)$ является областью и

$$\int_{\Omega} \|(\nabla\varphi(x))^{-1}\|^q \det \nabla\varphi(x)\, dx < +\infty \quad \text{для некоторого} \quad q > n.$$

Покажите, что $\varphi\colon \bar{\Omega} \to \varphi(\bar{\Omega})$ — гомеоморфизм.

5.8. Пусть Ω — ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^3$, B — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^3$, $\varphi \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ — отображение, которое инъективно в Ω и удовлетворяет одностороннему граничному условию на положения $\varphi(\Gamma) \subset B$. Удовлетворяет ли φ условию изоляции $\varphi(\bar{\Omega}) \subset B$?

5.9. Предположим, что полная энергия имеет вид

$$I(\psi) = \int_{\Omega} \hat{W}(\nabla\psi)\, dx - \int_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \psi\, dx,$$

и пусть

$$\Phi = \{\psi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3;\quad \det \nabla\psi = 1 \text{ в } \Omega,\quad \psi = \varphi_0 \text{ на } \Gamma\},$$

так что соответствующий упругий материал является *несжимаемым* (§ 5.7). Покажите, что функционал I стационарен в точке $\varphi \in \Phi$ тогда и только тогда, когда φ является решением *задачи для несжимаемых упругих материалов с граничными условиями на перемещения*

$$\begin{cases} -\operatorname{\mathbf{div}} \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla\varphi) + \operatorname{\mathbf{div}}(p \operatorname{\mathbf{Cof}} \nabla\varphi) = \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \\ \det \nabla\varphi = 1 \text{ в } \Omega, \\ \varphi = \boldsymbol{id} \text{ на } \Gamma, \end{cases}$$

где $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — *множитель Лагранжа*, соответствующий ограничению $\det \nabla\psi = 1$ (аналогичная ситуация имела место в упражнении 5.2). Функция p называется *гидростатическим давлением.*

5.10. В работе Ciarlet & Nečas [1985] предложен следующий вариант функции упрочнения, который обобщает случай, рассмотренный Прагером (Prager [1957]) в рамках линеаризованной теории упругости:

$$\hat{\Lambda}(\nabla\varphi) = \boldsymbol{E}^d : \boldsymbol{E}^d - \alpha,\ \alpha > 0,$$

где

$$\boldsymbol{E}^d = \boldsymbol{E} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \boldsymbol{E})\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\nabla\varphi^{\mathrm{T}}\nabla\varphi - \boldsymbol{I}),$$

— *девиатор* тензора деформации Грина — Сен-Венана $\boldsymbol{E}$. Отметим, что такая функция уточнения не зависит от системы отсчёта (§ 3.3), поскольку

$$\widehat{\Lambda}(\boldsymbol{QF}) = \widehat{\Lambda}(\boldsymbol{Q}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+, \quad \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}^3_+.$$

(1) Покажите, что число $\boldsymbol{E}^d : \boldsymbol{E}^d$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{E}^d : \boldsymbol{E}^d = \frac{1}{3}\{(\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2\}, \qquad \lambda_i = \lambda_i(\boldsymbol{E}).$$

Замечания. Это соотношение показывает, что число $\boldsymbol{E}^d : \boldsymbol{E}^d$ является *инвариантом тензора* $\boldsymbol{E}$, а также что его можно рассматривать как *меру максимальных „деформаций сдвига"* (см. в работе Nečas & Hlavaček [1981, pp. 27—28] обсуждение этого вопроса для тензора напряжений). Последнее наблюдение позволяет, таким образом, истолковать соответствующее ограничение, характеризующее упрочнение ($\widehat{\Lambda}(\nabla\varphi) \leqslant 0$ в $\overline{\Omega}$).

(2) Для доказательства существования решений (теорема 7.8-1) потребуются функции упрочнения $\widehat{L}$: $\mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$, которые являются *поливыпуклыми* в том смысле, что найдётся *выпуклая* функция L: $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию (§ 4.9)

$$\widehat{L}(\boldsymbol{F}) = \mathbb{L}(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

Покажите, что существуют постоянная ν и функция $\widehat{L}$: $\mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ вида

$$\widehat{L}(\boldsymbol{F}) = \alpha + a\|\boldsymbol{F}\|^2 + b\|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^2 + \Gamma(\det \boldsymbol{F}), \qquad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, a и b — положительные постоянные, а Γ: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, такие что

$$\widehat{L}(\boldsymbol{F}) = -\nu + \boldsymbol{E}^d : \boldsymbol{E}^d + O(\|\boldsymbol{E}\|^3).$$

Иными словами, мы построили не зависящую от системы отсчёта функцию упрочнения $\widehat{L}$, которая во втором приближении по $\boldsymbol{E}$ совпадает с функцией упрочнения $\widehat{\Lambda}$ из п. (1) и является поливыпуклой.

Указание. Простые вычисления показывают, что справедливо равенство

$$\boldsymbol{E}^d : \boldsymbol{E}^d = -\frac{1}{3}(\operatorname{tr} \boldsymbol{E})^2 + \operatorname{tr} \boldsymbol{E}^2,$$

напоминающее выражение для энергии деформации материала Сен-Венана—Кирхгофа. Теперь примените рассуждения теоремы 4.10-2 (при этом возникают упрощения, поскольку условие $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \Gamma(\delta) = +\infty$ здесь не нужно).

5.11. Рассмотрим *абсолютно твёрдое тело.* В этом случае допустимыми могут быть лишь жёсткие деформации, т. е. деформации, имеющие вид $\varphi(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{Q}ox$ для всех $x \in \bar{\Omega}$, где $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ и $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{O}^3_+$. Сформулируйте для таких тел аксиомы баланса сил и моментов, а также выпишите уравнения равновесия, определяющее уравнение и т. п. (следует учесть, что жёсткая деформация зависит только от шести независимых параметров).

5.12. (1) Покажите, что множество

$$\Phi := \{\psi \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega};\ \mathbb{R}^3);\quad \det \nabla\psi > 0 \text{ в } \Omega\}$$

не является выпуклым.

(2) Покажите, что Φ может быть счётным объединением взаимно непересекающихся выпуклых множеств, если множество Ω неодносвязно (Antman [1976a, с. 313]; см. также Pierce & Whitman [1980]).

5.13. Пусть $\mathsf{A} = (a_{ijkl})$ — тензор четвёртого ранга и $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ — матрица. Положим

$$\boldsymbol{B} : \mathsf{A} : \boldsymbol{B} = b_{ij}a_{ijkl}b_{kl},$$

так что сильное условие Адамара—Лежандра в точке $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} : \mathsf{A}(\boldsymbol{F}) : \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} > 0 \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o},\ \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o}.$$

Коулман и Нолл (Coleman & Noll [1959]) ввели более сильное определяющее допущение

$$\boldsymbol{B} : \mathsf{A}(\boldsymbol{F}) : \boldsymbol{B} > 0 \quad \text{для всех матриц} \quad \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0},$$

известное как *неравенство Коулмана—Нолла.*

(1) Покажите, что из неравенства Коулмана—Нолла вытекает следующее условие типа монотонности для первого тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа:

$$(\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}_2) - \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}_1)) : (\boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{F}_1) > 0 \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{W}\boldsymbol{F}_1,$$
$$\boldsymbol{W} \in \mathbb{S}^3_>,\ \boldsymbol{W} \neq \boldsymbol{I}.$$

(2) Покажите, что в случае однородного изотропного гиперупругого материала из неравенства Коулмана — Нолла следует, что функция запасённой энергии $\hat{W}(\boldsymbol{F})$ строго выпукла. Таким образом, это определяющее допущение не является реалистическим (теорема 4.8-1), как отмечают и сами авторы (Coleman & Noll [1963]).

(3) Покажите, что для материала Сен-Венана — Кирхгофа неравенство Коулмана — Нолла не имеет места.

Замечание. Вывод, сделанный в п. (2), отмечен также Огденом (Ogden [1970, 1972]).

5.14. Морри (Morry [1952]) ввёл в вариационное исчисление чрезвычайно важное понятие *квазивыпуклости.* Оно лежит в основе следующего общего *определяющего допущения*, которое включает в себя допущение о поливыпуклости как частный случай. Функция запасённой энергии $\hat{W}$ однородного материала называется *квазивыпуклой* относительно данной матрицы $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$, если для всех ограниченных подмножеств $V \subset \mathbb{R}^3$ и всех функций $\vartheta \in \mathscr{D}(V)$, таких что $\{\boldsymbol{F} + \nabla\vartheta(x)\} \in \mathbb{M}^3_+$ при всех $x \in V$, выполняется неравенство

$$\frac{1}{\operatorname{vol} V}\int_V \hat{W}(\boldsymbol{F} + \nabla\vartheta(x))\,\mathrm{d}x \geqslant \hat{W}(\boldsymbol{F}),$$

где $\mathscr{D}(V)$ — пространство функций из $\mathscr{C}^\infty(V)$ с компактными носителями, содержащимися в V.

(1) Пусть множество допустимых деформаций имеет вид

$$\Phi := \{\psi \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega});\ \det\nabla\psi > 0 \text{ в } \Omega,\ \psi = \varphi_0 \text{ на } \Gamma_0\}$$

и функция $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию: при некотором $\varepsilon > 0$

$$I(\varphi) \leqslant I(\psi) \text{ для всех } \psi \in \Phi, \text{ таких что}$$
$$(\varphi - \psi) \in \mathscr{D}(\Omega) \text{ и } \|\varphi - \psi\|_{\mathscr{C}^0(\bar{\Omega})} \leqslant \varepsilon,$$

где

$$I(\psi) = \int_\Omega \hat{W}(\nabla\psi)\,\mathrm{d}x.$$

Покажите, что функция запасённой энергии квазивыпукла относительно каждой матрицы $\nabla\varphi(x)$, $x \in \Omega$ (Ball [1977, теорема 3.1]).

(2) Покажите, что выпуклая функция $\hat{W}$: $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ является квазивыпуклой относительно всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$.

(3) Установите справедливость более общего утверждения: если функция запасённой энергии $\hat{W}$ поливыпукла, то она квазивыпукла (Ball [1977, теорема 4.5]).

(4) Покажите, что если $\hat{W}$ поливыпукла и принадлежит классу $\mathscr{C}^2$, то тензор упругости

$$\left(\frac{\partial^2\hat{W}}{\partial F_{ij}\partial F_{kl}}(\boldsymbol{F})\right)$$

удовлетворяет условию Адамара — Лежандра при всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$.

(5) Приведённое определение квазивыпуклости можно естественным образом распространить на случай функций, которые

заданы на открытых подмножествах пространства всех матриц, имеющих m строк и n столбцов. Покажите, что при $m=1$ или $n=1$ свойства квазивыпуклости и выпуклости равносильны.

Замечания. Вообще говоря, свойство поливыпуклости не вытекает из свойства квазивыпуклости, которое, таким образом, представляет собой более общее допущение. Однако „условие квазивыпуклости не является поточечным условием" (на функцию запасённой энергии), и потому его трудно проверить в конкретных случаях (Ball [1977, p. 356]). Соотношение этих двух понятий подробно обсуждается в работах Ball [1977], Marcellini [1984], Dacorogna [1982a, 1982b, 1986, 1987]. См. также Serre [1981a, 1981b, 1983]. Связь между условием квазивыпуклости и свойствами регулярности минимизирующих функций обсуждается в работах Evans [1986], Acerbi & Fusco [1987].

5.15. Пусть $\mathbb{U}$ — открытое подмножество в $\mathbb{M}^n$. Скажем, что функция $\hat{W}\colon \mathbb{U}\to\mathbb{R}$ *выпукла по рангу* 1, если она „выпукла по всем направлениям, задаваемым матрицами ранга 1", т. е. если

$$\hat{W}(\lambda \boldsymbol{F}+(1-\lambda)\boldsymbol{G})\leqslant \lambda\hat{W}(\boldsymbol{F})+(1-\lambda)\hat{W}(\boldsymbol{G}),\qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1,$$

для всех $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}\in\mathbb{M}^n$, таких что $[\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}]\subset\mathbb{U}$ и $\operatorname{rank}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G})\leqslant 1$ (данное определение можно распространить и на функции от прямоугольных матриц).

(1) Покажите, что если функция квазивыпукла в смысле определения из упражнения 5.14 (с $\mathbb{M}^3_+$, заменённым на $\mathbb{U}$), то она выпукла по рангу 1.

(2) Покажите, что функция $\hat{W}\in\mathscr{C}^2(\mathbb{U};\ \mathbb{R})$ выпукла по рангу 1 в том и только в том случае, когда она удовлетворяет условию Адамара—Лежандра

$$\frac{\partial^2\hat{W}}{\partial F_{ij}\,\partial F_{kl}}(\boldsymbol{F})\,b_ib_kc_jc_l\geqslant 0\quad\text{для всех}\quad \boldsymbol{b}=(b_i),\ \boldsymbol{c}=(c_i)\in\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{F}\in\mathbb{U}.$$

Замечание. Доказательства этих утверждений, а также некоторые другие факты приведены в работах Ball [1977], Dacorogna [1982a, 1986, 1987], Aubert [1987].

5.16. Цель этого упражнения — установить связь между условием Адамара—Лежандра и функциями, минимизирующими энергию. Пусть множество допустимых деформаций имеет вид

$$\boldsymbol{\Phi}:=\{\boldsymbol{\psi}\in\mathscr{C}^1(\bar{\Omega});\ \det\nabla\boldsymbol{\psi}>0 \text{ в } \Omega,\ \boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\varphi}_0 \text{ на } \Gamma_0\}$$

и $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}$ является „слабым локальным минимумом" энергии

$$I(\boldsymbol{\psi})=\int_\Omega \hat{W}(\nabla\boldsymbol{\psi})\,dx-\left\{\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\psi}\,dx+\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\psi}\,da\right\}$$

в том смысле, что для каждой функции $\vartheta \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, равной $\boldsymbol{o}$ на Γ_0, найдётся $\varepsilon_0(\vartheta) > 0$, такое что

$$I(\varphi) \leqslant I(\varphi + \varepsilon\vartheta) \text{ при всех } |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0(\vartheta).$$

Покажите, что при этих условиях тензор упругости

$$\left(\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} (\nabla\boldsymbol{\varphi}(x))\right)$$

удовлетворяет условию Адамара—Лежандра для всех точек $x \in \Omega$.

5.17. Пусть $\mathsf{A}(\boldsymbol{I}) = ((\partial\hat{t}_{ij}/\partial F_{kl})(\boldsymbol{I}))$ — тензор упругости для однородного упругого материала, отсчётная конфигурация которого соответствует естественному состоянию. Для произвольной матрицы третьего порядка $\boldsymbol{H} = (h_{kl})$ обозначим через $A(\boldsymbol{I})\boldsymbol{H}$ матрицу $((\partial\hat{t}_{ij}/\partial F_{kl})(\boldsymbol{I})h_{kl})$.

(1) Покажите, что $\mathsf{A}(\boldsymbol{I}) = ((\partial\hat{t}^{\mathrm{D}}_{ij}/\partial F_{kl})(\boldsymbol{I}))$, где $\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{D}} = (\partial\hat{t}^{\mathrm{D}}_{ij})$ — функция реакции для первого тензора напряжений Коши.

(2) Покажите, что матрица $\mathsf{A}(\boldsymbol{I})\boldsymbol{H}$ является симметрической для всех $\boldsymbol{H} \in \mathbb{M}^3$.

(3) Покажите, что $\mathsf{A}(\boldsymbol{I})\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$, если матрица $\boldsymbol{H}$ кососимметрична, т. е. $\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$.

(4) Покажите, что

$$\mathsf{A}(\boldsymbol{I})\boldsymbol{H} : \boldsymbol{H} = \mathsf{A}(\boldsymbol{I})\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}})\right\} : \left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}})\right\} \text{ для всех } \boldsymbol{H} \in \mathbb{M}^3.$$

(5) Предположим, что материал является изотропным. Покажите, что тензор $\mathsf{A}(\boldsymbol{I})$ удовлетворяет сильному условию эллиптичности в том и только в том случае, когда $\mu > 0$ и $\lambda > -2\mu$.

(6) Предположим, что материал изотропен. Покажите, что

$$\mathsf{A}(\boldsymbol{I})\boldsymbol{B} : \boldsymbol{B} > 0 \text{ при всех } \boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^3 - \{\boldsymbol{0}\} \Leftrightarrow \mu > 0,\ \lambda > -\frac{2}{3}\mu.$$

Замечание. Доказательство этих свойств можно найти в работах Gurtin [1981a, гл. 9], Gurtin [1981b, § 29].

5.18. *Материалу Грина—Адамара* отвечает функция запасённой энергии вида

$$\widehat{W}(\boldsymbol{F}) = \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{F}\|^2 + \frac{\beta}{4}\{\|\boldsymbol{F}\|^4 - \|\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\|^2\} + \Gamma(\det\boldsymbol{F}),$$

где Γ: $]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ — достаточно гладкая функция, α и β — вещественные постоянные.

(1) Покажите, что отсчётная конфигурация соответствует естественному состоянию и тензор упругости $\mathbf{A}(\boldsymbol{I}) = (a_{ijkl}(\boldsymbol{I}))$ удовлетворяет условию

$$b_{ij} a_{ijkl}(\boldsymbol{I}) b_{kl} > 0 \text{ для всех } \boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{S}^3 - \{0\}$$

тогда и только тогда, когда

$$\Gamma'(1) + \alpha + 2\beta = 0, \quad \alpha + \beta > 0, \quad 3\Gamma''(1) - \alpha + 2\beta > 0.$$

(2) Допустим, что

$$\alpha > 0, \ \beta \geqslant 0, \ \Gamma'(1) + \alpha + 2\beta = 0,$$
$$(\delta\Gamma'(\delta))' \geqslant 0 \text{ при всех } \delta \in]0, 1].$$

Покажите, что тензор упругости $\mathbf{A}(\boldsymbol{F})$ удовлетворяет сильному условию эллиптичности для всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+$, таких что $\det \boldsymbol{F} \leqslant 1$.

(3) Допустим, что функция Γ: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ выпукла. Существуют ли значения α, β, при которых функция $\hat{W}$ является поливыпуклой?

Замечание. Результаты пп. (1) и (2) впервые получены в работе Simpson & Spector [1984a].

ЧАСТЬ В

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТРЁХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГЛАВА 6

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Введение

Возможны два подхода к проблеме *существования* решений нелинейной краевой задачи трёхмерной теории упругости.

В одном из этих подходов предполагается, что материал является гиперупругим и, таким образом, частные решения можно получить как элементы соответствующего пространства, минимизирующие энергию на множестве допустимых деформаций, обладающих надлежащей гладкостью. Результаты о существовании решений, полученные этим путем, мы обсудим в следующей главе.

Второй подход сводится к применению *теоремы о неявной функции* непосредственно к краевой задаче трёхмерной теории упругости. Для большей определённости рассмотрим краевую задачу с *граничными условиями на перемещения*:

$$-\operatorname{div}\{(\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u})\}\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\}=\boldsymbol{f}\ \text{в}\ \Omega,$$
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}\ \text{на}\ \Gamma,$$

которая имеет частное решение $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$, соответствующее силе $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{o}$ (мы предполагаем, что отсчётная конфигурация отвечает естественному состоянию тела). При достаточно слабых предположениях относительно гладкости функции реакции $\check{\Sigma}$ можно показать, что нелинейный оператор

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}):=-\operatorname{div}\{(\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u})\,\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\}$$

отображает пространство Соболева $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ в пространство $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ для любого $p>3$ (см. §§ 6.5 и 6.6, где изучены также свойства гладкости отображения $\boldsymbol{A}$; при этом главную роль играет тот факт, что пространство Соболева $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ при $p>3$ является алгеброй). Таким образом, решение краевой задачи с граничными условиями на перемещения заключается в нахождении перемещения

$$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}^p(\Omega):=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}\ \text{на}\ \Gamma\},$$

такого что

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}.$$

Чтобы применить теорему о неявной функции для окрестностей нуля обоих пространств $\boldsymbol{V}^p(\Omega)$ и $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$, необходимо убедиться в том, что производная $A'(\boldsymbol{o})$ осуществляет изоморфизм пространств $\boldsymbol{V}^p(\Omega)$ и $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$.

Соответствующее уравнение $A'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ в точности представляет собой краевую задачу *линеаризованной теории упругости*:

$$-\operatorname{div}\{\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\} = \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma,$$

$$\text{где } \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})$$

(см. § 6.2; материал предполагается однородным и изотропным). В свою очередь данная задача изучается в § 6.3. При этом сначала доказываются существование и единственность *обобщённого решения* в пространстве $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ (теорема 6.3-5); затем устанавливается, что если граница Γ достаточно гладкая, то оператор $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$: $\boldsymbol{V}^p(\Omega) \to \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ является ***эпиморфизмом***, т. е. имеет место следующий результат о *регулярности решений*:

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega) \Rightarrow \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}^p(\Omega).$$

Для наличия такой регулярности решения существенно, что тип граничного условия не меняется вдоль Γ (теорема 6.3-6). *Когда же на примыкающих друг к другу частях* Γ *заданы разные граничные условия, такие как условие на положения и линеаризованное условие на напряжения, именно отсутствие подобной регулярности не позволяет* (за исключением весьма частных случаев) *применить теорему о неявной функции к смешанным краевым задачам, в которых одновременно присутствуют граничные условия на перемещения и напряжения.*

Пользуясь этим результатом о регулярности и теоремой о неявной функции, мы получаем *теорему существования в пространстве* $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$, а именно: для каждого $p > 3$ существуют окрестность нуля $\boldsymbol{F}^p$ в $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ и окрестность нуля $\boldsymbol{U}^p$ в $\boldsymbol{V}^p(\Omega)$, такие что для любого $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{F}^p$ краевая задача в перемещениях имеет в точности одно решение $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f}) \in \boldsymbol{U}^p$ (теорема 6.7-1; см. также теорему 6.4-1, справедливую в более простом случае материалов Сен-Венана—Кирхгофа). Мы также устанавливаем, что решение $\boldsymbol{u}_{\text{lin}}(\boldsymbol{f})$ соответствующей *линеаризованной задачи для перемещений* аппроксимирует точное решение $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f})$ при достаточно малых силах. Этот факт выражается следующей оценкой ошибки (теорема 6.8-1):

$$\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{u}_{\text{lin}}(\boldsymbol{f})\|_{2,p,\Omega} = O\left(|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}^2\right).$$

И наконец, мы доказываем, что соответствующее отображение $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u}$ инъективно в $\overline{\Omega}$ и сохраняет ориентацию, при условии что силы достаточно малы (теорема 6.9-1).

При заданной функции $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{F}^p$ (здесь предполагается выпуклость $\boldsymbol{F}^p$) каждая задача

$$\boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda)) = \lambda \boldsymbol{f}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

имеет решение $\tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda) := \boldsymbol{u}(\lambda \boldsymbol{f}) \in \boldsymbol{U}^p$. Отсюда с помощью дифференцирования заключаем, что таким образом определённое отображение $\tilde{\boldsymbol{u}} := [0, 1] \to \boldsymbol{F}^p \subset \boldsymbol{V}^p(\Omega)$ удовлетворяет также соотношениям

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{u}}'(\lambda) = \{\boldsymbol{A}'(\tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda))\}^{-1} \boldsymbol{f}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\ \tilde{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{o}. \end{cases}$$

Это *обыкновенное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве* $\boldsymbol{V}^p(\Omega)$ может быть изучено отдельно, что, в частности, приводит к ещё одному доказательству существования решения краевой задачи с граничными условиями только на перемещения (теорема 6.12-1). Данное замечание важно и с другой точки зрения: для аппроксимации точных решений $\tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, и в частности $\tilde{\boldsymbol{u}}(1) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{f})$, можно использовать *метод Эйлера* (а фактически и любой иной дискретный метод, применимый к обыкновенным дифференциальным уравнениям). А именно, рассмотрим разбиение $0 = \lambda^0 < \lambda^1 < \ldots < \lambda^N = 1$ отрезка $[0, 1]$ и определим последовательность $\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^1, \ldots, \boldsymbol{u}^N$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\lambda^{n+1} - \lambda^n} = \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^n)\}^{-1} \boldsymbol{f}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1, \\ \boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{o}. \end{cases}$$

Как будет установлено ниже (теорема 6.13-1),

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} \|\boldsymbol{u}^n - \tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda^n)\|_{2, p, \Omega} = O\left(\max_{0 \leqslant n \leqslant N-1} |\lambda^{n+1} - \lambda^n|\right),$$

и, таким образом, метод Эйлера является сходящимся.

Поскольку приближённые перемещения $\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^n + \delta \boldsymbol{u}^n$ вычисляются рекуррентно как решения последовательности *линейных* задач

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^n)\, \delta \boldsymbol{u}^n = \delta \boldsymbol{f}^n := (\lambda^{n+1} - \lambda^n) \boldsymbol{f}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1,$$

метод Эйлера можно также рассматривать как *метод приращений Лагранжа*, который используется для аппроксимации краевой задачи в перемещениях $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ (см. §§ 6.10 и 6.11). В силу этого из сходимости метода Эйлера вытекает *сходимость метода приращений.*

*6.1. Пространства Соболева

Прежде чем перейти непосредственно к изучению вопросов существования, единственности (или неединственности), регулярности и т. п. для решений краевых задач трёхмерной теории упругости, мы дадим краткий обзор некоторых фундаментальных свойств *соболевских пространств*, которые после выхода основополагающих работ Соболева [1938, 1950] стали незаменимым средством изучения линейных и нелинейных уравнений с частными производными, а также задач вариационного исчисления. Подробные сведения об этих пространствах можно найти в работах: Lions & Magenes [1968, гл. 1] и Dautray & Lions [1984, гл. 4] (случай гильбертовых пространств), Lions [1965, гл. 1—3], Nečas [1967, гл. 2], Adams [1975]. Прекрасное введение в предмет содержит в книге Брезиса (Brezis [1983, гл. 9]).

Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и p — элемент расширенной вещественной прямой, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Обозначим через $L^p(\Omega)$ пространство функций $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (точнее, пространство классов эквивалентности функций, dx-измеримых и совпадающих dx-почти-всюду), которые удовлетворяют соотношениям

$$|v|_{0,p,\Omega} := \left\{ \int_\Omega |v(x)|^p \, \mathrm{d}x \right\}^{1/p} < +\infty \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$|v|_{0,\infty,\Omega} = \inf\{\alpha \geqslant 0;\ \mathrm{d}x = \operatorname{meas}\{x \in \Omega;\ |v(x)| > \alpha\} = 0\} < +\infty \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

В случае $p = 2$ используется более простое обозначение

$$|v|_{0,\Omega} := |v|_{0,2,\Omega}.$$

Здесь мы не будем напоминать основные свойства пространств $L^p(\Omega)$, которые читатель может найти, например, в книге Brezis [1983, гл. 4] [1].

Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{D}(\Omega)$ пространство вещественнозначных функций $\vartheta \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$ с компактным носителем, лежащим в Ω (и, вообще говоря, зависящим от конкретной функции из $\mathcal{D}(\Omega)$). Напомним, что *носителем* функции $\vartheta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется множество

$$\operatorname{supp} \vartheta = cl\{x \in \Omega;\ \vartheta \neq 0\}.$$

Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ содержит функции, отличные от тождественного нуля. Действительно, пусть функция $\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задаётся равенствами

$$\omega(x) = \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) \text{ при } |x| < 1, \quad \omega(x) = 0 \text{ при } |x| \geqslant 1,$$

[1] См. также Соболев [1988]. — *Прим. ред.*

и пусть $B_r(a)$ — открытый шар, содержащийся в Ω. Тогда функция

$$x \in \Omega \to \omega\left(\frac{x-a}{r}\right)$$

принадлежит пространству $\mathscr{D}(\Omega)$.

Распределением[1] на Ω называется всякая линейная форма T: $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, обладающая следующим свойством: для любого заданного компактного подмножества $K \subset \Omega$ существуют постоянная $C(K)$ и целое число $m(K) \geqslant 0$, такие что

$$|T(\vartheta)| \leqslant C(K) \sup_{\substack{|\alpha| \leqslant m(K) \\ x \in K}} |\partial^\alpha \vartheta(x)| \text{ при всех } \vartheta \in \mathscr{D}(\Omega) \text{ с } \operatorname{supp} \vartheta \subset K.$$

Здесь для частных производных использована мультииндексная запись (см. § 1.3).

Пространство, состоящее из всех распределений на Ω, *обозначается через* $\mathscr{D}'(\Omega)$.

В пространстве $\mathscr{D}(\Omega)$ естественным образом вводится топология „индуктивного предела“, которая превращает $\mathscr{D}(\Omega)$ в локально-выпуклое топологическое пространство. В этой топологии последовательность (ϑ^k) сходится к ϑ тогда и только тогда, когда существует компактное подмножество K в Ω, такое что

$$\begin{cases} \operatorname{supp} \vartheta^k \subset K \text{ для всех } k, \\ (\partial^\alpha \vartheta^k) \text{ сходится равномерно на } K \text{ к } \partial^\alpha \vartheta \text{ при } k \to \infty \\ \text{для всех мультииндексов } \alpha. \end{cases}$$

Следует отметить, что пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ с такой топологией *не* является метризуемым и потому его топологию нельзя определить заданием сходящихся последовательностей.

Можно показать, что *пространство* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *является двойственным* (*сопряжённым*) *к пространству* $\mathscr{D}(\Omega)$, т. е. $\mathscr{D}'(\Omega)$ состоит из всех линейных форм на $\mathscr{D}(\Omega)$, которые непрерывны в топологии $\mathscr{D}(\Omega)$. Как двойственное пространство $\mathscr{D}'(\Omega)$ естественным образом наделяется $*$-слабой топологией, которая задается семейством полунорм $T \in \mathscr{D}'(\Omega) \to T(\vartheta)$, $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$. В пространстве $\mathscr{D}'(\Omega)$ с такой топологией, которая также *не* является метризуемой, последовательность (T^k) сходится к T тогда и только тогда, когда

$$T^k(\vartheta) \xrightarrow[k \to \infty]{} T(\vartheta) \text{ для всех } \vartheta \in \mathscr{D}(\Omega),$$

и в этом случае мы говорим, что *последовательность* (T^k) *сходится к* T *в смысле теории распределений*. Подробности, касаю-

---

[1] *Или обобщённой функцией. — Прим. изд. ред.*

щиеся топологий в пространствах $\mathscr{D}(\Omega)$ и $\mathscr{D}'(\Omega)$, можно найти в книгах Choquet-Bruhat [1973], Hörmander [1983a, гл. 1—7], Vo-Khac [1972], Yosida [1966] и, разумеется, в знаменитом трактате Л. Шварца (Schwartz [1966]), создавшего теорию распределений и придавшего ей законченную математическую форму [1].

Пусть f — *локально-интегрируемая функция на* Ω, т. е. такая функция f: $\Omega \to \mathbb{R}$, что $f \in L^1(K)$ для любого компактного подмножества K в Ω; в частности, любая функция $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ локально-интегрируема на Ω. Тогда линейная форма

$$T_f\colon\ \vartheta \in \mathscr{D}(\Omega) \to T_f(\vartheta) := \int_\Omega f\vartheta\, \mathrm{d}x$$

задаёт распределение на Ω, поскольку для любого компактного подмножества K в Ω и любой функции $\vartheta \subset \mathscr{D}(U)$ с $\operatorname{supp} \vartheta \subset K$

$$|T_f(\vartheta)| \leqslant |f|_{0,1,K} \sup_{x \in K} |\vartheta(x)|.$$

В этом случае говорят, что *распределение T_f соответствует локально-интегрируемой функции f.*

Ещё одним источником распределений является *операция дифференцирования в смысле теории распределений.* Пусть T — распределение и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Тогда линейная форма

$$\partial^\alpha T\colon\ \vartheta \in \mathscr{D}(\Omega) \to \partial^\alpha T(\vartheta) := (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \vartheta)$$

также будет распределением (это вытекает непосредственно из определения), которое называется *частной производной от T порядка α.* Например, *частная производная от T по i-й переменной* задаётся следующим образом:

$$\partial_i T\colon\ \vartheta \in \mathscr{D}(\Omega) \to \partial_i T(\vartheta) := -T(\partial_i \vartheta).$$

Заметим, что *если функция f непрерывно дифференцируема на* Ω, то, как показывает интегрирование по частям,

$$\partial_i T_f(\vartheta) = -T_f(\partial_i \vartheta) = -\int_\Omega f \partial_i \vartheta\, \mathrm{d}x = \int_\Omega (\partial_i f)\, \vartheta\, \mathrm{d}x$$

$$\text{для всех } \vartheta \in \mathscr{D}(\Omega),$$

т. е. $\partial_i T_f$ в точности совпадает с распределением, соответствующим локально-интегрируемой функции $\partial_i f$. Таким образом, мож-

[1] О созданнн теорни распределений (обобщённых функций) см. прнмечання В. П. Паламодова к кннге Соболева [1988]′ н статью Соболева [1938], где впервые эта теория возникла. — *Прим. ред.*

но сказать, что дифференцирование в смысле теории распределений обобщает „классическое“ понятие дифференцирования гладких функций.

Для любого целого $m \geqslant 0$ и любого вещественного p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, **пространство Соболева** $W^{m,p}(\Omega)$ состоит из таких функций (классов эквивалентности) $v \in L^p(\Omega)$, для которых все частные производные в смысле теории распределений порядка $\leqslant m$ также принадлежат пространству $L^p(\Omega)$. Иными словами, для каждого мультииндекса α с $|\alpha| \leqslant m$ существует функция $v^\alpha \in L^p(\Omega)$, такая что

$$\boxed{\int\limits_\Omega v^\alpha \vartheta \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v \partial^\alpha \vartheta \,\mathrm{d}x \quad \text{для всех } \vartheta \in \mathscr{D}(\Omega).}$$

Отметим, в частности, что $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Несмотря на то что *функции* v^α, *вообще говоря, не являются частными производными в обычном смысле* (за исключением указанного выше случая гладких функций v), всё же принято писать $\partial^\alpha v$ вместо v^α, и мы будем следовать этой традиции. Функции $\partial^\alpha v$ иногда называют „*обобщёнными производными*“; при обращении с ними следует соблюдать осторожность, поскольку некоторыми своими свойствами они отличаются от „обычных“ производных.

Приведём теперь ряд основных свойств пространств Соболева, которые нам потребуются в дальнейшем. Отметим, что по ходу изложения наши допущения относительно открытого множества Ω будут становиться всё более сильными. Напомним, что нормированное векторное пространство называется *рефлексивным*, если это пространство можно отождествить с его вторым сопряжённым.

Теорема 6.1-1. *Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Будучи наделено нормой*

$$\boxed{\begin{array}{ll} v \to \|v\|_{m,p,\Omega} := \left\{ \displaystyle\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha v|^p \,\mathrm{d}x \right\}^{1/p} & \text{при } 1 \leqslant p < \infty, \\ v \to \|v\|_{v,\infty,\Omega} := \displaystyle\max_{|\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha v|_{0,\infty,\Omega} & \text{при } p = \infty, \end{array}}$$

пространство Соболева $W^{m,}{}_p(\Omega)$ становится банаховым; при $1 < p < \infty$ оно рефлексивно. Пространство Соболева $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ является гильбертовым. ■

Мы также будем использовать следующие *полунормы*:

$$v \to |v|_{m,p,\Omega} = \left\{ \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v|^p \, dx \right\}^{1/p} \quad \text{при } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$v \to |v|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v|_{0,\infty,\Omega} \quad \text{при } p = \infty$$

в пространстве $W^{m,p}(\Omega)$; заметим, что $\|\cdot\|_{0,p,\Omega} = |\cdot|_{0,p,\Omega}$. При $p = 2$ индекс p в обозначениях этих норм и полунорм обычно опускается, и они записываются так:

$$\|\cdot\|_{m,\Omega} := \|\cdot\|_{m,2,\Omega}, \qquad |\cdot|_{m,\Omega} := |\cdot|_{m,2,\Omega}.$$

Заметим, что при $v \in \mathscr{C}^m(\bar{\Omega})$ (см. § 1.3)

$$\|v\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\partial^\alpha v(x)|,$$

$$|v|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| = m} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\partial^\alpha v(x)|.$$

Пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, однако оно не плотио в пространстве $W^{m,p}(\Omega)$, $m \geqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$, за исключением случая, когда множество $\mathbb{R}^n - \Omega$ является „весьма малым“ (в частности, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$; если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, то необходимым, но не достаточным условием плотности $\mathscr{D}(\Omega)$ в $W^{m,p}(\Omega)$ служит равенство dx-meas $\{\mathbb{R}^n - \Omega\} = 0$; см. Lions [1965, p. 20 и далее]). Это наблюдение приводит к следующему определению. Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$; для любого целого $m \geqslant 0$ и любого вещественного $p \geqslant 1$ (исключая $p = \infty$) определим **пространства Соболева**, полагая

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \{\mathscr{D}(\Omega)\}^-, \qquad H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega),$$

где замыкание берётся относительно нормы $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$.

Подмножество Ω в $\mathbb{R}^n$ называется *множеством конечной ширины*, если оно лежит между двумя параллельными гиперплоскостями (так, всякое ограничеииое множество имеет коиечную ширину). Следующая теорема показывает, что в этом случае полунорма $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ является нормой в пространстве $W_0^{m,p}(\Omega)$, которая эквивалентна норме $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$.

Теорема 6.1-2. (a) (**Неравенство Пуанкаре.**) *Пусть Ω — подмножество конечной ширины в $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждого p,*

$1 \leqslant p < \infty$, *существует постоянная* b, *такая что*

$$|v|_{0,p,\Omega} \leqslant b\,|v|_{1,p,\Omega} \text{ для всех } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(b) *Следовательно, существует постоянная* c, *такая что*

$$\boxed{|v|_{m,p,\Omega} \leqslant \|v\|_{m,p,\Omega} \leqslant c\,|v|_{m,p,\Omega} \text{ для всех } v \in W_0^{m,p}.}$$ ∎

Легко доказать, что при $m \geqslant 1$ пространство $W^{m,p}(\Omega)$ строго содержится в $L^p(\Omega)$. Это означает, что всякой функции из $L^p(\Omega)$, обладающей обобщёнными производными из $L^p(\Omega)$, присуще свойство некоторой дополнительной „гладкости". Например, пусть Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Тогда любая функция из $W^{1,p}(\Omega)$ непрерывна, если $p > 2$, принадлежит каждому пространству $L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q < \infty$, если $p = 2$, и принадлежит $L^{2p/(2-p)}(\Omega)$, если $1 \leqslant p < 2$ (тот факт, что функция из $H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, не обязана быть непрерывной, поясняется в упражнении 6.1 на примере функции, множество точек разрыва которой плотно в Ω). Этот результат является частным случаем следующей общей теоремы о *вложениях*. Обозначение $X \hookrightarrow Y$ указывает на *непрерывность вложения* нормированного векторного пространства X в нормированное векторное пространство Y, в том смысле, что существует постоянная c, для которой $\|v\|_Y \leqslant c\|v\|_X$ при всех $v \in X$. Напомним, что пространства $\mathscr{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ были определены в § 1.3 и что областью в $\mathbb{R}^n$ называется открытое ограниченное связное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей (§ 1.6).

Теорема 6.1-3 (теорема вложения Соболева). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $m \geqslant 0$ — целое число, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда имеют место следующие непрерывные вложения*:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \text{ где } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}, \text{ если } m < \frac{n}{p},$$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ для всех } q,\ 1 \leqslant q < \infty, \text{ если } m = \frac{n}{p},$$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^{0,m-n/p}(\bar{\Omega}), \text{ если } \frac{n}{p} < m < \frac{n}{p} + 1,$$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) \text{ для всех } \lambda \in]0, 1[, \text{ если } m = \frac{n}{p} + 1,$$

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^{0,1}(\bar{\Omega}), \text{ если } \frac{n}{p} + 1 < m.$$ ∎

Замечание. При обращении с этими непрерывными вложениями (как, впрочем, и с компактными вложениями из теоремы 6.1-5) следует соблюдать некоторую осторожность, поскольку элементами соболевских пространств являются *классы* *эквивалентности* функций, совпадающих dx-почти-всюду. В частности, вложение $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ означает наличие такой постоянной c, что внутри каждого класса эквивалентности v пространства $W^{m,p}(\Omega)$ существует (единственный) представитель $\bar{v}$, принадлежащий пространству $\mathscr{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющий неравенству $\|\bar{v}\|_{\mathscr{C}^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} \leqslant c\|v\|_{m,p,\Omega}$. ∎

Важным следствием теоремы вложения Соболева является тот факт, что одно и то же неравенство, а именно $mp > n$, обеспечивающее вложение $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^{0}(\bar{\Omega})$, также гарантирует, что пространство $W^{m,p}(\Omega)$ есть *банахова алгебра*, т. е. что произведение двух функций из $W^{m,p}(\Omega)$ снова принадлежит $W^{m,p}(\Omega)$, если $mp > n$, и соответствующее отображение, задаваемое произведением, непрерывно в норме $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$; точнее, имеет место

Теорема 6.1-4 (**$W^{m,p}(\Omega)$ — банахова алгебра при $mp > n$**). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $m \geqslant 0$ — целое число и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда если $mp > n$, то*

$$u,\ v \in W^{m,p}(\Omega) \Rightarrow uv \in W^{m,p}(\Omega)$$

и существует постоянная c, такая что

$$\|uv\|_{m,p,\Omega} \leqslant c\|u\|_{m,p,\Omega}\|v\|_{m,p,\Omega} \text{ для всех } u,\ v \in W^{m,p}(\Omega).$$ ∎

Нормированное векторное пространство X называется *компактно вложенным* в нормированное векторное пространство Y, если $X \hookrightarrow Y$ и непрерывная инъекция ι: $x \in X \to \iota(x) = x \in Y$ представляет собой *компактный* линейный оператор, т. е. ι отображает каждую ограниченную последовательность (x^k) в последовательность $(\iota(x^k))$, которая содержит подпоследовательность, имеющую предел в Y; для такого компактного вложения используется обозначение $X \Subset Y$. Следующий результат позволяет определить, являются ли компактными непрерывные вложения из теоремы 6.1-3. Свойство компактности этих вложений часто оказывается полезным. Число p^* определено в теореме 6.1-3.

Теорема 6.1-5 (теорема вложения Реллиха—Кондрашова). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $m \geqslant 0$ — целое число и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда имеют место следующие компактные вложения:*

$$W^{m,p}(\Omega) \Subset L^q(\Omega) \text{ для всех } q,\ 1 \leqslant q < p^*, \text{ если } m < \frac{n}{p},$$

$$W^{m,p}(\Omega) \Subset L^q(\Omega) \text{ для всех } q,\ 1 \leqslant q < \infty, \text{ если } m = \frac{n}{p},$$

$$W^{m,p}(\Omega) \Subset \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}), \text{ если } \frac{n}{p} < m.$$ ∎

В качестве частного случая теоремы Реллиха—Кондрашова отметим, что *компактное вложение*

$$H^1(\Omega) \Subset L^2(\Omega)$$

имеет место всегда, независимо от размерности n.

Ещё одно важное свойство функций из соболевских пространств $W^{m,p}(\Omega)$ состоит в том, что при не слишком сильных ограничениях на множество Ω эти функции допускают гладкие аппроксимации. Пространство $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ было определено в § 1.3.

Теорема 6.1-6 (об аппроксимации гладкими функциями). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $m \geqslant 0$ — целое число и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда*

$$\{\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})\}^- = W^{m,p}(\Omega),$$

где замыкание берётся относительно нормы $\| \ \|_{m,p,\Omega}$. ■

Перейдём теперь к рассмотрению различных свойств, которые ради простоты мы сформулируем для частного случая $m=1$, т. е. для функций из пространства Соболева $W^{1,p}(\Omega)$.

Рассмотрим непрерывную функцию $v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Согласно классическому определению её следа $\operatorname{tr} v$ на границе Γ множества Ω, имеем $\operatorname{tr} v(x) = v(x)$ для всех $x \in \Gamma$. Одно из замечательных свойств функций, принадлежащих соболевским пространствам, состоит в возможности и для них определить „следы“ на границе в некотором обобщённом смысле, даже когда эти функции не являются непрерывными. Такое обобщение основано на следующем наблюдении. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$; тогда можно показать, что отображение

$$\operatorname{tr}\colon \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}) \to L^q(\Gamma)$$

корректно определено и непрерывно, если в пространстве $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ введена норма $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$, причём

$$1 \leqslant p < n \quad \text{и} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{(n-1)}\left(\frac{p-1}{p}\right)$$

(пространства $L^q(\Gamma)$ были определены в § 1.6). Поскольку пространство $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W^{1,p}(\Omega)$ (теорема 6.1-6) и пространство $L^p(\Gamma)$ полно, то на основании известного результата функционального анализа можно заключить, что существует единственный линейный непрерывный оператор, действующий из $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^q(\Gamma)$ и совпадающий с „классическим“ оператором tr на подпространстве $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Это продолжение оператора tr также обозначается символом tr и называется **оператором следа.** Теперь мы приведём различные свойства оператора следа, а также укажем, каким образом он связан с пространством $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Теорема 6.1-7 (свойства оператора следа). *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^n$.

(a) *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда*

$$\operatorname{tr} \in \mathscr{L}\left(W^{1,p}(\Omega),\ L^{p^\#}(\Gamma)\right), \text{ где } \frac{1}{p^\#} = \frac{1}{p} - \frac{1}{(n-1)}\left(\frac{p-1}{p}\right), \quad \text{если } 1 \leqslant p < n,$$

$$\operatorname{tr} \in \mathscr{L}\left(W^{1,p}(\Omega),\ L^q(\Gamma)\right) \text{ для } 1 \leqslant q < \infty, \quad \text{если } p = n,$$

$$\operatorname{tr} \in \mathscr{L}\left(W^{1,p}(\Omega),\ \mathscr{C}^0(\Gamma)\right), \quad \text{если } n < p.$$

(b) *Если* $1 < p < n$, *то оператор* $\operatorname{tr}\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Gamma)$ *компактен для всех* q, *таких что* $1 \leqslant q < p^\#$.

(c) *Пусть* $1 \leqslant p < n$. *Тогда*

$$\operatorname{tr}\left(W^{1,p}(\Omega)\right) \subsetneqq L^{p^\#}(\Gamma),$$

$$\left\{\operatorname{tr}\left(W^{1,p}(\Omega)\right)\right\}^- = L^p(\Gamma),$$

где замыкание берётся относительно нормы пространства $L^p(\Gamma)$.

(d) *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{v \in W^{1,p}(\Omega);\ \operatorname{tr} v = 0\right\}. \qquad \blacksquare$$

Соотношение $\operatorname{tr}\left(W^{1,p}(\Omega)\right) \subsetneqq L^{p^\#}(\Gamma)$ лежит в основе определения *пространства следов*

$$W^{1-1/p,\,p}(\Gamma) := \operatorname{tr}\left(W^{1,p}(\Omega)\right) \text{ при } 1 < p < n,$$

которое, таким образом, состоит из следов всех функций, принадлежащих $W^{1,p}(\Omega)$.

Если $1 \leqslant p < n$, то равенство $\operatorname{tr} v = 0$ в утверждении (d) означает, что функция $\operatorname{tr} v$ представляет собой нулевой элемент в пространстве $L^{p^\#}(\Gamma)$. В большинстве случаев, когда не может возникнуть недоразумений, символ „tr“ принято опускать. Поэтому, учитывая, что функции, совпадающие da-почти-всюду, отождествляются, перепишем соотношение (d) в виде

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{v \in W^{1,p}(\Omega);\quad v = 0 \ da\text{-п.в. на } \Gamma\right\}.$$

Нам также будут встречаться пространства типа

$$V = \left\{v \in W^{1,p}(\Omega);\ \operatorname{tr} v = 0 \text{ на } \Gamma_0\right\},$$

где Γ_0 — некоторое $\mathrm{d}a$-измеримое подмножество Γ; тогда аналогично предыдущему соотношение „$\operatorname{tr} v = 0$ на Γ_0“ означает, что как элемент пространства $L^{p^\#}(\Gamma)$ функция $\operatorname{tr} v$ равна нулю на подмножестве Γ_0. В силу указанных выше соображений, мы можем дать следующее эквивалентное определение для такого пространства V:

$$V = \{v \in W^{1,p}(\Omega); \quad v = 0 \ \mathrm{d}a\text{-п.в. на } \Gamma_0\}.$$

Неравенство Пуанкаре (теорема 6.1-2) допускает два полезных обобщения, одно из которых связано с оператором следа.

Теорема 6.1-8 (обобщённые неравенства Пуанкаре). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *Существует постоянная c_0, такая что*

$$\boxed{\int_\Omega |v|^p \,\mathrm{d}x \leqslant c_0 \left\{ \int_\Omega |\mathbf{grad}\, v|^p \,\mathrm{d}x + \left| \int_\Omega v \,\mathrm{d}x \right|^p \right\} \quad \text{для всех } v \in W^{1,p}(\Omega).}$$

(b) *Пусть Γ_0 есть $\mathrm{d}a$-измеримое подмножество на Γ с $\mathrm{d}a\text{-meas}\,\Gamma_0 > 0$. Тогда существует постоянная c_1, такая что*

$$\boxed{\int_\Omega |v|^p \,\mathrm{d}x \leqslant c_1 \left\{ \int_\Omega |\mathbf{grad}\, v|^p \,\mathrm{d}x + \left| \int_{\Gamma_0} v \,\mathrm{d}a \right|^p \right\} \quad \text{для всех } v \in W^{1,p}(\Omega).} \quad \blacksquare$$

В заключение этого обзора приведём обобщение на случай функций из пространств Соболева основной формулы Грина, справедливой для гладких функций (см. § 1.6). Напомним, что единичный вектор внешней нормали существует $\mathrm{d}a$-почти-всюду на границе области.

Теорема 6.1-9 (формула Грина в пространствах Соболева). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{n} = (n_i)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Пусть $u \in W^{1,p}(\Omega)$ и $v \in W^{1,q}(\Omega)$, причём*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 1 + \frac{1}{n}, \text{ если } 1 \leqslant p < n \text{ и } 1 \leqslant q < n,$$
$$1 < q, \text{ если } n \leqslant p,$$
$$1 < p, \text{ если } n \leqslant q.$$

Тогда при каждом $i = 1, 2, \ldots n$ *функция* uvn_i *принадлежит пространству* $L^1(\partial\Omega)$ *и*

$$\boxed{\int_\Omega (\partial_i u)\, v\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \partial_i v\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uvn_i\, \mathrm{d}a.}$$ ■

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и $X(\Omega)$ обозначает одно из векторных пространств, рассмотренных в этом параграфе. Будем обозначать через $\boldsymbol{X}(\Omega)$ соответствующее пространство векторнозначных или тензорнозначных функций, компоненты которых принадлежат $X(\Omega)$. Полунорма или норма в пространстве $\boldsymbol{X}(\Omega)$ обозначается тем же символом, что и в $X(\Omega)$, а именно $|\ |$ или $\|\ \|$. Поясним это на примерах:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) = \{\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_i);\ \vartheta_i \in \mathcal{D}(\Omega),\ 1 \leqslant i \leqslant 3\},$$
$$\boldsymbol{L}^2(\Omega) = \{\boldsymbol{e} = (e_{ij});\ e_{ij} \in L^2(\Omega),\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 3\},$$
$$|\boldsymbol{e}|_{0,\Omega} = \left\{\sum_{i,j=1}^{3} |e_{ij}|_{0,\Omega}^2\right\}^{1/2},$$
$$\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) = \{\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij});\ \sigma_{ij} \in W^{1,p}(\Omega),\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 3\},$$
$$\|\boldsymbol{\Sigma}\|_{1,p,\Omega} = \left\{\sum_{i,j=1}^{3} \|\sigma_{ij}\|_{1,p,\Omega}^p\right\}^{1/p} \quad \text{и т. д.}$$

6.2. Краевые задачи линеаризованной теории упругости

Для однородного изотропного упругого материала, отсчётная конфигурация которого отвечает естественному состоянию, рассмотрим *смешанную краевую задачу с граничными условиями на перемещения и напряжения*. Будем предполагать, что *приложенные силы являются замороженными нагрузками* и что *граничное условие на положения имеет вид* $\varphi = \mathbf{id}$ на Γ_0. В этом случае соответствующая краевая задача относительно вектора перемещений $\boldsymbol{u}$ записывается в виде (см. § 5.1)

$$\boxed{\begin{aligned}
&-\operatorname{\mathbf{div}} \{(\boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u})\, \check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\} = \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega,\\
&\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma_0,\\
&(\boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u})\, \check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \text{ на } \Gamma_1.
\end{aligned}}$$

Функция реакции $\check{\boldsymbol{\Sigma}}$ для второго тензора напряжений Пиола—Кирхгофа определена в окрестности $\mathbb{V}(\boldsymbol{0})$ начала координат в $\mathbb{S}^3$ (теорема 1.8-3), и при умеренных предположениях о регулярности она удовлетворяет соотношению (теорема 3.8-1)

$$\boxed{\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + o(\|\boldsymbol{E}\|),}$$

где λ и μ — *постоянные Ламэ* рассматриваемого материала. Тензор деформации Грина—Сен-Венана $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})$ выражается через градиент перемещений $\nabla\boldsymbol{u}$ следующим образом:

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{u}).}$$

Следует обратить внимание на тот факт, что рассмотрения, проводимые в этом разделе, *применимы и к краевым задачам, в которых по всей границе заданы только перемещения* (т. е. $\Gamma = \Gamma_0$), *но не подходят для задач с условиями на напряжения по всей границе* ($\Gamma = \Gamma_1$). Линеаризация последних задач представляет определённые трудности, которые вкратце обсуждаются в § 6.7.

Наша цель — формально вычислить в точке $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ *производную* **оператора нелинейной теории упругости** $\mathcal{A}$, *задаваемого левыми частями краевой задачи с граничными условиями на перемещения и напряжения.* Для того чтобы оператор $\mathcal{A}$ был корректно определён, в следующей теореме делаются предположения, требующие, в частности, достаточной гладкости как функции реакции $\check{\Sigma}$, так и функций из пространства, обозначаемого $\boldsymbol{W}(\Omega)$, — по этой причине мы говорим о „формальном" вычислении производной. Кроме того, указанные предположения ещё не гарантируют дифференцируемость оператора $\mathcal{A}$, доказательство которой требует значительных усилий, как это будет видно в § 6.6, где дифференцируемость отображения $\mathcal{A}$ установлена в случае пространств

$$\boldsymbol{W}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma_0\},$$
$$\boldsymbol{F}(\Omega) = \boldsymbol{L}^p(\Omega),\ \ \boldsymbol{G}(\Gamma_1) = \mathscr{C}^0(\Gamma_1)$$

при некотором $p > 3$.

Теорема 6.2-1 (линеаризация смешанной задачи с граничными условиями на перемещения и напряжения). *Пусть* $\check{\Sigma}\colon \mathbb{V}(\boldsymbol{0}) \subset \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ — *функция реакции для однородного изотропного упругого материала, отсчётная конфигурация которого соответствует естественному состоянию. Предположим, что можно найти:*

(а) *окрестность нуля* $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{o})$ *нормированного векторного пространства* $\boldsymbol{W}(\Omega)$, *состоящего из вектор-функций* $\boldsymbol{v}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, *удов-*

летворяющих граничному условию $v = o$ *на* Γ_0, *такую что* $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{V}(\boldsymbol{0})$ *для* $v \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{o})$;

(b) *нормированное векторное пространство* $\boldsymbol{F}(\Omega)$, *состоящее из вектор-функций, определённых в* Ω, *такое что*

$$\boxed{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{o}) \subset \boldsymbol{W}(\Omega) \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}) := -\,\mathbf{div}\,\{(\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{v})\,\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}))\} \in \boldsymbol{F}(\Omega);}$$

(c) *нормированное векторное пространство* $\boldsymbol{G}(\Gamma_1)$, *состоящее из вектор-функций, заданных на* Γ_1, *такое что*

$$\boxed{\boldsymbol{v} \in V(\boldsymbol{o}) \subset \boldsymbol{W}(\Omega) \Rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{v})\,\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}))\,\boldsymbol{n}\,|_{\Gamma_1} \in \boldsymbol{G}(\Gamma_1),}$$

причём оператор нелинейной теории упругости

$$\boxed{\mathcal{A} : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{o}) \subset \boldsymbol{W}(\Omega) \to \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{v})) \in \boldsymbol{F}(\Omega) \times \boldsymbol{G}(\Gamma_1)}$$

является дифференцируемым в точке $v = \boldsymbol{o}$.

Тогда производная Фреше $\mathcal{A}'(\boldsymbol{o}) = (\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}), \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{o}))$ *действует на произвольный элемент* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}(\Omega)$ *следующим образом*:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{A}'(\boldsymbol{o})\,v = (-\,\mathbf{div}\,\{\lambda\,(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{e}(v))\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(v)\},&\\ \{\lambda\,(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{e}(v))\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(v)\}\,\boldsymbol{n}) \in \boldsymbol{F}(\Omega) \times \boldsymbol{G}(\Gamma_1),&\end{aligned}}$$

где

$$\boxed{\boldsymbol{e}(v) := \frac{1}{2}\left(\nabla v^{\mathrm{T}} + \nabla v\right).}$$

Доказательство. Для вычисления $\mathcal{A}'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{v}$, в предположении существования производной $\mathcal{A}'(\boldsymbol{o})$, достаточно найти линейные по $\boldsymbol{v}$ члены, входящие в разность $\{\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) - \mathcal{A}(\boldsymbol{o})\}$, куда вместо $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})$ и $\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E})$ подставлены их разложения первого порядка, а именно

$$\boldsymbol{E}(v) = \boldsymbol{e}(v) + o\left(\|\boldsymbol{v}\|_{W(\Omega)}\right),$$
$$\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}) = \lambda\,(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + o(\|\boldsymbol{E}\|).$$

Таким образом находим, что

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{o}) = -\,\mathbf{div}\,\{\lambda\,(\mathrm{tr}\,e(\boldsymbol{v}))\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\} + o\left(\|\boldsymbol{v}\|_{W(\Omega)}\right) \text{ в } \boldsymbol{F}(\Omega),$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{o}) = \{\lambda\,(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}))\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\}\,\boldsymbol{n} + o\left(\|v\|_{W(\Omega)}\right) \text{ в } \boldsymbol{G}(\Gamma_1).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. ■

Предположим теперь, что мы находимся в ситуации, когда применима теорема 6.2-1. Тогда, по определению, **линеаризованной краевой задачей с граничными условиями на перемещения и напряжения,** которая соответствует рассматриваемой задаче с условиями на перемещения и напряжения, является следующая *линейная краевая задача*: при заданных $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) \in \boldsymbol{F}(\Omega) \times \boldsymbol{G}(\Gamma_1)$ найти $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}(\Omega)$, такое что

$$\boxed{\mathscr{A}'(\boldsymbol{o})\,\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{o})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}, \end{cases}}$$

или, в более явном виде,

$$\boxed{\begin{aligned} &-\operatorname{\mathbf{div}}\{\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\} = \boldsymbol{f} \ \text{в}\ \Omega, \\ &\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \ \text{на}\ \Gamma_0, \\ &\{\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \ \text{на}\ \Gamma_1, \end{aligned}}$$

где

$$\boxed{\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) := \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\boldsymbol{u})}$$

— **линеаризованный тензор деформации.** Отображение

$$\boxed{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\colon\ \boldsymbol{v} \to -\operatorname{\mathbf{div}}\{\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\}}$$

называется **оператором линеаризованной теории упругости.** Следует отметить, что его вид не зависит от выбора топологии в пространствах $\boldsymbol{W}(\Omega)$, $\boldsymbol{F}(\Omega)$, $\boldsymbol{G}(\Gamma_1)$.

В покомпонентной записи линеаризованная задача с условиями на перемещения и напряжения выглядит так:

$$\boxed{\begin{aligned} &-\partial_j(a_{ijpq}e_{pq}(\boldsymbol{u})) = f_i \ \text{в}\ \Omega, \\ &u_i = 0 \ \text{на}\ \Gamma_0, \\ &a_{ijpq}e_{pq}(\boldsymbol{u})\,n_j = g_i \ \text{на}\ \Gamma_1, \end{aligned}}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} &a_{ijpq} = \lambda\delta_{ij}\delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}), \\ &e_{pq}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\partial_p u_q + \partial_q u_p). \end{aligned}}$$

Отметим, что *постоянные* a_{ijpq} *являются компонентами тензора упругости* $\mathsf{A}(\boldsymbol{I})$ (см. § 5.9).

Мы хотим особо подчеркнуть, что, на наш взгляд, *указанная линейная задача представляет собой „производную в нуле" краевой задачи трёхмерной теории упругости с граничными условиями на перемещения и напряжения.* Именно поэтому она является чрезвычайно удобным математическим средством для доказательства существования решений в нелинейной теории упругости (см. дальнейшие результаты настоящей главы); она также незаменнма при численной аппроксимации решений в различных задачах техники (см., например, Ciarlet [1978], Zienkiewicz [1977]); и, наконец, невозможно переоценить её значение для качественного анализа упругих конструкций (см., например, von Karman & Biot [1940], Ландау и Лифшиц [1967], Fraeijs de Veubeke [1979], Valid [1977], Bamberger [1981]). Но при всех своих достоинствах приведённая выше *линейная задача не может быть принята в качестве модели*; помимо прочего, как показано в работе Fosdick & Serrin [1979], *она не удовлетворяет аксиоме независимости материала от системы отсчёта* (см. упражнение 3.7). Поэтому мы будем избегать обычного выражения „краевая задача «линейной» теории упругости", которое не соответствует истинному положению вещей. *Теория упругости не может быть линейной!*

Подобным же образом не следует считать перемещением неизвестное $\boldsymbol{u}$, *входящее в линеаризованную задачу, а линеаризованный тензор деформации* $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$ *рассматривать как тензор деформации; также нельзя принимать выражение* $\{\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\}$ *в качестве одного из трёх тензоров напряжений.* Тем не менее есть основания ожидать, что при определённых условиях имеется возможность доказать, что неизвестные $\boldsymbol{u}$ и $\{\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\}$ служат *аппроксимациями* „истинного" вектора перемещений и второго тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа соответственно. Описание подобных ситуаций составляет один из предметов настоящей главы (теорема 6.8-1).

Замечание. Линеаризованное определяющее уравнение $\boldsymbol{u} \to \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$ часто называют *законом Гука.* ■

Отметим, сколь существенно при выводе указанной линейной задачи предположение о том, что отсчётная конфигурация соответствует *естественному состоянию.* Действительно, это предположение проявляется в отсутствии члена нулевого порядка в разложении функции реакции $\check{\Sigma}$ вблизи точки $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$; кроме того, из него следует, что $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ *является частным решением, отвечающим* $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{o}$; последнее обстоятельство чрезвычайно важно для применения теоремы о неявной функции (см. § 6.7).

Когда мы говорим о **краевых задачах линеаризованной теории упругости,** мы имеем в виду три задачи, а именно полученную выше **линеаризованную задачу с граничными условиями на перемещения и напряжения, линеаризованную задачу с условиями на перемещения** и **линеаризованную задачу с условиями на напряжения**, которая получается аналогично, хотя, как было упомянуто, при этом возникают определённые трудности.

* 6.3. Краткий обзор математических результатов линеаризованной теории упругости

Имеется целый ряд описаний линеаризованной теории упругости с математической точки зрения, среди которых классическим можно считать трактат Гёртина (Gurtin [1972]). Другие современные подходы преимущественно математического характера излагаются в работах: Knops & Payne [1971], Fichera [1972a, 1972b], Duvaut & Lions [1972], Villagio [1971], Nečas & Hlaváček [1981]. Здесь мы ограничимся обзором некоторых основных свойств линеаризованной задачи с граничными условиями на перемещения и напряжения в связи с вопросами существования, единственности и регулярности её решений. При этом мы будем следовать методу, хорошо известному в теории уравнений с частными производными: сначала исходная линейная задача с помощью интегрирования по частям формально записывается в *слабой форме* (теорема 6.3-1); такая запись позволяет установить *существование решений в пространстве* $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ (теорема 6.3-5); принцип получения подобных результатов о существовании весьма прост (теорема 6.3-2), однако его применение в конкретных ситуациях не столь просто, поскольку предполагает, в частности, наличие чрезвычайно важного *неравенства Корна* (теорема 6.3-3); и наконец, устанавливается результат о регулярности (теорема 6.3-6), который показывает, что при определённых условиях *обобщённое решение, найденное в пространстве* $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$, обладает дополнительной регулярностью, достаточной для того, чтобы считать это решение „классическим“ (т. е. дифференцируемым в обычном смысле).

Теорема 6.3-1 (линеаризованная задача с граничными условиями на перемещения и напряжения в слабой форме). *Линейная краевая задача относительно неизвестного* $\boldsymbol{u}$

$$\boxed{\begin{aligned}&-\operatorname{div}\{\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\}=\boldsymbol{f}\ \text{в}\ \Omega,\\&\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}\ \text{на}\ \Gamma_0,\\&\{\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{g}\ \text{на}\ \Gamma_1\end{aligned}}$$

формально эквивалентна следующим уравнениям относительно неизвестного $\boldsymbol{u}$:

$$\boxed{B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) \text{ для всех } \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &:= \int_\Omega \{\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) \operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}) + 2\mu \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\}\, \mathrm{d}x, \\ L(\boldsymbol{v}) &:= \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}a \end{aligned}}$$

и через $\boldsymbol{V}$ *обозначено пространство достаточно гладких вектор-функций* $\boldsymbol{v}$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, *равных нулю на* Γ_0.

Доказательство. Пользуясь основной формулой Грина, находим, что для любых достаточно гладких полей симметрических тензоров $\boldsymbol{S}$: $\Omega \to \mathbb{S}^3$ и векторов $\boldsymbol{v}$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ имеет место *формула Грина*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{\mathbf{div}} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \boldsymbol{S} : \nabla \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}x + \int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}a \\ &= -\int_\Omega \boldsymbol{S} : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}x + \int_\Gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}a. \end{aligned}$$

Далее доказательство проводится аналогично доказательству теорем 2.4-1 и 2.6-1. ■

Замечание. Уравнения „$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v})$ для всех $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$“ иногда называют вариантом принципа виртуальной работы. Такая терминология является ошибочной — подлинные принципы виртуальной работы приведены в теоремах 2.4-1 и 2.6-1. ■

Теперь мы докажем один результат о существовании решений, который применим к широкому классу *абстрактных задач* того же вида, что и в теореме 6.3-1, а именно: найти $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$, такое что $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v})$ для всех $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, где B — *непрерывная симметрическая билинейная форма*, а L — *непрерывная линейная форма*, определённая на пространстве $\boldsymbol{V}$. Основываясь на предположениях о *полноте* пространства $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V}$-*эллиптичности* формы B (определение которой дано в следующей теореме), мы покажем, что существование решения есть прямое следствие теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве, а также что полученное решение является единственным элементом, минимизирующим *квадратичный функционал* $J(v)=\frac{1}{2}B(v, v)-L(v)$.

Теорема 6.3-2. *Пусть V — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $L\colon V\to\mathbb{R}$ — непрерывная линейная форма, а $B\colon V\times V\to\mathbb{R}$ — симметрическая непрерывная билинейная форма, обладающая свойством* **V-эллиптичности** *в том смысле, что существует постоянная β, такая что*

$$\boxed{\beta>0 \text{ и } B(v, v)\geqslant\beta\|v\|^2 \text{ для всех } v\in V.}$$

Тогда задача: найти $u\in V$, такое что

$$\boxed{B(u, v)=L(v) \text{ для всех } v\in V,}$$

имеет решение, которое единственно и, кроме того, является единственным решением следующей задачи: найти $u\in V$, такое что

$$\boxed{\begin{aligned}&J(u)=\inf_{v\in V}J(v),\\ &\text{где } J\colon v\in V\to J(v):=\frac{1}{2}B(v, v)-L(v).\end{aligned}}$$

Доказательство. (i) В силу V-эллиптичности и непрерывности билинейной формы B имеем

$$\beta\|v\|^2\leqslant B(v, v)\leqslant\|B\|\|v\|^2 \text{ для всех } v\in V;$$

поэтому симметрическая билинейная форма B является скалярным произведением в пространстве V, и соответствующая норма $v\in V\to\{B(v, v)\}^{1/2}$ эквивалентна исходной. Таким образом, пространство V становится гильбертовым, если в нём ввести указанное скалярное произведение. Согласно *теореме Рисса о представлении линейных функционалов* (по поводу её доказательства см., например, Brezis [1983, p. 81][1]) существует один и только один элемент $l\in V$, такой что

$$L(v)=B(l, v) \text{ для всех } v\in V,$$

и, значит, $u=l$ служит единственным решением нашей задачи.

(ii) Поскольку $J'(u)v=B(u, v)-L(v)$ и $J''(u)(v, v)=B(v, v)$, то любое из разложений Тэйлора для функционала J (тео-

[1] Или Колмогоров и Фомин [1972]′. — *Прим. ред.*

рема 1.1-3) имеет вид

$$J(u+v)=J(u)+\{B(u,\ v)-L(v)\}+\frac{1}{2}B(v,\ v)$$

(это тождество можно проверить и непосредственно). Поэтому

$$B(u,\ v)=L(v) \text{ для всех } v\in V\Rightarrow$$

$$J(u+v)-J(u)=\frac{1}{2}B(v,\ v)\geqslant\frac{\alpha}{2}\|v\|^2 \text{ для всех } v\in V,$$

т. е. u является элементом, минимизирующим функционал J в рассматриваемом случае. Обратно, пусть u — элемент, минимизирующий J, и v — произвольный элемент пространства V. Тогда из неравенств

$$0\leqslant J(u+\vartheta v)-J(u)=\vartheta\left(\{B(u,\ v)-L(v)\}+\frac{\vartheta}{2}B(v,\ v)\right)$$

для всех $\vartheta\in\mathbb{R}$

вытекает, что $B(u,\ v)=L(v)$ (если бы мы имели $B(u,\ v)-L(v)\neq 0$, то разность $J(u+\vartheta v)-J(u)$ была бы отрицательна для достаточно малых значений $|\vartheta|$). Заметим, что к тем же выводам можно прийти и на основании теорем 1.3-1 и 1.3-2. ■

Решение u уравнений „$B(u,\ v)=L(v)$ для всех $v\in V$" существует, даже если билинейная форма B не является симметрической (в этом случае, однако, данные уравнения не соответствуют задаче минимизации). Такое обобщение даётся хорошо известной *леммой Лакса — Милгрэма*.

Ещё одно обобщение заключается в том, чтобы минимизировать функционал J на *непустом замкнутом выпуклом подмножестве* U пространства V. В этом случае задача минимизации эквивалентна (теорема 4.7-8) отысканию элемента $u\in U$, который удовлетворяет *вариационным неравенствам*

$$B(u,\ v-u)\geqslant L(v-u) \text{ для всех } v\in U.$$

По поводу доказательства существования решения см., например, Ciarlet [1978, теорема 1.1.1]; первоначальное доказательство существования, приведённое в работе Lions & Stampacchia [1967], применимо также к вариационным неравенствам с несимметрической билинейной формой [1].

Теория вариационных неравенств в настоящее время является установившейся самостоятельной дисциплиной и имеет многочисленные применения к так называемым задачам „со связями" в *линеаризованной теории упругости*; см., в частности,

[1] См. Fichera [1972a]. — *Прим. ред.*

Duvaut & Lions [1972], Fichera [1972b], Glowinsky, Lions & Trémolières [1976], Baiocchi & Capelo [1978], Kinderlehrer & Stampacchia [1980], Glowinski [1984], Panagiotopoulos [1985], Troianiello [1987], Rodrigues [1987].

Изучение подобных задач со связями в рамках нелинейной трёхмерной теории упругости представляет большой научный интерес, о чем свидетельствует, например, задача о контакте с препятствием без трения, рассмотренная в § 5.3 (см. также § 7.8).

Замечание. Функционал J является *выпуклым* (теорема 4.7-7) и удовлетворяет *неравенству коэрцитивности*:

$$J(v)=\frac{1}{2}B(v,\ v)-L(v)\geqslant\frac{\beta}{2}\|v\|^2-\|L\|\|v\| \quad \text{для всех} \quad v\in\boldsymbol{V}. \ \blacksquare$$

Для того чтобы определить, в каком именно пространстве $\boldsymbol{V}$ следует искать решение линеаризованной задачи в слабой постановке с условиями на перемещения и напряжения, заметим сначала, что *симметрическая билинейная форма B из теоремы* 6.3-1 *непрерывна относительно нормы* $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ (это вытекает из определения нормы $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ и повторно применяемого неравенства Коши—Шварца; см. § 6.1). Таким образом, естественно положить

$$\mathbf{V}:=\{v\in\boldsymbol{H}^1(\Omega);\ v=\boldsymbol{o}\ da\text{-п.в. на } \Gamma_0\}.$$

Теперь заметим, что

$$B(v,\ v):=\int_\Omega\{\lambda\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(v)\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(v)+2\mu\boldsymbol{e}(v):\boldsymbol{e}(v)\}\,dx$$

$$\geqslant 2\mu\int_\Omega \boldsymbol{e}(v):\boldsymbol{e}(v)\}\,dx,$$

поскольку постоянные Ламэ λ, μ реальных материалов положительны (см. § 3.8). Отсюда будет следовать $\boldsymbol{V}$-эллиптичность формы B, если удастся показать, что *на пространстве $\boldsymbol{V}$ полунорма*

$$v\in\boldsymbol{H}^1(\Omega)\to|\boldsymbol{e}(v)|_{0,\Omega}:=\left\{\int_\Omega e(v):e(v)\,dx\right\}^{1/2}$$

является нормой, эквивалентной $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Этот результат, в свою очередь, вытекает из следующего фундаментального неравенства, полученного Корном (Korn [1907, 1908, 1914]):

Теорема 6.3-3 (неравенство Корна). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$. Для каждого $v=(v_i)\in\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ положим*

$$\boldsymbol{e}(v):=\left(\frac{1}{2}(\partial_j v_i+\partial_i v_j)\right)\in\boldsymbol{L}^2(\Omega).$$

Тогда существует постоянная $c > 0$, *такая что*

$$\boxed{\begin{array}{l}\|v\|_{1,\Omega} \leqslant c\left\{|v|_{0,\Omega}^2 + |e(v)|_{0,\Omega}^2\right\}^{1/2} \\ \text{для всех } v \in H^1(\Omega),\end{array}}$$

и, значит, на пространстве $H^1(\Omega)$ *отображение*

$$v \to \left\{|v|_{0,\Omega}^2 + |e(v)|_{0,\Omega}^2\right\}^{1/2}$$

задаёт норму, эквивалентную $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. ∎

Справедливость этого неравенства совсем не очевидна. Различные его доказательства можно найти в работах Friedrichs [1947], Gobert [1962], Hliváček & Nečas [1970a, 1970b], Duvaut & Lions [1972, с. 110], Fichera [1972, § 12], Nečas & Hlaváček [1981, § 6.31]. В книге Темама (Temam [1983]) неравенство Корна доказано для пространства $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$; элементарное доказательство можно найти в статье Nitsche [1981] (см. также Miyoshi [1985, приложение (A)]); очень простые доказательства даны в статьях Kondratiev & Oleinik [1989, 1990]′, Oleinik [1992]′ [1].

Суть этого замечательного неравенства состоит в том, что *гильбертово пространство*

$$H^1(\Omega) = \{v = (v_i) \in L^2(\Omega)\colon\ \partial_j v_i \in L^2(\Omega),\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 3\}$$

совпадает с пространством

$$K(\Omega) := \left\{ v = (v_i) \in L^2(\Omega);\ e_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \in L^2(\Omega),\right.$$
$$\left. 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3 \right\}.$$

Ввиду этого неравенство Корна есть следствие теоремы о замкнутом графике (см., например, Brezis [1983, p. 19] [2]), применённой к тождественному отображению $H^1(\Omega)$ в $K(\Omega)$, которое би-

[1] Последнее замечание добавлено автором при подготовке русского издания. В работах Кондратьева и Олейник [1989, 1990]′ (см. также Kondratiev & Oleinik [1989, 1990]′, Oleinik [1992]′) даны простые доказательства неравенств Корна и указана зависимость постоянной в неравенстве Корна от геометрических характеристик области. Полученные оценки являются в определённом смысле неулучшаемыми. В работе Кондратьева и Олейник [1988]′ доказаны неравенства Корна для неограниченных областей, а также в пространствах $W^{1,p}(\Omega)$ и весовых пространствах и даны их применения к исследованию граничных задач линейной теории упругости в неограниченных областях. — *Прим. ред.*

[2] Или Рисс и Сёкефальви-Надь [1979]′, Колмогоров и Фомин [1976]′. — *Прим. ред.*

ективно, поскольку $\boldsymbol{H}^1(\Omega)=\boldsymbol{K}(\Omega)$, и непрерывно, так как, очевидно, существует постоянная d, для которой

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{K}(\Omega)}:=\left\{|\boldsymbol{v}|_{0,\Omega}^2+|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})|_{0,\Omega}^2\right\}^{1/2}\leqslant d\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \text{ при всех } \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1(\Omega).$$

Следует обратить внимание на полную неожиданность вложения $\boldsymbol{K}(\Omega)\subset\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ (вложение $\boldsymbol{H}^1(\Omega)\subset\boldsymbol{K}(\Omega)$ очевидно). Действительно, функция из $\boldsymbol{K}(\Omega)$ обладает лишь шестью независимыми линейными комбинациями производных из $L^2(\Omega)$, тогда как функция $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ должна иметь все девять частных производных $\partial_i v_j$ из $L^2(\Omega)$.

Опираясь на неравенство Корна, докажем теперь $\boldsymbol{V}$-эллиптичность формы $\boldsymbol{v}\to\int_\Omega \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}):\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x$, откуда и будет следовать $\boldsymbol{V}$-эллиптичность билинейной формы B.

Теорема 6.3-4. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ и Γ_0 — измеримое подмножество на $\Gamma=\partial\Omega$. Тогда*

$$\boldsymbol{V}:=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1(\Omega);\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}\ \mathrm{d}a\text{-п.в. на } \Gamma_0\}$$

есть замкнутое подпространство в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$. Если area $\Gamma_0>0$, *то существует постоянная $c>0$, такая что*

$$c^{-1}\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}\leqslant|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})|_{0,\Omega}\leqslant c\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \text{ для всех } \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V},$$

т. е. на пространстве $\boldsymbol{V}$ полунорма $\boldsymbol{v}\to|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})|_{0,\Omega}$ является нормой, эквивалентной норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Доказательство. (i) Пусть $(\boldsymbol{v}^k)$ — последовательность элементов $\boldsymbol{v}^k\in\boldsymbol{V}$, таких что $\boldsymbol{v}^k\to\boldsymbol{v}$ в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$. В силу теоремы 6.1-7, $\operatorname{tr}\boldsymbol{v}^k\to\operatorname{tr}\boldsymbol{v}$ в $L^4(\Gamma)$, и потому существует подпоследовательность $(\boldsymbol{v}^l)$, такая что $\operatorname{tr}\boldsymbol{v}(x)=\lim\limits_{l\to\infty}\operatorname{tr}\boldsymbol{v}^l(x)$ для $\mathrm{d}a$-почти-всех $x\in\Gamma$. Следовательно, $\operatorname{tr}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ $\mathrm{d}\alpha$-п.в. на Γ_0, и, таким образом, пространство $\boldsymbol{V}$ замкнуто в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$.

(ii) Установим теперь, что *полунорма $\boldsymbol{v}\to|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})|_{0,\Omega}$ является нормой в пространстве $\boldsymbol{V}$.* Для этого достаточно показать, что $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, если $|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})|_{0,\Omega}=0$, $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$. Заметим, что имеют место следующие тождества:

$$\partial_{jk}v_l=\partial_j e_{lk}(\boldsymbol{v})+\partial_k e_{lj}(\boldsymbol{v})-\partial_l e_{jk}(\boldsymbol{v}) \text{ в } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ при } 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3.$$

Отсюда заключаем, что

$$|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})|_{0,\Omega}=0\Rightarrow\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}\Rightarrow\partial_{jk}v_l=0 \text{ в } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ при } 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3.$$

Пользуясь одним классическим результатом теории распределений (см. Schwartz [1966, p. 60]; для его применимости нужно, чтобы множество Ω было связным, но это имеет место в случае областей), устанавливаем, что каждая функция v_i есть полином степени $\leqslant 1$ относительно переменных x_i, т. е. $v_i(x) = a_i + b_{ij}x_j$. Поскольку из равенств $e_{ij}(\boldsymbol{v}) = 0$ вытекают соотношения $b_{ij} = -b_{ij}$, мы можем заключить, что для некоторых постоянных a_i, b_i

$$\begin{aligned} v_1(x) &= a_1 - b_3x_2 + b_2x_3, \\ v_2(x) &= a_2 + b_3x_1 - b_1x_3, \\ v_3(x) &= a_3 - b_2x_1 + b_1x_2, \end{aligned}$$

т. е. существуют векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, такие что

$$\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{ox} \quad \text{для всех} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Следовательно, множество

$$\{x \in \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{o}\} = \begin{cases} \left\{\boldsymbol{ox} = \dfrac{\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{b}|^2} + t\boldsymbol{b};\ t \in \mathbb{R}\right\}, & \text{если } \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o} \text{ и } \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0, \\ \varnothing, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \neq 0, \\ \varnothing, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}, \end{cases}$$

всегда имеет нулевую площадь, а значит,

$$\operatorname{area} \Gamma_0 > 0 \Rightarrow \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega);\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}\ da\text{-п.в. на } \Gamma_0\} = \{\boldsymbol{o}\},$$

что и требовалось показать.

(iii) Очевидно, что неравенство $|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})|_{0,\Omega} \leqslant c\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}$ выполнено для всех $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ (и даже для всех $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$). Если обратное неравенство неверно, то найдётся последовательность $(\boldsymbol{v}^k)$ функций $\boldsymbol{v}^k \in \boldsymbol{V}$, такая что

$$\|\boldsymbol{v}^k\|_{1,\Omega} = 1 \quad \text{для всех} \quad k \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} |\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}^k)|_{0,\Omega} = 0.$$

Поскольку последовательность $(\boldsymbol{v}^k)$ ограничена в пространстве $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$, то в силу *теоремы Реллиха—Кондрашова* (теорема 6.1-5) существует её подпоследовательность $(\boldsymbol{v}^l)$, сходящаяся в пространстве $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Учитывая, что последовательность $(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}^l))$ также сходится в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ (её предел равен нулю, хотя этот факт и не требуется на данном этапе доказательства), мы можем заключить, что $(\boldsymbol{v}^l)$ является *последовательностью Коши* относительно нормы

$$\boldsymbol{v} \to \left\{|\boldsymbol{v}|^2_{0,\Omega} + |\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})|^2_{0,\Omega}\right\}^{112}.$$

В силу *неравенства Корна* (теорема 6.3-3) эта норма эквивалентна $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ на пространстве $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$. Следовательно, данная последовательность Коши сходится к некоторому элементу

$v \in V$, поскольку пространство V *полно* (как замкнутое подпространство в $H^1(\Omega)$; см. п. (i) доказательства). Таким образом, предел v удовлетворяет соотношению

$$|e(v)|_{0,\Omega} = \lim_{l\to\infty} |e(v^l)|_{0,\Omega} = 0,$$

и, значит, $v = o$ (см. п. (ii)). Но это противоречит равенствам $\|v^l\|_{1,\Omega} = 1$, которые должны выполняться при всех l.

(iv) *Пусть* $\Gamma = \Gamma_0$. *В этом случае* $V = H_0^1(\Omega)$ *и эквивалентность норм может быть доказана весьма просто, без помощи неравенства Корна.* Непосредственными вычислениями мы покажем, что

$$|v|_{1,\Omega} \leqslant 2^{1/2} |e(v)|_{0,\Omega} \quad \text{для всех} \quad v \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Отсюда вытекает требуемая эквивалентность, так как, по определению, пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $H_0^1(\Omega)$ (обе полунормы в этом неравенстве непрерывны относительно нормы $\|\cdot\|_{1,\Omega}$) и так как на пространстве $H_0^1(\Omega)$ полунорма $|v|_{1,\Omega}$ является нормой, эквивалентной $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, в силу неравенства Пуанкаре (теорема 6.1-2).

Пусть v: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ — гладкое векторное поле. Простые вычисления показывают, что

$$2e(v) : e(v) - \nabla v : \nabla v = \operatorname{div}\{(\nabla v)v - (\operatorname{div} v)v\} + (\operatorname{div} v)^2.$$

Поскольку, в силу теоремы о дивергенции векторных полей,

$$v = o \quad \text{на} \quad \Gamma \Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div}\{(\nabla v)v - (\operatorname{div} v)v\}\, dx = 0,$$

то мы можем заключить, что

$$2|e(v)|_{0,\Omega}^2 - |v|_{1,\Omega}^2 = 2\int_\Omega e(v) : e(v)\, dx - \int_\Omega \nabla v : \nabla v\, dx$$
$$= \int_\Omega (\operatorname{div} v)^2\, dx \geqslant 0 \text{ для всех } v \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Теорема доказана. ■

В силу п. (ii) доказательства, векторное поле $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ удовлетворяет соотношению $e(v) = 0$ в том и только в том случае, когда существуют векторы a, $b \in \mathbb{R}^3$, такие что $v(x) = a + b \wedge ox$ для всех $x \in \Omega$. Такое векторное поле называется *инфинитезимальным жёстким перемещением*; его связь с *жёсткими деформациями*, т. е. деформациями вида $\psi = id + v$, удовлетворяющими равенству $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ (теорема 1.8-1), рассматривается в упражнении 6.2.

Учитывая предыдущие результаты, установим теперь существование решения $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ линеаризованной задачи в слабой постановке с краевыми условиями на перемещения и напряжения; такое решение называется **слабым** (линеаризованная задача с краевыми условиями на напряжения рассмотрена в упражнении 6.3).

Теорема 6.3-5 (о существовании слабого решения). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ и Γ_0 — измеримое подмножество на $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть заданы постоянные $\mu > 0$, $\lambda > 0$ и функции $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^{6/5}(\Omega)$, $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^{4/3}(\Gamma_1)$, где $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$. Тогда существует одна и только одна функция $\boldsymbol{u}$ из пространства*

$$\boxed{\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega);\quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}\ da\text{-п.в. на } \Gamma_0\},}$$

удовлетворяющая равенствам

$$\boxed{B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}) \text{ для всех } \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned} B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &:= \int_\Omega \{\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) \operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}) + 2\mu \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\}\, dx, \\ L(\boldsymbol{v}) &:= \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v}\, da. \end{aligned}}$$

Кроме того,

$$\boxed{J(\boldsymbol{u}) = \inf_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}} J(\boldsymbol{v}), \quad \text{где} \quad J(\boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{2} B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - L(\boldsymbol{v}).}$$

Доказательство. Из теоремы вложения Соболева (теорема 6.1-3) и непрерывности оператора следа (теорема 6.1-7) вытекает, что линейная форма L непрерывна на пространстве $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ при $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^{6/5}(\Omega)$ и $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^{4/3}(\Gamma_1)$. Поскольку $\lambda > 0$, $\mu > 0$ и area $\Gamma_0 > 0$, то в силу теоремы 6.3-4 непрерывная симметрическая билинейная форма B является $\boldsymbol{V}$-эллиптической. Отсюда, учитывая теорему 6.3-2, получаем требуемое утверждение. ■

Замечание. Результат теоремы 6.3-5 остаётся в силе, если предположения $\lambda > 0$, $\mu > 0$ заменить на более слабые: $\lambda > -2\mu/3$, $\mu > 0$ (упражнение 6.4). ■

И наконец, покажем, что при $\Gamma = \Gamma_0$ слабое решение, найденное в теореме 6.3-5, обладает *дополнительными свойствами регулярности*, если данные задачи (граница Ω и правая часть $\boldsymbol{f}$) достаточно регулярны. В этом случае мы решаем линеаризованную задачу с граничными условиями на перемещения, граничное условие имеет вид $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ и пространство $\boldsymbol{V}$ совпадает с $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Теорема 6.3-6 (о регулярности слабого решения линеаризованной задачи с граничными условиями на перемещения). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ класса $\mathscr{C}^2$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$, $p \geqslant 6/5$, и $\Gamma = \Gamma_0$. Тогда слабое решение $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ линеаризованной краевой задачи с условиями только на перемещения принадлежит пространству $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению*

$$-\operatorname{\mathbf{div}} \{\lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\} = \boldsymbol{f} \quad \text{в} \quad \boldsymbol{L}^p(\Omega).$$

Пусть $m \geqslant 1$ — целое число. Если граница Γ принадлежит классу $\mathscr{C}^{m+2}$ и $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{m,p}(\Omega)$, то слабое решение $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ принадлежит пространству $\boldsymbol{W}^{m+2,p}(\Omega)$.

Доказательство. Мы лишь вкратце укажем основные этапы доказательства, которое достаточно сложно и длинно.

(i) Оператор линеаризованной теории упругости является *сильно эллиптическим*. Поэтому справедлива импликация

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) \Rightarrow \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega) \cap \boldsymbol{H}_0^1(\Omega),$$

если граница Γ принадлежит классу $\mathscr{C}^2$ (Nečas [1967, p. 260][1]). Отсюда следует требуемая регулярность при $m = 0$, $p = 2$.

(ii) Рассматриваемая линеаризованная краевая задача с условиями на перемещения является *равномерно эллиптической* и в соответствии с определением Агмона—Дуглиса—Ниренберга (Agmmon, Douglis & Nirenberg [1964]) удовлетворяет *условиям дополнительности*. Поэтому (см. Geymonat [1965, теорема 3.5]) *отображение*

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) : \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}^p(\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma\}$$
$$\to -\operatorname{\mathbf{div}} \{\lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$$

имеет индекс $\operatorname{ind} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$, *не зависящий от* $p \in \,]1, \infty[$. Напомним, что

$$\operatorname{ind} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) = \dim \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) - \dim \operatorname{Coker} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}),$$

[1] Или Хёрмандер [1986]′. — *Прим. ред.*

где $\operatorname{Coker} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ факторпространство $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ по пространству $\operatorname{Im} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ (индекс корректно определён, только если оба пространства $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ и $\operatorname{Coker} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ конечномерны). В нашем случае, как установлено в п. (i), $\operatorname{Ind} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) = 0$ при $p = 2$, поскольку оператор $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ биективен ($\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) = \{\boldsymbol{o}\}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ инъективен, а $\operatorname{Coker} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) = \{\boldsymbol{o}\}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ сюръективен).

Поскольку $\boldsymbol{V}^p(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ при $p \geqslant 6/5$ (теорема 6.1-3), то отображение $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\colon \boldsymbol{V}^p(\Omega) \to \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ инъективно при этих значениях p (если $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^{6/5}(\Omega)$, то слабое решение единственно в пространстве $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$; см. теорему 6.3-5). Значит, $\dim \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) = 0$. Поскольку, с другой стороны, $\operatorname{ind} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) = 0$, то отображение $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ является также сюръективным. Следовательно, требуемая регулярность имеет место при $m = 0$, $p \geqslant 6/5$ (по поводу случая $1 < p < 6/5$ см. упражнение 6.5).

(iii) Слабое решение $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega) \cap \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega \{\lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\} : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\, dx = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dx \quad \text{для всех } \boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Применение формулы Грина для пространств Соболева (теорема 6.1-9) к левой части этого тождества даёт

$$\int_\Omega \{\lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\} : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\, dx = -\int_\Omega \operatorname{\mathbf{div}} \{\lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\} \cdot \boldsymbol{v}\, dx$$

(интеграл по границе отсутствует, так как $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ на Γ). Отсюда вытекают доказываемые соотношения, поскольку $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^- = \boldsymbol{L}^p(\Omega)$.

(iv) Если регулярность, выражаемая импликацией

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{m,p}(\Omega) \Rightarrow \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^{m+2,p}(\Omega),$$

уже доказана для $m = 0$, то, как следует из результатов, полученных в работах Agmon, Douglis & Nirenberg [1964] и Geymonat [1965] [1], та же регулярность имеет место и для всех других натуральных m, при условии что Γ — поверхность класса $\mathscr{C}^{m+2}$. ■

Результаты теоремы 6.3-6 о регулярности решений можно *распространить и на смешанные линеаризованные задачи с условиями на перемещения и напряжения, но только если замыкания*

[1] См. также Хёрмандер [1986]′. — *Прим. ред.*

множеств Γ_0 *и* Γ_1 *не пересекаются*, например если

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < r_0 < |ox| < r_1\}, \qquad \Gamma_0 = S_{r_0}, \quad \Gamma_1 = S_{r_1}.$$

Эти результаты применимы также к *задачам с граничными условиями на напряжения* (в этом случае при $m=2$ предполагается, что правая часть g принадлежит пространству следов $W^{1-(1/p),\,p}(\Gamma)$, введённому в § 6.1; см. упражнение 6.3).

В случае же когда $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 \neq \varnothing$, слабые решения смешанной задачи обладают свойством „внутренней регулярности" на открытых подмножествах Ω', таких что $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, но эти решения не являются регулярными в точках пересечения $\overline{\Gamma}_0$ и $\overline{\Gamma}_1$, т. е. там, где *меняется тип граничного условия*. Потеря регулярности имеет также место в *угловых точках границы*, даже если в их окрестности тип граничного условия не меняется. См. Grisvard [1985], где обсуждаются скалярные уравнения, и Grisvard [1987], где рассмотрена линеаризованная задача с краевыми условиями только на напряжения.[1]

Имеется обширная литература как о регулярности решений, так и об её отсутствии для эллиптических систем, включающих в себя, в частности, и краевые задачи линеаризованной теории упругости. К уже упомянутым работам Agmon, Douglis & Nirenberg [1964], Geymonat [1965], Nečas [1967] добавим следующие: Кошелев [1958], Lions & Magenes [1968], Fichera [1972a, 1972c], Вишик и Эскин [1968], Giaquinta & Modica [1982].

6.4. Применение теоремы о неявной функции к доказательству существования решений

Рассмотрим сначала *задачу с граничными условиями на перемещения* для *материала Сен-Венана—Кирхгофа*. То что граничные условия принадлежат именно такому типу, существенно (см. § 6.7); выбор же указаниого упругого материала (который в качестве модели обладает серьёзными недостатками, (см. § 3.9) не ограничивает общности, поскольку он позволяет выявить главные *математические* черты метода и вместе с тем сохранить простоту изложения. Таким образом, в настоящем параграфе мы в оснвном будем руководствоваться стремлением облегчить понимание теории.

---

[1] Обзор работ, где изучаются краевые задачи в областях, содержащих нерегулярные точки на границе (углы, конические точки, рёбра и т. д.), приведён в работе Кондратьева и Олейник [1983]. Система теории упругости в области с нерегулярными точками на границе рассмотрена в работах: Кондратьев, Копачек и Олейник [1982]′, Копачек и Олейник [1981]′, Oleinik & Yosifian [1977]′. — *Прим. ред.*

Считая, что приложенные объёмные силы являются замороженными нагрузками, а граничное условие на положения отвечает нулевому перемещению, мы приходим к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} -\operatorname{\mathbf{div}}\{(\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{\Sigma}\}=\boldsymbol{f} & \text{в} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{\Sigma}=\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))=\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) & \text{в} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{o} \quad \text{на} \quad \Gamma=\partial\Omega, \end{cases}$$

или, в покомпонентной записи,

$$\begin{cases} -\partial_j(\sigma_{ij}+\sigma_{kj}\partial_k u_i)=f_i & \text{в} \quad \Omega, \\ \sigma_{ij}=a_{ijpq}E_{pq}(\boldsymbol{u}) \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u_i=0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \end{cases}$$

где Ω — область в $\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей. Напомним, что $\boldsymbol{u}=(u_i)$ — неизвестный вектор перемещений, $\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{ij})$ — неизвестный второй тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа, $\boldsymbol{f}=(f_i)$ — заданная плотность приложенных сил на единицу объёма, постоянные a_{ijpq} заданы соотношениями

$$a_{ijpq}=\lambda\delta_{ij}\delta_{pq}+\mu(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp}),$$

постоянные Ламэ λ и μ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda>0, \quad \mu>0,$$

справедливым для реальных материалов (см. § 3.8), а тензор деформации Грина — Сен-Венана $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})=(E_{ij}(\boldsymbol{u}))$ задан равенствами

$$E_{ij}(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}(\partial_i u_j+\partial_j u_i+\partial_i u_m\partial_j u_m).$$

Замечание. Для доказательства приведённых ниже результатов о существовании решений можно обойтись и более слабыми ограничениями на λ и μ, а именно: $\mu>0$, $\lambda>-2\mu/3$ (см. упражнение 6.4). ■

Рассмотренную выше задачу можно переформулировать в виде задачи, в которой неизвестным является лишь вектор перемещений: найти векторное поле $\boldsymbol{u}$: $\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^3$, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f} & \text{в} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{o} & \text{на} \quad \Gamma, \end{cases}$$

где нелинейный оператор $\boldsymbol{A} = (A_i)$ задан равенствами

$$A_i(\boldsymbol{u}) := -\partial_j \Big(a_{ijpq} e_{pq}(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2} a_{ijpq} \partial_p u_m \partial_q u_m + a_{kjpq} \partial_p u_q \partial_k u_i + \frac{1}{2} a_{kjpq} \partial_p u_m \partial_q u_m \partial_k u_i \Big)$$

и

$$e_{pq}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} (\partial_p u_q + \partial_q u_p)$$

— компоненты линеаризованного тензора деформации $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$. Заметим, что мы воспользовались соотношениями

$$a_{kjpq} e_{pq}(\boldsymbol{u}) = a_{kjpq} \partial_q u_p,$$

вытекающими из свойства симметричности $a_{ijpq} = a_{ijqp}$.

Докажем теперь первый результат о существовании решений.

Теорема 6.4-1. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ класса $\mathscr{C}^2$. Предположим, что определяющее уравнение имеет вид*

$$\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{E}) \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{E}, \quad \text{где} \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0.$$

Тогда для любого числа $p > 3$ найдутся окрестность нуля $\boldsymbol{F}^p$ в пространстве $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ и окрестность нуля $\boldsymbol{U}^p$ в пространстве

$$\boldsymbol{V}^p(\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma\},$$

такие что для всякого $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{F}^p$ краевая задача

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) := -\operatorname{\mathbf{div}} \{(\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u}) \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\} = \boldsymbol{f}$$

имеет в точности одно решение $\boldsymbol{u}$ из $\boldsymbol{U}^p$.

Доказательство. В данном случае решающим является то обстоятельство, что *пространство Соболева $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ при $p>3$ есть банахова алгебра, если Ω — область* (теорема 6.1-4). В силу этого *нелинейный оператор $\boldsymbol{A}$ отображает пространство $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ в пространство $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ и бесконечно дифференцируем (относительно норм этих пространств)*, поскольку он представляет собой сумму линейного, билинейного и трилинейного непрерывных отображений (и, следовательно, все его производные порядка $\geqslant 4$ равны нулю).

Очевидно, что $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ является решением, соответствующим $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}$. Поэтому естественно попытаться доказать, что *отображение $\boldsymbol{A}$ локально обратимо*, т. е. обратимо в окрестности этого частного решения. Иными словами, наша цель состоит в применении *теоремы о неявной функции* (теорема 1.2-3) или её следствия — *теоремы о локальном обращении* (теорема 1.2-4) — в окрестности нуля пространства $\boldsymbol{V}^p(\Omega) \times \boldsymbol{L}^p(\Omega)$. В данном случае необходимо проверить только одно предположение, а именно что *производная* $A'(o)$ *в нуле осуществляет изоморфизм пространств* $V^p(\Omega)$ и $L^p(\Omega)$. Но задача: найти u, такое что

$$A'(o)\,u = f,$$

есть в точности *линеаризованная задача с граничными условиями на перемещения*

$$\begin{cases} -\partial_j(a_{ijpq}e_{pq}(u)) = f_i & \text{в} \quad \Omega, \\ u = o & \text{на} \quad \Gamma, \end{cases}$$

т. е. $A'(o)$ — *оператор линеаризованной теории упругости* (§ 6.2).

Поскольку Γ — поверхность класса $\mathscr{C}^2$, мы можем применить полученные выше *результаты о регулярности решений.* А именно, для любого $f \in L^p(\Omega)$, $p > 3$, задача $A'(o)u = f$ имеет ровно одно решение $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ (теоремы 6.3-5 и 6.3-6).

Следовательно, непрерывный линейный оператор $A'(o)\colon V^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ *биективен.* Обратный к нему оператор также непрерывен, поскольку, в силу *теоремы о замкнутом графике* (см., например, Brezis [1983, p. 19][1]), непрерывный линейный биективный оператор, действующий из одного банахова пространства в другое, является изоморфизмом, т. е. обратный к нему оператор также непрерывен. ■

Теперь наша задача, главным образом, будет состоять в том, чтобы распространить *свойства дифференцируемости* оператора A из теоремы 6.4-1 на нелинейные операторы

$$A\colon u \to A(u) = -\operatorname{div}\{(I + \nabla u)\,\check{\Sigma}(E(u))\},$$

соответствующие функциям реакции $\check{\Sigma}$ более общего вида, которые лучше подходят для описания реальных материалов.

6.5. Отображение $E \in V(0) \subset W^{1,p}(\Omega) \to \check{\Sigma}(E) \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > 3$

Для того чтобы распространить методы § 6.4 на случай определяющего уравнения общего вида, мы должны, во-первых, уточнить, при каких условиях $\check{\Sigma}(E)$ является корректно определённым элементом пространства $W^{1,p}(\Omega)$, когда E принадлежит подмножеству

$$V(0) := \{E \in W^{1,p}(\Omega);\ E(x) \in \mathbb{V}(0) \text{ для всех } x \in \Omega\}.$$

Это подмножество, в силу вложения $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$ при $p > 3$, является окрестностью нуля в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$ (тензор

[1] Или Колмогоров и Фомин [1976]′. — *Прим. ред.*

$\check{\Sigma}(\boldsymbol{E})$ определён лишь для тензоров $\boldsymbol{E}$ из окрестности нуля $\mathbb{V}(\boldsymbol{0})$ в $\mathbb{S}^3$, рассмотренной в теореме 1.8-3). И, во-вторых, мы должны указать, при каких дополнительных предположениях отображение

$$\check{\Sigma}\colon \boldsymbol{E} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{0}) \subset \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega),$$

определённое указанным образом, принадлежит классу $\mathscr{C}^1$. Отметим, что ради сокращения записи мы используем *один и тот же символ* $\check{\Sigma}$ как для функции реакции, отображающей подмножество $\mathbb{V}(\boldsymbol{0})$ из $\mathbb{S}^3$ (пространства симметрических тензоров) в $\mathbb{S}^3$, так и для функции реакции, отображающей подмножество $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{0})$ из $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ (пространства функций со значениями в $\mathbb{S}^3$) в $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$.

Следующий *результат о дифференцируемости* установлен в работе Valent [1978c]. Для простоты изложения мы формулируем его в случае отображений $\check{\Sigma}$, заданных на множестве *всех* матриц (не только симметрических); однако ясно, что его „локальный вариант" (для отображений $\check{\Sigma}$, определённых лишь в окрестности нуля пространства $\mathbb{S}^3$), используемый далее, доказывается совершенно аналогично, разве что усложняются обозначения.

Теорема 6.5-1. *Пусть $p > 3$ и Ω — область в $\mathbb{R}^3$. Для заданных тензорного поля $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ и отображения $\check{\Sigma} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{M}^3; \mathbb{M}^3)$ функция $\check{\Sigma}(\boldsymbol{E})\colon x \in \bar{\Omega} \to \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(x))$ со значениями в пространстве матриц принадлежит пространству $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ и*

$$\partial_q(\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}))(x) = \frac{\partial\check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}(x))\,\partial_q E_{kl}(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega.$$

Если $\check{\Sigma}\colon \mathbb{M}^3 \to \mathbb{M}^3$ — отображение класса $\mathscr{C}^{m+1}$, $m \geqslant 0$, то соответствующее отображение

$$\check{\Sigma}\colon \boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$$

принадлежит классу $\mathscr{C}^m$ и его производная $\check{\Sigma}^{(m)}$ порядка m непрерывна и ограничена в том смысле, что

$$\sup_{\|\boldsymbol{E}\|_{1,p,\Omega} \leqslant r} \|\check{\Sigma}^{(m)}(\boldsymbol{E})\| < \infty \quad \text{для любого} \quad r > 0.$$

При $m = 1$ имеем

$$\check{\sigma}'_{ij}(\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{G} = \frac{\partial\check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E})\,G_{kl} \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{G} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega).$$

Доказательство существенно опирается на тот факт, что для области Ω в $\mathbb{R}^3$ и $p > 3$ пространство Соболева $W^{1,p}(\Omega)$

непрерывно вложено в $\mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$ и является банаховой алгеброй. Для удобства читателя мы разделим доказательство на несколько этапов.

(i) *В предположении что* $\check{\Sigma} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{M}^3; \mathbb{M}^3)$, *покажем, что*

$$\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega),$$

где

$$\partial_q(\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}))(x) = \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}(x))\,\partial_q E_{kl}(x).$$

Для всякого $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ функция

$$\check{\Sigma}(\boldsymbol{E})\colon\ x \in \bar{\Omega} \to (\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}))(x) := \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(x)) \in \mathbb{M}^3$$

непрерывна, поскольку имеет место вложение $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$. Следовательно, она также принадлежит пространству $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$. Чтобы установить её принадлежность пространству $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, попытаемся найти представляющиеся естественными выражения для производных $\partial_q(\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}))$ в пространстве $L^p(\Omega)$, а затем покажем, что они на самом деле являются производными функций $\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E})$ в смысле теории распределений. Проверим, подходят ли в качестве производных следующие функции:

$$\partial_q(\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}))(x) := \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}(x))\,\partial_q E_{kl}(x).$$

Для любого $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$ каждая функция

$$x \in \bar{\Omega} \to \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}(x))$$

непрерывна, поскольку $\check{\Sigma} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{M}^3; \mathbb{M}^3)$, а каждая функция E_{kl} принадлежит $L^p(\Omega)$. Следовательно, определённые выше функции $\partial_q(\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}))$ принадлежат пространству $L^p(\Omega)$. Нам надо проверить, что

$$\int_\Omega \check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}(x))\,\partial_q\vartheta(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}(x))\,\partial_q E_{kl}(x)\,\vartheta(x)\,\mathrm{d}x$$

для всех $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ и всех $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$. Сначала заметим, что эта формула справедлива для всех $\boldsymbol{E} \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega}; \mathbb{M}^3)$, так как её можно свести к простой формуле Грина для гладких функций. Воспользуемся теперь обычным приёмом, основанным на плотности гладких функций в пространствах Соболева: $\{\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})\}^- = W^{1,p}(\Omega)$. Пусть $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ и $(\boldsymbol{E}^n)$ — такая последовательность, что

$$\boldsymbol{E}^n \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega}; \mathbb{M}^3), \qquad \boldsymbol{E}^n \to \boldsymbol{E} \quad \text{в} \quad \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega),$$

а значит, для всех n

$$\int_\Omega \check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}^n(x))\,\partial_q\vartheta(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial\check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}^n(x))\,\partial_q E^n_{kl}(x)\,\vartheta(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пусть ϑ — фиксированная функция из пространства $\mathscr{D}(\Omega)$. В силу вложения $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$, последовательность $(\boldsymbol{E}^n)$ сходится равномерно (т. е. в пространстве $\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$), как и последовательность $(\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}^n))$, которая сходится к $\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E})$, поскольку функции $\check{\sigma}_{ij}$: $\mathbb{M}^3\to\mathbb{M}^3$ непрерывны. Из равномерной сходимости подынтегральных выражений вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}^n(x))\,\partial_q\vartheta(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}(x))\,\partial_q\vartheta(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Функции $\partial\check{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl}$: $\mathbb{M}^3\to\mathbb{M}^3$, по предположению, также непрерывны, поэтому каждая последовательность $((\partial\check{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl}(\boldsymbol{E}^n))$ равномерно сходится к $(\partial\check{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl})(\boldsymbol{E})$. Последовательность $(\partial_q E^n_{kl})$ сходится к $\partial_q E_{kl}$ в $L^p(\Omega)$, и, значит,

$$\frac{\partial\check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}^n)\,\partial_q E^n_{kl}\to\frac{\partial\check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E})\,\partial_q E_{kl}\quad\text{в}\quad L^p(\Omega).$$

Последняя сходимость имеет место также в $L^1(\Omega)$, поскольку множество Ω ограничено. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial\check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}^n(x))\,\partial_q E^n_{kl}(x)\,\vartheta(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial\check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}(x))\,\partial_q E_{kl}(x)\,\vartheta(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Снова предполагая, что* $\check{\Sigma}\in\mathscr{C}^1(\mathbb{M}^3;\,\mathbb{M}^3)$, *покажем, что отображение* $\check{\Sigma}$: $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)\to\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, *определённое в п.* (i), *непрерывно и ограничено в том смысле, что*

$$\sup_{\|\boldsymbol{E}\|_{1,p,\Omega}\leqslant r}\|\check{\Sigma}(\boldsymbol{E})\|_{1,p,\Omega}<\infty\quad\text{для любого}\quad r\geqslant 0;$$

тем самым теорема будет доказана в случае $m=0$. Сначала покажем, что

$$\boldsymbol{E}^n\to\boldsymbol{E}\quad\text{в}\quad\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)\Rightarrow\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}^n)\to\check{\Sigma}(\boldsymbol{E})\quad\text{в}\quad\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega).$$

Тогда последовательность $(\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}^n))$ равномерно сходится к $\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E})$ (п. (i)), тем более она сходится в $L^p(\Omega)$. В силу п. (i)

$$\partial_q\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}^n)=\frac{\partial\check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}^n)\,\partial_q E^n_{kl}\quad\text{для каждого } n.$$

Последовательность $((\partial\breve{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl}(\boldsymbol{E}^n))$ равномерно сходится к $(\partial\breve{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl})(\boldsymbol{E})$, а $(\partial_q E_{kl}^n)$ сходится в $L^p(\Omega)$ к $\partial_q E_{kl}$. Следовательно, последовательность $(\partial_q\breve{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}^n))$ сходится в $L^p(\Omega)$ к $(\partial\breve{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl})(\boldsymbol{E})\,\partial_q E_{kl} = \partial_q\breve{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E})$.

Для доказательства ограниченности отображения $\breve{\Sigma}$ в указанном выше смысле положим

$$C(r) = \sup_{\|\boldsymbol{E}\|_{1,p,\Omega} \leqslant r} |\boldsymbol{E}|_{0,\infty,\Omega} \quad \text{для всех} \quad r \geqslant 0.$$

Тогда

$$\sup_{\|\boldsymbol{E}\|_{1,p,\Omega} \leqslant r} |\breve{\Sigma}(\boldsymbol{E})|_{0,\infty,\Omega} \leqslant \sup_{\left\{\substack{\boldsymbol{G} \in \mathbb{M}^3 \\ |\boldsymbol{G}| \leqslant C(r)}\right.} |\breve{\Sigma}(\boldsymbol{G})| < \infty.$$

Поскольку $\partial_q\breve{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}) = (\partial\breve{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl})(\boldsymbol{E})\,\partial_q E_{kl}$, отсюда заключаем, что

$$\sup_{\|\boldsymbol{E}\|_{1,q,\Omega} \leqslant r} |\partial_q\breve{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E})|_{0,p,\Omega} \leqslant \sup_{\left\{\substack{\boldsymbol{G} \in \mathbb{M}^3 \\ |\boldsymbol{G}| \leqslant C(r)}\right.} \left|\frac{\partial\breve{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{G})\right| |\partial_q E_{kl}|_{0,p,\Omega}.$$

Таким образом, утверждение п. (ii) доказано.

(iii) *Предполагая, что* $\breve{\Sigma} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{M}^3; \mathbb{M}^3)$, *покажем, что отображение* $\breve{\Sigma}$: $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *принадлежит классу* $\mathscr{C}^1$, *его производная* $\breve{\Sigma}' = (\breve{\sigma}'_{ij})$ *задаётся соотношениями*

$$\breve{\sigma}'_{ij}(\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{G} = \frac{\partial\breve{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E})\,G_{kl} \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{G} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$$

и, наконец, что производное отображение

$$\breve{\Sigma}'\colon \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathscr{L}(\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega))$$

ограничено в том смысле, что

$$\sup_{\|\boldsymbol{E}\|_{1,p,\Omega} \leqslant r} \|\breve{\Sigma}'(\boldsymbol{E})\| < \infty \quad \text{для любого} \quad r > 0.$$

В силу доказанного в п. (i), каждая функция $(\partial\breve{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl})(\boldsymbol{E})$ корректно определена как элемент пространства $W^{1,p}(\Omega)$, если $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, поскольку $\partial\breve{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{M}^3; \mathbb{M}^3)$. Таким образом, функция $(\partial\breve{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl})(\boldsymbol{E})\,G_{kl}$ принадлежит пространству $W^{1,p}(\Omega)$ для $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, ввиду того что это пространство — алгебра. По той же причине соответствующее отображение

$$\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \frac{\partial\breve{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E})\,G_{kl} \in W^{1,p}(\Omega)$$

непрерывно при каждом $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$. Для доказательства равенства

$$\check{\sigma}'_{ij}(\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{G} = \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E})\,G_{kl}$$

осталось установить, что при любых $\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{G} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$

$$\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}) - \check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}) - \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E})\,G_{kl} = o\left(\|\boldsymbol{G}\|_{1,p,\Omega}\right).$$

Для любого $x \in \Omega$ мы можем написать

$$\begin{aligned}\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G})(x) - \check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E})(x) &- \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E})(x)\,G_{kl}(x)\\ &= G_{kl}(x)\int_0^1 \left\{ \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}+t\boldsymbol{G})(x) - \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E})(x) \right\} dt.\end{aligned}$$

Для фиксированных индексов $i,\ j,\ k,\ l$ функция

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij}_{kl}\colon (\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{G}) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \to \varepsilon^{ij}_{kl}(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{G})\\ := \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}+t\boldsymbol{G}) - \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E}) \right\} dt \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

принадлежит классу $\mathscr{C}^1$, поскольку $\check{\sigma}_{ij}/\partial E_{kl} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{M}^3\colon \mathbb{M}^3)$, и, значит, *мы можем применить результат п.* (i), *заменяя* $\mathbb{M}^3$ *на* $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3$. Соответствующее отображение (обозначаемое снова через ε^{ij}_{kl})

$$\varepsilon^{ij}_{kl}\colon (\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{G}) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \times \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \varepsilon^{ij}_{kl}(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{G}) \in W^{1,p}(\Omega)$$

корректно определено и непрерывно, так что, в частности,

$$\lim_{\|\boldsymbol{G}\|_{1,p,\Omega}\to 0} \left\|\varepsilon^{ij}_{kl}(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{G})\right\|_{1,p,\Omega} = \left\|\varepsilon^{ij}_{kl}(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{0})\right\|_{1,p,\Omega} = 0$$

для всякого фиксированного $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$.

Пространство $W^{1,p}(\Omega)$ является алгеброй, поэтому найдётся постоянная c, такая что

$$\begin{aligned}\left\|\check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}) - \check{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{E}) - \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(\boldsymbol{E})\,G_{kl}\right\|_{1,p,\Omega}\\ \leqslant c\left\|G_{kl}\right\|_{1,p,\Omega}\left\|\varepsilon^{ij}_{kl}(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{G})\right\|_{1,p,\Omega}.\end{aligned}$$

Таким образом, требуемая дифференцируемость установлена. Непрерывность производного отображения $\check{\boldsymbol{\Sigma}}'\colon\ \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$

$\to \mathscr{L}(W^{1,p}(\Omega))$ вытекает из непрерывности отображений

$$E \in W^{1,p}(\Omega) \to \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(E) \in W^{1,p}(\Omega),$$

которая, в свою очередь, есть следствие п. (ii); ограниченность отображения $\check{\Sigma}'$ также вытекает из п. (ii) и неравенства

$$\|\check{\sigma}'_{ij}(E)\|_{\mathscr{L}(W^{1,p}(\Omega),\, W^{1,p}(\Omega))} = \sup_{\|G\|_{1,p,\Omega} \leqslant 1} \left\| \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}}(E) G_{kl} \right\|_{1,p,\Omega}$$
$$\leqslant 9c \sup_{\substack{\|G\|_{1,p,\Omega} \leqslant 1 \\ 1 \leqslant k,\, l \leqslant 3}} \left\| \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial E_{kl}} E \right\|_{1,p,\Omega},$$

вновь имеющего место потому, что $W^{1,p}(\Omega)$ является алгеброй при $p > 3$.

(iv) В случае $m \geqslant 2$ доказательство проводится по индукции аналогично предыдущему и потому опускается. ∎

Заметим, что ограниченность производных от непрерывных отображений $\check{\Sigma}^{(m)}$ *нельзя* вывести из соображений компактности, поскольку единичный шар в бесконечномерном пространстве (в данном случае пространстве $W^{1,p}(\Omega)$) не является компактным множеством.

6.6. Отображение $A: u \in V(o) \subset W^{2,p}(\Omega) \to -\operatorname{div}\{(I + \nabla u)\, \check{\Sigma}(E(u))\} \in L^p(\Omega)$, $p > 3$

Как уже отмечалось, тензор $\check{\Sigma}(E)$ определён только для тензоров E, принадлежащих множеству

$$\boxed{\mathbb{V}(0) := \left\{ \tfrac{1}{2}(C - I) \in \mathbb{S}^3;\ C \in \mathbb{S}^3_> \right\},}$$

которое является *окрестностью нуля в пространстве* $\mathbb{S}^3$ (теорема 1.8-3). Поскольку при $p > 3$ имеет место вложение $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$ (теорема 6.1-3) и отображение $v \in W^{2,p}(\Omega) \to E(v) \in W^{1,p}(\Omega)$ непрерывно (пространство $W^{1,p}(\Omega)$ — банахова алгебра при $p > 3$; см. теорему 6.1-4), мы можем заключить, что *множество*

$$\boxed{V(0) := \{E \in W^{1,p}(\Omega);\ E(x) \in \mathbb{V}(0) \text{ для всех } x \in \bar{\Omega}\}}$$

является окрестностью нуля в пространстве $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, а также что *множество*

$$\boxed{V(o) := \{v \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega);\ E(v) \in \mathbb{V}(\mathbf{0})\}}$$

является окрестностью нуля в пространстве $\mathbf{W}^{2,p}(\Omega)$.

Установим теперь ряд *свойств, характеризующих дифференцируемость отображения*

$$\boldsymbol{A}: \boldsymbol{u} \in V(\boldsymbol{o}) \subset \mathbf{W}^{2,p}(\Omega) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) := -\operatorname{div}\{(\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u})\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega),$$

в случае когда оно корректно определено. Такого рода свойства, полученные в предположении, что отображение $\check{\boldsymbol{\Sigma}}$: $\mathbb{V}(\mathbf{0}) \subset \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ принадлежит классу $\mathscr{C}^2$, будут использованы для доказательства *существования решений* следующей краевой задачи: найти u, такое что $A(u) = f$ в Ω, $u = o$ на Γ (теорема 6.7-1). Свойства дифференцируемости A в предположении, что $\check{\boldsymbol{\Sigma}}$ — отображение класса $\mathscr{C}^3$, потребуются в § 6.13 для доказательства *сходимости методов приращений*. Условие $\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + o(\boldsymbol{E})$, где $\lambda > 0$, $\mu > 0$, выполняется для всех однородных изотропных упругих материалов, отсчётная конфигурация которых соответствует естественному состоянию (см. § 3.8). Отметим, что для отображений $\check{\boldsymbol{\Sigma}}$: $\mathbb{V}(\mathbf{0}) \subset \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ класса $\mathscr{C}^2$ из этого условия вытекает (теорема 1.3-3) более сильное соотношение $\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + O(\|\boldsymbol{E}\|^2)$, которое и принимается в теоремах 6.6-1 и 6.7-1 в качестве допущения.

Теорема 6.6-1. *Пусть* $p > 3$ *и* Ω — *область в* $\mathbb{R}^3$ *с границей* Γ *класса* $\mathscr{C}^2$. *Пусть задано отображение* $\check{\boldsymbol{\Sigma}} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{V}(\mathbf{0}); \mathbb{S}^3)$. *Тогда соответствующий оператор нелинейной теории упругости*

$$\boldsymbol{A}: \boldsymbol{u} \in V(\boldsymbol{o}) \subset \mathbf{W}^{2,p}(\Omega) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = -\operatorname{div}\{(\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u})\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$$

корректно определён и принадлежит классу $\mathscr{C}^1$. *Если, кроме того, отображение* $\check{\boldsymbol{\Sigma}}$ *удовлетворяет соотношению*

$$\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + O(\|\boldsymbol{E}\|^2),$$

где

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0,$$

то $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ — *оператор линеаризованной теории упругости, причём*

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) \in \mathscr{I}som(\boldsymbol{V}^p(\Omega);\ \boldsymbol{L}^p(\Omega)),$$

где

$$\boldsymbol{V}^p(\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega);\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma\}.$$

Если $\check{\Sigma}$: $\mathbb{V}(\boldsymbol{0}) \subset \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ — *отображение класса* $\mathscr{C}^3$ *и* $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) \in \mathscr{I}som(\boldsymbol{V}^p(\Omega); \boldsymbol{L}^p(\Omega))$, *то существует число* $\rho_0^p > 0$, *такое что для любого* $\rho < \rho_0^p$

$$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{B}_\rho^p \Rightarrow \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{v}) \in \mathscr{I}som(\boldsymbol{V}^p(\Omega); \boldsymbol{L}^p(\Omega)),$$

$$\gamma_\rho^p := \sup_{\boldsymbol{v} \in B_\rho^p} \left\| \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{v})\}^{-1} \right\| < \infty,$$

$$L_\rho^p := \sup_{\begin{cases} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in B_\rho^p \\ \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{w} \end{cases}} \frac{\| \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{v})\}^{-1} - \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{w})\}^{-1} \|}{\| \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \|_{2,p,\Omega}} < \infty,$$

где

$$\boldsymbol{B}_\rho^p := \left\{ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}^p(\Omega);\ \| \boldsymbol{v} \|_{2,p,\Omega} \leqslant \rho \right\}.$$

Доказательство. Отображение $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{o}) \subset \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega) \to \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ получается композицией следующих отображений:

$$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{o}) \subset \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega) \to \nabla \boldsymbol{v} = (\partial_j v_i) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega),$$
$$\nabla \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega),$$
$$\boldsymbol{E} \in \mathbb{V}(\boldsymbol{0}) \subset \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega),$$
$$(v, w) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega) \to vw \in W^{1,p}(\Omega),$$
$$\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \operatorname{\mathbf{div}} \boldsymbol{T} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega);$$

все они класса $\mathscr{C}^\infty$, кроме, быть может, отображения $\check{\Sigma}$. Следовательно, гладкость оператора $\boldsymbol{A}$ определяется гладкостью отображения $\check{\Sigma}$: $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$. В частности, если $\check{\Sigma} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{V}(\boldsymbol{0}); \mathbb{S}^3)$, то $\boldsymbol{A}$ принадлежит классу $\mathscr{C}^1$ (теорема 6.5-1). Чтобы вычислить его производную, которая в этом случае существует, достаточно выделить линейные по $\boldsymbol{v}$ члены в разности $\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})\}$. Таким образом находим, что

$$A_i'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = -\partial_j \{ (\check{\sigma}_{ij}'(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})) + \partial_k u_i \check{\sigma}_{kj}'(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})))(\nabla \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} + \nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{v}) + \check{\sigma}_{kj}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\partial_k v_i \}$$

для всех $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$. Из этого соотношения и условия $\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + o(\boldsymbol{E})$ получаем

$$A_i'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{v} = -\partial_j \left\{ \check{\sigma}_{ij}'(\boldsymbol{0}) \left(\frac{\nabla \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} + \nabla \boldsymbol{v}}{2} \right) \right\} = -\partial_j \{ \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(\boldsymbol{v}) \},$$

где $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} + \nabla \boldsymbol{v})$ — линеаризованный тензор деформации. Иными словами, *производная* $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ *есть просто оператор линеаризованной теории упругости* (§ 6.2), как и в случае материалов Сен-Венана — Кирхгофа. Тем же методом, что и при доказательстве теоремы 6.4-1, устанавливается, что производная $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ — изоморфизм пространств $\boldsymbol{V}^p(\Omega)$ и $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$.

Пусть теперь $\check{\Sigma} \in \mathscr{C}^3(\mathbb{V}(\boldsymbol{0}); \mathbb{S}^3)$. Тогда из теоремы 6.5-1 выводим, что соответствующее отображение $\check{\Sigma}$: $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{0}) \subset \mathbb{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^2$ и его вторая производная ограничена в некотором шаре радиуса $r_0 > 0$, содержащемся в $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{0})$, т. е.

$$\sup_{\|\boldsymbol{E}\|_{1,p,\Omega} \leqslant r} \|\check{\Sigma}''(\boldsymbol{E})\| < \infty \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0.$$

Легко видеть, что все производные других отображений, входящих в определение отображения $\boldsymbol{A}$, ограничены. Поэтому и само $\boldsymbol{A}$, которое также принадлежит классу $\mathscr{C}^2$, имеет ограниченные вторые производные в некотором шаре радиуса $\rho_0 > 0$, содержащемся в $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{0})$. Положим

$$M^p(\rho) := \sup_{\|\boldsymbol{v}\|_{2,p,\Omega} \leqslant \rho} \|\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{v})\| \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0.$$

Тогда

$$\sup_{\|\boldsymbol{v}\|_{2,p,\Omega} \leqslant \rho} \|\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\| \leqslant \rho M^p(\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0,$$

в силу теоремы о среднем значении (теорема 1.2-2). Если $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) \in \mathscr{I}som(\boldsymbol{V}^p(\Omega), \boldsymbol{L}^p(\Omega))$, то мы можем написать

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})(\boldsymbol{I} + \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\}^{-1}(\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})))$$

для всех $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}^p(\Omega)$. Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{v}) \in \mathscr{I}som(\boldsymbol{V}^p(\Omega); \boldsymbol{L}^p(\Omega))$$

для тех $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}^p(\Omega)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\|\boldsymbol{v}\|_{2,p,\Omega} \leqslant \rho, \quad \rho \leqslant \rho_0 \quad \text{и} \quad \rho M^p(\rho) < (\gamma_0^p)^{-1},$$
$$\text{где } \gamma_0^p := \left\|\{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\}^{-1}\right\|,$$

поскольку для таких функций $\boldsymbol{v}$

$$\left\|\{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\}^{-1}(\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}))\right\| \leqslant \gamma_0^p \rho M^p(\rho) < 1.$$

Следовательно, ρ_0^p, входящее в утверждение теоремы, может быть любым числом, для которого выполнены условия $0 < \rho_0^p \leqslant \rho_0$ и $\rho_0^p M^p(\rho_0^p) \leqslant (\gamma_0^p)^{-1}$ (эти неравенства всегда разрешимы, так как функция $\rho \to \rho M^p(\rho)$ непрерывна при $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$ и обращается в нуль при $\rho=0$). Кроме того, имеем

$$\gamma_0^p := \sup_{v\in B_\rho^p} \|\{A'(v)\}^{-1}\| \leqslant \frac{\gamma_0^p}{1-\gamma_0^p\rho M^p(\rho)} < \infty \text{ при } \rho<\rho_0^p,$$

где $B_\rho^p := \{v\in V^p(\Omega);\ \|v\|_{2,p,\Omega}\leqslant\rho\}$. Пусть заданы два элемента v, $w\in B_\rho^p$, $\rho<\rho_0^p$. Пользуясь соотношением

$$\{A'(v)\}^{-1}-\{A'(w)\}^{-1}=\{A'(v)\}^{-1}(A'(w)-A'(v))\{A'(w)\}^{-1}$$

и ещё раз применяя теорему о среднем значении, получаем

$$\|\{A'(v)\}^{-1}-\{A'(w)\}^{-1}\|\leqslant(\gamma_0^p)^2M^p(\rho)\|v-w\|_{2,p,\Omega},$$

и, значит,

$$L_\rho^p := \sup_{\substack{v,w\in B_\rho^p\\ v\neq w}} \frac{\|\{A'(v)\}^{-1}-\{A'(w)\}^{-1}\|}{\|v-w\|_{2,p,\Omega}} < \infty \quad \text{при} \quad \rho<\rho_0^p. \quad \blacksquare$$

Заметим, что из теоремы 6.6-1 следует, что при $\check{\Sigma}\in\mathscr{C}^2(\mathbb{V}(\boldsymbol{0});\mathbb{S}^3)$ *оператор нелинейной теории упругости*

$$\mathscr{A}\colon v\in V(o)\subset W^{2,p}(\Omega)\to(A(v),\ B(v))\in L^p(\Omega)\times\mathscr{C}^0(\Gamma_1),\quad p>3,$$

где

$$(A(v),\ B(v))=(-\operatorname{div}\{(I+\nabla v)\check{\Sigma}(E(v))\},\ \{(I+\nabla v)\check{\Sigma}(E(v))\}n),$$

принадлежит классу $\mathscr{C}^1$ (при $p>3$ оператор следа tr: $W^{1,p}(\Omega)\to\mathscr{C}^0(\Gamma)$ непрерывен; см. теорему 6.1-7) и, значит, дифференцируем в точке $v=o$. Это наблюдение доставляет примеры пространств $W(\Omega)$, $F(\Omega)$, $G(\Gamma_1)$, удовлетворяющих предположениям теоремы 6.2-1.

6.7. Существование решений в пространствах $W^{2,p}(\Omega)$, $p>3$

Теперь мы располагаем всем необходимым для того, чтобы распространить результат о существовании решений, установленный в случае материалов Сен-Венана — Кирхгофа (теорема 6.4-1), на случай общих однородных изотропных материалов, отсчётная конфигурация которых соответствует естественному состоянию.

Теорема 6.7-1 (о существовании решений задачи с краевыми условиями на перемещения). *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^3$ *с границей* Γ *класса* $\mathscr{C}^2$, *и пусть задано отображение* $\check{\Sigma}\in\mathscr{C}^2(\mathbb{V}(\boldsymbol{0});\mathbb{S}^3)$, *удовлетворяющее соотношению*

$$\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + O(\|\boldsymbol{E}\|^2), \quad \text{где} \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0.$$

Тогда для каждого числа $p > 3$ существуют окрестность нуля $\boldsymbol{F}^p$ в пространстве $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ и окрестность нуля $\boldsymbol{U}^p$ в пространстве

$$\boldsymbol{V}^p(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma\},$$

такие что для любого $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{F}^p$ краевая задача

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = -\operatorname{div}\{(\boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u})\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\} = \boldsymbol{f}$$

имеет ровно одно решение $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}^p$.

Доказательство. Из предположений относительно множества Ω и отображения $\check{\Sigma}$ вытекает, что $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o}) \in \mathcal{I}som(\boldsymbol{V}^p(\Omega); \boldsymbol{L}^p(\Omega))$ (теорема 6.6.-1). Поэтому доказательство сводится к применению теоремы о неявной функции в пространстве $\boldsymbol{V}^p(\Omega) \times \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ — решение, соответствующее $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}$), аналогично доказательству теоремы 6.4-1. ■

Замечание. Более явное описание окрестности $\boldsymbol{F}^p$ будет дано в теореме 6.12-1. ■

Идея применить теорему о неявной функции для доказательства локального существования решений задач нелинейной теории упругости восходит к Стоппелли (Stoppelli [1954, 1955]) и ван Бюрену (van Buren [1968]); ниже мы подробнее остановимся на их результатах и последующих обобщениях. Результаты о существовании решений, аналогичные теореме 6.7-1, получены в работах: Valent [1978c, 1985], Marsden & Hughes [1978, p. 204 и далее], Ciarlet & Destuynder [1979] — для случая *задачи с граничными условиями на одни перемещения.* Аналогичные результаты о существовании решений в пространствах $\mathscr{C}^{2,\lambda}(\bar{\Omega})$ установил Валент (Valent [1978c]); по поводу задач с плотностями приложенных объёмных сил вида $\boldsymbol{f}(x) = \hat{\boldsymbol{f}}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))$, $x \in \Omega$, см. Valent [1982] (а также упражнение 6.8). Такие результаты можно получить и в случае неоднородных или анизотропных упругих тел; для этого достаточно предположить, что функция реакции обладает достаточной гладкостью по переменной $x \in \bar{\Omega}$ и что билинейная форма соответствующей линеаризованной задачи $H_0^1(\Omega)$-эллиптична (§ 6.3); при этих допущениях указанные обобщения не вызывают затруднений. В перечисленных работах обычно налагаются условия на функцию реакции для первого тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа, мы же здесь предпочитаем допущения относительно функции реакции для второго тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа.

Замечания. (1) Для открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $W^{2,p}(\Omega)$-регулярность ($p > n$) решений задачи Дирихле для линейных систем второго порядка, эллиптических в смысле Петровского [1950], с правыми частями из $L^p(\Omega)$ была доказана Кошелевым [1958]. Этот автор использовал полученный им результат о регулярности при доказательстве существования решений нелинейных систем, соответствующих оператору, который дифференцируем как отображение из $W^{2,p}(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$.

(2) Теорема о неявной функции применялась также Нечасом (Nečas [1976]) для получения результатов о существовании решений задач о плоской деформации гиперупругих материалов. ■

Важной вехой в математических исследованиях по трёхмерной теории упругости послужили работы Синьорини (Signorini [1930, 1949]), который рассмотрел *задачу с граничными условиями на напряжения*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \hat{T}(I + \nabla u) = f \text{ в } \Omega, \\ \hat{T}(I + \nabla u)n = g \text{ на } \Gamma. \end{cases}$$

Синьорини сделал допущение, что плотности f и g являются аналитическими функциями параметра ε, равными нулю при $\varepsilon = 0$:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f^n, \qquad g = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n g^n$$

и удовлетворяющими условию $\int_\Omega f\, dx + \int_\Gamma g\, da = o$. *Метод возмущений Синьорини* заключается в том, что решение ищется в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u^n$$

и n-й член u^n вычисляется с помощью решения n рекуррентных линейных задач, полученных приравниванием к нулю коэффициентов при ε^n, когда вместо f, g и u в задачу с граничными условиями на напряжения подставлены их формальные разложения (предполагается, что функция реакции $\hat{\boldsymbol{T}}$ аналитична по $\boldsymbol{F}$). На этом пути Синьорини получил теорему единственности и описал условия совместности приложенных сил, при выполнении которых первый член $\boldsymbol{u}^1$ асимптотического разложения $\boldsymbol{u}$ является решением соответствующей линеаризованной задачи с граничными условиями на перемещения; однако Синьорини не занимался вопросами существоваиия. Современное изложение метода Синьорини представлено в работах Grioli [1962, гл. 4], Truesdell & Noll [1965, §§ 63 и 64]. По поводу недавних результатов в этой области см. Bharatha & Levinson [1977], Capriz & Podio-Guidugli [1974, 1979, 1982], Grioli [1983].

Первые строгие результаты о существовании решений в трёхмерной теории упругости принадлежат Стоппелли (Stoppelli [1954, 1955]), который рассмотрел следующую *задачу с краевыми условиями на напряжения*:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I}+\nabla \boldsymbol{u}) = \varepsilon \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \\ \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I}+\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{n} = \varepsilon \boldsymbol{g} \text{ на } \Gamma. \end{cases}$$

Подход Стоппелли состоял в применении теоремы о неявной функции в пространствах $\mathscr{C}^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$, с тем чтобы установить существование решений при достаточно малых $|\varepsilon|$. В его работе $\mathscr{C}^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$-регулярность решения соответствующей линеаризованиой краевой задачи принималась в виде допущения. Тем ие менее, учитывая время написания работ Стоппелли, нельзя не отдать должное его подходу, ибо доказательство принадлежности решения пространству $\mathscr{C}^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ требует не меньших аналитических усилий, чем доказательство его принадлежности пространству $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ (см. теорему 6.3-6, где дан краткий набросок доказательства; см. также Valent [1978c], где описано применение теоремы о неявной функции в пространствах $\mathscr{C}^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ к задаче с граничными условиями на перемещения). Предполагается, что плотности приложенных сил удовлетворяют соотношению

$$\int_\Omega \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}a = \boldsymbol{o}.$$

Кроме того, всякое решение $\boldsymbol{u}$ должно удовлетворять *условию совместности Синьорини*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varphi}(x) \wedge \boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \boldsymbol{\varphi}(x) \wedge \boldsymbol{g}(x)\,\mathrm{d}a, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u},$$

которое вытекает непосредственно из аксиомы баланса момеитов (см. упражнение 2.2). Осуществив линеаризацию этих условий, можно однозначно определить линеаризованную задачу, которая имеет единственное (с точностью до инфинитезимального жёсткого перемещения; см. упражнение 6.3) решение, тогда как множество решений нелинейной задачи с граничными условиями на напряжения либо совпадает с множеством всех жёстких деформаций, если все приложенные силы равны нулю, либо является дискретным множеством (кроме некоторых исключительных случаев); это — лишь один пример особого рода трудностей, возникающих при линеаризации задачи с краевыми условиями на напряжения. Преодолеть подобные трудности позволило сделанное Стоппелли допущение, что приложенные силы не обладают *осью равновесия*, произвольный поворот вокруг которой не влияет на статическое равновесие тела (при условии что плотности приложенных сил фиксированы); в последующих работах Стоппелли значительно ослабил это предположение. Более подробно метод Стоппелли излагается в работах Grioli [1962, гл. 5] и Truesdell & Noll [1965, § 46].

Теория существования решений вблизи естественного состояния, когда на границе заданы только напряжения, стала с тех пор привлекать большой интерес. Упомянем, в частности, работу Lanza de Cristoforis & Valent [1982], где установлено существование решения в одном из пространств $W^{2,p}(\Omega)$ или $\mathscr{C}^{2,\lambda}(\bar{\Omega})$, а также его единственность при дополнительном условии $\int_\Omega \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ (подобное условие налагается и при решении задачи гиперупругости с граничными условиями на напряжения; см. теорему 7.7-2).

Особый интерес представляет *бифуркация решений задач с граничными условиями на напряжения*, которая впервые была рассмотрена в связи с исследованиями *куба Ривлина* (Rivlin [1948, 1974]; см. также Sawyers [1976], Gurtin [1981a, гл. 14]). Подробный анализ этой проблемы проведён в работах Chillingworth, Marsden & Wan [1982, 1983], Marsden & Wan [1983], Wan & Marsden [1984]; по поводу несжимаемых материалов см. также Wan [1986]; введением к этим работам может служить § 73 книги Marsden & Hughes [1983]. Указанные авторы детально исследовали бифуркацию решений при малых нагрузках, в частности для случая, когда приложенные силы имеют ось равновесия. О сложности полученных результатов свидетельствует хотя бы тот факт, что для некоторых случаев приложенных сил и определяющих уравнений найдено до сорока различных решений вблизи естественного состояния. Недавно Ледрэ (Le Dret [1987]) предложил новый подход к этим задачам, рассмотрев условие совместности Сиьорини в качестве соотношения, которым задаётся некоторое многообразие в произведении пространств $W^{2,p}(\Omega) \times L^p(\Omega) \times W^{1-1/p,p}(\Omega)$, содержащем тройку (φ, f, g). Пользуясь различными методами дифференциальной геометрии, Ледрэ получил простое доказательство существования решений задачи с граничными условиями на напряжения при замороженных нагрузках, а также *задачи о воздушном шаре* (§ 5.2); его подход применим также в случае *несжимаемых материалов.* И наконец, Ледрэ сделал более понятной связь между условием совместности Синьорини и результатами о несуществовании решений, имеющими место в линеаризованной теории упругости, когда тензор остаточных напряжений не равен нулю (Ericksen [1963, 1965]).

Теорему о неявной функции в пространстве $\mathscr{C}^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ впервые применил ван Бюрен (van Buren [1968]) для доказательства существования (при достаточно малых $|\varepsilon|$) решений следующей *задачи с краевыми условиями на перемещения*:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{T}}(I + \nabla \boldsymbol{u}) = \varepsilon \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = \varepsilon \boldsymbol{u}_0 \text{ на } \Gamma; \end{cases}$$

однако, как и в работе Стоппелли, существование у линеаризованной задачи решения класса $\mathscr{C}^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ принималось в качестве допущения.

Эффективное применение теоремы о неявной функции для доказательства существования решений задачи с граничными условиями на перемещения опирается на два ключевых свойства, а именно на *дифференцируемость оператора нелинейной теории упругости*

$$\boldsymbol{A}\colon \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}^p(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \boldsymbol{v} = 0 \text{ на } \Gamma\} \to$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = -\operatorname{div}\{(\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u})\, \check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$$

при $p > 3$ и на тот факт, что *производная* $\boldsymbol{A}'(0)$ *осуществляет изоморфизм пространств* $\boldsymbol{V}^p(\Omega)$ *и* $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$; иными словами, слабое решение линеаризованной задачи с условиями на перемещения принадлежит пространству $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$, если правая часть принадлежит $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$. Таким образом, этот подход может быть распространён только на ситуации, когда имеют место оба указанных свойства.

Решения *линеаризованной задачи с граничными условиями на напряжения* также обладают некоторой $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$-регулярностью, и потому аналогичные результаты о существовании могут быть получены и здесь (нужно только преодолеть ряд сложностей, присущих этому случаю). Заметим, однако, что решение линеаризованной задачи с условиями на перемещения или же на напряжения может и не обладать указанной дополнительной регулярностью, *если граница* Γ *не является гладкой*, и тогда теорему о неявной функции применять нельзя. Подобным образом *именно отсутствие результатов о* $W^{2,p}(\Omega)$*-регулярности решений линеаризованных задач смешанного типа с граничными условиями на перемещения и напряжения* (кроме весьма частного случая $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing$; см. § 6.3) *не позволяет применить теорему о неявной* функции к смещанным задачам общего вида. Примечательное исключение из этого правила недавно обнаружил Помье (Paumier [1985]), который показал, что решения линеаризованных задач для пластины с граничными условиями, отвечающими шарнирно опёртому краю, обладают нужной регулярностью.

Чтобы преодолеть трудности, связанные с «нехваткой» регулярности решений линеаризованной задачи, можно попытаться применить теорему о неявной функции в пространствах Соболева «с меньшим показателем», принадлежность которым слабого решения линеаризованной задачи заранее известна. Например, достаточно потребовать липшицевость границы Г, чтобы решение линеаризованной задачи с краевыми условиями на перемещения было элементом пространства $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, если правая часть $\boldsymbol{f}$ принадлежит пространству $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega) := (\boldsymbol{H}_0^1(\Omega))'$ (сопряжённому к $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$; легко проверить, что результаты о существовании решений, полученные в теоремах 6.3-2 и 6.3-5, переносятся на этот случай). Таким образом, естественно возникают следующие вопросы. При каких условиях нелинейный оператор

$$\boldsymbol{A}\colon \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} := -\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{S}}(\nabla \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega) := (\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega))'$$

корректно определён? Если он корректно определён, то при каких условиях он дифференцируем в точке $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$? В последнем случае производная $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})$ снова оказалась бы оператором линеаризованной теории упругости, так что существование решения нелинейной задачи в пространстве $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ могло бы быть установлено.

Следующий результат позволяет утвердительно ответить на первый вопрос. Пусть $\hat{\boldsymbol{S}}\colon \mathbb{M}^3 \to \mathbb{M}^3$ — дифференцируемое отображение, удовлетворяющее *условию линейного роста*: $|\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{F})| \leqslant a + b|\boldsymbol{F}|$ для всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3$. Тогда (см., например, Красносельский, Забрейко, Пустыльник и Соболевский [1966]) при каждом $p > 1$ *оператор* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \hat{\boldsymbol{S}}(\nabla \boldsymbol{u}) \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ *непрерывен*; следовательно, *оператор*

$$\boldsymbol{A}\colon \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} := -\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{S}}(\nabla \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega) := (\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega))'$$

также является непрерывным. К сожалению, дальнейшее продвижение по указанному пути невозможно в силу следующего весьма неожиданного *результата о недифференцируемости* (Valent & Zampieri [1977]). *Предположим, что рассмотренный выше оператор* $\boldsymbol{A}$ *является гомеоморфизмом окрестности точки* $\boldsymbol{o}$ *в пространстве* $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *на окрестность точки о в пространстве* $\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$ *и* $\boldsymbol{A}$ *дифференцируем в точке о. Тогда* $\hat{\boldsymbol{S}}$ *— аффинное отображение.* Иными словами, при таком подходе любой нелинейный оператор исключается!

Операторы вида

$$A\colon u \in X(\Omega) \to \{Au\colon x \to Au(x) = a(x, u(x))\} \in Y(\Omega),$$

где $a\colon \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — заданное отображение, называются *операторами Немыцкого* или *операторами подстановки.* Свойства недифференцируемости этих операторов известны с тех пор, как Вайнберг [1952] показал, что при условии дифференцируемости по Фреше такого оператора, действующего из $X(\Omega) = L^2(\Omega)$ в $Y(\Omega) = L^2(\Omega)$, функция *а аффинна относительно и*, т. е. имеет вид

$$a(x, \zeta) = \alpha(x) + \beta(x)\zeta.$$

Сказанное вовсе не означает, что оператор Немыцкого никогда не может быть дифференцируемым. Например, в § 6.5 мы показали, что оператор Немыцкого $\check{\Sigma}\colon \boldsymbol{E} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ дифференцируем, если $\check{\Sigma}$ — отображение класса $\mathscr{C}^2$ (это утверждение основано на теореме вложения $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$ и том факте, что $W^{1,p}(\Omega)$ — банахова алгебра при $n = 3$, $p > 3$; см. также упражнение 6.9). Более подробно свойство недифференцируемости операторов Немыцкого и связанный с этим вопрос о допустимости линеаризации нелинейных операторов рассмотрены в работах: Вайнберг [1956], Valent & Zampieri [1977], Valent [1978a, 1978b], Dahlberg [1979], Ambrosio, Buttazzo & Leaci [1987], Keeling [1987]. Дифференцируемость и недифференцируемость *функционалов* обсуждаются в статье Martini [1976].

Здесь следует также отметить подход Одена (Oden [1979]), который установил существование решения в пространстве $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ для нелинейных задач с правыми частями из $\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$, при условии что соответствующий нелинейный оператор удовлетворяет *обобщённому неравенству Гординга.*

В заключение стоит упомянуть, что изложенный здесь подход был распространен в работе Le Dret [1985] на случай задачи с граничными условиями на перемещения для *несжимаемых упругих материалов.* При этом неизвестным считается поле $(\varphi, p)\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, являющееся решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{T}}(\nabla\boldsymbol{\varphi}) + \operatorname{div}(p \operatorname{Cof} \nabla\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{f} \text{ в } \Omega, \\ \det \nabla\boldsymbol{\varphi} = 1 \text{ в } \Omega, \\ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{id} \text{ на } \Gamma; \end{cases}$$

здесь $\boldsymbol{\varphi}$, как обычно, — деформация, а p — *гидростатическое давление* (эти уравнения вполне корректны; см. также упражнение 5.9). Идея Ледрэ состоит в применении *теоремы о неявной функции на многообразии* вида

$$\{\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \det \nabla\boldsymbol{\varphi} = 1 \text{ в } \Omega,\ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Таким путём устанавливается локальное существование решений в случае, когда приложенные объёмные силы достаточно малы.

6.8. Сравнение с линеаризованной теорией упругости

Применение теоремы о неявной функции для доказательства существования частного решения *нелинейной* краевой задачи $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ при достаточно „малых" правых частях $\boldsymbol{f}$ значительно облегчает сравнение такого решения с единственным решением соответствующей *линеаризованной* задачи $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$. В следующей теореме сравниваются как векторные поля перемещений, так и поля вторых тензоров напряжений Пиолы — Кирхгофа.

Теорема 6.8-1. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ с границей класса $\mathscr{C}^2$ и задано отображение $\check{\boldsymbol{\Sigma}} \in \mathscr{C}^3(\mathbb{V}(0); \mathbb{S}^3)$, удовлетворяющее соотношению*

$$\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}) = \lambda (\operatorname{tr} \boldsymbol{E}) \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{E} + O(\|\boldsymbol{E}\|^2), \text{ где } \lambda > 0,\ \mu > 0.$$

В обозначениях теоремы 6.7-1, для каждого $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{F}^p$, $p > 3$, пусть $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f})$ — единственное решение из $\boldsymbol{U}^p \subset \boldsymbol{V}^p(\Omega)$ краевой задачи

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = -\operatorname{div}\{(\boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u})\check{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\} = \boldsymbol{f},$$

а $\boldsymbol{u}_{\mathrm{lin}}(\boldsymbol{f})$ — единственное решение из пространства $\boldsymbol{V}^p(\Omega)$ соответствующей линеаризованной задачи с граничными условиями на перемещения

$$A'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{u} = -\operatorname{div}\{\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})\} = \boldsymbol{f}.$$

Тогда

$$\boxed{\begin{aligned}&\| \boldsymbol{u}(\boldsymbol{f})-\boldsymbol{u}_{\text{lin}}(\boldsymbol{f})\|_{2,p,\Omega}=O\left(|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}^{2}\right),\\&\|\Sigma(\boldsymbol{f})-\Sigma_{\text{lin}}(\boldsymbol{f})\|_{1,p,\Omega}=O\left(|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}^{2}\right),\end{aligned}}$$

где

$$\Sigma(\boldsymbol{f})=\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f}))),$$
$$\Sigma_{\text{lin}}(\boldsymbol{f}):=\lambda\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_{\text{lin}}(\boldsymbol{f}))\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_{\text{lin}}(\boldsymbol{f})).$$

Доказательство. Если $\check{\Sigma}\colon \mathbb{V}(\mathbf{0})\subset\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$ — отображение класса $\mathscr{C}^3$, то в силу теоремы 6.5-1 соответствующее отображение $\boldsymbol{A}\colon \boldsymbol{V}(\boldsymbol{o})\subset\boldsymbol{V}^p(\Omega)\to\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^2$ и, значит, неявная функция $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{F}^p\to\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f})\in\boldsymbol{U}^p\subset\boldsymbol{V}^p(\Omega)$ также принадлежит $\mathscr{C}^2$ (теорема 1.2-3). Для вычисления её первой производной продифференцируем соотношение

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f}))=\boldsymbol{f}\quad\text{при всех}\quad\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{F}^p.$$

Получим

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f}))\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{f})=\boldsymbol{id}_{\boldsymbol{L}^p(\Omega)},$$

так что, в частности,

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{o})=\{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\}^{-1}.$$

Следовательно, по формуле Тэйлора—Юнга для дважды дифференцируемых функций (теорема 1.3-3) имеем

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{o})+\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{f}+O\left(|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}^{2}\right)=\boldsymbol{u}_{\text{lin}}(\boldsymbol{f})+O\left(|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}^{2}\right),$$

так как $\boldsymbol{u}_{\text{lin}}(\boldsymbol{f})=\{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\}^{-1}\boldsymbol{f}$. Поскольку $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{F}^p\to\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f})\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$ и $\boldsymbol{E}\in\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)\to\check{\Sigma}(\boldsymbol{E})\in\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ — отображения класса $\mathscr{C}^2$, то и отображение

$$\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{F}^p\to\Sigma(\boldsymbol{f}):=\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f})))\in\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$$

принадлежит классу $\mathscr{C}^2$. Таким образом,

$$\Sigma(\boldsymbol{f})=\Sigma(\boldsymbol{o})+\Sigma'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{f}+O\left(|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}^{2}\right).$$

На основании цепного правила заключаем, что

$$\Sigma(\boldsymbol{o})\boldsymbol{f}=\check{\Sigma}'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{o})\boldsymbol{f}=\lambda\operatorname{tr}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_{\text{lin}}(\boldsymbol{f}))\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_{\text{lin}}(\boldsymbol{f})).\quad\blacksquare$$

Замечание. Если отображение $\check{\Sigma}$ обладает лишь $\mathscr{C}^2$-регулярностью, то $\boldsymbol{A}$ — отображение класса $\mathscr{C}^1$ и в этом случае оценки теоремы 6.8-1 следует заменить на более слабые

$$\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f})-\boldsymbol{u}_{\text{lin}}(\boldsymbol{f})\|_{2,p,\Omega}=O\left(|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}\right),$$
$$\|\Sigma(\boldsymbol{f})-\Sigma_{\text{lin}}(\boldsymbol{f})\|_{1,p,\Omega}=O\left(|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}\right).\quad\blacksquare$$

В настоящее время теорема 6.8-1, по-видимому, представляет собой единственный математически обоснованный результат, позволяющий сравнить нелинейную задачу теории упругости с её линеаризацией около нуля. Ещё ждет своего разрешения трудная проблема обобщения этих результатов на более важные с практической точки зрения краевые задачи, в особенности *задачи смешанного типа с граничными условиями на перемещения и напряжения*, а также на случай *негладкой границы*.

6.9. Свойства сохранения ориентации и инъективности для деформации, отвечающей решению краевой задачи

Установим теперь, что отображение $\varphi = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, отвечающее решению $\boldsymbol{u}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ краевой задачи $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ (теорема 6.7-1), является деформацией (т. е. *инъективно* и *сохраняет ориентацию*), когда приложенные объёмные силы малы в норме пространства $L^p(\Omega)$. Следующий результат получен в работах Valent [1978c, 1982] и Ciarlet & Destuynder [1979, теорема 2.2]

Теорема 6.9-1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 6.7-1. *В обозначениях этой теоремы, для любого* $p > 3$ *существует число* $r_p > 0$, *такое что при*

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{F}^p \quad \text{и} \quad |\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega} \leqslant r_p$$

соответствующая деформация $\varphi = \boldsymbol{id} + \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}^p$, *удовлетворяет соотношениям*

$$\boxed{\begin{array}{l} \det \nabla\varphi > 0 \text{ в } \bar{\Omega}, \\ \text{отображение } \varphi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \text{ инъективно}, \\ \varphi(\Omega) = \Omega, \quad \varphi(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}. \end{array}}$$

Доказательство. Поскольку неявная функция

$$\boldsymbol{f} \in F^p \subset \boldsymbol{L}^p(\Omega) \to \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}^p \subset \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega)$$

непрерывна (и даже непрерывно дифференцируема, однако здесь это не используется) и поскольку при $p > 3$ имеет место непрерывное вложение $\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$, то норму $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathscr{C}^1(\bar{\Omega};\, \mathbb{R}^3)}$ можно сделать меньшей любого наперёд заданного числа, если норма $|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}$ достаточно мала. В частности, найдётся число $r_p > 0$, такое что

$$|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega} < r_p \Rightarrow \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla \boldsymbol{u}(x)| < 1.$$

Поэтому на основании теоремы 5.5-1 заключаем, что

$$\det \nabla\varphi(x) > 0 \quad \text{при всех} \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Для доказательства второго утверждения можно снова применить теорему 5.5-1. Существует постоянная $c(\Omega)$, такая что при

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla u(x)| < c(\Omega)$$

отображение $\varphi = id + u\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ инъективно. Поэтому достаточно выбрать такое r_p, что

$$|f|_{0,p,\Omega} < r_p \Rightarrow \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla u(x)| < c(\Omega).$$

Инъективность отображения φ можно также вывести из теоремы 5.5-2, поскольку при достаточно малом r_p имеем $\det \nabla\varphi > 0$ для всех $x \in \Omega$ и, по предположению, φ совпадает на границе Ω с инъективным отображением (а именно тождественным). Равенства $\varphi(\Omega) = \Omega$, $\varphi(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ следуют из той же теоремы. ■

Замечание. Если известно, что $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ и $\det \nabla\varphi > 0$ в Ω, то инъективность отображения φ можно доказать на основании результата из работы Meisters & Olech [1963], приведённого в теореме 5.5-3 (для этого, однако, необходима связность границы Γ). Действительно, по *теореме Кальдерона* о *продолжении функций из пространств Соболева* (см. Calderón [1961], Nečas [1967, pp. 75—80], Adams [1975, p. 91]) существует продолжение $\varphi^* \in W^{2,p}(\mathbb{R}^3) \subset \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ функции φ, и потому достаточно применить теорему 5.5-3 при $O = \mathbb{R}^n$, $K = \bar{\Omega}$, поскольку, согласно предположению, $\varphi|_{\partial K} = id_{\partial K}$. ■

6.10. Описание метода приращений

Основная трудность при численном расчёте больших деформаций упругих конструкций состоит в правильном обращении с различными *нелинейностями*, входящими в краевые задачи теории упругости. В этой ситуации нашёл широкое применение метод вариации сил от нуля до заданных значений путём последовательных малых „приращений“; при этом на *каждом шаге производится линеаризация задачи и вычисляется соответствующее приближённое решение.* Данный принцип лежит в основе *методов приращений*, по поводу которых заинтересованный читатель может обратиться к следующим доступно написанным изложениям: Oden [1972, §§ 16.5 и 17.5], Washizu [1975, p. 384], Pian

[1976], Argyris & Kleiber [1977], Cescotto, Frey & Fonder [1979], Mason [1980]. Отметим, что в практических расчётах методы приращений чаще всего используются в сочетании с *методом конечных элементов* (см., например, Ciarlet [1978]). Здесь мы будем следовать изложению, данному в работе Bernadou, Ciarlet & Hu [1984].

Опишем сначала один из методов приращений, как он представлен обычно в инженерной литературе. А именно, следуя Васидзу (Washizu [1975, приложение I, § 9], опишем *метод Лагранжа в случае задачи с граничными условиями на перемещения для материала Сен-Венана — Кирхгофа* (ещё один метод предложен в упражнении 6.10). В этом случае краевая задача имеет вид

$$\begin{cases} -\partial_i(\sigma_{ij}+\sigma_{kj}\partial_k u_i)=f_i \text{ в } \Omega, \\ \sigma_{ij}=a_{ijpq}E_{pq}(\boldsymbol{u}) \text{ в } \Omega, \\ \boldsymbol{u}=0 \text{ на } \Gamma, \end{cases}$$

где

$$a_{ijpq}=\lambda\delta_{ij}\delta_{pq}+\mu(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp}), \qquad \lambda>0, \quad \mu>0,$$
$$E_{pq}(\boldsymbol{u})=\tfrac{1}{2}(\partial_p u_q+\partial_q u_p+\partial_p u_m\,\partial_q u_m).$$

Пусть задано произвольное *разбиение*

$$0=\lambda^0<\lambda^1<\ldots<\lambda^n<\lambda^{n+1}<\ldots<\lambda^{N-1}<\lambda^N=1$$

отрезка [0, 1]. Такому разбиению отвечает **метод приращений**, основная идея которого заключается в том, что мы последовательно меняем значение объёмной силы от нуля до заданной величины $\boldsymbol{f}$, на каждом шаге добавляя «малое» *приращение силы*

$$\delta\boldsymbol{f}^n=(\delta f_i^n):=(\lambda^{n+1}-\lambda^n)\boldsymbol{f}, \qquad 0\leqslant n\leqslant N-1,$$

и вычисляем последовательные *приближения* $\boldsymbol{u}^n$ к *точным* решениям $\boldsymbol{u}(\lambda^n\boldsymbol{f})$, отвечающим последовательным значениям сил $\lambda^n\boldsymbol{f}$, причём каждое последующее приближение вычисляется исходя из соответствующей *линеаризации* вблизи предыдущего приближения.

Замечание. Для того чтобы решение $\boldsymbol{u}(\lambda^n\boldsymbol{f})$ существовало и было единственным, мы можем предположить, что найдётся число $p>3$, такое что плотность силы $\boldsymbol{f}$ принадлежит окрестности $\boldsymbol{F}^p$ из теоремы 6.7-1 и что эта окрестность содержит весь отрезок $[\boldsymbol{o}, \boldsymbol{f}]$. Тогда, в силу теоремы 6.7-1, решения $\boldsymbol{u}(\lambda^n\boldsymbol{f})$ существуют и определены единственным образом в окрестности $\boldsymbol{U}^p$. ∎

Для $n=0, 1, \ldots, N-1$ обозначим соответственно через

$$\Delta u_i^n := u_i(\lambda^{n+1}f) - u_i(\lambda^n f),$$
$$\Delta E_{ij}^n := E_{ij}(u(\lambda^{n+1}f)) - E_{ij}(u(\lambda^n f))$$

приращение перемещения и *приращение деформации*, так что соответствующее *приращение напряжений* имеет вид

$$\sigma_{ij}(\lambda^{n+1}f) - \sigma_{ij}(\lambda^n f) = a_{ijpq}\Delta E_{pq}^n,$$
$$\text{где } \sigma_{ij}(\lambda^n f) := a_{ijpq}E_{pq}(u(\lambda^n f)).$$

Так как, по определению,

$$-\partial_j\left(\sigma_{ij}(\lambda^{n+1}f) + \sigma_{kj}(\lambda^{n+1}f)\partial_k u_i(\lambda^{n+1}f)\right) = f_i^{n+1} = f_i^n + \delta f_i^n \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$-\partial_j\left(\sigma_{ij}(\lambda^n f) + \sigma_{kj}(\lambda^n f)\partial_k u_i(\lambda^n f)\right) = f_i^n \text{ в } \Omega,$$

то, учитывая приведённые выше уравнения, получаем, что *е-е приращение перемещения $\Delta u^n := (\Delta u_i^n)$ служит решением следующей краевой задачи* (отметим, что пока мы не рассматривали никаких приближений):

$$\begin{cases} -\partial_j\big(a_{ijpq}\Delta E_{pq}^n + \sigma_{kj}(\lambda^n f)\partial_k \Delta u_i^n \\ \qquad + a_{kjpq}\Delta E_{pq}^n\partial_k u_i(\lambda^n f)\, a_{kjpq}\Delta E_{pq}^n\partial_k \Delta u_i^n\big) = \delta f_i^n \quad \text{в} \quad \Omega, \\ 2\Delta E_{pq}^n = \partial_p \Delta u_q^n + \partial_q \Delta u_p^n + \partial_p \Delta u_m^n \partial_q u_m(\lambda^n f) \\ \qquad + \partial_p u_m^n(\lambda^n f)\partial_q \Delta u_m^n + \partial_p \Delta u_m^n \partial_q \Delta u_m^n \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \Delta u^n = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Теперь мы располагаем всем необходимым для введения *приближённой задачи*. Считая известным n-е перемещение $u(\lambda^n f)$ и заменяя ΔE_{pq}^n и $\sigma_{kj}(\lambda^n f)$ указанными выше выражениями, мы приходим к нелинейной краевой задаче относительно неизвестного вектора Δu^n. Чтобы записать *приближённую задачу, нужно в полученной задаче отбросить все члены, нелинейные относительно неизвестного Δu^n*. Таким образом мы устанавливаем, что *приближение n-го приращения вектора перемещений $\delta u^n = (\delta u_i^n)$* должно быть решением следующей *линейной* **краевой задачи:**

$$\begin{cases} -\partial_j\big(a_{ijpq}\partial_p \delta u_q^n + a_{ijpq}\partial_p u_m^n \partial_q \delta u_m^n \\ \qquad + a_{kjpq}\partial_k u_i^n \partial_p \delta u_q^n + a_{kjpq}\partial_k u_i^n \partial_p u_m^n \partial_q \delta u_m^n \\ \qquad\qquad + a_{kjpq}E_{pq}(u^n)\partial_k \delta u_i^n\big) = \delta f_i^n \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \delta u^n = o \quad \text{на} \quad \Gamma, \end{cases}$$

где $u^n = (u_i^n)$ обозначает *n-е приближение вектора перемещений*.

Следует обратить внимание на *смену обозначений*, когда мы перешли от *точных* решений $u(\lambda^n f)$ и Δu^n к соответствующим *приближениям* u^n и δu^n этих решений. Полученные уравнения можно записать в форме, напоминающей уравнения линеаризованной теории упругости (однако они *не* совпадают с последними, за исключением случая $u^n = o$):

$$-\partial_j\left(\hat{a}_{ijpq}(\nabla u^n)\,\partial_p\,\delta u_q^n\right) = \delta f_i^n \quad \text{в} \quad \Omega,$$

где

$$\hat{a}_{ijpq}(\nabla u^n) = a_{ijpq} + a_{kjpq}\,\partial_k u_i^n + a_{ijrp}\,\partial_r u_q^n + a_{kjpr}\,\partial_r u_q^n\,\partial_k u_i^n + a_{pjsr} E_{sr}(u^n)\,\delta_{iq},$$

а также в *слабой форме*, вводя „пробные“ функции $v = (v_i)$, равные нулю на границе Γ:

$$\int_\Omega \hat{a}_{ijpq}(\nabla u^n)\,\partial_p\,\delta u_q^n\,\partial_j v_i\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \delta f_i^n v_i\,\mathrm{d}x.$$

Это — в точности задача, рассмотренная в книге Washizu [1975, (I-9.42), p. 393].

Предполагая, что приведённая выше краевая задача имеет решение u^n, мы определяем $(n+1)$*-е приближение вектора перемещений*

$$u^{n+1} = u^n + \delta u^n,$$

которое, в свою очередь, позволяет аналогично вычислить приближение $(n+1)$-го приращения вектора перемещений, и т. д. Тем самым метод приращений задан полностью; он завершается вычислением *N-го приближения вектора перемещений* u^N и *N-го приближения тензора напряжений*

$$\Sigma^N := (a_{ijpq} E_{pq}(u^N)),$$

которые, как можно ожидать, стремятся к точным решениям $u = u(f)$ и $\Sigma = (a_{ijpq} E_{pq}(u))$, когда $\max_{0 \leqslant n \leqslant N-1}(\lambda^{n+1} - \lambda^n)$ стремится к нулю. Существование последовательных приближений u^n и их сходимость установлены в теореме 6.13-1.

6.11. Метод приращений как итерационный метод $\delta u^n = \{A'(u^n)\}^{-1}\,\delta f^n$

Рассмотренный метод приращений допускает очень простую формулировку в терминах производной оператора нелинейной теории упругости

$$A:\ u \in V^p(\Omega) \to A(u) = -\operatorname{div}\{(I + \nabla u)\,\breve{\Sigma}(E(u))\} \in L^p(\Omega),$$

где

$$\boldsymbol{V}^p(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \quad \text{на} \quad \Gamma\}$$

и, в случае материала Сен-Венана — Кирхгофа,

$$\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E}.$$

Помимо большей простоты и краткости эта новая формулировка позволит распространить метод приращений на случай *более общих определяющих уравнений* — производная Гато $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}$ была вычислена для функций реакции $\check{\Sigma}$ общего вида в доказательстве теоремы 6.6-1. Эта производная в случае материала Сен-Венана — Кирхгофа выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} A_i'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = -\partial_j(a_{ijpq}\partial_p v_q + a_{ijpq}\partial_p u_m \partial_q v_m + a_{kjpq}\partial_k u_i \partial_p v_q \\ + a_{kjpq}\partial_k u_i \partial_p u_m \partial_q v_m + a_{kjpq}E_{pq}(\boldsymbol{u})\partial_k v_i). \end{aligned}$$

Поэтому непосредственной проверкой можно убедиться в том, что *одна итерация метода приращений, описанного в* § 6.10, *может быть сведена просто к задаче*; *для данного* $\boldsymbol{u}^n \in \boldsymbol{V}^p(\Omega)$ *найти* $\delta\boldsymbol{u}^n := (\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n) \in \boldsymbol{V}^p(\Omega)$, *такое что*

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^n)\,\delta\boldsymbol{u}^n = \delta\boldsymbol{f}^n.$$

Указанный частный случай естественно подводит нас к определению *метода приращений* для приближения решения краевой задачи с граничными условиями на перемещения в случае функции реакции $\check{\Sigma}$ *общего вида*. А именно, при заданном разбиении отрезка $[0, 1]$ этот метод заключается в отыскании решений, удовлетворяющих рекуррентным уравнениям (предполагается, что существование последовательных приращений вектора перемещений может быть строго доказано)

$$\boxed{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^n)(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n) = \delta\boldsymbol{f}^n, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1, \quad \boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{o},}$$

где $\boldsymbol{A}\colon \boldsymbol{V}(\boldsymbol{o}) \in \boldsymbol{V}^p(\Omega) \to \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ теперь является оператором, соответствующим произвольно заданной функции реакции. Если линейный оператор $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^n)$ обратим, то каждая итерация может быть описана в эквивалентной форме

$$\boxed{\delta\boldsymbol{u}^n = \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^n)\}^{-1}\,\delta\boldsymbol{f}^n.}$$

Замечание. Указанная схема построения приближений естественна. Действительно, если решаемая задача записана в операторной форме $A(u) = f$, то эта схема осуществляет *простейшее приближение уравнений*

$$\delta f^n = A(u(\lambda^{n+1}f)) - A(u(\lambda^n f))$$
$$= A'(u(\lambda^n f))(u(\lambda^{n+1}f) - u(\lambda^n f)) + o(u(\lambda^{n+1}f) - u(\lambda^n f)).$$

Данное наблюдение, в свою очередь, наводит на мысль, что можно попытаться применить и *любую другую* хорошо известную схему для приближения нелинейного уравнения вида $A(u) = f$. Например, применение *метода Ньютона* приводит к итерационному процессу

$$A'(u^n)(u^{n+1} - u^n) = f - A(u^n), \qquad n \geqslant 0,$$

который, как можно показать, сходится, при условии что начальное значение u^0 выбрано подходящим образом (см. упражнение 6.11). ■

6.12. Обыкновенное дифференциальное уравнение $\tilde{u}'(\lambda) = \{A'(\tilde{u}(\lambda))\}^{-1}f$

Как указано выше, одна итерация метода приращений может быть записана в виде

$$\boxed{\frac{u^{n+1} - u^n}{\lambda^{n+1} - \lambda^n} = \{A'(u^n)\}^{-1}f.}$$

Отсюда становится очевиден чрезвычайно важный факт, а именно: рассмотренный метод является не чем иным, как ***методом ломаных Эйлера для нахождения приближённого решения*** следующей задачи Коши для *обыкновенного дифференциального уравнения*: ***найти*** $\tilde{u} \in \mathscr{C}^1([0, 1]; V^p(\Omega))$, ***такое что***

$$\boxed{\begin{aligned} &\tilde{u}'(\lambda) = \{A'(\tilde{u}(\lambda))\}^{-1}f, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\ &\tilde{u}(0) = o. \end{aligned}}$$

Отметим, что для неизвестной функции мы намеренно используем новое обозначение $\tilde{u}$.

Замечание. Традиционно прилагательное «обыкновенный» употребляется, чтобы подчеркнуть отличие уравнений указанного типа от уравнений с частными производными. Однако следует помнить, что в данном случае неизвестная функция $\tilde{u}(\lambda)$

принимает значения в *бесконечномерном* банаховом пространстве (а именно, в пространстве $V^p(\Omega)$). ■

Наша первая цель состоит в том, чтобы установить существованне и едннственность решення этого уравнения н выявить его связь с уравнением $A(u) = f$. Следующее классическое доказательство существования и единственности можно найти во многих монографиях н учебниках; см., например, Арнольд [1971], Coddington & Levinson [1955], Crouzeix & Mignot [1984], Hartman [1964], Roseau [1976]. Это доказательство в бесконечномерном случае (при условии полноты соответствующего пространства) почти такое же, как и в конечномерном и даже одномерном — факт, весьма редко встречающийся в анализе.

Теорема 6.12-1. *Пусть $p > 3$. Предположим, что заданы: отображение $\check{\Sigma} \in \mathscr{C}^3(\mathbb{V}(\boldsymbol{0}); \mathbb{S}^3)$, удовлетворяющее условию*

$$\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + O(\|\boldsymbol{E}\|^2), \qquad \lambda > 0, \quad \mu > 0,$$

соответствующий ему оператор нелинейной теории упругости

$$\boldsymbol{A}\colon\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{o}) \subset \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) := -\operatorname{div}\{(\boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u})\check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$$

и элемент $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$, удовлетворяющий условию

$$|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega} \leqslant \rho\left(\gamma_\rho^p\right)^{-1} \quad \text{при некотором} \quad \rho < \rho_0^p,$$

где числа $\rho_0^p > 0$ и $\gamma_\rho^p > 0$ определены так же, как в теореме 6.6-1.

Тогда следующая задача для обыкновенного дифференциального уравнения: найти функцию

$$\tilde{\boldsymbol{u}}\colon \lambda \in [0, 1] \to \tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda) \in \boldsymbol{V}^p(\Omega) = \left\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma\right\},$$

удовлетворяющую условию

$$\tilde{\boldsymbol{u}}'(\lambda) = \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}(\lambda))\}^{-1}\boldsymbol{f}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \tilde{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{o},$$

имеет одно и только одно решение, такое что

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda) \in B_\rho^p = \left\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}^p(\Omega);\ \|\boldsymbol{v}\|_{2,p,\Omega} \leqslant \rho\right\}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Для этого решения выполняется равенство

$$\boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda)) = \lambda\boldsymbol{f}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

т. е. $\tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda)$ является тем самым единственным решением уравнения $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ в шаре $\boldsymbol{B}_\rho^p$, которое до сих пор обозначалось через $\boldsymbol{u}(\lambda\boldsymbol{f})$.

Доказательство. Основываясь на предположениях *полноты* рассматриваемого пространства и *«локальной» непрерывности по Липшицу* правой части нашего уравнения, мы установим существование непрерывного решения соответствующего *интегрального уравнения* при помощи *теоремы о сжимающем отображении*, тем самым избавившись от необходимости искать дифференцируемое решение. Для большей ясности проведём доказательство в несколько этапов.

(i) *Отображение*

$$\Phi\colon\ \tilde{v} \in \mathscr{C}^0([0,\ 1];\ \boldsymbol{B}_\rho^p) \to \Phi(\tilde{v}) \in \mathscr{C}^0([0,\ 1];\ \boldsymbol{V}^p(\Omega)),$$

где

$$\Phi(\tilde{v})(\lambda) := \int_0^\lambda \{\boldsymbol{A}'(\tilde{v}(\mu))\}^{-1} \boldsymbol{f}\, d\mu, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

корректно определено при $\rho < \rho_0^p$ *и переводит пространство* $\mathscr{C}^0([0,\ 1];\ \boldsymbol{B}_\rho^p)$ *в себя, если* $|\boldsymbol{f}|_{0,\,p,\,\Omega} \leqslant \rho\left(\gamma_\rho^p\right)^{-1}$. Для заданного элемента $\tilde{v} \in \mathscr{C}^0([0,\ 1];\ \boldsymbol{B}_\rho^p)$ при $\rho < \rho_0^p$ имеем, в силу теоремы 6.6-1,

$$\boldsymbol{A}'(\tilde{v}(\mu)) \in \mathscr{I}\!som(\boldsymbol{V}^p(\Omega);\ \boldsymbol{L}^p(\Omega)) \text{ для } 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

Кроме того, отображение

$$\mu \in [0,\ 1] \to \{\boldsymbol{A}'(\tilde{v}(\mu))\}^{-1} \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{V}^p(\Omega)$$

является непрерывным, будучи композицией непрерывных отображений

$$\mu \in [0,\ 1] \to \tilde{v}(\mu) \in \boldsymbol{B}_\rho^p,$$
$$\tilde{v} \in \boldsymbol{B}_\rho^p \to \boldsymbol{A}'(\tilde{v}) \in \mathscr{L}(\boldsymbol{V}^p(\Omega);\ \boldsymbol{L}^p(\Omega)),$$
$$\boldsymbol{A} \in \mathscr{I}\!som(\boldsymbol{V}^p(\Omega);\ L^p(\Omega)) \to \boldsymbol{A}^{-1} \in \mathscr{I}\!som(\boldsymbol{L}^p(\Omega);\ \boldsymbol{V}^p(\Omega)),$$
$$\boldsymbol{B} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{L}^p(\Omega);\ \boldsymbol{V}^p(\Omega)) \to \boldsymbol{B}\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{V}^p(\Omega).$$

Поскольку $\boldsymbol{V}^p(\Omega)$ — банахово пространство, то интеграл от непрерывной функции корректно определён и является непрерывной функцией своего верхнего предела. Значит, функция $\Phi(\tilde{v})$ также принадлежит пространству $\mathscr{C}^0([0,\ 1];\ \boldsymbol{V}^p(\Omega))$.

Введение нормы

$$|||\Psi||| := \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \|\Psi(\lambda)\|_{2,\,p,\,\Omega}$$

в векторном пространстве $\mathscr{C}^0([0,\ 1];\ \boldsymbol{V}^p(\Omega))$ превращает его в банахово пространство, так что его подмножество $\mathscr{C}^0([0,\ 1];\ \boldsymbol{B}_\rho^p)$ является *полным метрическим пространством.*

Мы также имеем

$$\tilde{\boldsymbol{v}} \in \mathscr{C}^0([0, 1];\ \boldsymbol{B}_\rho^p) \Rightarrow \|\Phi(\tilde{\boldsymbol{v}})(\lambda)\|_{2, p, \Omega} \leqslant \lambda \gamma_\rho^p |\boldsymbol{f}|_{0, p, \Omega}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

и, таким образом,

$$\tilde{\boldsymbol{v}} \in \mathscr{C}^0([0, 1];\ \boldsymbol{B}_\rho^p) \Rightarrow |\!|\!| \Phi(\tilde{\boldsymbol{v}}) |\!|\!| \leqslant \gamma_\rho^p |\boldsymbol{f}|_{0, p, \Omega}.$$

Следовательно, Φ — отображение полного метрического пространства $\mathscr{C}^0([0, 1];\ \boldsymbol{B}_\rho^p)$ в себя, если $\gamma_\rho^p |\boldsymbol{f}|_{0, p, \Omega} \leqslant \rho$.

(ii) *Либо само отображение Φ, либо его степень $\Phi^k = \Phi(\Phi(\ldots))$ при некотором $k \geqslant 2$ является сжатием пространства $\mathscr{C}^0([0, 1];\ \boldsymbol{B}_\rho^p)$.*

Для заданных элементов $\tilde{\boldsymbol{v}}$, $\tilde{\boldsymbol{w}} \in \mathscr{C}^0([0, 1];\ \boldsymbol{B}_\rho^p)$ имеем

$$(\Phi(\tilde{\boldsymbol{v}}) - \Phi(\tilde{\boldsymbol{w}}))(\lambda) = \int_0^\lambda \left(\{\boldsymbol{A}'(\tilde{\boldsymbol{v}}(\mu))\}^{-1} - \{\boldsymbol{A}'(\tilde{\boldsymbol{w}}(\mu))\}^{-1}\right) \boldsymbol{f}\, d\mu.$$

Поэтому, учитывая непрерывность по Липшицу отображения

$$\tilde{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{B}_\rho^p \to \{\boldsymbol{A}'(\tilde{\boldsymbol{v}})\}^{-1} \in \mathscr{I}\!som(\boldsymbol{V}^p(\Omega);\ \boldsymbol{L}^p(\Omega)),$$

рассмотренного в теореме 6.6-1, получаем

$$\|(\Phi(\tilde{\boldsymbol{v}}) - \Phi(\tilde{\boldsymbol{w}}))(\lambda)\|_{2, p, \Omega} \leqslant L_\rho^p \int_0^\lambda \|(\tilde{\boldsymbol{v}} - \tilde{\boldsymbol{w}})(\mu)\|_{2, p, \Omega} |\boldsymbol{f}|_{0, p, \Omega}\, d\mu$$

$$\leqslant \lambda L_\rho^p |\boldsymbol{f}|_{0, p, \Omega} |\!|\!| \tilde{\boldsymbol{v}} - \tilde{\boldsymbol{w}} |\!|\!|, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

и, значит,

$$|\!|\!| \Phi(\tilde{\boldsymbol{v}}) - \Phi(\tilde{\boldsymbol{w}}) |\!|\!| \leqslant \left(L_\rho^p |\boldsymbol{f}|_{0, p, \Omega}\right) |\!|\!| \tilde{\boldsymbol{v}} - \tilde{\boldsymbol{w}} |\!|\!|.$$

Тогда либо $\left(L_\rho^p |\boldsymbol{f}|_{0, p, \Omega}\right) < 1$ и отображение Φ является сжатием, либо следует повторить несколько раз предыдущие рассуждения. А именно, допустим, что неравенство

$$\left\|\left(\Phi^{k-1}(\tilde{\boldsymbol{v}}) - \Phi^{k-1}(\tilde{\boldsymbol{w}})\right)(\lambda)\right\|_{2, p, \Omega}$$

$$\leqslant \frac{1}{(k-1)!} \left(\lambda L_\rho^p |\boldsymbol{f}|_{0, p, \Omega}\right)^{k-1} |\!|\!| \tilde{\boldsymbol{v}} - \tilde{\boldsymbol{w}} |\!|\!|$$

уже доказано для некоторого целого $k \geqslant 2$ (оно выполнено при $k = 2$, с $\Phi^1 := \Phi$). Из соотношения

$$(\Phi^k(\tilde{\boldsymbol{v}}) - \Phi^k(\tilde{\boldsymbol{w}}))(\lambda) =$$

$$\int_0^\lambda \left(\{\boldsymbol{A}'(\Phi^{k-1}(\tilde{\boldsymbol{v}}))(\mu)\}^{-1} - \{\boldsymbol{A}'(\Phi^{k-1}(\tilde{\boldsymbol{w}})(\mu)\}^{-1}\right) \boldsymbol{f}\, d\mu,$$

следует, что

$$\|(\Phi^k(\tilde{v}) - \Phi^k(\tilde{w}))(\lambda)\|_{2,p,\Omega}$$

$$\leqslant \frac{1}{(k-1)!}\left(L_\rho^p |f|_{0,p,\Omega}\right)^k ||| \tilde{v} - \tilde{w} ||| \int_0^\lambda \mu^{k-1}\,d\mu$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\overline{\lambda L_\rho^p} |f|_{0,p,\Omega}\right)^k ||| \tilde{v} - \tilde{w} ||| .$$

Отсюда вытекает, что неравенство

$$||| \Phi^k(\tilde{v}) - \Phi^k(\tilde{w}) ||| \leqslant \frac{1}{k!}\left(L_\rho^p |f|_{0,p,\Omega}\right)^k ||| \tilde{v} - \tilde{w} |||$$

имеет место для всех целых $k \geqslant 1$. Поскольку ряд с общим членом

$$\frac{1}{k!}\left(L_\rho^p |f|_{0,p,\Omega}\right)^k$$

является сходящимся, найдутся целое k и вещественное β, такие что

$$\beta < 1 \quad \text{и} \quad ||| \Phi^k(\tilde{v}) - \Phi^k(\tilde{w}) ||| \leqslant \beta ||| \tilde{v} - \tilde{w} |||$$

$$\text{для всех } \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathscr{C}^0([0, 1]; B_\rho^p).$$

(iii) *Неподвижная точка сжимающего отображения*

$$\Phi^k\colon \mathscr{C}^0([0, 1]; B_\rho^p) \to \mathscr{C}^0([0, 1]; B_\rho^p)$$

представляет собой единственное решение исходной задачи для дифференциального уравнения в пространстве $\mathscr{C}^0([0, 1]; B_\rho^p)$. В силу полноты пространства $\mathscr{C}^0([0, 1]; B_\rho^p)$ и теоремы о сжимающем отображении существует единственный элемент $\tilde{u}$, такой что

$$\tilde{u} \in \mathscr{C}^0([0, 1]; B_\rho^p) \quad \text{и} \quad \Phi^k(\tilde{u}) = \tilde{u}.$$

Элемент $\tilde{u}$ удовлетворяет соотношениям

$$\Phi(\Phi^k(\tilde{u})) = \Phi^k(\Phi(\tilde{u})) = \Phi(\tilde{u}),$$

и потому элемент $\Phi(\tilde{u}) \in \mathscr{C}^0([0, 1]; B_\rho^p)$ также является неподвижной точкой отображения Φ^k. В силу единственности этой неподвижной точки *элемент $\tilde{u}$ служит неподвижной точкой* самого́ *отображения* Φ, и притом его единственной неподвижной точкой в пространстве $\mathscr{C}^0([0, 1]; B_\rho^p)$ (каждая неподвижная точка отображения Φ является неподвижной точкой отображения Φ^k). Таким образом, по определению, имеем

$$\tilde{u}(\lambda)=\int_0^\lambda \{A'(\tilde{u}(\mu))\}^{-1} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{при} \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

Следовательно, функция $\tilde{u}(\lambda)$ дифференцируема, причём

$$\tilde{u}'(\lambda)=\{A'(\tilde{u}(\lambda))\}^{-1} f, \qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

Очевидно, что $\tilde{u}(0)=o$, и потому функция $\tilde{u}(\lambda)$ действительно является решением исходной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.

Обратно, всякое решение $\tilde{u}$ исходной задачи для дифференциального уравнения, такое что $\tilde{u}(\lambda)\in B_\rho^p$ при $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, принадлежит пространству $\mathscr{C}^0([0, 1]; B_\rho^p)$ и удовлетворяет соотношению

$$\tilde{u}(\lambda)=\tilde{u}(0)+\int_0^\lambda u'(\mu)\,\mathrm{d}\mu=\int_0^\lambda \{A'(u(\mu))\}^{-1} f\,\mathrm{d}\mu, \qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1,$$

при $\tilde{u}(0)=o$. Поэтому оно также служит неподвижной точкой отображения Φ в пространстве $\mathscr{C}^0([0, 1]; B_\rho^p)$ и, значит, единственно.

(iv) *Решение $\tilde{u}$ задачи для дифференциального уравнения удовлетворяет условиям*

$$\tilde{u}(\lambda)\in B_\rho^p \quad \text{и} \quad A(\tilde{u}(\lambda))=\lambda f, \qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

Действительно, из соотношения

$$o=A'(\tilde{u}(\lambda))\,\tilde{u}'(\lambda)-f=\frac{d}{d\lambda}\{A(\tilde{u}(\lambda))-\lambda f\}, \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1$$

вытекает, что

$$\lambda\in[0, 1]\to\{A(\tilde{u}(\lambda))-\lambda f\}\in L^p(\Omega)$$

есть постоянное отображение. Значит, оно тождественно равно нулю, поскольку $\tilde{u}(0)=o$. ■

Следует заметить, что в ходе предыдущего доказательства фактически *установлен другим способом результат теоремы* 6.7-1 *о существовании решений*, хотя и ценой некоторого усиления предположений относительно гладкости отображения $\tilde{\Sigma}$; кроме того, даио более явное описание окрестности F^p, в качестве которой можно выбрать любой шар вида

$$\left\{f\in L^p(\Omega);\ \ |f|_{0,p,\Omega}\leqslant\rho\left(\gamma_\rho^p\right)^{-1}\right\}, \quad \text{где } \rho<\rho_0^p.$$

Идея погружения решения нелинейной задачи (в данном случае $A(u)=f$) в однопараметрическое семейство решений дифференциального уравнения (здесь $\tilde{u}(\lambda)=\{A'(\tilde{u}(\lambda))\}^{-1}f$) лежит в основе *методов дифференциального погружения*, описанных, например, в работах Rheinboldt [1974, 1986]. Как станет ясно из последующего исследования сходимости, такие методы часто дают возможность эффективно приблизить решение исходной задачи путём применения того или иного сходящегося приближённого метода к соответствующему дифференциальному уравнению.

6.13. Сходимость метода приращений

Приведённый здесь результат о сходимости получен в работе Bernadou, Ciarlet & Hu [1984] (см. также Bernadou, Ciarlet & Hu [1982]). Заметив, что метод приращений можно рассматривать как метод Эйлера для некоторого дифференциального уравнения в пространстве Соболева, мы можем установить его сходимость, по существу, приспособив для данного случая классическое доказательство сходимости метода Эйлера (см., например, Crouzeix & Mignot [1984], Gear [1971], Henrici [1962], Stetter [1973]).

Теорема 6.13-1. *Пусть приняты предположения и обозначения теоремы* 6.12-1. *Для любого заданного разбиения*

$$0=\lambda^0<\lambda^1<\ldots<\lambda^n<\lambda^{n+1}<\ldots<\lambda^{N-1}<\lambda^N=1$$

отрезка $[0,1]$ *существует одна и только одна последовательность* $(\boldsymbol{u}^n)_{n=0}^N$, *удовлетворяющая условиям*

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{u}^0=\boldsymbol{o},\quad \boldsymbol{u}^n\in\boldsymbol{B}^p_\rho,\quad 0\leqslant n\leqslant N,\\ &\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^n)(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n)=(\lambda^{n+1}-\lambda^n)\boldsymbol{f},\quad 0\leqslant n\leqslant N-1.\end{aligned}}$$

Кроме того, существует постоянная $c=c(|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega},\ \gamma_0^p,\ L_\rho^p)$, *такая что*

$$\boxed{\begin{aligned}&\max_{0\leqslant n\leqslant N}\|\boldsymbol{u}^n-\boldsymbol{u}(\lambda^n\boldsymbol{f})\|_{2,p,\Omega}\leqslant c\,\Delta\lambda,\\ &\max_{0\leqslant n\leqslant N}\|\boldsymbol{\Sigma}^n-\boldsymbol{\Sigma}(\lambda^n\boldsymbol{f})\|_{1,p,\Omega}\leqslant c\,\Delta\lambda,\\ &\text{где } \Delta\lambda:=\max_{0\leqslant n\leqslant N-1}(\lambda^{n-1}-\lambda^n),\end{aligned}}$$

где $\boldsymbol{u}(\lambda^n \boldsymbol{f})$ *обозначает единственное в шаре* $\boldsymbol{B}_\rho^p$ *решение уравнения* $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}) = \lambda^n \boldsymbol{f}$ *и*

$$\Sigma^n := \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}^n)), \qquad \Sigma(\lambda^n \boldsymbol{f}) := \check{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}(\lambda^n \boldsymbol{f})), \quad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

Доказательство. Положим для краткости

$$\Delta\lambda^n = (\lambda^{n+1} - \lambda^n), \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1.$$

(i) *Указанный алгоритм корректно определён.* Действительно, предположим, что

$$\boldsymbol{u}^l \in \boldsymbol{B}_\rho^p, \qquad 0 \leqslant l \leqslant k,$$

для некоторого целого k, $0 \leqslant k \leqslant N-1$ (очевидно, что $\boldsymbol{u}^0 \in \boldsymbol{B}_\rho^p$). Тогда

$$\boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^k + \Delta\lambda^k \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^k)\}^{-1} \boldsymbol{f}$$

является корректно определённым элементом пространства $\boldsymbol{V}^p(\Omega)$. Нам нужно показать, что $\boldsymbol{u}^{k+1} \in \boldsymbol{B}_\rho^p$. Складывая равенства

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{u}^{l+1} = \boldsymbol{u}^l + \Delta\lambda^l \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^l)\}^{-1} \boldsymbol{f}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant k,$$

получаем

$$\boldsymbol{u}^{k+1} = \sum_{l=0}^{k} \Delta\lambda^l \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^l)\}^{-1} \boldsymbol{f},$$

и, значит $\left(\sum_{l=0}^k \Delta\lambda^l = \lambda^{k+1} \leqslant 1\right)$,

$$\|\boldsymbol{u}^{k+1}\|_{2,p,\Omega} \leqslant \max_{0 \leqslant l \leqslant k} \left\|\{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^l)\}^{-1}\right\| |\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega} \leqslant \gamma_\rho^p |\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega} \leqslant \rho,$$

так как $\gamma_\rho^p = \sup\limits_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{B}_\rho^p} \left\|\{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{v})\}^{-1}\right\|$ (теорема 6.6-1) и по предположению $|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega} \leqslant \rho\,(\gamma_\rho^p)^{-1}$.

(ii) Установим теперь *неравенство, связывающее ошибки* ε^n и ε^{n+1} *двух последовательных приближений*, где

$$\varepsilon^n := \|\boldsymbol{u}^n - \tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda^n)\|_{2,p,\Omega}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N, \qquad \tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda^n) = \boldsymbol{u}(\lambda^n \boldsymbol{f}).$$

Для этого запишем разность следующих соотношений:

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^n + \Delta\lambda^n \{\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^n)\}^{-1} \boldsymbol{f},$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda^{n+1}) = \tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda^n) + \int_{\lambda^n}^{\lambda^{n+1}} \tilde{\boldsymbol{u}}'(\mu)\, d\mu$$

$$= \tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda^n) + \int_{\lambda^n}^{\lambda^{n+1}} \{\boldsymbol{A}'(\tilde{\boldsymbol{u}}(\mu))\}^{-1} \boldsymbol{f}\, d\mu$$

в виде

$$u^{n+1} - \tilde{u}(\lambda^{n+1}) = u^n - \tilde{u}(\lambda^n) - \Delta\lambda^n\left(\{A'(u^n)\}^{-1} - \{A'(\tilde{u}(\lambda^n))\}^{-1}\right)f + \int_{\lambda^n}^{\lambda^{n+1}} \left(\{A'(\tilde{u}(\lambda^n))\}^{-1} - \{A'(\tilde{u}(\mu))\}^{-1}\right) f\, d\mu.$$

Из непрерывности по Липшицу отображения $v \in B^p_\rho \to \{A'(v)\}^{-1}$ (теорема 6.6-1) вытекает, что

$$\left\|\left(\{A'(u^n)\}^{-1} - \{A'(\tilde{u}(\lambda^n))\}^{-1}\right) f\right\|_{2,p,\Omega} \leqslant L^p_\rho \left\|u^n - \tilde{u}(\lambda^n)\right\|_{2,p,\Omega} |f|_{0,p,\Omega}$$

и

$$\left\|\int_{\lambda^n}^{\lambda^{n+1}} \left(\{A'(\tilde{u}(\lambda^n))\}^{-1} - \{A'(\tilde{u}(\mu))\}^{-1}\right) f\, d\mu\right\|_{2,p,\Omega} \leqslant \Delta\lambda^n L^p_\rho \sup_{\lambda^n \leqslant \mu \leqslant \lambda^{n+1}} \left\|\tilde{u}(\lambda^n) - \tilde{u}(\mu)\right\|_{2,p,\Omega} |f|_{0,p,\Omega} \leqslant (\Delta\lambda^n L)^2 L^p_\rho \sup_{\lambda^n \leqslant \lambda \leqslant \lambda^{n+1}} \|\tilde{u}'(\lambda)\| |f|_{0,p,\Omega}$$

(последнее неравенство получено с помощью теоремы о среднем значении). Поскольку

$$\sup_{\lambda^n \leqslant \lambda \leqslant \lambda^{n+1}} \|\tilde{u}'(\lambda)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \|\tilde{u}'(\lambda)\| = \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \left\|\{A'(\tilde{u}(\lambda))\}^{-1} f\right\|_{2,p,\Omega} \leqslant \gamma^p_\rho |f|_{0,p,\Omega},$$

мы в итоге получаем неравенство вида

$$\varepsilon^{n+1} \leqslant \left(1 + L^p_\rho |f|_{0,p,\Omega} \Delta\lambda^n\right)\varepsilon^n + L^p_\rho \gamma^p_0 |f|^2_{0,p,\Omega} (\Delta\lambda^n)^2,$$

или, в сокращённой записи,

$$\varepsilon^{n+1} \leqslant (1 + a\Delta\lambda^n)\varepsilon^n + b^n, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1,$$

где

$$a = L^p_\rho |f|_{0,p,\Omega}, \qquad b^n = L^p_\rho \gamma^p_0 |f|^2_{0,p,\Omega} (\Delta\lambda^n)^2.$$

(iii) Теперь мы воспользуемся следующим результатом. *Пусть* $(\varepsilon^n)_{n \geqslant 0}$ — *последовательность вещественных чисел, такая что*

$$\varepsilon^{n+1} \leqslant (1 + a\Delta\lambda^n)\varepsilon^n + b^n, \qquad n \geqslant 0,$$

где

$$a \geqslant 0, \quad \lambda^0 = 0, \quad \Delta\lambda^n = \lambda^{n+1} - \lambda^n > 0, \quad b^n \geqslant 0, \quad n \geqslant 0.$$

Тогда

$$\varepsilon^n \leqslant e^{a\lambda^n}\varepsilon^0 + \sum_{l=0}^{n-1} e^{a(\lambda^n - \lambda^{l+1})} b^l, \qquad n \geqslant 1.$$

Доказательство этого неравенства весьма просто: учитывая первые n неравенств, находим, что

$$\varepsilon^n \leqslant \prod_{l=0}^{n-1} (1 + a\Delta\lambda^l)\varepsilon^0 + \sum_{l=0}^{n-2}\left\{\prod_{k=l+1}^{n-1} (1 + a\Delta\lambda^k)\right\} b^l + b^{n-1},$$

а тогда достаточно применить неравенство $(1+x) \leqslant e^x$, справедливое для всех $x \in \mathbb{R}$. В нашем случае

$$\varepsilon^0 = 0 \quad \text{и} \quad b^l = \beta(\Delta\lambda^l)^2, \quad \text{где} \quad \beta = L_\rho^p \gamma_0^p |f|_{0,p;\Omega}^2,$$

и, значит,

$$\varepsilon^n \leqslant \beta \sum_{l=0}^{n-1} e^{a(\lambda^n - \lambda^{l+1})} (\Delta\lambda^l)^2.$$

На основании неравенства

$$e^{a(\lambda^n - \lambda^{l+1})}\Delta\lambda^l \leqslant \int_{\lambda^l}^{\lambda^{l+1}} e^{a(\lambda^n - s)}\,ds$$

заключаем, что при $\Delta\lambda = \max_{0 \leqslant n \leqslant N-1} \Delta\lambda^n$

$$\varepsilon^n = \|u^n - \tilde{u}(\lambda^n)\|_{2,p,\Omega} \leqslant \beta\Delta\lambda \int_0^{\lambda^n} e^{a(\lambda^n - s)}\,ds = \frac{\beta}{a}\left(e^{a\lambda^n} - 1\right)\Delta\lambda,$$
$$0 \leqslant n \leqslant N-1,$$

откуда и вытекает первая из доказываемых оценок.

(iv) Для того чтобы *оценить ошибку приближения напряжений*, воспользуемся ограниченностью производных от отображений

$$v \in W^{2,p}(\Omega) \to E(v) \in W^{1,p}(\Omega),$$
$$E \in V(0) \subset W^{1,p}(\Omega) \to \check{\Sigma}(E) \in W^{1,p}(\Omega)$$

(для первого отображения указанная ограниченность очевидна, поскольку $W^{1,p}(\Omega)$ — алгебра; для второго отображения она была установлена в теореме 6.5-1), а также теоремой о среднем значении и цепным правилом. Таким образом получаем

$$\|\Sigma^n - \Sigma(\lambda^n f)\|_{1,p,\Omega} = \|\check{\Sigma}(E(u^n)) - \check{\Sigma}(E(u(\lambda^n f)))\|_{1,p,\Omega}$$

$$\leqslant \sup_{\|E\|_{1,p,\Omega} \leqslant \delta_\rho^p} \|\check{\Sigma}'(E)\| \sup_{v \in B_\rho^p} \|E'(v)\| \|u^n - u(\lambda^n f)\|_{2,p,\Omega},$$

где

$$\delta_\rho^p := \sup_{v \in B_\rho^p} \|E(v)\|_{1,p,\Omega}.$$

Теорема доказана. ∎

Замечания. (1) Оценка сверху для величины ε^n, установленная в конце п. (iii) доказательства теоремы, позволяет получить более *точные оценки*

$$\max_{0 \leqslant l \leqslant n} \|u^l - u(\lambda^l f)\|_{2,p,\Omega} \leqslant \frac{\beta}{a}\left(e^{a\lambda^n} - 1\right)\Delta\lambda, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1,$$

которые подтверждают естественное представление о том, что при фиксированном N ошибка есть возрастающая функция от n.

(2) Метод Эйлера служит простейшим примером *одношаговых методов* приближённого решения обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. в нём используются лишь два последовательных приближения. Существуют и более сложные одношаговые методы, называемые *методами Рунге — Кутты*, а также и многошаговые методы, в частности *методы Адамса*, позволяющие получить ошибку порядка $(\Delta\lambda)^p$ при некотором $p \geqslant 2$; подробности см., например, Crouzeix & Mignot [1983, гл V, VI]. Эти методы также можно применить к рассматриваемой здесь задаче.

(3) Тот факт, что n-е приближённое уравнение

$$A'(u^n)(u^{n+1} - u^n) = (\lambda^{n+1} - \lambda^n) f$$

может быть эффективно решено в шаре $B_\rho^p \subset V^p(\Omega)$, по существу представляет собой *результат о существовании и регулярности* решения *линейной* задачи:

$$A'(u^n) u = g \Leftrightarrow -\partial_j \{\hat{a}_{ijpq}(\nabla u^n)\partial_p u_q\} = g \quad \text{в} \quad \Omega,$$

которая, таким образом, имеет единственное решение в пространстве $V^p(\Omega)$, если правая часть g принадлежит $L^p(\Omega)$.

(4) Случай, когда приложенная объёмная сила не является замороженной нагрузкой, рассмотрен в упражнении 6.8.

(5) Вопрос о сходимости методов приращений в задачах нелинейной теории упругости был ранее исследован для ряда частных случаев, таких как одномерная модель тонкой полой

сферической оболочки (Anselone & Moore [1966]) и некоторые конечномерные задачи о конструкциях (Rheinbolt [1981]). ■

Методы приращений, с соответствующими видоизменениями, могут применяться и к *задаче с краевыми условиями на напряжения*, а также к *задаче для несжимаемых упругих материалов с краевыми условиями на перемещения*, которая была рассмотрена в конце § 6.7. Сходимость этих методов, в указанных случаях требующая значительно более тщательного анализа, была установлена в работе Nzengwa [1987].

Упражнения

6.1. Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < \rho\}$, где $\rho \in]0, 1[$, и $\alpha \in]0, 1/2[$.

(1) Покажите, что функция

$$v\colon x \in \Omega \to v(x) := |\operatorname{Log}(x_1^2 + x_2^2)|^\alpha$$

принадлежит пространству Соболева $H^1(\Omega)$.

(2) Пусть $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \{b_k\}$ — плотное подмножество в Ω и $\beta_k > 0$ — такие числа, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k < \infty$. Покажите, что функция

$$w\colon x \in \Omega \to w(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k v(x - b_k)$$

принадлежит пространству Соболева $H^1(\Omega)$.

Замечание. Указанные функции служат примерами (классов эквивалентности) функций из пространства Соболева $H^1(\Omega)$, не имеющих непрерывных представителей, а функция w даже не является непрерывной в точках всюду плотного подмножества Ω.

6.2. (1) Пусть $\boldsymbol{v}\colon x \in \Omega \to \boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{ox}$ — инфинитезимальное жёсткое перемещение. Покажите, что существует кососимметрический тензор $\boldsymbol{W}$ ($\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{W}$), такой что $\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{ox}$ для всех $x \in \Omega$.

(2) Покажите, что кососимметрический тензор $\boldsymbol{W}$ порождает однопараметрическую подгруппу $t \in \mathbb{R} \to \exp(t\boldsymbol{W})$ группы $\mathbb{O}_+^3$.

(3) Покажите, что касательное пространство многообразия $\mathbb{O}^3$ в точке $\boldsymbol{I}$ можно отождествить с пространством кососимметрических тензоров.

Замечание. Все необходимые сведения по этим вопросам можно найти в книге Wang & Truesdell [1973, гл. 1]. См. также Lang [1962], Дубровин, Новиков и Фоменко [1982a, § 24].

6.3. Цель этого упражнения — распространить результаты теорем 6.3-5 и 6.3-6 на случай *линеаризованных задач с краевыми условиями на напряжения.* Здесь используются обозначения теоремы 6.3-5.

(1) Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$, и пусть заданы постоянные $\lambda > 0$, $\mu > 0$, а также функции $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^{6/5}(\Omega)$, $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^{4/3}(\Gamma)$. Покажите, что уравнения

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dx + \int_\Gamma \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v}\, da \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$$

имеют решение $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, dx + \int_\Gamma \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v}\, da = 0$ для всех инфинитезимальных жёстких перемещений $\boldsymbol{v}$.

Указания. Обозначим через $\boldsymbol{W}$ пространство, состоящее из всех инфинитезимальных жёстких перемещений. Покажите, что $\boldsymbol{v} \to |e(\boldsymbol{v})|_{0,\Omega}$ есть норма в факторпространстве $\boldsymbol{V} := \boldsymbol{H}^1(\Omega)/\boldsymbol{W}$, эквивалентная обычной норме факторпространства; затем покажите, что при таком выборе пространства $\boldsymbol{V}$ применима теорема 6.3-2 (см. Duvaut & Lions [1972, p. 119 и далее]).

(2) Пусть граница Γ области Ω принадлежит классу $\mathscr{C}^2$ и $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$, $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{W}^{1-1/p,\,p}(\Gamma)$ при некотором $p \geqslant 6/5$. Покажите, что решение $\boldsymbol{u}$, найденное в п. (1), принадлежит пространству $\boldsymbol{W}^{2,\,p}(\Omega)$, проверив, в частности, что для линеаризованной задачи с краевыми условиями на напряжения выполнены условия дополнительности[1] из работы Agmon, Douglis & Nirenberg [1964] (по этому поводу см. Thompson [1969], Lanza de Cristoforis & Valent [1982], Podio-Guidugli & Vergara-Caffarelli [1984], Le Dret [1986]).

6.4. Покажите, что результаты теорем 6.3-5, 6.3-6 и 6.7-1 остаются в силе и при более слабых предположениях: $\mu > 0$, $\lambda > -2\mu/3$.

Указание. Примените результат упражнения 5.17 (другой подход предложен в книге Marsden & Hughes [1983, § 6.1]).

6.5. Предположение $p \geqslant 6/5$ в теореме 6.3-6 обеспечивает инъективность отображения $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{o})\colon \boldsymbol{V}^p(\Omega) \to \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ при рассматриваемых значениях p. Сохранится ли инъективность при $1 < p < 6/5$?

[1] См. Лопатинский [1953]'. — *Прим. ред.*

6.6. Предположим, что слабое решение $u \in V$, найденное в теореме 6.3-5, принадлежит пространству Соболева $W^{m,p}(\Omega)$ для некоторого целого $m \geqslant 2$ и некоторого $p \geqslant 1$. Пользуясь формулой Грина в пространстве Соболева (теорема 6.1-9), покажите, что в определённом смысле функция u является решением линеаризованной смешанной задачи с граничными условиями на перемещения и напряжения (функции f и g можно считать более гладкими, чем в теореме 6.3-5).

6.7. (1) Покажите, что любая функция $u \in V(o) \subset W^{2,p}(\Omega)$ при $p > 3$ удовлетворяет условию $\det(I + \nabla u)(x) > 0$ для всех $x \in \bar{\Omega}$ (окрестность $V(o)$ определена в § 6.6).

(2) Верно ли следующее утверждение: в любой окрестности нуля пространства $W^{2,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant 3$, существует функция u, такая что $\operatorname{vol}\{x \in \Omega;\ \det(I + \nabla u)(x) \leqslant 0\} > 0$?

6.8. Рассмотрим задачу с краевыми условиями на перемещения, когда приложенная объёмная сила является *центробежной* (по поводу определения и обозначений см. § 2.7), т. е.

$$\begin{cases} -\operatorname{\mathbf{div}}\{\nabla\varphi(x)\check{\Sigma}(\nabla\varphi(x))\} = \omega^2\rho(x)(\varphi_2(x)e_2 + \varphi_3(x)e_3) & \text{в } \Omega, \\ \varphi = id \quad \text{на} \quad \Gamma, \end{cases}$$

где $\check{\Sigma}(F) = \check{\Sigma}\left(\frac{1}{2}(F^T F - I)\right)$ для всех $F \in \mathbb{M}^3_+$, и пусть для функции реакции $\check{\Sigma}$ выполнены предположения теоремы 6.7-1. Можно считать, что плотность массы $\rho\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ обладает любой необходимой гладкостью.

(1) Покажите, что найдётся $\omega_0 > 0$, такое что эта задача имеет решение $u = \varphi - id \in V^p(\Omega)$, $p > 0$, при всех $|\omega| < \omega_0$.

(2) Эта задача может быть записана в операторном виде

$$A_{\#}(u) := A(u) + L(u) = f,$$

где A — нелинейный оператор, определённый в § 6.6, а линейный оператор L и правая часть f заданы соотношениями

$$Lu = -\omega^2\rho(u_2 e_2 + u_3 e_3), \qquad f(x) = \omega^2\rho(x)(x_2 e_2 + x_3 e_3).$$

Как и в § 6.11, можно рассмотреть метод приращений, который состоит в решении рекуррентной последовательности линейных задач

$$A'_{\#}(u^n)(u^{n+1} - u^n) = \delta f^n, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1, \quad u^0 = o,$$

где $\delta f^n := (\lambda^{n+1} - \lambda^n) f$. Покажите, что при достаточно малых $|\omega|$ данный метод приращений является корректно определённым и сходящимся.

6.9. Рассмотрим оператор Немыцкого $A\colon u \in H^m(\Omega) \to Au \in L^2(\Omega)$, где $Au(x) = a(x, u(x))$, функция $a\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает любой необходимой гладкостью, Ω — ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$.

(1) Пусть $m = 0$. Покажите, что если A дифференцируем по Фреше, то a есть аффинная функция относительно второго аргумента, т. е. $a(x, \zeta) = \alpha(x) + \beta(x)\zeta$.

(2) Покажите, что оператор A дифференцируем по Фреше, если m — такое целое число, для которого $H^m(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$.

6.10. В книге Washizu [1975, p. 395] дано определение ещё одного метода, в котором «сочетаются подходы Эйлера и Лагранжа». Опишите и исследуйте сходимость этого метода приращений, следуя схеме, предложенной здесь для метода Лагранжа.

6.11. *Метод Ньютона* для решения нелинейного уравнения вида $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ заключается в подходящем выборе начального приближения $\boldsymbol{u}^0$ и последовательном решении линейных задач

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^n)(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n) = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}^n), \qquad n \geqslant 0.$$

Таким образом, метод Ньютона сводит нахождение решения нелинейной задачи к решению бесконечного числа линейных задач. То же самое можно сказать и о других методах приближённого решения нелинейных уравнений, в том числе и о методе приращений, описанном в § 6.10. Воспользуемся обозначениями теоремы 6.6-1.

(1) Предположим, что

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{o}, \quad \rho\gamma_0^p M^p(\rho) < \frac{1}{3},$$

$$|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega} \leqslant \rho\,(\gamma_0^p)^{-1}\,(2 - 3\rho\gamma_0^p M^p(\rho))$$

при некотором $p > 3$. Покажите, что все последовательные приближения $\boldsymbol{u}^n$ лежат в шаре $\boldsymbol{B}_\rho^p$ и, значит, метод Ньютона корректно определён.

(2) В предположениях п. (1) покажите, что метод Ньютона является сходящимся, а также что сходится он со скоростью геометрической прогрессии, т. е. величина ошибки $\|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}\|_{2,p,\Omega}$ ограничена общим членом некоторой сходящейся геометрической прогрессии. Точнее, покажите, что найдётся не зависящее от n число $c(\rho)$, для которого

$$\|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}\|_{2,p,\Omega} \leqslant c(\rho)\,(3\rho\gamma_0^p M^p(\rho))^n, \qquad n \geqslant 0,$$

где $\boldsymbol{u}$ — единственное решение уравнения $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ в шаре $\boldsymbol{B}_\rho^p$.

(3) Поскольку с вычислительной точки зрения слишком накладно обращать оператор $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^n)$ на каждом шаге, представляется естественным так видоизменить метод, чтобы

обращать приходилось только оператор $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^0)$, соответствующий начальному приближению. В итоге получается *обобщенный метод Ньютона*

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{u}^0)(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n)=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}^n), \quad n\geqslant 0.$$

В предположении что

$$\boldsymbol{u}^0=\boldsymbol{o}, \quad \rho\gamma_0^p M^p(\rho)<1 \quad \text{и}$$

$$|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}\leqslant\rho(\gamma_0^p)^{-1}(1-\rho\gamma_0^p M^p(\rho))$$

при некотором $p>3$, установите корректную определённость этого метода и его сходимость со скоростью геометрической прогрессии.

Замечание. Сходимость метода Ньютона и его вариантов представляет собой классический результат (см., например, Ciarlet [1983, § 7.5]).

6.12. Примем допущения и обозначения теоремы 6.12-2. Кроме того, предположим, что отображение $\breve{\Sigma}$: $\mathbb{V}(\boldsymbol{0})\to\mathbb{S}^3$ является аналитическим. Покажите, что отображение $\lambda\in I\to\tilde{\boldsymbol{u}}(\lambda):=\boldsymbol{u}(\lambda f)\in V^p(\Omega)$ тоже аналитично на некотором открытом интервале I, содержащем 0 (относительно случая материалов Сен-Венана—Кирхгофа см. Destuynder & Galbe [1978]).

ГЛАВА 7
ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МИНИМИЗАЦИИ ЭНЕРГИИ

Введение

Как мы видели в гл. 6, теорема Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве позволяет получить простое доказательство существования (и единственности) элемента, минимизирующего *коэрцитивный квадратичный* функционал в гильбертовом пространстве. Этот результат был применён к задачам линеаризованной теории упругости. В реальных задачах трёхмерной теории упругости предположения такого рода должны быть существенно ослаблены, поскольку требуется минимизировать *коэрцитивные*, но не *квадратичные* функционалы, и притом функционалы, заданные на *невыпуклых* подмножествах *рефлексивных банаховых пространств более общего вида*; кроме того, подынтегральная функция $\hat{W}(\boldsymbol{F})$ не является выпуклой по $\boldsymbol{F}$ и неограниченно возрастает при стремлении к нулю $\det \boldsymbol{F}$. Все эти обстоятельства делают доказательство существования элементов, минимизирующих энергию, в случае общих гиперупругих материалов значительно более трудным.

Тем не менее весьма эффективный подход к таким задачам был найден Джоном Боллом в 1977 г. Его метод, более подробно описанный в § 7.4, заключается в том, чтобы рассматривать последовательность (φ^k), *минимизирующую функционал полной энергии на некотором множестве допустимых деформаций*, которое (возьмём для определенности задачу с граничными условиями на перемещения и напряжения) имеет вид

$$\Phi = \{\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega);\quad \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in \boldsymbol{L}^q(\Omega),\quad \det\nabla\psi \in L^r(\Omega),$$
$$\psi = \varphi_0\ da\text{-п.в. на } \Gamma_0,\quad \det\nabla\psi > 0 \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Предполагается, что числа p, q, r достаточно велики и именно они входят в неравенство коэрцитивности:

$$\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) \geqslant \alpha\left\{\|\boldsymbol{F}\|^p + \|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^q + (\det\boldsymbol{F})^r\right\} + \beta \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

В силу *неравенства коэрцитивности* последовательность $(\varphi^k, \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^k, \det\nabla\varphi^k)$ ограничена в рефлексивном банаховом пространстве $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)\times\boldsymbol{L}^q(\Omega)\times L^r(\Omega)$. Поэтому существует подпоследовательность $(\varphi^l, \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^l, \det\nabla\varphi^l)$, которая слабо сходится в этом пространстве к некоторому элементу (φ, H, δ), причём очень важно, что имеют место равенства $H = \operatorname{Cof} \nabla\varphi$ и $\delta = \det \nabla\varphi$ (см. § 7.5 и 7.6). В этом случае из *асимптотики* $\widehat{W}(x, F) \to +\infty$ при $\det F \to 0^+$ вытекает, что $\det \nabla\varphi > 0$ почти всюду в Ω и, значит, слабый предел минимизирующей последовательности также принадлежит множеству Φ.

Кроме того, решающую роль играет ещё одно наблюдение Джона Болла, а именно: из *поливыпуклости* функции запасённой энергии вытекает *секвенциальная слабая полунепрерывность снизу функционала полной энергии* I, т. е.

$$I(\varphi) \leqslant \liminf_{l \to \infty} I(\varphi^l).$$

Отсюда следует, что $\varphi \in \Phi$ является *элементом, реализующим минимум полной энергии на множестве* Φ. Этим методом Болл получил *теоремы существования решений в пространстве* $W^{1,p}(\Omega)$ для задач с граничными условиями на перемещения и задач с граничными условиями на перемещения и напряжения (теорема 7.7-1), а также, наложив дополнительные условия на допустимые деформации, — для задач с граничными условиями на напряжения (теорема 7.7-2).

Представив результаты Болла, мы затем обобщаем их в двух направлениях. Во-первых (теоремы 7.8-1 и 7.8-2), мы рассматриваем множество допустимых деформаций с *односторонним граничным условием на положения* $\varphi(x) \in C$, $x \in \Gamma_2 \in \Gamma$ (такая задача служит моделью контакта без трения; см. § 5.3). Во-вторых, мы налагаем *условие инъективности* $\int \det \nabla\varphi \, dx \leqslant \operatorname{vol} \varphi(\Omega)$ на допустимые деформации (это модель самокасания без трения и без взаимопроникновения частей тела; см. § 5.6) и показываем, что тогда существует *почти всюду инъективное отображение, реализующее минимум* полной энергии (теорема 7.9-1).

В заключение (§ 7.10) мы приводим краткий обзор различных нерешенных задач, среди которых особо важное место занимает нахождение приемлемых условий, при которых функции, реализующие минимум энергии, являются решениями (хотя бы в обобщённом смысле) соответствующих краевых задач.

* 7.1. Слабая топология и слабая сходимость

Теория существования, излагаемая в этой главе, опирается на понятия слабой сходимости и слабо полунепрерывного снизу функционала. Поэтому в двух первых параграфах мы приводим краткий обзор основных фактов, связанных с этими понятиями. Доказательства и дополнительные результаты о слабой топологии и слабой сходимости можно найти в книгах Brezis [1983] и Yosida [1966, гл. V][1].

Пусть V — нормированное векторное пространство. Напомним, что сопряжённое к нему пространство V' состоит из всех линейных форм L: $V \to \mathbb{R}$, непрерывных в **сильной топологии** на V, т. е. топологии, индуцированной нормой пространства V. **Слабая топология** на V определяется как самая слабая из топологий на V, относительно которых все функционалы L из V' непрерывны. (Здесь „самая слабая" означает, что в любой другой топологии на V, обладающей тем же свойством, открытых множеств больше.) Таким образом, всякое множество, открытое в слабой топологии, открыто и в сильной, обратное же верно не всегда, как показывает следующая теорема:

Теорема 7.1-1. (a) *Пусть V — конечномерное пространство. Тогда сильная и слабая топологии на V совпадают. Следовательно, конечномерное пространство V со слабой топологией является нормируемым и, тем более, метризуемым.*

(b) *Пусть V — бесконечномерное пространство. Тогда слабая топология строго слабее сильной, т. е. имеются множества открытые в сильной топологии, но не являющиеся открытыми в слабой. Кроме того, бесконечномерное пространство V со слабой топологией неметризуемо.*

(c) *Слабая топология хаусдорфова (отделима).* ■

Последовательность (v_k) элементов V называется **сильно сходящейся**, если она сходится к некоторому элементу $v \in V$ относительно сильной топологии, **и слабо сходящейся**, если она сходится к некоторому элементу $v \in V$ относительно слабой топологии. Для этих двух типов сходимости мы примем следующие обозначения:

$$v_k \to v \text{ (сильная сходимость)},$$
$$v_k \rightharpoonup v \text{ (слабая сходимость)}.$$

Отметим, что *предел слабо сходящейся последовательности единствен* (теорема 7.1-1(c)), а также что, в силу данных выше определений, *всякая сильно сходящаяся последовательность является и слабо сходящейся* (обратное может не иметь места в случае бесконечномерных пространств; см. теорему 7.1-1(a)). И наконец, легко показать, что

$$\boxed{v_k \rightharpoonup v \text{ в } V \Leftrightarrow L(v_k) \to L(v) \quad \text{для всех} \quad L \in V'.}$$

За исключением некоторых „патологических" пространств (например, l^1), во всяком бесконечномерном нормированном

[1] См. также Колмогоров и Фомин [1976]'. — *Прим. ред.*

векторном пространстве существуют слабо сходящиеся последовательности, которые не являются сильно сходящимися. Так, последовательность (v_k) вида $v_k(t) = \sin kt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, слабо сходится к нулю в пространстве $L^2(0, 2\pi)$, поскольку для любой функции $v \in L^2(0, 2\pi)$ её коэффициенты Фурье $\int_0^{2\pi} v(t) \sin kt \, dt$ должны стремиться к нулю при $k \to \infty$ в силу равенства Парсеваля. Эта последовательность не является сильно сходящейся, так как её пределом мог бы быть лишь нуль, однако $\| v_k \|_{L^2(0, 2\pi)} = \sqrt{\pi}$. Тем не менее имеется несколько полезных соотношений, связывающих сильную и слабую сходимости в бесконечномерных пространствах. Эти соотношения описаны в следующих теоремах.

Теорема 7.1-2 (теорема Мазура). *Пусть $v_k \rightharpoonup v$ в нормированном векторном пространстве V. Тогда существуют выпуклые комбинации*

$$w_k := \sum_{m=k}^{N(k)} \lambda_m^k u_m, \text{ где } \sum_{m=k}^{N(k)} \lambda_m^k = 1, \quad \lambda_m^k \geqslant 0, \quad k \leqslant m \leqslant N(k),$$

такие что $w_k \to v$. ■

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Ekeland & Temam [1974, p. 6]. Пусть C — выпуклое подмножество в V, которое замкнуто в сильной топологии. Тогда предел всякой слабо сходящейся последовательности элементов из C также принадлежит C в силу теоремы Мазура и, значит, множество C является „секвенциально слабо замкнутым“. Более того, справедлива следующая теорема (см., например, Brezis [1983, теорема III. 7, p. 38][1]):

Теорема 7.1-3. *Всякое выпуклое множество, замкнутое в сильной топологии, замкнуто и в слабой топологии.* ■

Предполагая *полноту* рассматриваемого пространства, можно получить и другие полезные результаты, как, например:

Теорема 7.1-4. (a) *В банаховом пространстве всякая слабо сходящаяся последовательность (v_k) ограничена, и её предел удовлетворяет неравенству*

$$\| v \| \leqslant \liminf_{k \to \infty} \| v_k \|.$$

(b) *В рефлексивном банаховом пространстве всякая ограниченная последовательность содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.* ■

[1] Или Иосида [1967]. — *Прим. ред.*

По поводу доказательства этой теоремы см., например, Brezis [1983, предложение III.5, р. 35, теорема III.27, р. 50][1].

Теорема 7.1-5. (а) *Пусть V и W — банаховы пространства и A: $V \to W$ — компактный линейный оператор. Тогда*

$$v_k \rightharpoonup v \text{ в } V \Rightarrow Av_k \to Av \text{ в } W.$$

(b) *Пусть V — нормированное векторное пространство, W — банахово пространство и B: $V \times W \to \mathbb{R}$ — непрерывное билинейное отображение. Тогда*

$$v_k \to v \text{ и } w_k \rightharpoonup w \Rightarrow B(v_k, w_k) \to B(v, w).$$

Доказательство. Оба утверждения являются следствиями теоремы 7.1-4(а). Действительно, линейный оператор, который непрерывен относительно сильных топологий пространств V и W, является непрерывным и относительно их слабых топологий (Brezis [1983, теорема III.9, р. 39][2]), и, значит, из сходимости $v_k \rightharpoonup v$ в V вытекает, что $Av_k \rightharpoonup Av$; поскольку последовательность (v_k) ограничена и оператор A компактен, последовательность (Av_k) содержит сильно сходящуюся подпоследовательность; в силу единственности предела Av отсюда следует, что и вся последовательность (Av_k) сильно сходится к Av. Для доказательства второго утверждения заметим, что, в силу билинейности отображения B,

$$B(v, w) - B(v_k, w_k) = B(v - v_k, w_k) - B(v, w - w_k).$$

Отсюда выводим требуемую импликацию, пользуясь непрерывностью B, ограниченностью последовательиости (w_k) и предположением о сильной и слабой сходимостях соответствующих последовательностей. ■

* 7.2. Полунепрерывность снизу

Дополнительные подробиости о полунепрерывиых снизу функциях можно найти, например, в книгах: Brezis [1983], Choquet [1964], Вайнберг [1956, § 8]. Пусть V — топологическое пространство. Функция J: $V \to \mathbb{R} \cup (\{+\infty\}$ называется **полунепрерывной снизу,** на V, если при каждом $a \in \mathbb{R}$ прообраз

$$J^{-1}(]-\infty, a]) = \{v \in V;\ J(v) \leqslant \alpha\}$$

является замкнутым подмножеством в V. Очевидно, что всякая непрерывиая фуикция J: $V \to \mathbb{R}$ полуиепрерывна снизу; с другой стороны, для того чтобы полунепрерывная снизу функция

[1] Или Иосида [1967]. — *Прим. ред.*

[2] Или Колмогоров и Фомии [1976]'. — *Прим. ред.*

$J\colon V \to \mathbb{R}$ была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы прообразы $J^{-1}(\,]\alpha, +\infty[\,)$ также были замкнутыми множествами при всех $a \in \mathbb{R}$, т. е. чтобы функция $-J$ также была полунепрерывной снизу.

В следующей теореме приводятся два полезных описания полунепрерывных снизу функций. Первое из них поясняется при-

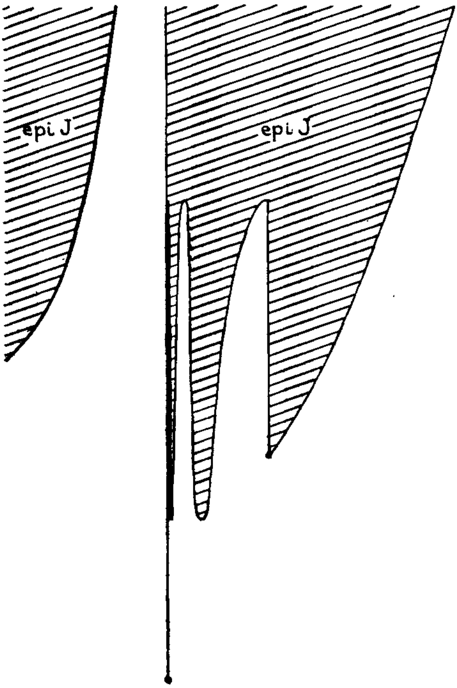

Рис. 7.2-1. Полунепрерывная снизу функция $J\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная равенствами: $J(v) = -1/v$ при $v < 0$, -1 при $v = 0$, $1 + \sin v^{-1}$ при $0 < v < 2\pi$ и v^2 при $2/\pi \leqslant v$. Её надграфик $\operatorname{epi} J$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^2$.

мером на рис. 7.2-1, а второе представляет собой, так сказать, „нижнюю половину“ следующего хорошо известного свойства непрерывных функций:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u \text{ в } V \Rightarrow J(u) = \lim_{k\to\infty} J(u_k),$$

из которого, в свою очередь, следует непрерывность в случае метризуемости топологии пространства V. Напомним, что *нижним пределом* последовательности (α_k) расширенной вещественной прямой называется число

$$\liminf_{k\to\infty} \alpha_k := \lim_{k\to\infty} \{\inf_{l \geqslant k} \alpha_l\},$$

которое корректно определено, поскольку на множестве $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ монотонная последовательность всегда является сходящейся. Можно дать и такое эквивалентное определение нижнего предела: $\liminf_{k\to\infty} \alpha_k$ есть наименьший из пределов сходящихся подпоследовательностей последовательности (α_k). Понятие надграфика функции со значениями в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ уже встречалось нам в теореме 4.7-10.

Теорема 7.2-1. (a) *Пусть V — топологическое пространство. Функция J: $V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ является полунепрерывной снизу в том и только в том случае, когда её надграфик*

$$\operatorname{epi} J = \{(v, \alpha) \in V \times \mathbb{R};\quad J(v) \leqslant \alpha\}$$

— замкнутое подмножество пространства $V \times \mathbb{R}$.

(b) *Всякая полунепрерывная снизу функция J: $V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ является также* **секвенциально полунепрерывной снизу,** *т. е.*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} u_k = u \ \text{ в } \ V \Rightarrow J(u) \leqslant \liminf_{k\to\infty} J(u_k).}$$

Если топология пространства V метризуема, то справедливо и обратное утверждение. ■

Замечание. Функция, изображенная на рис. 4.7-3, не полунепрерывна снизу (её надграфик не является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^2$). ■

Как уже было сказано (теорема 7.1-1), в бесконечномерном пространстве V сильная и слабая топологии всегда *различны*. В соответствии с этим говорят, что функция J: $V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ **сильно (слабо) полунепрерывна снизу,** если она полунепрерывна снизу, когда V наделено сильной (слабой) топологией. Аналогично, функция J: $V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется **секвенциально сильно (слабо) полунепрерывной снизу,** если

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u \ \text{ в } \ V \Rightarrow J(u) \leqslant \liminf_{k\to\infty} J(u_k),$$

где пространство V наделено сильной (слабой) топологией.

Поскольку слабая топология *не является* метризуемой, когда V бесконечномерно (теорема 7.1—1), секвенциально слабая полунепрерывность снизу *не* эквивалентна для таких V слабой полунепрерывности снизу. Из дальнейшего станет ясно, что *для наших целей вполне достаточно более слабого понятия секвенциальной слабой полунепрерывности снизу.*

Поскольку слабо замкнутое множество является также и сильно замкнутым, утверждение (a) теорему 7.2-1 показывает, что *функция, слабо полунепрерывная снизу, будет также и сильно полунепрерывной снизу.* Достаточное условие справедливости обратного утверждения предоставляет

Теорема 7.2-2. *Пусть V — нормированное векторное пространство. Тогда всякая выпуклая сильно полунепрерывная снизу функция J: $V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ является слабо полунепрерывной снизу.*

Доказательство. В силу теорем 4.7-10 и 7.2-1 множество $\operatorname{epi} J$ выпукло и замкнуто в сильной топологии пространства $V \times \mathbb{R}$. Следовательно, множество $\operatorname{epi} J$ слабо замкнуто (теорема 7.1-3), и, значит, функция J слабо полунепрерывна снизу по теореме 7.2-1. ■

Замечания. (1) *Секвенциальная* слабая полунепрерывность снизу функции J вытекает непосредственно из теоремы Мазура (теорема 7.1-2).

(2) Если функция J *вещественнозначна* и *дифференцируема*, то нетрудно доказать, что она секвенциально слабо полунепрерывна снизу, и не прибегая к теореме Мазура. Действительно, пусть (u_k) — последовательность, слабо сходящаяся к элементу $u \in V$. Из свойств выпуклых дифференцируемых функций вытекает (теорема 4.7-6), что

$$J(u) \leqslant J(u_k) - J'(u)(u_k - u) \quad \text{при всех} \quad k.$$

По определению слабой сходимости имеем $\lim_{k\to\infty} J'(u)(u_k - u) = 0$, так как $J'(u) \in V'$. Следовательно, $J(u) \leqslant \liminf_{k\to\infty} J(u_k)$, и, значит, функция J секвенциально слабо полунепрерывна снизу. ■

* 7.3. Секвенциально слабо полунепрерывные снизу функционалы

Прежде всего установим один фундаментальный признак секвенциальной слабой полунепрерывности снизу для функционалов вида

$$H: \zeta \in L^1(\Omega) \to H(\zeta) = \int_\Omega h(x, \zeta(x))\, dx,$$

который лежит в основе доказательства существования элементов, реализующих минимум некоторых важных функционалов (теорема 7.3-2). Обоснование этого признака существенным образом опирается на два результата — *лемму Фату* и *теорему Мазура* (теорема 7.1-2). Напомним, что символом $\rightharpoonup$ обозначается слабая сходимость.

Теорема 7.3-1. *Пусть Ω — ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$ и функция*

$$h: \Omega \times \mathbb{R}^\mu \to [\beta, +\infty]$$

удовлетворяет условиям:

функция $h(x, \cdot): \zeta \in \mathbb{R}^\mu \to h(x, \zeta) \in [\beta, +\infty]$ выпукла и непрерывна при почти всех $x \in \Omega$,

функция $h(\cdot, \zeta): x \in \Omega \to h(x, \zeta) \in [\beta, +\infty]$ измерима при всех $\zeta \in \mathbb{R}^\mu$.

Тогда

$$\boxed{\begin{aligned}&\zeta_k \to \zeta \text{ в } L^1(\Omega) = (L^1(\Omega))^\mu \Rightarrow\\ &\quad\int_\Omega h(x, \zeta(x))\,dx \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega h(x, \zeta_k(x))\,dx.\end{aligned}}$$

Доказательство. Ввиду ограниченности множества Ω функции, тождественно равные постоянным, интегрируемы на Ω, и, следовательно, не ограничивая общности, мы можем считать $\beta = 0$ (если $\beta < 0$, то функцию h следует заменить на $h - \beta$). **Функция h является *функцией Каратеодори*** в том смысле, что функции $h(x, \cdot)$ непрерывны при почти всех $x \in \Omega$, а функции $h(\cdot, \zeta)$ измеримы при почти всех $\zeta \in \mathbb{R}^\mu$. Следовательно, функция $x \in \Omega \to h(x, \zeta(x))$ является измеримой, коль скоро измерима функция ζ: $x \in \Omega \to \zeta(x) \in \mathbb{R}^\mu$ (Ekeland & Temam [1974, p. 218 и далее]). Поскольку значения функции h принадлежат множеству $[0, +\infty]$, мы можем заключить, что для любой измеримой функции ζ: $\Omega \to \mathbb{R}^\mu$, и в частности для любой $\zeta \in L^1(\Omega)$, *интеграл* $\int_\Omega h(x, \zeta(x))\,dx$ *есть корректно определённый элемент расширенной вещественной прямой, принадлежащий интервалу* $[0, +\infty]$.

Покажем теперь, что функционал

$$H: \zeta \in L^1(\Omega) \to H(\zeta) := \int_\Omega h(x, \zeta(x))\,dx \in [0, +\infty]$$

полунепрерывен снизу относительно *сильной* топологии пространства $L^1(\Omega)$, т. е. что

$$\zeta_k \to \zeta \text{ в } L^1(\Omega) \text{ при } k \to \infty$$
$$\Rightarrow \int_\Omega h(x, \zeta(x))\,dx \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega h(x, \zeta_k(x))\,dx$$

(для нормированных векторных пространств в силу метризуемости их топологии полунепрерывность снизу эквивалентна секвенциальной полунепрерывности снизу; см. теорему 7.2-1). Пусть последовательность (ζ_k) сходится в пространстве $L^1(\Omega)$ к пределу ζ, и пусть (ζ_l) — любая её подпоследовательность, такая что на множестве $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ последовательность $\int_\Omega h(x, \zeta_l(x))\, dx$ является сходящейся. В силу определения нижнего предела достаточно показать, что

$$\int_\Omega h(x, \zeta(x))\, dx \leqslant \lim_{l\to\infty} \int_\Omega h(x, \zeta_l(x))\, dx.$$

Ввиду сходимости в $L^1(\Omega)$ подпоследовательности (ζ_l) к функции ζ можно найти её подпоследовательность (ζ_m), такую что $\zeta_m(x) \to \zeta(x)$ при почти всех $x \in \Omega$, а так как, по предположению, функции $h(x, \cdot)$ непрерывны для почти всех $x \in \Omega$, имеем

$$h(x, \zeta_m(x)) \to h(x, \zeta(x)) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega.$$

Таким образом, по *лемме Фату*

$$\int_\Omega h(x, \zeta(x))\, dx = \int_\Omega \lim_{m\to\infty} h(x, \zeta_m(x))\, dx$$
$$\leqslant \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega h(x, \zeta_m(x))\, dx = \lim_{l\to\infty} \int_\Omega h(x, \zeta_l(x))\, dx,$$

и, значит, *функционал H: $L^1(\Omega) \to [0, +\infty]$ сильно полунепрерывен снизу.*

С другой стороны, *функционал H: $L^1(\Omega) \to [0, +\infty]$ является выпуклым.* Действительно, из выпуклости функции h по второму аргументу (см. условие теоремы) следует, что для всех $\lambda \in (0, 1]$ и всех ζ, $\eta \in L^1(\Omega)$

$$H(\lambda\zeta + (1-\lambda)\eta) = \int_\Omega h(x, \lambda\zeta(x) + (1-\lambda)\eta(x))\, dx$$
$$\leqslant \int_\Omega \{\lambda h(x, \zeta(x)) + (1-\lambda) h(x, \eta(x))\}\, dx$$
$$= \lambda H(\zeta) + (1-\lambda) H(\eta).$$

Будучи выпуклым и сильно полунепрерывным снизу, функционал H слабо полунепрерывен снизу в силу теоремы 7.2-2. ■

Замечания. (1) Требование непрерывности функций $h(x, \cdot)$ не является излишним, поскольку допускается значение $+\infty$ (из выпуклости следует непрерывность лишь во внутренних точках множества $\{\zeta \in \mathbb{R}^\mu;\ h(x, \zeta) < +\infty\}$; см. теорему 4.7-10).

(2) Если функция h не зависит от $x \in \Omega$, то условие измеримости выполняется само собой.

(3) Для ограниченных множеств Ω из слабой сходимости в каком-либо из пространств $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, вытекает слабая сходимость в $L^1(\Omega)$.

(4) При $n = 1$ имеет место утверждение, обратное теореме 7.3-1; см. упражнение 7.1.

(5) Полученный выше результат можно распространить на функционалы более общего вида $\int_\Omega h(x, v(x), \zeta(x))\,dx$, где функция $h: \Omega \times \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^\mu \to [0, +\infty]$ обладает следующими свойствами:

функция $h(x, \cdot, \cdot): (v, \zeta) \in \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^\mu \to [0, +\infty]$ непрерывна для почти всех $x \in \Omega$,

функция $h(\cdot, v, \zeta): x \in \Omega \to [0, +\infty]$ измерима для почти всех $(v, \zeta) \in \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^\mu$,

функция $h(x, v, \cdot): \zeta \in \mathbb{R}^\mu \to [0, +\infty]$ выпукла для всех $v \in \mathbb{R}^\lambda$ и почти всех $x \in \Omega$.

Из этих предположений (которые сводятся к условиям теоремы 7.3-1 при отсутствии зависимости от $v \in \mathbb{R}^\lambda$) вытекает (Giaquinta [1983, p. 18]; см. также Serrin [1961], Fichera [1967]), что

$$(v_k, \zeta_k) \to (v, \zeta) \text{ в } L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$$
$$\Rightarrow \int_\Omega h(x, v(x), \zeta(x))\,dx \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega h(x, v_k(x), \zeta_k(x))\,dx.$$

Сюда же следует отнести и достаточные условия, приведённые в книге Ekeland & Temam [1974, p. 226], при которых

$$v_k(x) \to v(x) \text{ при почти всех } x \in \Omega,\ \zeta_k \to \zeta \text{ в } L^1(\Omega)$$
$$\Rightarrow \int_\Omega h(x, v(x), \zeta(x))\,dx \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega h(x, v_k(x), \zeta_k(x))\,dx.$$

Доказательства этих более общих результатов существенно усложняются из-за наличия дополнительного аргумента $v \in \mathbb{R}^\lambda$ у подынтегральной функции. По поводу недавних результатов см. работы Dacorogna [1982a], Marcellini [1986a, 1986b], Marcellini & Sbordone [1983] Ambrosio [1987] и особенно книгу Dacorogna [1987]. ■

В качестве приложения установленного признака слабой полунепрерывности снизу докажем существование функций из пространств Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, *реализующих минимум* интегральных функционалов специального вида с выпуклой подынтегральной функцией. Множество всех матриц, имеющих m строк и n столбцов, обозначается через $\mathbb{M}^{m\times n}$.

Теорема 7.3-2 (о существовании функций, реализующих минимум). *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^n$ *с границей* Γ, *и пусть функция* h: $\Omega \times \mathbb{M}^{m \times n} \to [\beta, +\infty]$, $\beta \in \mathbb{R}$, *обладает следующими свойствами*:

(a) *выпуклость: для почти всех* $x \in \Omega$ *функция* $h(x, \cdot)$: $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^{m \times n} \to h(x, \boldsymbol{F})$ *выпукла;*

(b) *непрерывность и измеримость: для почти всех* $x \in \Omega$ *функция* $h(x, \cdot)$: $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^{m \times n} \to h(x, \boldsymbol{F})$ *непрерывна, а функция* $h(\cdot, \boldsymbol{F}) : x \in \Omega \to h(x, \boldsymbol{F})$ *измерима для всех* $F \in \mathbb{M}^{m \times n}$;

(c) *коэрцитивность: существуют постоянные* α *и* p, *такие что*

$\alpha > 0$, $p > 1$, и $h(x, \boldsymbol{F}) \geqslant \alpha \|\boldsymbol{F}\|^p + \beta$ для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^{m \times n}$.

Пусть Γ_0 — *измеримое подмножество на* Γ, *такое что* $\mathrm{d}a$-meas $\Gamma_0 > 0$, *и* $\boldsymbol{\varphi}$: $\Gamma_0 \to \mathbb{R}^m$ — *измеримая функция, такая что множество*

$$\boldsymbol{\Phi} = \{\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega); \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}_0 \ \mathrm{d}a\text{-п.в. на } \Gamma_0\},$$
$$\text{где } \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) := W(^{1,p}(\Omega))^m,$$

непусто. Пусть L — *непрерывный линейный функционал на пространстве* $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *и*

$$I(\boldsymbol{\psi}) = \int_\Omega h(x, \nabla\boldsymbol{\psi}(x))\, \mathrm{d}x - L(\boldsymbol{\psi}), \quad \text{где} \quad \nabla\boldsymbol{\psi} = (\partial_j \psi_i) \in \mathbb{M}^{m \times n}.$$

Предположим, что $\inf\limits_{\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\Phi}} I(\boldsymbol{\psi}) < +\infty$.

Тогда существует по крайней мере одна функция $\boldsymbol{\varphi}$, *такая что*

$$\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\Phi} \quad \text{и} \quad I(\boldsymbol{\varphi}) = \inf_{\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\Phi}} I(\boldsymbol{\psi}).$$

Доказательство. В силу предположений о коэрцитивности функции h и непрерывности линейной формы L имеет место неравенство

$$I(\boldsymbol{\psi}) \geqslant \alpha \int_\Omega \|\nabla\boldsymbol{\psi}\|^p \mathrm{d}x + \beta \operatorname{vol}\Omega - \|L\| \|\boldsymbol{\psi}\|_{1,p,\Omega}$$
$$\text{при всех } \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega).$$

Ввиду обобщённого неравенства Пуанкаре (теорема 6.1-8(b)) существует постоянная $c_1 > 0$, такая что

$$\int_\Omega |\boldsymbol{\psi}|^p \mathrm{d}x \leqslant c_1 \left\{ \int_\Omega |\mathbf{grad}\,\boldsymbol{\psi}|^p \mathrm{d}x + \left| \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{\psi}\, \mathrm{d}a \right|^p \right\}$$
$$\text{для всех } \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega).$$

Следовательно, найдутся постоянные $c_2 > 0$ и c_3, такие что

$$I(\psi) \geqslant c_2 \|\psi\|^p_{1,p,\Omega} - \|L\| \|\psi\|_{1,p,\Omega} + c_3 \quad \text{для всех} \quad \psi \in \Phi,$$

а поскольку $p > 1$, найдутся постоянные c и d, такие что

$$c > 0 \text{ и } I(\psi) \geqslant c \|\psi\|^p_{1,p,\Omega} + d \quad \text{для всех} \quad \psi \in \Phi.$$

Пусть (φ^k) — *минимизирующая последовательность* для функционала I, т. е. последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\varphi^k \in \Phi \text{ при всех } k \text{ и } \lim_{k \to \infty} I(\varphi^k) = \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi).$$

Учитывая предположение $\inf_{\psi \in \Phi} I(\psi) < +\infty$, а также сходимость $I(\psi) \to +\infty$ при $\|\psi\|_{1,p,\Omega} \to +\infty$, устанавливаем, что эта минимизирующая последовательность является ограниченной в рефлексивном банаховом пространстве $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ (теорема 6.1-1). Таким образом, ограниченная последовательность (φ^k) содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $\varphi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ (теорема 7.1-4). Замкнутое выпуклое множество Φ является слабо замкнутым (теорема 7.1-3), и, значит, слабый предел φ принадлежит множеству Φ. Поскольку

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ в } \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \nabla\varphi^l \rightharpoonup \nabla\varphi \text{ в } \boldsymbol{L}^p(\Omega) \Rightarrow \nabla\varphi^l \rightharpoonup \nabla\varphi \text{ в } L^1(\Omega),$$

на основании теоремы 7.3-1 заключаем, что

$$\int_\Omega h(x, \nabla\varphi(x))\,dx \leqslant \liminf_{l \to \infty} \int_\Omega h(x, \nabla\varphi^l(x))\,dx.$$

Кроме того, в силу непрерывности линейной формы L на $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$

$$L(\varphi) = \lim_{l \to \infty} L(\varphi^l),$$

по определению слабой сходимости. Следовательно,

$$\inf_{\psi \in \Phi} I(\psi) \leqslant I(\varphi) \leqslant \liminf_{l \to \infty} I(\varphi^l) = \lim_{k \to \infty} I(\varphi^k) = \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi).$$

Поэтому $I(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi)$. Теорема доказана. ■

Замечания. (1) Если функция $h(x, \cdot)$ *строго выпукла* на $\mathbb{R}^{m \times n}$ для почти всех $x \in \Omega$, то функционал I также является строго выпуклым и тогда элемент, реализующий минимум I, единствен (теорема 4.7-8).

(2) Теорема 7.3-2 содержит как частный случай результат о существовании решений задач линеаризованной теории упругости (теорема 6.3-5); см. упражнение 7.3.

(3) Более общие результаты о существовании решений доказаны в книгах Ekeland & Temam [1974, p. 232], Morrey [1966, теорема 1.9.1]. См. также Berger [1977, p. 307], Aubin & Ekeland [1984], Ekeland & Turnbull [1984], Dacorogna [1987]. ■

Когда подынтегральная функция $h(x, \boldsymbol{F})$ *не является выпуклой* по аргументу $\boldsymbol{F}$ (что имеет место в случае гиперупругих материалов), при установлении слабой полунепрерывности снизу и доказательстве существования решений возникают значительные трудности. Один из способов обойти эти трудности, особенно в случае гиперупругости, предоставляет понятие поливыпуклости, как будет видно из дальнейшего изложения. Кроме того, „обобщённые" решения можно получить методами *двойственности* и *релаксации*, известными в вариационном исчислении. В общем виде применение этих методов описано в монографии Ekeland & Temam [1974], а их систематические конкретные приложения к гиперупругости — в работах Dacorogna [1981, 1982a, 1982b, 1987]. Одним из препятствий на этом пути служит тот факт, что здесь требуется знать результат „овыпукления" подынтегральной функции, а случаи, когда это возможно, весьма немногочисленны (см. Kohn & Strang [1983, 1985], Gurtin & Temam [1981], где даны примеры, когда все вычисления могут быть доведены до конца). Аналогичные результаты с приложениями к теории упругости, а также общие сведения и ссылки на литературу по невыпуклым задачам вариационного исчисления можно найти в работах Ekeland [1979], Aubert & Tahraoui [1979, 1984], Atteia & Dedieu [1981], Atteia & Raissouli [1986], de Campos & Oden [1983], Marcellini [1986c], Mascolo & Schianchi [1983], Tahrioui [1986]. По поводу относящегося сюда вопроса о задачах слабой замкнутости множеств, на которых ищется минимизирующий элемент, см. Aubert & Tahraoui [1985, 1987].

7.4. О подходе Джона Болла к теории существования в случае гиперупругости

Отталкиваясь от доказательства теоремы 7.3-2, попытаемся осуществить следующий план. Рассмотрим *минимизирующую последовательность* $(\boldsymbol{\varphi}^k)$ для функционала полной энергии

$$I(\boldsymbol{\psi}) = \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\boldsymbol{\psi}(x))\, dx - L(\;)$$

на соответствующем множестве $\boldsymbol{\Phi}$ допустимых деформаций (оно будет определено ниже); покажем, что эта последовательность является ограниченной в силу неравенства коэрцитивности, которому удовлетворяет функция запасённой энергии; выберем подпоследовательность (φ^l), слабо сходящуюся к некоторому элементу φ; покажем, что её слабый предел принадлежит множеству Φ; и, наконец, установим, что

$$\int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\varphi(x))\,dx \leqslant \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\varphi^l(x))\,dx$$

(поскольку мы ограничимся рассмотрением лишь замороженных нагрузок, не выписанный здесь член полной энергии представляет собой непрерывный линейный функционал и потому может быть учтён весьма просто, как и в доказательстве теоремы 7.3-2). По сравнению с теоремой 7.3-1 *доказательство секвенциальной слабой полунепрерывности снизу функционала* $\psi \to \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\psi(x))\,dx$ *оказывается здесь значительно более трудным, так как функция* $\hat{W}(x, \boldsymbol{F})$ *не является выпуклой по* $\boldsymbol{F}$ *и не определена при* $\det \boldsymbol{F} \leqslant 0$. В итоге мы получим, что $\varphi \in \Phi$ — элемент, **реализующий минимум** энергии, т. е. $I(\varphi) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\psi)$.

Более пристальный взгляд на эти этапы доказательства позволяет сделать ряд наблюдений и указать ключевые моменты, лежащие в основе подхода Джона Болла к теории существования в гиперупругости.

(i) Вместо выпуклости по аргументу $\boldsymbol{F}$, которой реальные функции запасённой энергии $\hat{W}$ обладать не могут, будет принято более слабое предположение о *поливыпуклости функции запасённой энергии* (§ 4.9), а именно: для почти всех $x \in \Omega$ существует выпуклая функция $\mathbb{W}(x, \cdot): \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, такая что

$$\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) = \mathbb{W}(x, \boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \text{ при всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

(ii) Как мы видели в § 4.6, поведение функции запасённой энергии при больши́х деформациях частично описывается *неравенством коэрцитивности* вида

$$\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) \geqslant \alpha\{\|\boldsymbol{F}\|^p + \|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^q + (\det \boldsymbol{F})^r\} + \beta \text{ для всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+,$$

при $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ и „достаточно больших" показателях p, q, r. Из этого неравенства в свою очередь следует, что

$$\int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\psi(x))\,dx$$
$$\geqslant \alpha\{|\nabla\psi|^p_{0,p,\Omega} + |\mathbf{Cof}\,\nabla\psi|^q_{0,q,\Omega} + |\det\nabla\psi|^r_{0,r,\Omega}\} + \beta\,\mathrm{vol}\,\Omega.$$

Поэтому *для любой функции* ψ, *удовлетворяющей неравенству* $\int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\psi(x))\,dx < +\infty$ (такими будут, например, члены минимизирующей последовательности для полной энергии), *должны выполняться условия*

$$\nabla\psi \in L^p(\Omega),\ \ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^q(\Omega),\ \ \det\nabla\psi \in L^r(\Omega).$$

Естественно задать вопрос, сколь велики должны быть показатели p, q, r в неравенстве коэрцитивности. Прежде всего следует заметить, что все они должны быть > 1, обеспечивая *рефлексивность* пространств $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$, $L^r(\Omega)$ и тем самым позволяя извлекать слабо сходящиеся подпоследовательности из ограниченных последовательностей. Если иметь дело только с функциями $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющими *краевому условию на положения* $\psi = \varphi_0$ на $\Gamma_0 \subset \Gamma$, где area $\Gamma_0 > 0$, то из обобщённого неравенства Пуанкаре вытекает, как и в теореме 7.3-2, что *полунорму* $|\nabla\psi|_{0,p,\Omega}$ *можно заменить нормой* $\|\psi\|_{1,p,\Omega}$ *в оценке интеграла* $\int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\psi(x))\,\mathrm{d}x$ *снизу*. Если предположить, что второе слагаемое полной энергии, учитывающее приложенные силы, является непрерывной линейной формой $L\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (это соответствует замороженным нагрузкам, однако можно рассмотреть приложенные силы и более общего вида), мы получаем следующую *оценку снизу для полной энергии*: существуют постоянные $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$, такие что для всех функций $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющих условию $\psi = \varphi_0$ на Γ_0, справедливо неравенство

$$I(\psi) = \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\psi(x))\,\mathrm{d}x - L(\psi)$$
$$\geqslant a\left\{\|\psi\|^p_{1,p,\Omega} + |\mathbf{Cof}\,\nabla\psi|^q_{0,q,\Omega} + |\det\nabla\psi|^r_{0,r,\Omega}\right\} + b.$$

(iii) Таким образом, постепенно само собой „складывается“ определение *множества допустимых деформаций*. Действительно, на основании п. (ii) мы прежде всего заключаем, что это множество должно состоять из функций $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям на положения $\psi = \varphi_0$ на Γ_0, а также условиям $\mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^q(\Omega)$ и $\det\nabla\psi \in L^r(\Omega)$. Затем из определения деформации выводим, что отображения $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ также должны *сохранять ориентацию*. Если, следуя Боллу, принять в расчёт только эти требования, то мы можем заключить, что *множество допустимых деформаций имеет вид* („п. в.“ означает „почти всюду“)

$$\Phi = \{\psi \in W^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^q(\Omega),\ \det\nabla\psi \in L^r(\Omega)\},$$
$$\psi = \varphi_0\ \ \mathrm{d}a\text{-п.в. на } \Gamma_0,\ \det\nabla\psi > 0 \text{ п.в. в } \Omega,$$

где показатели p, q, r определяются неравенством коэрцитивности, которому удовлетворяет функция запасённой энергии. Следует отметить, что *выполнения условия сохранения ориентации* $\det \nabla\psi > 0$ *мы вправе требовать лишь почти всюду в* Ω, поскольку $\det \nabla\psi$ является лишь элементом пространства $L^r(\Omega)$. Таким образом, хотя нам и будет удобно называть произвольные элементы множества **Φ деформациями,** вообще говоря, эти элементы деформациями в смысле определения, данного в § 1.4, не являются (кроме того, функции из $W^{1,p}(\Omega)$, $p \leqslant 3$, вообще говоря, не непрерывны; см. упражнение 6.1).

Далее, мы обобщим подход Джона Болла, допустив множества Φ, определяемые с помощью *граничных условий более общего вида* (§ 7.8), а также множества Φ, в определение которых входит условие *инъективности деформаций* (§ 7.9).

(iv) Как будет показано, из другого свойства, характеризующего поведение функции запасённой энергии при больши́х деформациях, а именно: $\hat{W}(x, F) \to +\infty$ при $\det F \to 0+$ (п. 4.6), вытекает справедливость условия сохранения ориентации для слабого предела минимизирующей последовательности. Таким образом, можно сказать, что поведение функции запасённой энергии $\hat{W}(x, F)$ при $\det F \to 0+$ „компенсирует" ограничение области определения функции $\hat{W}(x, F)$ лишь теми матрицами F, у которых $\det F > 0$.

(v) Как и следует ожидать, *множество Φ не выпукло* (упражнение 7.6). Из этого наблюдения ясно, что переход к слабым пределам сопряжен с рядом трудностей, поскольку в данной ситуации теорема 7.1-3 неприменима. Итак, нам придётся найти достаточные условия, при которых

$$\left.\begin{array}{r}\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ в } W^{1,p}(\Omega),\\ \operatorname{Cof} \nabla\varphi^l \rightharpoonup H \text{ в } L^q(\Omega),\\ \det \nabla\varphi^l \rightharpoonup \delta \text{ в } L^r(\Omega)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} H = \operatorname{Cof} \nabla\varphi,\\ \delta = \det \nabla\varphi.\end{array}\right.$$

В двух следующих параграфах мы покажем, что эта импликация имеет место, если $p \geqslant 2$, $q \geqslant p/(p-1)$. Таким образом мы получаем дополнительные ограничения на показатели p и q, которые до сих пор, как и показатель r, предполагались лишь бо́льшими единицы.

7.5. Отображение $\psi \in W^{1,p}(\Omega) \to \operatorname{Cof} \nabla\psi$

Принимая во внимание намеченный выше план, рассмотрим более подробно свойства отображений

$$\psi \in W^{1,p}(\Omega) \to \operatorname{Cof} \nabla\psi \text{ и } \psi \in W^{1,p}(\Omega) \to \det \nabla\psi,$$

касающиеся, главным образом, слабой сходимости (обозначаемой, как обычно, символом $\rightharpoonup$). Здесь мы будем следовать изложению Болла (Ball [1977, лемма 6.1 и теорема 6.2]).

Теорема 7.5-1. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$. При каждом $p \geqslant 2$ отображение*

$$\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathbf{Cof}\, \nabla\boldsymbol{\psi}$$
$$= (\partial_{i+1}\psi_{j+1}\partial_{i+2}\psi_{j+2} - \partial_{i+2}\psi_{j+1}\partial_{i+1}\psi_{j+2}) \in \boldsymbol{L}^{p/2}(\Omega)$$

корректно определено и непрерывно. Кроме того,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^l &\rightharpoonup \boldsymbol{\varphi} \text{ в } \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega),\ p \geqslant 2, \\ \mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\varphi}^l &\rightharpoonup \boldsymbol{H} \text{ в } \boldsymbol{L}^q(\Omega),\ q \geqslant 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{H} = \mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\varphi}.$$

Доказательство. (i) В силу неравенства Гёльдера, билинейное отображение

$$(\xi, \eta) \in (L^p(\Omega))^2 \to \xi\eta \in L^{p/2}(\Omega)$$

корректно определено и непрерывно при $p \geqslant 2$. Следовательно, отображение $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{L}^{p/2}(\Omega)$ корректно определено и непрерывно при $p \geqslant 2$.

(ii) Для достаточно гладких функций $\boldsymbol{\psi}$ (например, функций из пространства $\mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$) мы можем написать

$$(\mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\psi})_{ij} = \partial_{i+2}(\psi_{j+2}\partial_{i+1}\psi_{j+1}) - \partial_{i+1}(\psi_{j+2}\partial_{i+2}\psi_{j+1})$$
(суммирования нет).

Поэтому, применяя формулу Грина, для $\boldsymbol{\psi} \in \mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$ и всех $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$ получаем равенство

$$\int_\Omega (\mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\psi})_{ij}\,\vartheta\,dx = -\int_\Omega \psi_{j+2}\partial_{i+1}\psi_{j+1}\partial_{i+2}\vartheta\,dx + \int_\Omega \psi_{j+2}\partial_{i+2}\psi_{j+1}\vartheta\,dx \text{ (суммирования нет).}$$

При фиксированной функции $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$ правая и левая части этого соотношения являются непрерывными функционалами, если в пространстве $\mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$ введена норма $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, поскольку

$$\left|\int_\Omega (\mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\psi})_{ij}\,\vartheta\,dx\right| \leqslant |(\mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\psi})_{ij}|_{0,1,\Omega} |\vartheta|_{0,\infty,\Omega} \leqslant c_1(\vartheta)\|\boldsymbol{\psi}\|_{1,\Omega}^2,$$

$$\left|\int_\Omega \psi_i\partial_j\psi_k\partial_l\vartheta\,dx\right| \leqslant |\psi_i|_{0,\Omega} |\psi_k|_{1,\Omega} |\vartheta|_{1,\infty,\Omega} \leqslant c_2(\vartheta)\|\boldsymbol{\psi}\|_{1,\Omega}^2.$$

Таким образом, поскольку пространство $\mathscr{C}^2(\bar{\Omega})$ всюду плотно в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$, когда Ω — область (теорема 6.1-6), это соотношение остаётся справедливым для функций $\boldsymbol{\psi}$ из пространства $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$, а значит и из любого пространства $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 2$.

(iii) Пусть $p \geqslant 2$. Покажем теперь, что при произвольно заданной функции $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$ имеет место соотношение

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ в } W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega \varphi_i^l \partial_j \varphi_k^l \partial_m \vartheta \, dx \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_\Omega \varphi_i \partial_j \varphi_k \partial_m \vartheta \, dx.$$

Отсюда в силу п. (ii) будет следовать, что

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ в } W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega (\operatorname{Cof} \nabla\varphi^l)_{ij} \vartheta \, dx \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_\Omega (\operatorname{Cof} \nabla\varphi)_{ij} \vartheta \, dx.$$

В силу неравенства Гёльдера, билинейное отображение

$$(\xi, \chi) \in L^r(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega) \to \int_\Omega \xi \partial_j \chi \partial_m \vartheta \, dx$$

непрерывно, если $p^{-1} + r^{-1} \leqslant 1$ (здесь функция $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$ считается фиксированиой). Следовательно, по теореме 7.1-5, имеет место импликация

$$\left.\begin{array}{l} \xi^l \to \xi \text{ в } L^r(\Omega) \\ \chi^l \rightharpoonup \chi \text{ в } W^{1,p}(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow \int_\Omega \xi^l \partial_j \chi^l \partial_m \vartheta \, dx \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_\Omega \xi \partial_j \chi \partial_m \vartheta \, dx.$$

Из компактности вложения (теорема 6.1-5)

$$W^{1,p}(\Omega) \Subset L^r(\Omega) \text{ при всех } 1 \leqslant r \leqslant p^* = \begin{cases} \dfrac{3p}{3-p}, & \text{если } p < 3, \\ +\infty, & \text{если } p \geqslant 3, \end{cases}$$

выводим, что

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ в } W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \varphi^l \to \varphi \text{ в } \mathbf{L}^r(\Omega) \text{ при всех } 1 \leqslant r \leqslant p^*.$$

Таким образом, нужное нам утверждение доказано, поскольку при любом $p \geqslant 2$ (а в действительности при любом $p > 3/2$) можно найти число r, удовлетворяющее сразу двум иеравенствам

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leqslant 1 \text{ и } r < p^*.$$

(iv) Пусть (φ^l) — последовательность элементов пространства $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 2$, такая что $\operatorname{Cof} \nabla\varphi^l \in L^q(\Omega)$, $q \geqslant 1$ и

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ в } W^{1,p}(\Omega), \ \operatorname{Cof} \nabla\varphi^l \rightharpoonup H \text{ в } L^q(\Omega).$$

Тогда для любой функции $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega (\operatorname{Cof} \nabla\varphi^l)_{ij} \vartheta \, dx \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_\Omega (\operatorname{Cof} \nabla\varphi)_{ij} \vartheta \, dx,$$

в силу п. (iii), и по предположению

$$\int_\Omega (\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^l)_{ij}\,\vartheta\,\mathrm{d}x \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_\Omega H_{ij}\vartheta\,\mathrm{d}x.$$

Отсюда заключаем, что каждая функция $(\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi - H)_{ij} \in L^1(\Omega)$ удовлетворяет равенствам

$$\int_\Omega (\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi) - H)_{ij}\,\vartheta\,\mathrm{d}x = 0 \text{ для всех } \vartheta \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Это означает, что $(\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi - H)_{ij} = 0$ п. в. в Ω в силу классического результата теории интегрирования (см., например, Vo-Khac [1972, p. 166]). Теорема доказана. ■

Замечания. (1) Из теоремы 7.5-1 видно, что *невыпуклое множество*

$$\{(\psi,\ K) \in W^{1,p}(\Omega) \times L^q(\Omega);\ K = \mathbf{Cof}\,\nabla\psi\}, \qquad p \geqslant 2,\ q \geqslant 1,$$

является слабо замкнутым в пространстве $W^{1,p}(\Omega) \times L^q(\Omega)$. Однако это *не* означает, что множество

$$\{\psi \in W^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^q(\Omega)\}, \qquad p \geqslant 2,\ q \geqslant 1,$$

слабо замкнуто в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$, и действительно, его слабая замкнутость не всегда имеет место (упражнение 7.4).

(2) В п. (ii) было показано, что функции $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 2$, удовлетворяют соотношению

$$\int_\Omega (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{ij}\,\vartheta\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \psi_{j+2}\partial_{i+1}\psi_{j+1}\partial_{i+2}\vartheta\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \psi_{j+2}\partial_{i+2}\psi_{j+1}\partial_{i+1}\vartheta\,\mathrm{d}x \text{ при всех } \vartheta \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Следовательно, при $p \geqslant 2$ выполняется соотношение

$$\mathbf{Cof}\,\nabla\psi = \mathbf{Cof}^{\#}\,\nabla\psi \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega),$$

где

$$(\mathbf{Cof}^{\#}\,\nabla\psi)_{ij} := \partial_{i+2}(\psi_{j+2}\partial_{i+1}\psi_{j+1}) - \partial_{i+1}(\psi_{j+2}\partial_{i+2}\psi_{j+1}).$$

Помимо прочего, этот вариант записи позволяет распространить определение матрицы $\mathbf{Cof}\,\nabla\psi$ на случай функций $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ с $3/2 \leqslant p < 2$, когда её элементы уже могут и не быть интегрируемыми функциями; см. упражнение 7.5. ■

7.6. Отображение $\psi \in W^{1,p}(\Omega) \to \det \nabla\psi$

В силу неравенства Гёльдера, трилинейное отображение

$$(\xi;\ \eta,\ \zeta) \in (L^p(\Omega))^3 \to \xi\eta\zeta \in L^{p/3}(\Omega)$$

корректно определено и непрерывно. Поэтому ввиду формулы

$$\det \nabla\psi = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\partial_l\psi_i\partial_m\psi_j\partial_n\psi_k$$

представляется естественным, что для корректной определённости и непрерывности отображения $\psi \in W^{1,p}(\Omega) \to \det \nabla\psi \in L^1(\Omega)$ должно выполняться неравенство $p \geqslant 3$. Тем не менее последнее требование может быть ослаблено при наличии *дополнительной* информации о функции $\mathbf{Cof}\,\nabla\psi$, если воспользоваться разложением определителя $\det \nabla\psi$ по первой строке:

$$\det \nabla\psi = \partial_j\psi_1(\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}.$$

Выбор именно первой строки здесь не существен; точно также можно использовать разложение $\det \nabla\psi$ по любой другой строке или столбцу матрицы $\nabla\psi$. Снова применяя неравенство Гёльдера, мы видим, что $\det \nabla\psi$ корректно определён как элемент пространства $L^s(\Omega)$, если $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ при $p \geqslant 2$ и $\mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^q(\Omega)$ при

$$\frac{1}{s} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 1$$

(неравенство $p \geqslant 2$ обеспечивает принадлежность $\mathbf{Cof}\,\nabla\psi$ пространству $L^1(\Omega)$; см. теорему 7.5-1). Если $p \geqslant 3$, то нет необходимости предполагать, что $\mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^q(\Omega)$ при $p^{-1} + q^{-1} \leqslant 1$, поскольку в этом случае $\mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^{p/2}(\Omega)$ при $p^{-1} + 2p^{-1} \leqslant 1$.

Снова следуя Боллу (Ball [1977, лемма 6.1 и теорема 6.2]), приведем обобщение теоремы 7.5-1:

Теорема 7.6-1. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$. Для любых чисел p и q, таких что $p \geqslant 2$, $s^{-1} := p^{-1} + q^{-1} \leqslant 1$, отображение*

$$(\psi,\ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi) \in W^{1,p}(\Omega) \times L^q(\Omega) \to \det \nabla\psi := \partial_j\psi_1(\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j} \in L^s(\Omega)$$

корректно определено и непрерывно. Кроме того,

$$\boxed{\left.\begin{aligned} &\varphi^l \rightharpoonup \varphi \ \text{в}\ W^{1,p}(\Omega),\ p \geqslant 2,\\ &\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^l \rightharpoonup H \ \text{в}\ L^q(\Omega),\ p^{-1}+q^{-1} \leqslant 1,\\ &\det\nabla\varphi^l \rightharpoonup \delta \ \text{в}\ L^r(\Omega),\ r \geqslant 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &H = \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi,\\ &\delta = \det\nabla\varphi.\end{aligned}\right.}$$

Доказательство. (i) Билинейное отображение

$$(\psi, \ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi) \in W^{1,p}(\Omega) \times L^{q}(\Omega) \to \partial_j\psi_1 (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j} \in L^{s}(\Omega)$$

корректно определено и непрерывно в силу неравенства Гёльдера.

(ii) Для достаточно гладких функций ψ (например, принадлежащих $\mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$) вследствие *тождества Пиолы* $\mathbf{div}\,\mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{o}$ (доказанного в теореме 1.7-1) справедливо равенство

$$\partial_j (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j} = 0,$$

и, значит,

$$\partial_j\psi_1 (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j} = \partial_j \{\psi_1 (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\} = \det\nabla\psi$$

для достаточно гладких ψ. Применяя формулу Грина, отсюда получаем, что

$$\int_\Omega \partial_j\psi_1 (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\, \vartheta \,dx = -\int_\Omega \psi_1 (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\, \partial_j\vartheta \,dx$$

для всех функций $\psi \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ и всех функций $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Наша цель — показать, что *это соотношение остаётся в силе для всех функций* $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 2$, *таких что* $\mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^{p'}(\Omega)$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, и тем более для таких, что $\mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^{q}(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} \leqslant 1$. Однако в этом случае непосредственно воспользоваться плотностью гладких функций труднее, нежели в части (ii) доказательства теоремы 7.5-1, поскольку функция

$$\psi \to \int_\Omega \partial_j\psi_1 (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\, \vartheta \,dx$$

не является непрерывной относительно нормы $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$, если $p < 3$. С другой стороны, очевидно, что билинейная форма

$$(\psi, \ H) \in W^{1,p}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \to \int_\Omega \partial_j\psi_1 H_{1j} \vartheta \,dx$$

непрерывна при $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, но соотношение

$$\int_\Omega \partial_j\psi_1 H_{1j} \vartheta \,dx = -\int_\Omega \psi_1 H_{1j} \partial_j\vartheta \,dx,$$

вообще говоря, неверно для гладких функций ψ и H_{1j}, если не предполагать, что функция H_{1j} удовлетворяет условию $\partial_j H_{1j} = 0$, как это имеет место для функции $(\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}$ при гладких ψ. Поэтому мы применим несколько более сложный приём, учитывающий это последиее свойство.

Из соотношения $\partial_j (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j} = 0$ для всех $\psi \in \mathscr{C}^2(\bar\Omega)$ вытекает, что

$$\int_\Omega (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\,\partial_j\chi\,dx = 0 \text{ для всех } \chi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Для любой функции $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ отображение

$$\psi \in \mathscr{C}^2(\bar\Omega) \to \int_\Omega (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\,\partial_j\chi\,dx$$

непрерывно, если в пространстве $\mathscr{C}^2(\bar\Omega)$ введена норма $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$, $p \geqslant 2$, поскольку

$$\left|\int_\Omega (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\,\partial_j\chi\,dx\right| \leqslant |\mathbf{Cof}\,\nabla\psi|_{0,1,\Omega}|\chi|_{1,\infty,\Omega} \leqslant c_1(\chi)\|\psi\|^2_{1,\Omega}.$$

Так как $\mathscr{C}^2(\bar\Omega)$ всюду плотно в $W^{1,p}(\Omega)$, заключаем, что

$$\int_\Omega (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\,\partial_j\chi\,dx = 0$$

для всех $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 2$, и всех $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Покажем теперь, что для любой функции $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой функции $w = (w_j) \in L^{p'}(\Omega)$, $p^{-1} + p' = 1$, удовлетворяющей условию $\int_\Omega w_j \partial_j\chi\,dx = 0$ при всех $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$, выполняется соотношение

$$-\int_\Omega \psi w_j \partial_j\vartheta\,dx = \int_\Omega (\partial_j\psi)\,w_j\vartheta\,dx \text{ для всех } \vartheta \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Отсюда будет следовать требуемое равенство, если положить $\psi = \psi_1$ и $w_j = (\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}$. При фиксированных функциях w и ϑ обе части этого соотношения являются линейными непрерывными формами относительно $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\bar\Omega)$, поскольку $\{\mathscr{C}^\infty(\bar\Omega)\}^- = W^{1,p}(\Omega)$. Тогда $\psi\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$ и, по предположению,

$$0 = \int_\Omega w_j\partial_j(\psi\vartheta)\,dx = \int_\Omega \psi w_j\partial_j\vartheta\,dx + \int_\Omega (\partial_j\psi)\,w_j\vartheta\,dx.$$

(iii) Покажем теперь, что для любой заданной функции $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$ имеет место импликация

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ в } W^{1,p}(\Omega),\ p \leqslant 2, \\ \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^l \rightharpoonup \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi \text{ в } L^{p'}(\Omega),\ p^{-1} + p'^{-1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\int_\Omega (\det\nabla\varphi^l)\,\vartheta\,dx \to \int_\Omega (\det\nabla\varphi)\,\vartheta\,dx.$$

В силу определения $\det \nabla\varphi$ и результата п. (ii) достаточно установить сходимость

$$\int_\Omega \varphi_1^l (\mathbf{Cof}\, \nabla\varphi^l)_{1j}\, \partial_j \vartheta\, dx \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_\Omega \varphi_1 (\mathbf{Cof}\, \nabla\varphi)_{1j}\, \partial_j \vartheta\, dx.$$

Рассуждая аналогично п. (iii) доказательства теоремы 7.5-1, заключаем, что такая сходимость имеет место, если

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ в } \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \varphi^l \to \varphi \text{ в } \boldsymbol{L}^r(\Omega), \text{ где } r^{-1} - p'^{-1} \leqslant 1,$$

т. е. если справедливо компактное вложение $W^{1,p}(\Omega) \Subset L^r(\Omega)$. В случае $2 \leqslant p < 3$ (который только и нуждается в доказательстве) это вложение имеет место при условии, что $r < p^* = 3p/(3-p)$; а поскольку

$$\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p'} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{2}{3},$$

то мы можем найти числа $r < p^*$, такие что $r^{-1} - p'^{-1} \leqslant 1$.

(iv) Для доказательства импликаций, утверждаемых в теореме, следует воспользоваться методом п. (iv) доказательства теоремы 7.5-1. ■

Замечания. (1) Из теоремы 7.6-1 видно, что *невыпуклое множество*

$$\{(\psi, \boldsymbol{K}, \varepsilon) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \times \boldsymbol{L}^q(\Omega) \times L^r(\Omega);\ \boldsymbol{K} = \mathbf{Cof}\, \nabla\psi,\ \varepsilon = \det \nabla\psi\},$$
$$p \geqslant 2,\ p^{-1} + q^{-1} \leqslant 1,\ r \geqslant 1,$$

является слабо замкнутым в пространстве $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \times \boldsymbol{L}^q(\Omega) \times L^r(\Omega)$. *Это не означает*, что множество

$$\{\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\, \nabla\psi \in \boldsymbol{L}^q(\Omega),\ \det \nabla\psi \in L^r(\Omega)\},$$
$$p \geqslant 2,\ p^{-1} + q^{-1} \leqslant 1,\ r \geqslant 1,$$

слабо замкнуто в пространстве $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, и оно действительно может не быть слабо замкнутым в $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ (упражнение 7.6).

(2) Результаты п. (ii) доказательства можно истолковать *в смысле теории распределений*. Прежде всего, соотношение

$$\int_\Omega (\mathbf{Cof}\, \nabla\psi)_{1j}\, \partial_j \chi\, dx = \theta \text{ для всех } \chi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

означает, что

$$\partial_j (\mathbf{Cof}\, \nabla\psi)_{1j} = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Следовательно, это соотношение, справедливое для гладких функций ψ в силу тождества Пиолы, также имеет место для функций $\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 2$. в смысле теории распределений.

Аналогично главный результат п. (ii) можно сформулировать в эквивалентном виде:

$$\left.\begin{array}{l}\psi \in W^{1,p}(\Omega),\ p \geqslant 2,\\ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^{p'}(\Omega),\ p^{-1}+p'^{-1}=1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\partial_j\psi_1(\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j} = \partial_j\{\psi_1(\mathbf{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\} \text{ в } \mathscr{D}'(\Omega).$$

С помощью этого соотношения можно, обобщая определение детерминанта $\det\nabla\psi$, рассматривать его как распределение, а не как интегрируемую функцию (упражнение 7.7). ■

На результаты теорем 7.5-1 и 7.6-1 можно взглянуть и с более общих позиций. Пусть последовательиость (φ^k) удовлетворяет условию

$$\varphi^k \to \varphi \text{ в } \mathbf{W}^{1,p}(\Omega),\ p \geqslant 2,$$

и, кроме того, последовательность $(\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^k)$ ограничена в пространстве $L^q(\Omega)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Поскольку $q>1$, пространство $L^q(\Omega)$ рефлексивно и, значит, мы можем извлечь подпоследовательность (φ^l), такую что $\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^l \rightharpoonup H$ в $L^q(\Omega)$ (теорема 7.1-4). Кроме того, $H = \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi$ в силу теоремы 7.5-1, так что предел H единствен и, значит, вся последовательность сходится:

$$\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^k \rightharpoonup \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi \text{ в } L^q(\Omega).$$

На основании п. (iii) доказательства теоремы 7.6-1 заключаем, что

$$\int_\Omega (\det\nabla\varphi^k)\,\vartheta\,dx \to \int_\Omega (\det\nabla\varphi)\,\vartheta\,dx \text{ для всех } \vartheta \in \mathscr{D}(\Omega),$$

т. е. в смысле теории распределений имеет место сходимость

$$\det\nabla\varphi^k \to \det\nabla\varphi \text{ в } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Иными словами, *если некоторые специальные комбинации частных производных* (компонеиты матрицы $\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^k$) *ограничены (по k) в $L^q(\Omega)$, то нелинейный функционал* (функционал $\det\nabla\varphi := \partial_j\varphi^1(\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi)_{1j}$) *непрерывен относительно секвенциальной слабой сходимости*, т. е.

$$\varphi^k \rightharpoonup \varphi \text{ в } W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \det\nabla\varphi^k \to \det\nabla\varphi \text{ в } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Это частный случай общего явления, изучаемого в теории **компенсированной компактности.** Эта теория была создана и подробно разработана Франсуа Мюра и Люком Тартаром. Её исходным пунктом явился следующий результат, играющий важную роль в теории усреднения:

Теорема 7.6-2 (лемма о дивергенции и роторе). *Пусть* Ω — *ограниченное открытое подмножество в* $\mathbb{R}^n$ *и* $(\boldsymbol{u}^k)$, $(\boldsymbol{v}^k)$ — *две последовательности, удовлетворяющие условию*

$$(\boldsymbol{u}^k, \boldsymbol{v}^k) \rightharpoonup (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \text{ в } \boldsymbol{L}^2(\Omega) \times \boldsymbol{L}^2(\Omega),$$

причём последовательность $(\operatorname{div} \boldsymbol{u}^k, \ \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}^k)$ *ограничена в* $L^2(\Omega) \times \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, *где* $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} = (\partial_j v_i - \partial_i v_j)$. *Тогда*

$$\boldsymbol{u}^k \cdot \boldsymbol{v}^k \to \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega). \qquad \blacksquare$$

Суть этого результата в том, что эвклидово скалярное произведение $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ остаётся непрерывным относительно слабой сходимости, несмотря на то что ни одна из рассматриваемых последовательностей не предполагается относительно компактной в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ (при ограниченности одной из последовательностей в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ то же заключение можно было бы сделать на основании теоремы Реллиха — Кондрашова и теоремы 7.1-5 (b). Таким образом, *отсутствие компактности компенсируется ограниченностью некоторых комбинаций частных производных* (здесь $\operatorname{div}\cdot$ и $\mathbf{curl}\,\cdot$), причём вид этих комбинаций соответствует конкретному рассматриваемому отображению (здесь это $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$).

Замечание. Ф. Мюра и Л. Тартар показали также, что помимо линейных отображений одно только отображение $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ непрерывно относительно слабой сходимости в $\boldsymbol{L}^2(\Omega) \times \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, если предполагать лишь ограниченность в $L^2(\Omega) \times \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ комбинаций частных производных вида $(\operatorname{div} \boldsymbol{u}^k, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}^k)$. $\blacksquare$

Метод компенсированной компактности оказался весьма эффективным при изучении нелинейных уравнений с частными производными. См.: Murat [1978, 1979, 1981, 1987], Tartar [1979, 1983a], DiPerna [1985b].

7.7. Результаты Джона Болла о существовании решений в пространствах $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 2$

Теперь мы располагаем всем необходимым, чтобы доказать существование отображений, реализующих минимум энергии, в случае гиперупругих материалов. Следуя Боллу (Ball [1977, теоремы 7.3 и 7.6)), рассмотрим сперва один класс *задач с граничными условиями на перемещения и напряжения*, включающий в себя, в частности, *задачи с граничными условиями только на перемещения*, когда приложенные силы являются замороженными нагрузками (по поводу приложенных сил более общего вида см. упражнения 7.8 и 7.9). Следует отметить, что формулировка и доказательство этого результата о существовании напоминают формулировку и доказательство теоремы 7.3-2; однако в рассматриваемом здесь случае для доказательства требуется гораздо более тщательный анализ. Напомним, что под областью понимается ограниченное открытое связное множество с липшицевой границей (§ 1.6).

Теорема 7.7-1 (о существовании решений задачи с граничными условиями на перемещения и напряжения или же только на перемещения). *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^3$ *и* $\hat{W}\colon \Omega \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ — *функция запасённой энергии, которая обладает следующими свойствами:*

(a) *поливыпуклость: для почти всех* $x \in \Omega$ *существует выпуклая функция* $\mathbf{W}(x, \cdot)\colon \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, *такая что*

$$\boxed{\mathbf{W}(x, \boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) = \hat{W}(x, \boldsymbol{F}) \text{ при всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+;}$$

функция $\mathbf{W}(\cdot, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *измерима при всех* $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[$;

(b) *поведение при* $\det \boldsymbol{F} \to 0^+$: *для почти всех* $x \in \Omega$

$$\boxed{\lim_{\det \boldsymbol{F} \to 0^+} \hat{W}(x, \boldsymbol{F}) = +\infty;}$$

(c) *коэрцитивность: существуют постоянные* α, β, p, q, r, *такие что*

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha > 0, \quad p \geqslant 2, \quad q \geqslant p/(p-1), \quad r > 1, \\ \hat{W}(x, F) \geqslant \alpha\left(\|\boldsymbol{F}\|^p + \|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^q + (\det \boldsymbol{F})^r\right) + \beta \\ \text{для почти всех } x \in \Omega \text{ и всех } \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+. \end{array}}$$

Пусть $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ — *разбиение границы* Γ *области* Ω *на два* da-*измеримых множества, причём* area $\Gamma_0 > 0$, *и пусть* $\varphi_0\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}^3$ — *измеримая функция, такая что множество*

$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi := \{\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in \boldsymbol{L}^q(\Omega),\ \det \nabla\psi \in L^r(\Omega), \\ \psi = \varphi_0\ da\text{-п. в. на } \Gamma_0,\ \det \nabla\psi > 0 \text{ п. в. в } \Omega\} \end{array}}$$

непусто. Пусть функции $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ и $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^\sigma(\Gamma_1)$ *таковы, что линейная форма*

$$L\colon \psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to L(\psi) := \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \psi \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g} \cdot \psi \, \mathrm{d}a$$

непрерывна. Положим

$$\boxed{I(\psi) = \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\psi(x)) \, \mathrm{d}x - L(\psi)}$$

и допустим, что $\inf_{\psi \in \Phi} I(\psi) < +\infty$.

Тогда существует по крайней мере одна функция φ, *такая что*

$$\boxed{\varphi \in \Phi \text{ и } I(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi).}$$

Доказательство. (i) *Интегралы* $\int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\psi(x)) \, \mathrm{d}x$ *корректно определены при всех* $\psi \in \Phi$. Прежде всего отметим следующие факты, вытекающие из предположения (a). Для почти всех $x \in \Omega$ функция $\boldsymbol{W}(x, \cdot)\colon \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ непрерывна (она выпукла и принимает вещественные значения на открытом подмножестве конечномерного пространства; см. теорему 4.7-10); для всех $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty$ [функция $\boldsymbol{W}(\cdot, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ измерима и множество $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[$ являетсяб орелевским. Поэтому $\boldsymbol{W}\colon \Omega \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ есть *функция Каратеодори*, и, следовательно, (Ekeland & Temam [1974, p. 218 и далее]) функция

$$x \in \Omega \to \boldsymbol{W}(x, \nabla\psi(x), \mathbf{Cof}\, \nabla\psi(x), \det \nabla\psi(x)) \in \mathbb{R}$$

измерима при каждом $\psi \in \Phi$ (напомним, что $\det \nabla\psi(x) \in]0, +\infty[$ для почти всех $x \in \Omega$). Поскольку функция $\hat{W}$ ещё и ограничена снизу (в силу неравенства коэрцитивности), мы можем заключить, что интеграл

$$\int_\Omega \hat{W}(x, \nabla\psi(x)) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{W}(x, \nabla\psi(x), \mathbf{Cof}\, \nabla\psi(x), \det \nabla\psi(x)) \, \mathrm{d}x$$

при каждом $\psi \in \Phi$ есть корректно определённый элемент из интервала $[\beta \operatorname{vol} \Omega, +\infty]$ расширенной вещественной прямой.

(ii) Получим теперь *оценку снизу для* $I(\psi)$, $\psi \in \Phi$. В силу предположений о коэрцитивности функции $\hat{W}$ и непрерывности линейной формы L имеем

$$I(\psi) \geqslant \alpha \int_\Omega \{\|\nabla\psi\|^p + \|\mathbf{Cof}\,\nabla\psi\|^q + (\det\nabla\psi)^r\}\,dx + \beta \operatorname{vol}\Omega -$$

$$- \|L\| \|\psi\|_{1,p,\Omega} \text{ для всех } \psi \in \Phi.$$

Учитывая граничное условие $\psi = \varphi_0$ иа Γ, а также обообщённое неравенство Пуанкаре (теорема 6.1-8(b)), заключаем (аиалогичное рассуждение применялось в доказательстве теоремы 7.3-2), что существуют постоянные $c > 0$ и d, такие что

$$I(\psi) \geqslant c\{\|\psi\|^p_{1,p,\Omega} + |\mathbf{Cof}\,\nabla\psi|^q_{0,q,\Omega} + |\det\nabla\psi|^r_{0,r,\Omega}\} + d$$

$$\text{для всех } \psi \in \Phi.$$

(iii) Пусть (φ^k) — *минимизирующая последовательность* для функционала I, т. е. последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\varphi^k \in \Phi \text{ при всех } k \text{ и } \lim_{k\to\infty} I(\varphi^k) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\psi).$$

По предположению, $\inf_{\psi\in\Phi} I(\psi) < +\infty$, и, значит, в силу п. (ii), последовательность $(\varphi^k, \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^k, \det\nabla\varphi^k)$ ограничена в рефлексивном банаховом пространстве $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^q(\Omega) \times L^r(\Omega)$ (каждое из чисел p, q, r больше 1). Следовательно, существует подпоследовательность $(\varphi^l, \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^l, \det\nabla\varphi^l)$, слабо сходящаяся к элементу $(\varphi, \boldsymbol{H}, \delta)$ пространства $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{L}^q(\Omega) \times L^r(\Omega)$, причём в силу теоремы 7.6-1 $\boldsymbol{H} = \mathbf{Cof}\,\Delta\varphi$, $\delta = \det\nabla\varphi$. В итоге получаем, что *существует подпоследовательность минимизирующей последовательности, удовлетворяющая условиям*

$$\begin{cases} \varphi^l \rightharpoonup \varphi & \text{в } \mathbf{W}^{1,p}(\Omega), \\ \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^l \rightharpoonup \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi & \text{в } \mathbf{L}^q(\Omega), \\ \det\nabla\varphi^l \rightharpoonup \det\nabla\varphi & \text{в } L^r(\Omega). \end{cases}$$

(iv) *Покажем теперь, что* $\varphi \in \Phi$. Для этого остаётся только установить неравенство $\det\nabla\varphi > 0$ почти всюду в Ω, а также проверить условие $\varphi = \varphi_0$ на Γ_0. Поскольку $\det\nabla\varphi^l \rightharpoonup \det\nabla\varphi$ в $L^r(\Omega)$, то в силу теоремы Мазура (теорема 7.1-2) при каждом l существуют целые числа $i(l) \geqslant l$ и вещественные числа λ_s^l, $l \leqslant s \leqslant i(l)$, такие что

$$\begin{cases} \lambda_s^l \geqslant 0, \quad \sum_{s=l}^{i(l)} \lambda_s^l = 1, \\ d^l := \sum_{s=l}^{i(l)} \lambda_s^l \det\nabla\varphi^s \xrightarrow[l\to\infty]{} \det\nabla\varphi \text{ в } L^r(\Omega). \end{cases}$$

Следовательио, иайдётся подпоследовательность (d^m) последовательиости (d^l), которая почти всюду сходится к $\det \nabla\varphi$. Поскольку фуикции d^l почти всюду положительиы (было бы достаточио и того, чтобы оии были почти всюду иеотрицательиы), мы можем заключить, что $\det \nabla\varphi \geqslant 0$ почти всюду в Ω.

Допустим, что $\det \nabla\varphi = 0$ иа некотором подмножестве A области Ω с $\operatorname{vol} A > 0$. Поскольку $\det \nabla\varphi^l > 0$ почти всюду иа A (как и ранее, достаточно и неотрицательиости) и $\det \nabla\varphi^l \rightharpoonup \det \nabla\varphi$, имеем

$$\int_A |\det \nabla\varphi^l|\,dx = \int_A \det \nabla\varphi^l\,dx \to \int_A \det \nabla\varphi\,dx = 0,$$

в силу определеиия слабой сходимости (характеристическая функция миожества A принадлежит пространству, сопряжённому к $L^r(\Omega)$), и, зиачит, $\det \nabla\varphi^l \to 0$ в $L^1(A)$. Следовательио, существует подпоследовательность (φ^m) последовательности (φ^l), такая что

$$\det \nabla\varphi^m(x) \to 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in A.$$

Рассмотрим последовательиость измеримых фуикций (f^m), задаииых соотиошеиием

$$f^m\colon\ x \in A \to f^m(x) := \widehat{W}(x, \nabla\varphi^m(x)).$$

Поскольку $f^m \geqslant \beta$ при всех m, примеиима лемма Фату, согласно которой

$$\int_A \liminf_{m\to\infty} f^m(x)\,dx \leqslant \liminf_{m\to\infty} \int_A f^m(x)\,dx.$$

В силу предположения (b),

$$\liminf_{m\to\infty} f^m(x) = \lim_{m\to\infty} \widehat{W}(x, \nabla\varphi^m(x)) = \lim_{\det F\to 0^+} \widehat{W}(x, F) = +\infty$$

для почти всех $x \in A$

и, зиачит,

$$\lim_{m\to\infty} \int_A f^m(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_A \widehat{W}(x, \nabla\varphi^m(x))\,dx = +\infty.$$

Последнее равенство противоречит соотношению $\lim_{m\to\infty} I(\varphi^m) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\psi) < +\infty$ и оценке

$$I(\varphi^m) \geqslant \int_A \widehat{W}(x, \nabla\varphi^m(x))\,dx + \beta \operatorname{vol}(\Omega - A) - \|L\|\,\|\varphi^m\|_{1,p,\Omega}$$

(слабо сходящаяся последовательность в банаховом пространстве ограничена; см. теорему 7.1-4). Следовательно, *почти всюду в* Ω *должно выполняться неравенство* $\det \nabla\varphi > 0$.

Для доказательства того, что $\varphi = \varphi_0$ на Γ_0, заметим, что оператор следа $\operatorname{tr} \in \mathscr{L}\big(W^{1,p}(\Omega);\ L^p(\Gamma)\big)$ компактен (теорема 6.1-7 (b)). Поэтому

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \operatorname{tr}\varphi^l \to \operatorname{tr}\varphi \quad \text{в} \quad L^p(\Gamma).$$

Извлекая подпоследовательность, которая $\mathrm{d}a$-почти-всюду поточечно сходится на Γ, заключаем, что $\varphi = \varphi_0$ на Γ_0.

(v) Покажем теперь, что

$$\int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi^l(x))\,\mathrm{d}x.$$

Согласно определению нижнего предела, требуется показать, что если задана какая-либо подпоследовательность (φ^m) последовательности (φ^l), для которой последовательность $\left(\int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi^m(x)\,\mathrm{d}x\right)$ сходится, то

$$\int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi^m(x))\,\mathrm{d}x.$$

Рассмотрим такую подпоследовательность. Применяя результат п. (iii) и теорему Мазура, мы можем заключить, что при каждом m найдутся целые числа $j(m) \geqslant m$ и вещественные числа μ_t^m, $m \leqslant t \leqslant j(m)$, такие что

$$\mu_t^m \geqslant 0, \quad \sum_{t=m}^{j(m)} \mu_t^m = 1,$$

$$\boldsymbol{D}^m := \sum_{t=m}^{j(m)} \mu_t^m (\nabla\varphi^t,\ \mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\varphi}^t,\ \det\nabla\varphi^t)$$
$$\xrightarrow[m\to\infty]{} (\nabla\varphi,\ \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi,\ \det\nabla\varphi) \quad \text{в} \quad \boldsymbol{L}^p(\Omega)\times\boldsymbol{L}^q(\Omega)\times L^r(\Omega).$$

Следовательно, существует подпоследовательность $(\boldsymbol{D}^n)$ последовательности $(\boldsymbol{D}^m)$, такая что

$$\sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n (\nabla\boldsymbol{\varphi}^t(x),\ \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^t(x),\ \det\nabla\varphi^t(x))$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} (\nabla\varphi(x),\ \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi(x),\ \det\nabla\varphi(x)) \text{ для почти всех } x \in \Omega.$$

Поскольку, в силу предположения (a), функция $\boldsymbol{W}(x, \cdot)$ непрерывна на множестве $\mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times]0, +\infty[$ для почти всех

$x \in \Omega$, а, как мы доказали в п. (iv), $\det \nabla\varphi(x) > 0$ для почти всех $x \in \Omega$, имеем

$$\widehat{W}(x, \nabla\varphi(x)) = \mathbb{W}(x, (\nabla\varphi(x), \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi(x), \det\nabla\varphi(x)))$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{W}\left(x, \sum_{t=n}^{l(n)} \mu_t^n (\nabla\varphi^t(x), \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^t(x), \det\nabla\varphi^t(x))\right)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Пользуясь этим соотношением, леммой Фату и условием выпуклости функции $\mathbb{W}(x, \cdot)$ при почти всех $x \in \Omega$, получаем

$$\int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi(x))\,dx$$
$$\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbb{W}\left(x, \sum_{t=n}^{l(n)} \mu_t^n (\nabla\varphi^t(x), \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^t(x), \det\nabla\varphi^t(x))\right)dx$$
$$\leqslant \liminf_{n\to\infty} \sum_{t=n}^{l(n)} \mu_t^n \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi^t(x))\,dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi^n(x))\,dx$$
$$= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi^m(x)\,dx.$$

Здесь мы воспользовались следующим простым фактом: если (α^n) — сходящаяся последовательность и

$$\beta^n := \sum_{t=n}^{l(n)} \mu_t^n \alpha^t, \quad \text{где} \quad \mu_t^n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{t=n}^{l(n)} \mu_t^n = 1,$$

то последовательность (β^n) также является сходящейся и $\lim_{n\to\infty} \beta^n = \lim_{n\to\infty} \alpha^n$.

С другой стороны, по определению слабой сходимости, $L(\varphi) = \lim_{l\to\infty} L(\varphi^l)$ и, значит, мы доказали неравенство

$$I(\varphi) \leqslant \liminf_{l\to\infty} I(\varphi^l).$$

(vi) Таким образом, функция φ является решением рассматриваемой задачи на минимум, поскольку $\varphi \in \Phi$ в силу п. (iv) и

$$I(\varphi) \leqslant \liminf_{l\to\infty} I(\varphi^l) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\psi) \Rightarrow I(\varphi) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\varphi). \qquad \blacksquare$$

Замечания. (1) Тот факт, что условия на функцию запасённой энергии предполагаются выполненными лишь при почти всех $x \in \Omega$, не случаеи. Например, если упругое тело состоит из нескольких частей, сделанных из различных материалов и „склеенных" друг с другом, то функция запасённой энергии не определена вдоль разделяющих части поверхностей, суммарный объём которых равен нулю. В связи с этим отметим, что полученный результат о существовании сохраняет силу и для неизотропных гиперупругих материалов.

(2) В работе Ball [1977] вместо условия на поведение функции запасённой энергии при $\det \boldsymbol{F} \to 0^+$ рассматривалось более сильное условие

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{W}(x, \boldsymbol{F}_k, \boldsymbol{H}_k, \delta_k) = +\infty$$

при $\boldsymbol{F}_k \to \boldsymbol{F}$ в $\mathbb{M}^3_+$, $\boldsymbol{H}_k \to \boldsymbol{H}$ в $\mathbb{M}^3_+$, $\delta_k \to 0^+$, которое позволяет получить более простое доказательство существования элемента, реализующего минимум (в этом случае доказательство ближе к доказательству теоремы 7.3-1; подробности см. в упражнении 7.11). Рассмотренный нами случай более слабого условия $\lim \hat{W}(x, \boldsymbol{F}) = +\infty$ при $\det \boldsymbol{F} \to 0^+$ впервые изучен в работе Ball, Currie & Olver [1981, теорема 6.2].

(3) Имеются ситуации, когда неравенство коэрцитивности принимает несколько иной вид, но тем не менее справедлива аналогичная теорема существования; см. Ball [1981c], Ball, Currie & Olver [1981], Ball & Murat [1984].

(4) Если материал является изотропным, то функция запасённой энергии имеет вид $\hat{W}(x, \boldsymbol{F}) = \dot{W}(x, \iota_C)$, где $\iota_C = (\iota_1, \iota_2, \iota_3)$ — тройка главных инвариантов $\iota_k = \iota_k(\boldsymbol{C})$ матрицы $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ (теорема 4.4-1). На практике, однако, встречаются примеры, когда более естественно записать функцию запасённой энергии через „модифицированные инварианты" $\iota_1^* = \iota_1\iota_3^{-1/3}$, $\iota_2^* = \iota_2\iota_3^{-2/3}$ и ι_3. Как показали Шарръе, Дакоронья, Анузэ и Лаборд (Charrier, Dacorogna, Hanouzet & Laborde [1985]), изложенную в настоящем параграфе теорию существования можно распространить и на этот случай.

(5) Из теоремы 7.7-1 не следует существования решений в случае *материалов Сен-Венана — Кирхгофа*, поскольку их функции запасённой энергии, хотя и коэрцитивны (упражнение 4.10), не являются поливыпуклыми (Raoult [1986]; ср. с теоремой 4.10-1). Тем не менее всегда можно построить поливыпуклую функцию запасённой энергии, которая при малых значениях $\|\boldsymbol{E}\|$ соответствует функции запасённой энергии материала Сен-Венана — Кирхгофа (Ciarlet & Geymonat [1982]; ср. с теоремой 4.10-2), и тогда теорему 7.7-1 можно применить к этой функции более общего вида (которая к тому же удобна с вычислительной точки зрения; см. Le Tallec & Vidrascu

[1984]). Ещё один подход основан на нахождении «обобщенных решений“ подходящим образом видоизмененной задачи (см. Atteia & Dedieu [1981] или Atteia & Raissouli [1986]).

(6) Предположение, что множество $\mathbf{\Phi}$ непусто (являющееся необходимым условием существования минимизирующего элемента!), по существу представляет собой условие на заданную функцию φ_0.

(7) В силу теоремы 6.1-3 линейная форма $\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx$ корректно определена и непрерывна при $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^\rho(\Omega)$, где

$$\rho = (p^*)' = \frac{3p}{4p-3}, \quad \text{если} \quad p < 3,$$

$$\rho > 1, \text{ если } p = 3, \quad \rho = 1, \quad \text{если} \quad p > 3,$$

а в силу теоремы 6.1-7(а) линейная форма $\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\psi}\, da$ корректно определена и непрерывна при $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^\sigma(\Gamma_1)$, где

$$\sigma = \frac{2}{3}\frac{p}{(p-1)}, \quad \text{если} \quad p < 3,$$

$$\sigma > 1, \text{ если } p = 3, \quad \sigma = 1, \quad \text{если} \quad p > 3.$$

(8) Как уже отмечалось ранее (см. § 7.6, а также упражнение 7.6), множество

$$\{\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\, \nabla\psi \in \boldsymbol{L}^q(\Omega),\ \det \nabla\psi \in L^r(\Omega),\ \psi = \varphi_0 \text{ на } \Gamma_0\}$$

(и тем более множество $\mathbf{\Phi}$ из теоремы 7.1-1, получающееся, если добавить условие сохранения ориентации), вообще говоря, не является слабо замкнутым в пространстве $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$. Однако коэрцитивность функции запасённой энергии (в сочетании с результатом теоремы 7.6-1) обеспечивает принадлежность слабого предела минимизирующей последовательности этому множеству (см. п. (iii) доказательства). Аналогично именно поведение функции запасённой энергии при $\det \boldsymbol{F} \to 0^+$ обеспечивает выполнение условия сохранения ориентации для слабого предела минимизирующей последовательности (см. п. (iv) доказательства).

(9) Можно также рассмотреть приложенные силы, не являющиеся замороженными нагрузками (такие как давление). Однако в каждом конкретном примере нужно проверять, удовлетворяет ли условию $L(\varphi) = \lim_{l\to\infty} L(\varphi^l)$ соответствующий член полной энергии (в этом случае нелинейный). См. упражнения 7.8 и 7.9.

(10) Как показал Болл (Ball [1977, п. 9]), предложенная им теория существования совместима с *неединственностью решений*, наблюдаемой на практике (§ 5.8). ■

В случае *задачи с граничными условиями на напряжения* необходимо наложить дополнительное условие на множество $\boldsymbol{\Phi}$ допустимых деформаций, для того чтобы последовательность $(\boldsymbol{\varphi}^k)$, минимизирующая полную энергию, была ограниченной по *норме* $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$. Если бы множество $\boldsymbol{\Phi}$ было тем же, что и в теореме 7.7-1, то из предположения коэрцитивности функции запасённой энергии мы смогли бы вывести лишь ограниченность полунорм $|\boldsymbol{\varphi}^k|_{1,p,\Omega}$. Ниже мы следуем Боллу (Ball [1977, теорема 7.10]).

Теорема 7.7-2 (о существовании решений задачи с граничными условиями на напряжения). *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^3$ *и* $\hat{W}\colon \Omega\times\mathbb{M}^3_+\to\mathbb{R}$ — *функция запасённой энергии, удовлетворяющая предположениям* (a)—(c) *теоремы* 7.7-1 (*поливыпуклость, поведение при* $\det \boldsymbol{F}\to 0^+$, *коэрцитивность*). *Пусть* $\boldsymbol{e}$ — *вектор из* $\mathbb{R}^3$ *и*

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi} := \Big\{\boldsymbol{\psi}\in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\,\nabla\boldsymbol{\psi}\in \boldsymbol{L}^q(\Omega),\ \det\nabla\boldsymbol{\psi}\in L^r(\Omega),\ \det\nabla\boldsymbol{\psi}>0 \text{ п. в. в } \Omega,\ \int_\Omega \boldsymbol{\psi}(x)\,dx=\boldsymbol{e}\Big\}.}$$

Пусть линейная форма L, *определённая равенством* $L(\boldsymbol{\psi}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\psi}\,dx + \int_\Gamma \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\psi}\,da$, *непрерывна на* $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *и* $I(\boldsymbol{\psi}) = \int_\Omega \hat{W}(x,\nabla\boldsymbol{\psi}(x))\,dx - L(\boldsymbol{\psi})$. *Предположим, что* $\inf_{\boldsymbol{\psi}\in\boldsymbol{\Phi}} I(\boldsymbol{\psi}) < +\infty$. *Тогда существует по крайней мере одна функция* $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}$, *такая что*

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi} \quad \text{и} \quad I(\boldsymbol{\varphi}) = \inf_{\boldsymbol{\psi}\in\boldsymbol{\Phi}} I(\boldsymbol{\psi}).}$$

Доказательство. Надо лишь слегка видоизменить доказательство теоремы 7.7-1. В п. (ii) воспользуемся теперь обобщённым неравенством Пуанкаре из теоремы 6.1-8(a): существует постоянная c_0, такая что

$$\int_\Omega |\boldsymbol{\psi}|^p\,dx \leqslant c_0\left\{\int_\Omega |\operatorname{grad}\boldsymbol{\psi}|^p\,dx + \left|\int_\Omega \boldsymbol{\psi}\,dx\right|^p\right\} \text{ для всех } \boldsymbol{\psi}\in\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega).$$

На основании этого неравенства и соотношения $\int_\Omega \psi\, dx = e$ устанавливаем наличие таких постоянных c и d, что

$$c > 0 \quad \text{и} \quad I(\psi) \geqslant c\left\{\|\psi\|^p_{1,p,\Omega} + |\operatorname{Cof} \nabla\psi|^q_{0,q,\Omega} + |\det \nabla\psi|^r_{0,r,\Omega}\right\} + d$$
$$\text{для всех } \psi \in \Phi.$$

В п. (iii) нужно проверить справедливость равенства $\int_\Omega \varphi\, dx = e$. Оно имеет место, поскольку

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega \varphi^l\, dx \to \int_\Omega \varphi\, dx. \qquad \blacksquare$$

Замечания. (1) Как было отмечено в § 5.1, задача с граничными условиями на напряжения имеет гладкое решение, только если приложенные силы удовлетворяют условию совместимости $\int_\Omega f\, dx + \int_\Gamma g\, da = o$. Тем не менее здесь при доказательстве существования элемента, реализующего минимум энергии на множестве Φ из теоремы 7.7-2, это условие не требуется. Однако при невыполнении этого условия гладкая минимизирующая функция служит решением краевой задачи, которая *не является* соответствующей задачей с граничными условиями на напряжения (упражнение 5.2).

(2) Множество Φ, определённое в теореме 7.7-2, непусто, поскольку всегда можно найти принадлежащее ему векторное поле вида $\psi = id + a$, где a — постоянный вектор. $\blacksquare$

Подход Джона Болла применим также и к *несжимаемым материалам.* В этом случае *условие несжимаемости* (§ 5.7) учитывается добавлением соотношения „$\det \nabla\psi = 1$ п. в. в Ω“ в определение множества Φ; см. Ball [1977], а также упражнение 7.12. В связи с этим стоит отметить интересные результаты Ростамиана (Rostamian [1978]) и Ледрэ (Le Dret [1986a]), рассмотревших сжимаемые материалы, функция запасённой энергии которых имеет вид, предложенный Огденом (Ogden [1972b]:

$$\hat{W}_\varepsilon\colon F \in \mathbb{M}^3_+ \to \hat{W}_\varepsilon(F) = W(F) + \frac{1}{\varepsilon} h(\det F), \qquad \varepsilon > 0.$$

Ростамиан и Ледрэ установили, что при $\varepsilon \to 0$ соответствующие „сжимаемые“ минимизирующие элементы φ^ε слабо (а в некоторых случаях и сильно) сходятся в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$ к „несжимаемому“ минимизирующему элементу. Кроме того, в предположении что $\varphi^\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ при некотором $p > 3$, Ледрэ (Le Dret [1986]) показал, что $\varphi^\varepsilon = \varphi^0 + \varepsilon\varphi^1 + o(\varepsilon)$ в $W^{2,p}(\Omega)$, где φ^0 — решение „предельной" краевой задачи для несжимаемого упругого материала. Особый интерес представляют также результаты Леталлека и Одена (Le Tallec & Oden [1980, 1981]) о существовании гидростатического давления (т. е. множителя Лагранжа, соответствующего условию несжимаемости $\det \nabla\varphi = 1$; см. упражнение 5.9), когда функция, минимизирующая энергию, достаточно гладка (близкие вопросы рассмотрены также в работах Glowinski & Le Tallec [1982], Fosdick & MacSithigh [1986]).

7.8. Задачи с односторонними ограничениями

Следуя работе Ciarlet & Nečas [1985], обобщим результат теоремы 7.7-1 о существовании решений на случай, когда в определение множества допустимых деформаций $\mathbf{\Phi}$ может входить *одностороннее граничное условие на положения* (см. § 5.3). Напомним, что выполнение этого условия для достаточно гладкой функции, реализующей минимум энергии, является математической моделью *контакта с препятствием без трения* (теорема 5.3-1). Одновременно с этим включим в определение множества $\mathbf{\Phi}$ *ограничение упрочнения* (см. § 5.7).

Рассмотрим сначала случай, когда граничное условие на положения $\varphi = \varphi_0$ вводится на некоторой части Γ_0 границы области. Запись „$\psi \in C$ da-п.в. на Γ^2" означает, что $\psi(x) \in C$ при почти всех $x \in \Gamma_2$.

Теорема 7.8-1 (о существовании решений задач с граничными условиями на перемещения и напряжения и односторонним граничным условием на положения). *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^3$ *и* $\hat{W}\colon \Omega \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ — *функция запасённой энергии, удовлетворяющая условиям* (a)—(c) *теоремы* 7.7-1 (*поливыпуклость, поведение при* $\det \boldsymbol{F} \to 0^+$, *коэрцитивность*). *Пусть функция* $\hat{L}\colon \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$, *задающая упрочнение, поливыпукла, т. е. существует выпуклая функция* $\mathbb{L}\colon \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, *такая что*

$$\hat{L}(\boldsymbol{F}) = \mathbb{L}(\boldsymbol{F}, \mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}, \det \boldsymbol{F}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3_+.$$

Пусть Γ_0, Γ_1, Γ_2 — *взаимно непересекающиеся относительно открытые подмножества* $\Gamma = \partial\Omega$, *причём* $\operatorname{area}\Gamma_0 > 0$ *и* $\operatorname{area}\{\Gamma - (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)\} = 0$. *Пусть* C — *замкнутое подмножество в* $\mathbb{R}^3$ *и* $\varphi_0\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}^3$ — *измеримая функция, такая что множество*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{\Phi} := \{&\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^q(\Omega),\ \det\nabla\psi \in L^r(\Omega),\\ &\psi = \varphi_0\ da\text{-п.в. на } \Gamma_0,\ \varphi \in C\ da\text{-п.в. на } \Gamma_2,\\ &\det\nabla\psi > 0 \text{ п.в. в } \Omega,\ L(\nabla\psi) \leqslant 0 \text{ п.в. в } \Omega\} \end{aligned}}$$

непусто. Предположим, что линейная форма L, заданная равенством

$$L(\psi) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\psi}\, da,$$

непрерывна на $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$. Положим

$$I(\psi) = \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\psi(x))\, dx - L(\psi)$$

и допустим, что $\inf_{\psi \in \Phi} I(\psi) < +\infty$.

Тогда существует по крайней мере одна функция φ, *такая что*

$$\boxed{\varphi \in \Phi \quad \text{и} \quad I(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi).}$$

Доказательство. Достаточно показать, что функция φ, построенная в п. (iv) доказательства теоремы 7.7-1, удовлетворяет двум налагаемым здесь дополнительным условиям; остальная часть доказательства теоремы 7.7-1 переносится на рассматриваемый случай без изменений. Прежде всего заметим, что в силу компактности оператора следа $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}(W^{1,p}(\Omega); L^p(\Gamma))$ мы можем найти подпоследовательность минимизирующей последовательности (φ^l), которая сходится поточечно da-почти-всюду на Γ; следовательно, $\varphi \in C$ da-почти-всюду на Γ_2, поскольку множество C замкнуто.

Далее, как и в п. (v) доказательства теоремы 7.7-1, можно найти подпоследовательность, члены которой нумеруются индексом n, такую что

$$\sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n (\nabla\varphi^t(x), \mathbf{Cof}\, \nabla\varphi^t(x), \det \nabla\varphi^t(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\nabla\varphi(x), \mathbf{Cof}\, \nabla\varphi(x), \det \nabla\varphi(x)) \text{ для почти всех } x \in \Omega.$$

Функция $\mathbb{L}$: $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ выпукла (в силу условия поливыпуклости функции $\widehat{L}$); следовательно, она непрерывна на открытом множестве $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times]0, +\infty[$ (теорема 4.7-10 (c)), а значит,

$$\begin{aligned}
\widehat{L}(\nabla\varphi(x)) &= \mathbb{L}(\nabla\varphi(x), \mathbf{Cof}\, \nabla\varphi(x), \det \nabla\varphi(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{L}\left(\sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n (\nabla\varphi^t(x), \mathbf{Cof}\, \nabla\varphi^t(x), \det \nabla\varphi^t(x))\right) \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \left\{\sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n \mathbb{L}(\nabla\varphi^t(x), \mathbf{Cof}\, \nabla\varphi^t(x), \det \nabla\varphi^t(x))\right\} \leqslant 0
\end{aligned}$$

для почти всех $x \in \Omega$. Теорема доказана. ■

Случай $\Gamma_0 = \Gamma_2 = \varnothing$ был рассмотрен в теореме 7.7-2. Теперь обратимся к более интересному случаю, когда $\Gamma_0 = \varnothing$, а $\Gamma_2 \neq \varnothing$. Как было отмечено в § 5.3 (см., в частности, рис. 5.3-2), необходимым условием существования гладких функций, реализующих минимум энергии, является выполнение неравенства

$$\left\{\int_\Omega \boldsymbol{f}\, dx + \int_\Gamma \boldsymbol{g}\, da\right\} \cdot \boldsymbol{d} \leqslant 0$$

для всех векторов $\boldsymbol{d}$ из некоторого множества D, образованного „направлениями беспрепятственного выхода для тела". Следуя работе Ciarlet & Nečas [1985, теорема 4.2], дадим теперь точное определение множества D и докажем, что указанными неравенствами „почти задаётся и достаточное условие существования минимизирующей функции (при этом мы требуем уже выполнения строгих неравенств). Примечательной особенностью этого подхода является тот факт, что здесь *не нужно налагать на множество* Φ *дополнительных условий типа* $\int_\Omega \boldsymbol{\psi}\, dx = \boldsymbol{e}$, как в теореме 7.7-2. Ради простоты не будем вводить ограничение упрочнения, хотя его можно учесть точно так же, как в теореме 7.8-1.

Теорема 7.8-2 (о существовании решений задачи с граничными условиями на напряжения и односторонним граничным условием на положения). *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^3$ *и* $\hat{W}$: $\Omega \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ — *функция запасённой энергии, удовлетворяющая условиям* (a)—(c) *теоремы* 7.7-1 (*поливыпуклость, поведение при* $\det \boldsymbol{F} \to 0^+$, *коэрцитивность*). *Пусть* Γ_1, Γ_2 — *взаимно непересекающиеся относительно открытые подмножества* Γ, *причём* $\operatorname{area} \Gamma_2 > 0$ *и* $\operatorname{area} \{\Gamma - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)\} = 0$. *Пусть* C — *замкнутое подмножество в* $\mathbb{R}^3$, *такое что множество*

$$\boxed{\begin{gathered}\Phi := \{\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\, \nabla\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{L}^q(\Omega),\ \det \nabla\boldsymbol{\psi} \in L^r(\Omega),\\ \boldsymbol{\psi} \in C \text{ п. в. на } \Gamma_2,\ \det \nabla\boldsymbol{\psi} > 0 \text{ п. в. в } \Omega\}\end{gathered}}$$

непусто. Предположим, что линейная форма L, *заданная равенством* $L(\boldsymbol{\psi}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\psi}$, *непрерывна на* $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *и*

$$\boxed{L(\boldsymbol{d}) = \left\{\int_\Omega \boldsymbol{f}\, dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\, da\right\} \cdot \boldsymbol{d} > 0 \text{ для всех } \boldsymbol{d} \in D;}$$

здесь

$$D := cl\left\{ \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{d} = \lim_{k\to\infty} \frac{\widehat{\varphi}^k}{|\widehat{\varphi}^k|},\ \text{где}\ \widehat{\varphi}^k := \frac{\int_{\Gamma_2} \varphi^k\, \mathrm{d}a}{\int_{\Gamma_2} \mathrm{d}a},\ \varphi^k \in \Phi,\ \lim_{k\to\infty} |\widehat{\varphi}^k| = +\infty \right\}.$$

Положим

$$I(\psi) = \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\psi(x))\, \mathrm{d}x - L(\psi)$$

и допустим, что $\inf_{\psi\in\Phi} I(\psi) < +\infty$. *Тогда существует по крайней мере одна функция* φ, *такая что*

$$\boxed{\varphi \in \Phi \quad \text{и} \quad I(\varphi) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\psi).}$$

Доказательство. (i) Учитывая предположение о коэрцитивности функции запасённой энергии, получаем

$$I(\psi) \geqslant \alpha\left\{ |\psi|^p_{1,p,\Omega} + |\mathbf{Cof}\,\nabla\psi|^q_{0,q,\Omega} + |\det\nabla\psi|^r_{0,r,\Omega} \right\} + \beta \operatorname{vol}\Omega - L(\psi)$$

для всех $\psi \in \Phi$. В рассматриваемом случае вывод оценки снизу для $I(\psi)$, $\psi \in \Phi$, осложняется тем обстоятельством, что для замены полунормы $|\cdot|_{1,p,\Omega}$ на норму $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$ мы не можем воспользоваться обобщённым неравенством Пуанкаре, поскольку у нас нет ни граничного условия на положения $\psi = \varphi_0$ на Γ_0 (как в теоремах 7.7-1 и 7.8-1), ни дополнительного ограничения типа $\int_\Omega \psi(x)\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{e}$ на множество Φ (как в теореме 7.7-2). Поэтому мы применим иной подход, основанный на импликации

$$\varphi^k \in \Phi, \quad \lim_{k\to\infty} \|\varphi^k\|_{1,p,\Omega} = +\infty \Rightarrow \gamma := \liminf_{k\to\infty} \frac{I(\varphi^k)}{\|\varphi^k\|_{1,p,\Omega}} > 0,$$

которую сейчас и установим.

(ii) Допустим, что эта импликация неверна. Тогда найдётся последовательность (φ^k), такая что

$$\varphi^k \in \Phi, \quad \lim_{k\to\infty} \|\varphi^k\|_{1,p,\Omega} = +\infty,$$
$$I(\varphi^k) = \gamma^k \|\varphi^k\|_{1,p,\Omega}, \qquad \lim_{k\to\infty} \gamma^k \leqslant 0.$$

Пользуясь полученной в начале доказательства оценкой снизу для энергии, находим

$$\gamma^k \|\varphi^k\|_{1,p,\Omega} \geqslant \alpha |\varphi^k|^p_{1,p,\Omega} + \beta \operatorname{vol}\Omega - \left\{ \int_\Omega f \cdot \varphi^k \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot \varphi^k \, da \right\}.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\gamma^k \geqslant \alpha \|\varphi^k\|^{p-1}_{1,p,\Omega} |\tilde{\varphi}^k|^p_{1,p,\Omega} + \frac{\beta \operatorname{vol}\Omega}{\|\varphi^k\|_{1,p,\Omega}} - \left\{ \int_\Omega f \cdot \tilde{\varphi}^k \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot \tilde{\varphi}^k \, da \right\},$$

где

$$\tilde{\varphi}^k = \frac{\varphi^k}{\|\varphi^k\|_{1,p,\Omega}}.$$

Из соотношений $\alpha > 0$, $\lim_{k\to\infty} \gamma^k \leqslant 0$, $\lim_{k\to\infty} \|\varphi^k\|_{1,p,\Omega} = +\infty$, $p > 1$, $\|\tilde{\varphi}^k\|_{1,p,\Omega} = 1$, следует, что

$$\lim_{k\to\infty} |\tilde{\varphi}^k|_{1,p,\Omega} = 0.$$

(iii) В силу обобщённого неравенства Пуанкаре,

$$\|\psi\|^p_{1,p,\Omega} \leqslant c_1 \left\{ |\psi|^p_{1,p,\Omega} + \left| \int_{\Gamma_2} \psi \, da \right|^p \right\} \quad \text{для всех} \quad \psi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Применяя это неравенство к функциям $\|\varphi^k\|^{-1}_{1,p,\Omega} (\varphi^k - \hat{\varphi}^k)$, где

$$\hat{\varphi}^k = \frac{1}{\int_{\Gamma_2} da} \int_{\Gamma_2} \varphi^k \, da,$$

получаем

$$\frac{\|\varphi^k - \hat{\varphi}^k\|_{1,p,\Omega}}{\|\varphi^k\|_{1,p,\Omega}} \leqslant c_2^{1/p} |\tilde{\varphi}^k|_{1,p,\Omega}.$$

Поэтому из равенства $\lim_{k\to\infty} |\tilde{\varphi}^k|_{1,p,\Omega} = 0$ вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi^k - \hat{\varphi}^k\|_{1,p,\Omega}}{\|\varphi^k\|_{1,p,\Omega}} = 0.$$

Поскольку $\lim_{k\to\infty} \|\varphi^k\|_{1,p,\Omega} = +\infty$ и

$$\left| \frac{\|\hat{\varphi}^k\|_{1,p,\Omega}}{\|\varphi^k\|_{1,p,\Omega}} - 1 \right| \leqslant \frac{\|\varphi^k - \hat{\varphi}^k\|_{1,p,\Omega}}{\|\varphi^k\|_{1,p,\Omega}}$$

мы можем заключить, что

$$\lim_{k\to\infty} \|\hat{\varphi}^k\|_{1,p,\Omega} = +\infty.$$

(iv) Каждая функция $\hat{\varphi}^k \in W^{1,p}(\Omega)$ постоянна и потому может быть отождествлена с некоторым вектором из $\mathbb{R}^3$. Поскольку соотношения $d = \lim_{k\to\infty} \hat{\varphi}^k/|\hat{\varphi}^k|$ и $\lim_{k\to\infty} |\hat{\varphi}^k| = +\infty$ можно также понимать в смысле сходимости в $W^{1,p}(\Omega)$ и, кроме того, существует постоянная $c_3 > 0$, такая что

$$c_3^{-1}|d| \leqslant \|d\|_{1,p,\Omega} \leqslant c_3|d| \quad \text{для всех} \quad d \in \mathbb{R}^3,$$

то последовательность (φ^k) можно считать „подходящей" для задания некоторого элемента множества D, определённого в формулировке теоремы. Постоянные функции

$$\delta^k = \frac{\hat{\varphi}^k}{\|\varphi^k\|_{1,p,\Omega}}$$

ограничены в $W^{1,p}(\Omega)$ равномерно по k (в силу п. (iii)) и, значит, найдётся подпоследовательность (δ^l), такая что

$$\lim_{k\to\infty} \delta^l = \lambda d \text{ в } \mathbb{R}^3 \text{ и в } W^{1,p}(\Omega), \text{ где } d \in D \text{ и } \lambda > 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{l\to\infty} \tilde{\varphi}^l = \lambda d \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega),$$

в силу п. (iii). На основании п. (ii) заключаем, что

$$\begin{aligned}
\lambda L(d) &= \lambda \left\{ \int_\Omega f \cdot d \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot d \, da \right. \\
&= \lim_{l\to\infty} \left\{ \int_\Omega f \cdot \varphi^l \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot \varphi^l \, da \right\} \\
&\geqslant \limsup_{l\to\infty} \left\{ \alpha \|\varphi^l\|_{1,p,\Omega}^{p-1} |\tilde{\varphi}^l|_{1,p,\Omega}^p \right\} + \lim_{l\to\infty} \left\{ \frac{\beta \operatorname{vol}\Omega}{\|\varphi^l\|_{1,p,\Omega}} - \gamma^l \right\} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Но это неравенство противоречит предположению, что $L(d) < 0$ для всех $d \in D$, и потому импликация из п. (i) действительно имеет место.

(v) Таким образом, всякая последовательность (φ^k), $\varphi^k \in \Phi$, минимизирующая функционал полной энергии, обязательно является ограниченной в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$. Поэтому оставшаяся часть доказательства проводится так же, как и в теореме 7.7-1. ■

Замечание. В рамках линеаризованной теории упругости Синьорини (Signorini [1933, 1959]) впервые поставил задачу (с тех пор носящую название *задачи Синьорини*) о нахождении положений равновесия тела, лежащего на горизонтальной плоскости в отсутствие трения. Вслед за тем Фикера (Fichera [1964]) положил начало большой серии работ, посвященных математическому исследованию аналогичных задач. Неравенства $\left\{\int_{\Omega} \boldsymbol{f}\, dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\, da\right\} \cdot \boldsymbol{d} < 0$ для всех $\boldsymbol{d} \in D$, фигурирующие в теореме 7.8-2, служат естественным обобщением аналогичных неравенств, которые применялись в работах Duvaut & Lions [1972, p. 149], Fichera [1972, p. 413] для доказательства теорем существования в линеаризованной теории упругости. По поводу истории вопроса см. Fichera [1977]. ■

Исходя из соображений, высказанных в § 5.3, мы называем множество D, определённое в теореме 7.8-2, **множеством направлений беспрепятственного выхода.** Рассмотрим в свете этого определения некоторые примеры. Предположим сначала, что *множество C ограничено. В этом случае множество направлений беспрепятственного выхода D пусто*, поскольку соотношение $\lim \|\hat{\boldsymbol{\varphi}}^k\|_{1,p,\Omega} = +\infty$ не может быть выполнено при $\boldsymbol{\varphi}^k \in \boldsymbol{\Phi}$. Действительно, если $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\Phi}$, то по определению $\boldsymbol{\psi} \in C$ на Γ_2, и, значит, эвклидовы нормы $|\hat{\boldsymbol{\psi}}|$, $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\Phi}$, равномерно ограничены, так как

$$\sup_{\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\Phi}} |\hat{\boldsymbol{\psi}}| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{\int_{\Gamma_2} da} \max_i \int_{\Gamma_2} |\psi_i|\, da < +\infty.$$

Следовательно, предположение, что $L(\boldsymbol{d}) < 0$ при всех $\boldsymbol{d} \in D$, является лишним, если C ограничено. Таким образом, в данном случае **функция, минимизирующая энергию, существует всегда** (конечно, при условии, что все остальные предположения теоремы 7.8-2 выполнены).

Предположим теперь, что множество C неограничено и что существует замкнутый выпуклый конус C_1 с вершиной в точке $\boldsymbol{a}_1$, такой что $C \subset C_1$, причём C_1 не является полупространством. Если $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\Phi}$, то по определению $\boldsymbol{\psi} \in C$ на Γ_2, а значит, $\boldsymbol{\psi} \in C_1$ на Γ_2. Поэтому если $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\Phi}$, то $\hat{\boldsymbol{\psi}} \in C_1$. Соотношения $\boldsymbol{d} = \lim_{k\to\infty} \hat{\boldsymbol{\varphi}}^k / |\hat{\boldsymbol{\varphi}}^k|$ при $|\boldsymbol{d}| = 1$ и $\lim_{k\to\infty} |\boldsymbol{\varphi}^k| = +\infty$ при $\boldsymbol{\varphi}^k \in \boldsymbol{\Phi}$ показывают, что вектор $\boldsymbol{d}$ обязан принадлежать конусу $\{C_1 - \boldsymbol{a}_1\}$, получающемуся из C_1 сдвигом на вектор $-\boldsymbol{a}_1$. Таким образом, в данном случае имеем

$$D \subset S_1 \cap \{C_1 - \boldsymbol{a}_1\},$$

где S_1 обозначает единичную сферу в $\mathbb{R}^3$.

И наконец предположим, что множество C неограничено и существует замкнутый выпуклый конус C_2, такой что $C_2 \subset C$, причём множество внутренних точек C_2 непусто. Обозначая через a_2 вершину конуса C_2, имеем

$$S_1 \cap \{C_2 - a_2\} \subset D.$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим $d \in \operatorname{int} C_2$ с $|d| = 1$. Тогда в определении множества D можно взять в качестве φ^k функции вида $\varphi^k(x) = x + kd$ при достаточно больших $k \geqslant 0$.

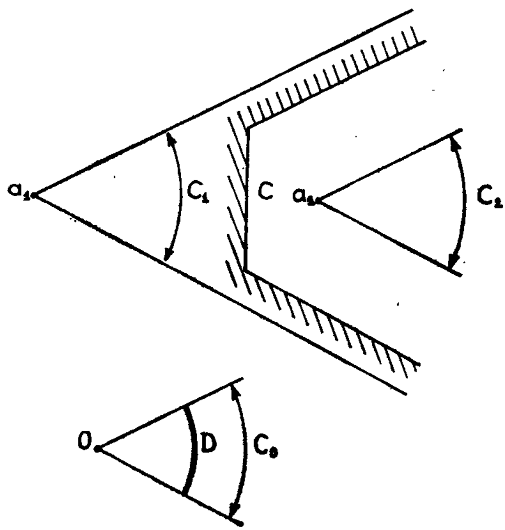

Рис. 7.8-1. Случай, когда легко указать точный вид множества D направлений беспрепятственного выхода: существует замкнутый выпуклый конус C_0 с непустым множеством внутренних точек и отличный от полупространства, такой что $C_1 = a_1 + C_0 \supset C \supset C_2 = C_0 + a$; точка D есть пересечение C_0 и единичной сферы в $\mathbb{R}^3$.

Следует отметить, что *если существует замкнутый выпуклый конус C_0 с непустым множеством внутренних точек и отличный от полупространства, такой что* (рис. 7.8-1)

$$C_0 = C_1 - a_1 = C_2 - a_2,$$

то *множество D направлений беспрепятственного выхода может быть явно указано, а именно $D = S_1 \cap C_0$*. Аналогичная ситуация имеет место в задаче, рассмотренной на рис. 5.3-2.

Замечания. (1) Байокки, Буттаццо, Гастальди и Томарелли (Baiocchi, Buttazzo, Gastaldi & Tomarelli [1986]) ввели понятие „функционала обобщенного выхода“, которое позволяет изучить предельный случай вырождения конуса C_0 в полупространство.

(2) Ещё один подход основан на добавлении к энергии некоторой *штрафной* функции. Он был с успехом применён Дюво и Лионсом (Duvaut & Lions [1972]) в задачах линеаризованной теории упругости, а Гвиннер (Gwinner [1986]) указал на возможности его использования в нелинейной теории упругости.

7.9. Существование минимизирующих отображений, инъективных почти всюду

Следуя работе Ciarlet & Nečas [1987], обобщим результат теоремы 7.7-1 о существовании решений в несколько ином направлении: наложим на допустимые деформации ψ *условие инъективности* $\int_\Omega \det \nabla\psi \, dx \leqslant \operatorname{vol} \psi(\Omega)$. Напомним, что выполнение этого условия для гладкого отображения, минимизирующего энергию, представляет собой математическую модель *самокасания без трения* (теорема 5.6-3). Предлагаемое доказательство по существу сводится к проверке того факта, что условие инъективности „выдерживает переход к слабому пределу“ на элементах минимизирующей последовательности для полной энергии. Ради простоты будем считать, что предложенных поверхностных сил нет.

Теорема 7.9-1 (о существовании решений задач с граничными условиями на перемещения и напряжения и условием инъективности). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ и $\widehat{W}: \Omega \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ — функция запасённой энергии, удовлетворяющая условиям* (a), (b) *из теоремы* 7.7-1 (*поливыпуклость и поведение при* $\det \boldsymbol{F} \to 0^+$), *а также условию* (c) (*коэрцитивность*) *с* $p > 3$. *Пусть* Γ_0, Γ_1 — *взаимно непересекающиеся относительно открытые подмножества на* $\Gamma = \partial\Omega$, *причём* area $\Gamma_0 > 0$ *и* area $\{\Gamma - (\Gamma_0 \cup \Gamma_1)\} = 0$. *Пусть* φ_0: $\Gamma_0 \to \mathbb{R}^3$ — *измеримая функция, такая что множество*

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi := \{&\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in \boldsymbol{L}^q(\Omega),\ \det\nabla\psi \in L^r(\Omega),\\ &\psi = \varphi_0 \text{ п. в. на } \Gamma_0,\ \det\nabla\psi > 0 \text{ п. в. в } \Omega,\ \int_\Omega \det\nabla\psi\, dx \leqslant \operatorname{vol}\psi(\Omega)\}\end{aligned}}$$

непусто. Пусть линейный функционал L, заданный равенством $L(\psi) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\psi \, dx$, *непрерывен в* $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$. *Положим*

$$I(\psi) = \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\psi(x)\, dx - L(\psi)$$

и допустим, что $\inf_{\psi\in\Phi} I(\psi) < +\infty$.

Тогда найдётся по крайней мере одна функция φ, *такая что*

$$\boxed{\varphi \in \Phi \text{ и } I(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi),}$$

причём каждая функция $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, *минимизирующая* I, *инъективна почти всюду, в том смысле что*

$$\boxed{\operatorname{card} \varphi^{-1}(x') = 1 \text{ для почти всех } x' \in \varphi(\overline{\Omega}).}$$

Доказательство. Достаточно показать, что функция φ, построенная в п. (iv) доказательства теоремы 7.7-1, удовлетворяет дополнительному условию $\int_\Omega \det \nabla\varphi \, dx \leqslant \operatorname{vol} \varphi(\Omega)$; в остальном доказательство теоремы 7.7-1 переносится на рассматриваемый здесь случай без изменений.

Прежде всего отметим, что, в силу одного результата из работы Marcus & Mizel [1973], из предположения об открытости и ограниченности множества Ω в сочетании с неравенством $p > 3$ вытекает, что всякая функция $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ переводит множества нулевого объёма (относительно dx-меры) в множества нулевого объёма, а (dx-) измеримые подмножества — в измеримые подмножества. Поскольку всякая липшицева граница, и в частности $\partial\Omega$, имеет нулевой объём, то $\operatorname{vol} \varphi(\partial\Omega) = 0$ и, следовательно, $\operatorname{vol} \varphi(\Omega) = \operatorname{vol} \varphi(\overline{\Omega})$. Этим наблюдением мы воспользуемся ниже.

Поскольку $p > 3$ и Ω — ограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей, то пространство Соболева $W^{1,p}(\Omega)$ компактно вложено в пространство $C^0(\overline{\Omega})$ по теореме Реллиха—Кондрашова (теорема 6.1-5). Поэтому подпоследовательность (φ^l), построенная в п. (iii) доказательства теоремы 7.7-1, сходится к функции φ равномерно (т. е. в пространстве $C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$). Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Поскольку множество $\varphi(\overline{\Omega})$ компактно, а значит измеримо, то в силу классического свойства лебеговой меры существует открытое множество O_ε, такое что

$$\varphi(\overline{\Omega}) \subset O_\varepsilon, \quad \operatorname{vol}(O_\varepsilon - \varphi(\overline{\Omega})) < \varepsilon.$$

Установим теперь наличие такого числа $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\bigcup_{x \in \varphi(\overline{\Omega})} B_x(\delta(\varepsilon)) \subset O_\varepsilon.$$

Действительно, в противном случае для некоторого $\varepsilon > 0$ существовали бы последовательности (x^m), (y^m), (δ^m), удовлетворяющие условиям

$$x^m \in \varphi(\overline{\Omega}),\ y^m \notin O_\varepsilon,\ |x^m - y^m| < \delta^m, \qquad \lim_{m\to\infty} \delta^m = 0.$$

Множество $\varphi(\overline{\Omega})$ компактно, и потому нашлась бы подпоследовательность (x^n), сходящаяся к некоторому элементу $x \in \varphi(\overline{\Omega})$, а значит и подпоследовательность (y^n) сходилась бы к тому же элементу x, так как $\lim_{n\to\infty} |y^n - x^n| = 0$. Однако предел последовательности (y^n) должен принадлежать замкнутому множеству $\mathbb{R}^3 - O_\varepsilon$, что невозможно в силу включения $\varphi(\overline{\Omega}) \subset O_\varepsilon$. Итак, $\bigcup_{x\in\varphi(\overline{\Omega})} B_x(\delta(\varepsilon)) \subset O_\varepsilon$ при некотором $\delta(\varepsilon) > 0$ и, значит, существует целое $l_0 = l_0(\delta) = l_0(\varepsilon)$, такое что

$$\varphi^l(\overline{\Omega}) \subset O_\varepsilon \text{ при всех } l \geqslant l_0,$$

поскольку (φ^l) равномерно сходится к φ. Так как $\varphi^l \in \Phi$, то

$$\int_\Omega \det \nabla\varphi^l \, dx \leqslant \operatorname{vol} \varphi^l(\overline{\Omega}) \leqslant \operatorname{vol} O_\varepsilon \text{ при всех } l \geqslant l_0.$$

Последовательность $(\det \nabla\varphi^l)$ слабо сходится к $\det \nabla\varphi$ в пространстве $L^r(\Omega)$ (см. п. (iii) доказательства теоремы 7.7-1), поэтому мы можем заключить, что

$$\int_\Omega \det \nabla\varphi \, dx = \lim_{l\to\infty} \int_\Omega \det \nabla\varphi^l \, dx \leqslant \operatorname{vol} O_\varepsilon,$$

а так как $\operatorname{vol} O_\varepsilon = \operatorname{vol} \varphi(\overline{\Omega}) + \operatorname{vol}(O_\varepsilon - \varphi(\overline{\Omega}))$, $\operatorname{vol}(O_\varepsilon - \varphi(\overline{\Omega})) < \varepsilon$, то, учитывая произвольность ε, получаем

$$\int_\Omega \det \nabla\varphi \, dx \leqslant \operatorname{vol} \varphi(\overline{\Omega}) = \operatorname{vol} \varphi(\Omega).$$

Тем самым мы установили, что $\varphi \in \Phi$.

Наконец, покажем, что всякое отображение $\varphi \in \Phi$, и в частности отображение, минимизирующее полную энергию, является инъективным почти всюду. Согласно одному результату Маркуса и Майзела (Marcus & Mizel [1973]; см. также Водопьянов, Гольдштейн и Решетняк [1979], Bojarski & Iwaniec [1983]), если Ω — ограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^3$ и $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ при $p > 3$, то

$$\int_\Omega |\det \nabla\varphi| \, dx = \int_{\varphi(\Omega)} \operatorname{card} \{\varphi^{-1}(x')\} \, dx',$$

коль скоро правая или левая часть этого равенства имеет смысл (такое соотношение для гладких отображений уже использовалось в теореме 5.6-1; здесь приведено его обобщение на случай отображений со значениями в пространствах Соболева). В силу этого равенства и определения множества Φ,

$$\operatorname{vol}\varphi(\Omega)=\int_{\varphi(\Omega)}\mathrm{d}x'\leqslant\int_{\varphi(\Omega)}\operatorname{card}\{\varphi^{-1}(x')\}\,\mathrm{d}x'=$$
$$=\int_{\Omega}\det\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\leqslant\operatorname{vol}\varphi(\Omega),$$

откуда следует, что

$$\operatorname{card}\{\varphi^{-1}(x')\}=1 \text{ для почти всех } x'\in\varphi(\Omega).$$

Теорема доказана. ■

Замечания. (1) В случае *задачи с граничными условиями на перемещения* условие инъективности $\int_\Omega \det\nabla\psi\,\mathrm{d}x\leqslant\operatorname{vol}\psi(\Omega)$ на допустимые деформации ψ налагать не нужно, если граничная функция φ_0: $\Gamma\to\mathbb{R}^3$ и функция запасённой энергии удовлетворяют соответствующим предположениям, — отображения, минимизирующие энергию в этом случае сами по себе оказываются инъективными (Ball [1981b, теорема 3]; см. также упражнение 7.13).

(2) Связь между обратимостью решений, описывающих состояния равновесия в нелинейной теории упругости (а значит, в частности, и отображений, реализующих минимум энергии), и поведением функции запасённой энергии при $\det\boldsymbol{F}\to 0^+$ изучались в работах Antman [1976], Antman & Brezis [1978], Ball [1981b], для случая одномерных задач.

(3) Аналогичным образом можно рассмотреть задачу, когда *имеется сразу несколько тел при условии, что нет их взаимопроникновения*. В этом случае множество Ω имеет конечное число связных компонент и материал может меняться от компоненты к компоненте, т. е. у каждой связной компоненты может быть своя функция запасённой энергии. ■

Применив некоторые тонкие результаты о регулярности, установленные в работе Sverak [1987], Тан (Tang [1987]) распространил результаты теоремы 7.9-1 о существовании решений и их инъективности на случай $p>2$. При таких p нужно придать соответствующий смысл образу $\varphi(\Omega)$, поскольку отображение φ не обязано быть непрерывным.

7.10. Заключение: некоторые нерешённые проблемы

Одна из основных нерешённых проблем состоит в том, чтобы сформулировать достаточные условия, обеспечивающие дополнительную *регулярность функций, которые минимизируют энергию* и существование которых доказывается методами Джона Болла. Например, при сильных ограничениях на рост подынтегральной функции $\hat{W}$ и её частных производных (упражнение 7.14) или же при априорном предположении, что минимизирующая функция принадлежит пространству $\boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega)$ (упражнение 7.15) можно показать, что функция $\varphi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$, минимизирующая интеграл

$$I(\psi) = \int_{\Omega} \widehat{W}(x, \nabla\psi(x))\,\mathrm{d}x - \left\{ \int_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \psi\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g} \cdot \psi\,\mathrm{d}a \right\}$$

(для определённости мы рассматриваем задачу с граничными условиями на перемещения и напряжения), является *слабым решением уравнений Эйлера — Лагранжа* (§ 4.1), т. е.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \nabla\varphi(x)) : \nabla\boldsymbol{\vartheta}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\,\mathrm{d}a$$

для всех $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathscr{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$, равных нулю на Γ_0. Смысл указанных допущений состоит в том, чтобы обеспечить дифференцируемость функционала I в точке φ и, таким образом, получить уравнения Эйлера—Лагранжа в виде $I'(\varphi)\boldsymbol{\vartheta} = 0$. Однако эти допущения практически неприемлемы. Действительно, упомянутые ограничения роста являются слишком сильными для реальных функций запасённой энергии; до сих пор не найдено каких-либо приемлемых условий, гарантирующих $\boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega)$-регулярность минимизирующих отображений.

Что касается гладкости минимизирующих отображений, то решающую роль здесь играют *условия эллиптичности*, упомянутые в § 5.10, однако в этом вопросе не всё ещё ясно до конца. Так, Болл (Ball [1980]) показал, что условие сильной эллиптичности является необходимым для регулярности минимизирующего отображения (см. также Ball [1981a]). Однако оно не является достаточным: даже в одномерном случае имеются примеры интегралов вида

$$J(v) = \int_{I} h(x, v(x), v'(x))\,\mathrm{d}x$$

с достаточно гладкой подынтегральной функцией h, удовлетворяющей при всех $(x, v, p) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ условиям $h(x, v, p) \geqslant 0$ и $(\partial^2 h/\partial p^2)(x, v, p) > 0$ (последнее неравенство — одномерный аналог условия сильной эллиптичности), для которых элементы пространства $W^{1,1}(I)$ (состоящего из абсолютно непрерывных функций на $I =]0, 1[$), реализующие минимум J, не удовлетворяют уравнению Эйлера — Лагранжа; см. Ball & Mizel [1984, 1985]. Работы общего характера о связи условий эллиптичности с регулярностью решений указаны в конце § 5.10.

Эти вопросы имеют также отношение к весьма неожиданному *эффекту Лаврентьева* (Lavrentiev [1926]). А именно, снова в классе одномерных задач вариационного исчисления, можно построить примеры функционалов J, таких что

$$\inf_{v\in\Phi_\infty} J(v) > \inf_{v\in\Phi_1} J(v),$$

где

$$\Phi_p = \{v \in W^{1,p}(I);\quad v(0) = -\alpha,\ v(1) = \alpha\},\ p = 1,\ \infty,$$

причём существует функция, реализующая минимум на Φ_1. По этому поводу см. Ball [1984], Ball & Mizel [1985], Ball & Knowles [1987], Sivaloganathan [1986b], Podio-Guidugli, Vergara-Caffarelli & Virga [1987], Dacorogna [1987].

С другой стороны, нельзя ожидать безусловной регулярности решений во всех случаях, поскольку имеются физические примеры, такие как *кавитация*, *разрушение*, *двойниковое срастание кристаллов*, когда минимизирующие элементы $\varphi \in \boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega)$ не обязаны принадлежать пространствам более гладких функций, таким как $\boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega)$ или $\mathscr{E}^1(\bar{\Omega})$. В связи с этим Болл (Ball [1982]) привёл замечательные примеры пространственных задач, показывающие, что минимизирующие функции отнюдь не всегда должны быть гладкими; в частности, возможны точки разрыва, соответствующие *кавитации* или *разрушению*. Следовательно, в этом случае показатель p, входящий в неравенство коэрцитивности, не может быть > 3, поскольку $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ при $p > 3$ (модели кавитации также исключают „предельный“ показатель $p = 3$; см. Ball [1978]). Этот круг вопросов рассматривается также в работах Noll & Podio-Guidugli [1986], Sivaloganathan [1986a, 1986b], Podio-Guidugli, Vergara-Caffarelli & Virga [1986], Stuart [1985], Šverák [1987].

Разрывы градиентов решений на поверхностях материалов имеют место при *двойниковом срастании кристаллов*. Здесь математическая модель существенно усложняется в связи с необычными свойствами, которыми должна обладать функция запасённой энергии $\hat{W}$ кристаллических твёрдых тел ввиду особых геометрических условий инвариантности, связанных с решётчатой структурой кристалла. В частности, нужно отметить отсутствие столь привычных свойств, как слабая полунепрерывность снизу интеграла $\int_\Omega \hat{W}(\nabla\psi(x))\,dx$ и коэрцитивность функции запасённой энергии (она должна оставаться ограниченной вдоль некоторых направлений). В связи с этими вопросами см. Ericksen [1979, 1986, 1987], James [1981], Kinderlehrer [1987a, 1987b], Pitteri [1984, 1985], Fenseca [1987a, 1987b, 1987c], Chipot & Kinderlehrer [1987].

Разрывы градиентов решений возникают также в связи с фазовыми переходами при наличии двух твёрдых фаз. Такие явления известны как *мартенситные превращения*; при этом плоские межфазные границы разделяют однородную фазу, называемую *аустенитом*, и мелкозернистую смесь двойниковых кристаллов, которая образует другую фазу, называемую *мартенситом*. Как показали Болл и Джеймз (Ball & James [1987]), это явление особенно интересно тем, что соответствующую деформацию нельзя более рассматривать как элемент, реализующий минимум энергии, — её можно трактовать лишь как слабый предел некоторой минимизирующей последовательности, сходящейся к элементу, на котором минимум энергии не достигается! Такие решения напоминают „обобщённые кривые", введенные Янгом (Young [1937, 1942], см. также Young [1980], где дано современное изложение вопроса) при исследовании интегралов, для которых отсутствуют элементы, реализующие минимум в обычном смысле. Сходные идеи находят применение в теории усреднения, которой мы сейчас вкратце коснёмся.

Значительный интерес представляет исследование периодических, или *ячеистых*, упругих материалов, функция запасённой энергии которых имеет вид

$$\widehat{W}^{\varepsilon} : (x,\ \boldsymbol{F}) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \widehat{W}^{\varepsilon}(x,\ \boldsymbol{F}) = \widehat{W}\left(\frac{x}{\varepsilon},\ \boldsymbol{F}\right) \in \mathbb{R},$$

где $\widehat{W}$ — функция, периодическая на $[0, 1]^3$ по первому аргументу, а ε — „малый" параметр. Обычно в этом случае требуется ответить на следующие вопросы: сходятся ли, а если сходятся, то в каком смысле соответствующие функционалы

$$\int_{\Omega} \widehat{W}\left(\frac{x}{\varepsilon},\ \nabla\varphi(x)\right) \mathrm{d}x$$

при $\varepsilon \to 0$ к некоторому более простому *усреднённому функционалу* вида $\int_{\Omega} \widehat{W}^0(\nabla\varphi(x))\,\mathrm{d}x$, где $\widehat{W}^0$ — соответствующая *усреднённая функция запасённой энергии*; сходятся ли при $\varepsilon \to 0$, и в каком смысле, элементы, реализующие минимум энергии, к элементам, минимизирующим соответствующий усредненный функционал. Кроме того, желательно получить явное выражение для $\widehat{W}^0$, что равносильно нахождению соответствующей функции реакции. Последняя задача, очень важная с практической точки зрения, особенно интересна и трудна, как показали в своей новаторской работе Джент и Томас (Gent & Thomas [1959]); см. также Gibson & Ashby [1982].

Исследование этих проблем, а также аналогичных проблем, возникающих в других областях, составляет предмет *теории усреднения*, к которой в последнее десятилетие проявлялся большой интерес. Основные результаты общего характера можно найти в работах: Babuška [1974, 1975], De Giorgi [1975, 1983], Spagnolo [1976], Tartar [1977, 1978, 1983], Bensoussan, Lions & Papanicolaou [1978], Жиков, Козлов, Олейник и Ха Тьен Нгоан [1979], Sanchez-Palencia [1980], Attouch [1984]. Интересные приложения к трёхмерной линеаризованной теории упругости описаны в работах: Duvaut [1978], Cioranescu & Saint Jean Paulin [1979, 1986], Oleinik [1984], Caillerie [1987], Francfort & Murat [1986][1] (ссылки на литературу по усреднению двумерных структур приведены в томе II). Обобщение этих результатов на задачи нелинейной теории упругости представляет особые трудности и только начато; по этому поводу см. Müller [1987].

Есть ещё одна проблема, тесно связанная с появлением особенностей, как например при разрушении или кавитации. Эту проблему можно сформулировать следующим образом. Физические наблюдения показывают, что решения реальных задач *непрерывно зависят от приложенных нагрузок,* по крайней мере когда они „варьируются не слишком сильно"; в частности, при достаточно малых приложенных силах в большинстве случаев естественно ожидать наличия решений, близких к решениям задач линеаризованной теории упругости. Поэтому встаёт вопрос о справедливости таких результатов „для случая общего положения", в частности в теории существования, описанной в этой главе. Мы говорим о „случае общего положения", поскольку таких результатов можно ожидать лишь в „большинстве" ситуаций — надо оставить место для таких явлений, как бифуркации, „прощёлкивание" и т. п. Напомним, что локальная теория существования гладких решений, изложенная в гл. 6, даёт положительный ответ на этот вопрос, но, к сожалению, она применима лишь в случае задач весьма частного вида, например задач с граничными условиями на одни перемещения.

За последнее время значительное продвижение достигнуто в математическом изучении задач *теории пластичности*, когда „упругая составляющая" модели является линейной, т. е. когда учитывается только линеаризованный тензор деформации $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}+\nabla\boldsymbol{u})$. Уже при такой постановке задачи возникают серьёзные математические трудности, поскольку интегралы энергии имеют вид $\int_\Omega f(\mu)$, где μ — *ограниченная мера* на Ω, а f — выпуклая функция, растущая на бесконечности не быстрее линейной. В связи с этой задачей Деманжель и Темам (Demengel [1985b], Demengel & Temam [1984, 1986]) подробно иссле-

---

[1] Задачам усреднения в линейной теории упругости посвящена книга Олейник, Иосифьяна и Шамаева [1990]′. — *Прим. ред.*

довали понятие „выпуклой функции от меры", которое оказалось эффективным средством для доказательства результатов о существовании решений в этом случае. Близкие идеи и результаты можно найти в работах: Suquet [1979, 1981], Temam & Strang [1980a, 1980b], Kohn & Temam [1983], Anzellotti [1983a, 1984, 1985a, 1985b], Anzellotti, Giaquinta [1980, 1982], Del Piero [1985a], Hadhri [1985, 1986]. Обстоятельное введение в теорию пластичности с математической точки зрения дано в книгах Duvaut & Lions [1972], Nečas & Hlaváček [1981], Temam [1983], а её физические и экспериментальные аспекты — в книге Salençon [1983].

Представляло бы значительный интерес обобщить эти результаты на случай моделей теории пластичности, в которых „упругая составляющая" та же, что и в „настоящей" нелинейной теории упругости, поскольку упруго-пластические модели являются гораздо более точными. Так, в металлах типа стали эффекты пластичности проявляются наряду с эффектами нелинейной упругости даже при весьма умеренных („порядка 3 %") деформациях. С другой стороны, материалы типа полимеров, пенопласта, резины довольно точно описываются чисто упругими моделями в достаточно широком диапазоне деформаций (порядка 100 %).

Другая важная открытая проблема состоит в моделировании и математическом исследовании *контакта с трением.* Представление о таких задачах можно получить, обратившись к следующим работам: Devaut & Lions [1972, гл. 3], где приведены различные теоремы существования в рамках линеаризованной теории упругости; Moreau [1974], где трение описывается при помощи „псевдопотенциалов"; Oden & Martins [1985], где подробно описаны физика трения и вычислительные методы, применяемые для задач с трением. См. также Panagiotopoulos [1975, 1985], Nečas, Jarušek & Haslinger [1980]. Villagio [1980], Cocu [1984], Del Piero [1985b], Frémond [1985], Kikuchi & Oden [1987]. Напомним, что приемлемые модели и теорию существования в случае контакта без трения удаётся построить для гиперупругих материалов (§§ 5.3 и 7.8).

И в заключение, чтобы закончить на высокой ноте[1], упомянем о фундаментальной проблеме получения результатов о существовании решений для нестационарной задачи *нелинейной эластодинамики.* Для определённости рассмотрим задачу с граничными условиями на перемещения для однородного упругого материала. В этом случае имеем следующую начально-краевую

---

[1] В оригинале «pour finir en beauté» (*франц.*; буквально: чтобы закончить красиво). — *Прим. изд. ред.*

задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}(x, t) - a_{ijkl}(\nabla\varphi(x, t))\dfrac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_j \partial x_l}(x, t) = f_i(x, t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[, \\ \varphi(x, 0) = \chi_0(x), \ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x, 0) = \chi_1(x), \ x \in \bar{\Omega}, \\ \varphi(x, t) = \varphi_0(x, t), \ x \in \partial\Omega, \ t \geqslant 0, \end{cases}$$

где $\varphi(x, t) = (\varphi_i(x, t))$ — неизвестная деформация в точке $x \in \bar{\Omega}$ в момент времени $t \geqslant 0$, $(a_{ijkl}(\mathbf{F}))$ — тензор упругости (§ 5.9), $f(x, t) = (f_i(x, t))$ — плотность приложенных объёмных сил, χ: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $\chi_1 : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ и $\varphi_0 : \partial\Omega \times [0, +\infty] \to \mathbb{R}^3$ — заданные начальные и граничные значения. „Локальные по времени“ (т. е. для достаточно малых $t > 0$) результаты о существовании гладких решений получены в работах Hughes, Kato & Marsden [1976] (для $\Omega = \mathbb{R}^3$), Kato [1979], Chen & von Wahl [1982], Dafermos & Hrusa [1985] и Sablé-Tougeron [1987] (для случая когда Ω — область в $\mathbb{R}^3$). Эти результаты недавно были обобщены на случай несжимаемых материалов, когда к указанной выше системе добавляется условие $\det \nabla\varphi(x, t) = 1$, $x \in \bar{\Omega}$, $t \geqslant 0$, в работах Schochet [1985], Ebin & Saxton [1986] ($\Omega = \mathbb{R}^3$), Hrusa & Renardy [1986] (Ω — область в $\mathbb{R}^3$).

Отличительной особенностью нелинейных гиперболических уравнений, таких как обсуждаемые нами уравнения нелинейной эластодинамики, является быстрое появление ударных волн, а также разрывов иного рода, независимо от гладкости начальных данных (см. Lax [1964][1]; кроме того, эти вопросы затрагиваются в работе Dafermos [1986]). Поэтому существование гладких решений можно доказать только при малых значениях времени. Наличие указанных особенностей решений очень затрудняет математическое исследование таких задач. Тем не менее глубокие результаты о существовании решений были получены и для „больших значений времени“ (правда, лишь для случая одной пространственной переменной) в работах Glimm [1965], Dafermos [1973], Diperna [1983, 1985a, 1985b].

Упражнения

7.1. Пусть $h : \mathbb{M}^n \to [\beta, +\infty[$ — непрерывная функция. Тогда для каждого $1 \leqslant p < \infty$ функционал

$$I\colon \varphi \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) = (W^{1,p}(\Omega))^n \to I(\varphi) = \int_\Omega h(\nabla\varphi(x))\,dx$$

[1] А также Олейник [1956]′. — *Прим. ред.*

корректно определён (поскольку под знаком интеграла стоит ограниченная снизу функция Каратеодори; см. доказательство теоремы 7.3-1); заметим, что $I(\varphi)$ может принимать значение $+\infty$.

(1) В силу теоремы 7.3-1 функционал I секвенциально слабо полунепрерывен снизу, если подынтегральная функция выпукла. Покажите, что при $n=1$ справедливо обратное утверждение; этот результат есть частный случай *теоремы Тонелли* (Tonelli [1920]).

Указание. Пусть $\Omega =]0, 1[$. Покажите, что при $\lambda \in]0, 1[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ последовательность $(\zeta_k)_{k \geqslant 1}$, определяемая соотношением

$$\zeta_k(x) = \begin{cases} a \text{ при } \frac{j}{k} \leqslant x < (j+\lambda)\frac{1}{k}, \\ b \text{ при } (j+\lambda)\frac{1}{k} \leqslant x < \frac{(j+1)}{k}, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1, \end{cases}$$

слабо сходится в пространстве $L^1(\Omega)$ к функции ζ, заданной формулой

$$\zeta(x) = \lambda a + (1-\lambda) b, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

(2) Покажите, что если функционал I секвенциально слабо полунепрерывен снизу, то подынтегральная функция h *квазивыпукла* (Morrey [1952]), т. е. для всех $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^n$ и всех $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathcal{D}(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))^n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{dx\text{-meas}\,\Omega} \int h(\boldsymbol{F} + \nabla \boldsymbol{\vartheta}(x))\,\mathrm{d}x \geqslant h(\boldsymbol{F}).$$

Замечания. По поводу обобщений теоремы Тонелли см. Serrin [1961, теорема 12], Marcellini & Sbordone [1980]; различные обобщения результата п. (2) приведены в работах Meyers [1965], Ball [1977, теорема 6.1 и следствие 6.1.1], Acerbi &-Fusco [1984]. Понятие квазивыпуклости уже появлялось у нас в упражнении 5.14 (для подынтегральных функций, определённых на множестве $\mathbb{M}^3_+$). ■

7.2. (1) Покажите, что функционал

$$J : v \in W^{1,4}(0, 1) \to J(v) = \int_0^1 \left\{ v'(x) + \tfrac{1}{2}(v'(x))^2 \right\}^2 \mathrm{d}x$$

не является слабо полунепрерывным снизу (аналогичный пример указан в работе Nečas [1976]).

Указание. Рассмотрите последовательность $(v_k)_{k \geqslant 1}$, где

$$v_k(x) = \begin{cases} -2x + \frac{j}{k} & \text{при } \frac{j}{k} \leqslant x \leqslant \left(j + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{k}, \\ -\frac{(j+1)}{k} & \text{при } \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k} \leqslant x < \frac{(j+1)}{k}, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1. \end{cases}$$

(2) Пусть $U = \{v \in W^{1,4}(0, 1);\ v(0) = 0,\ v(1) = -1\}$. Найдите все функции $u \in U$, удовлетворяющие условию $J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$.

7.3. В обозначениях и допущениях теоремы 6.3-5 положим

$$J(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - L(\boldsymbol{v}),$$

$$\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega);\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\ \mathrm{d}a\text{-п.в. на } \Gamma_0,\ v_3 \geqslant 0\ \mathrm{d}a\text{-п.в. на } \Gamma_2\},$$

где $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — некоторое разбиение границы Γ на измеримые подмножества, причем area $\Gamma_0 > 0$. Покажите, что тогда существует единственная функция $\boldsymbol{u}$, удовлетворяющая условиям

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U} \text{ и } J(\boldsymbol{u}) = \inf_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}} J(\boldsymbol{v}).$$

Указание. Видоизмените теорему 7.3-2 применительно к этой ситуации.

7.4. Это упражнение служит дополнением к теореме 7.5-1.

(1) Покажите, что множество

$$\{(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{K}) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \times \boldsymbol{L}^q(\Omega);\ \boldsymbol{K} = \mathbf{Cof}\, \nabla\boldsymbol{\psi}\},\ p \geqslant 2,\ q \geqslant 1,$$

которое слабо замкнуто в силу теоремы 7.5-1, является невыпуклым подмножеством пространства $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \times \boldsymbol{L}^q(\Omega)$. Будет ли оно сильно замкнутым?

(2) Пусть X и Y — нормированные векторные пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ (возможно, нелинейное) называется *секвенционально слабо непрерывным*, если

$$x^k \rightharpoonup x \text{ в } X \Rightarrow f(x^k) \rightharpoonup f(x) \text{ в } Y.$$

Покажите, что (Ball [1977, следствие 6.2-2]) отображение

$$\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathbf{Cof}\, \nabla\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{L}^{p/2}(\Omega)$$

секвенциально слабо непрерывно, если $p > 2$.

(3) При каких значениях p и q множество

$$\{\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\, \nabla\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{L}^q(\Omega)\}$$

слабо замкнуто в пространстве $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$?

7.5. Это упражнение дополняет теорему 7.5-1.

(1) Покажите, что выражение

$$(\mathbf{Cof}^{\#}\, \nabla\boldsymbol{\psi})_{ij} := \partial_{i+2}(\psi_{j+2}\partial_{i+1}\psi_{j+1}) - \partial_{i+1}(\psi_{j+2}\partial_{i+2}\psi_{j+1})$$

определяет распределение, если $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 3/2$. Отметим, что $\mathbf{Cof}^\# \nabla\psi = \mathbf{Cof}\,\nabla\psi$ при $p \geqslant 2$.

(2) Покажите, что (Ball [1977, теорема 6.2])

$$\varphi^l \rightharpoonup \varphi \text{ в } W^{1,p}(\Omega),\ p > \tfrac{3}{2} \Rightarrow (\mathbf{Cof}^\# \nabla\varphi^l)_{ij}(\vartheta) \to (\mathbf{Cof}^\# \nabla\varphi)_{ij}(\vartheta)$$

для всех $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$ (обратите внимание, что неравенство $p \geqslant 3/2$ из п. (1) здесь заменено соответствующим строгим неравенством $p > 3/2$).

7.6. Это упражнение дополняет теорему 7.6-1. (1) Покажите, что множество

$$\{(\psi, \mathbf{K}, \varepsilon) \in W^{1,p}(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^r(\Omega);\ \mathbf{K} = \mathbf{Cof}\,\nabla\psi,\ \varepsilon = \det\nabla\psi\},$$
$$p \geqslant 2,\ p^{-1} + q^{-1} \leqslant 1,\ r \geqslant 1,$$

которое слабо замкнуто в силу теоремы 7.6-1, является невыпуклым подмножеством пространства $W^{1,p}(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^r(\Omega)$. Будет ли оно сильно замкнутым?

(2) Покажите, что (Ball [1977, следствие 6.2.2]) отображение

$$\psi \in W^{1,p}(\Omega) \to \det\nabla\psi \in L^{p/3}(\Omega)$$

секвенциально слабо непрерывно при $p > 3$ (в смысле определения, данного в упражнении 7.2).

(3) При каких значениях p, q, r множество

$$\{\psi \in W^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^q(\Omega),\ \det\nabla\psi \in L^r(\Omega)\}$$

слабо замкнуто в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$?

(4) Пусть $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} \leqslant 1$, $r \geqslant 1$. Покажите, что множество

$$\{\psi \in W^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in L^q(\Omega),\ \det\nabla\psi \in L^r(\Omega),\ \det\nabla\psi > 0\text{-п. в. в } \Omega\}$$

не является выпуклым.

7.7. Это упражнение дополняет теорему 7.6-1. (1) Покажите, что выражение

$$\det{}^\# \nabla\psi := \partial_j(\psi_1(\mathbf{Cof}^\# \nabla\psi)_{ij})$$

задаёт распределение, если $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geqslant 3/2$ и $\mathbf{Cof}^\# \nabla\psi \in L^q(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} \leqslant 4/3$; распределение $\mathbf{Cof}^\# \nabla\psi$ определяется так же, как в упражнении 7.5. Отметим, что $\det^\# \nabla\psi = \det\nabla\psi$ при $p \geqslant 2$ и $p^{-1} + q^{-1} \leqslant 1$.

(2) Покажите, что (Ball [1977, теорема 6.2])

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^l \rightharpoonup \varphi \ \text{в} \ \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega),\ p \geqslant \frac{3}{2}, \\ \mathbf{Cof}^{\#}\,\nabla\varphi^l \rightharpoonup \mathbf{Cof}^{\#}\,\nabla\varphi \ \text{в} \ \boldsymbol{L}^q(\Omega),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} < \frac{4}{3}, \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(\det{}^{\#}\,\nabla\varphi^l)(\vartheta) \to (\det{}^{\#}\,\nabla\varphi)(\vartheta)$$

для всех $\vartheta \in \mathscr{D}(\Omega)$; заметим, что неравенство $p^{-1}+q^{-1} \leqslant 4/3$ из п. (1) здесь заменено соответствующим строгим неравенством.

7.8. Рассмотрим (для определённости) задачу с граничными условиями на перемещения, когда к телу приложена объёмная *центробежная сила*, описанная в § 2.7; напомним, что такая приложенная объёмная сила консервативна (упражнение 2.7). Можно ли распространить на этот случай результат теоремы 7.7-1 о существовании решений, при тех же предположениях относительно функции запасённой энергии?

7.9. Рассмотрим *задачу с граничными условиями на перемещения и давление*, когда граничное условие на положения $\varphi = \varphi_0$ задаётся на некотором da-измеримом подмножестве Γ_0 границы Γ, area $\Gamma_0 > 0$, а условие давления $\boldsymbol{Tn} = -\pi(\mathbf{Cof}\,\nabla\varphi)\boldsymbol{n}$ (где $\pi \in \mathbb{R}$ — заданная постоянная) — на $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$; напомним, что такая приложенная поверхностная сила консервативна (теорема 2.7-1). Покажите, что результат теоремы 7.7-1 о существовании решений можно распространить и на этот случай, при тех же предположениях относительно функции запасённой энергии и объёмных приложенных сил (Ball [1977, теорема 7.11]).

7.10. В теореме 7.3-1 мы сначала установили сильную полунепрерывность снизу рассматриваемого функционала, а затем заключили о его слабой полунепрерывности снизу на основании теоремы 7.2-2. Покажите, что для этого функционала секвенциальную слабую полунепрерывность снизу можно установить непосредственно при помощи рассуждений, аналогичных использованным в п. (v) доказательства теоремы 7.7-1.

7.11. Допустим, что в теореме 7.7-1 условие (b) заменено следующим условием (b′):

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{F}_k \to \boldsymbol{F} \ \text{в} \ \mathbb{M}^3_+ \\ \boldsymbol{H}_k \to \boldsymbol{H} \ \text{в} \ \mathbb{M}^3_+ \\ \delta_k \to 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{W}(x,\ \boldsymbol{F}_k,\ \boldsymbol{H}_k,\ \delta_k) \to +\infty$$

для почти всех $x \in \Omega$. Остальные предположения теоремы 7.7-1 пусть остаются без изменений.

(1) Покажите, что из справедливости условия (b′) вытекает справедливость условия (b), а обратное, вообще говоря, неверно.

(2) Пусть $\mathbb{W}(x, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta) = +\infty$ при $\delta \leqslant 0$. Покажите, что продолженная таким образом функция $\mathbb{W}(x, \cdot) : \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R} \to [\beta, +\infty]$ выпукла и непрерывна.

(3) Непосредственно из теоремы 7.3—1 выведите, что

$$(\nabla\varphi^l, \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi^l, \det\nabla\varphi^l) \rightharpoonup (\nabla\varphi, \mathbf{Cof}\,\nabla\varphi, \det\nabla\varphi) \text{ в } \boldsymbol{L}^1(\Omega)$$
$$\Rightarrow \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi(x))\,\mathrm{d}x < \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\varphi^l(x))\,\mathrm{d}x.$$

Тем самым доказательство теоремы 7.7-1 для данного случая приобретает сходство с доказательством теоремы 7.3-2.

Замечание. Для материала Огдена (§ 4.9) функция запасенной энергии удовлетворяет этому более сильному условию (b′).

7.12. Цель данного упражнения — распространить результат теоремы 7.7-1 о существовании решений на случай *несжимаемых материалов* (Ball [1977], теорема 7.8]).

(1) Пусть $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ — разбиение границы Γ на два $\mathrm{d}a$-измеримых множества, причём area $\Gamma_0 > 0$. Пусть φ_0: $\Gamma_0 \to \mathbb{R}^3$—измеримая функция, такая что множество

$$\boldsymbol{\Phi} := \{(\psi, \boldsymbol{K}) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) \times \boldsymbol{L}^2(\Omega);\ \boldsymbol{K} = \mathbf{Cof}\,\nabla\psi,$$
$$\psi = \varphi_0 \ \mathrm{d}a\text{-п.в. на } \Gamma_0,\ \det\nabla\psi = 1\text{-п.в. в } \Omega\}$$

непусто. Покажите, что множество $\boldsymbol{\Phi}$ секвенциально слабо замкнуто в пространстве $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \times \boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

(2) Пусть

$$\mathbb{M}_1^3 = \{\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3,\ \det\boldsymbol{F} = 1\}$$

и

$$\widehat{W} : \boldsymbol{F} \in \mathbb{M}_1^3 \to \widehat{W}(\boldsymbol{F}) = a\|\boldsymbol{F}\|^2 + b\|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{F}\|^2$$

(где $a > 0$, $b > 0$) — функция запасённой энергии *несжимаемого материала Муни—Ривлина.* Пусть $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ и $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^\sigma(\Gamma_1)$ таковы, что линейная форма L: $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ непрерывна. Предположим, что $\inf_{\psi\in\Phi} I(\psi) < +\infty$ (линейная форма L и полная энергия I имеют тот же вид, что и в теореме 7.7-1). Покажите, что существует по крайней мере одна функция φ, такая что

$$\varphi \in \boldsymbol{\Phi} \text{ и } I(\varphi) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\psi).$$

7.13. Как показал Болл (Ball [1981b, теорема 31]), в случае *задач с граничными условиями на перемещения* существование *всюду инъективных минимизирующих отображений* можно доказать непосредственно (т. е. не налагая условие инъективности на множество допустимых деформаций), если функция запасённой энергии $\widehat{W}$ достаточно быстро стремится к $+\infty$ при $\det F \to 0+$. Точнее, пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ и $\widehat{W}: \Omega \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ — поливыпуклая функция запасённой энергии. Предположим, что существуют постоянные α, β, p, q, r, такие что (ср. с условиями (b) и (c) теоремы 7.7-1)

$$\alpha > 0, \quad p > 3, \quad q > 3, \quad r > 1, \quad s > \frac{2q}{q-3},$$

$$\widehat{W}(x, F) \geqslant \alpha (\|F\|^p + \|\operatorname{Cof} F\|^q + (\det F)^r + (\det F)^{-s}) + \beta$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $F \in \mathbb{M}^3_+$. Пусть $\varphi_0: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ — отображение, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} \varphi_0 \in W^{1,p}(\Omega), \\ \varphi_0 \text{ инъективно на } \Omega, \\ \det \nabla\varphi_0 > 0 \text{ п. в. в } \Omega, \\ \varphi_0(\Omega) \text{ — область в } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Обозначим через φ элемент, реализующий минимум полной энергии на множестве

$$\Phi := \{\psi \in W^{1,p}(\Omega);\ \operatorname{Cof} \nabla\psi \in L^q(\Omega),\ \det \nabla\psi \in L^r(\Omega),$$
$$\psi = \varphi_0\ da\text{-п.в. на } \Gamma,\ \det \nabla\psi > 0\text{-п.в. в } \Omega\}.$$

Покажите, что $\varphi: \bar{\Omega} \to \varphi(\bar{\Omega})$ — гомеоморфизм.

Указание. Воспользуйтесь упражнением 5.7.

7.14. (1) Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ и $\widehat{W}: \Omega \times \mathbb{M}^3 \to \mathbb{R}$ — функция, обладающая следующими свойствами: для почти всех $x \in \Omega$ существует выпуклая функция $\mathbb{W}(x, \cdot): \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что

$$\mathbb{W}(x, F, \operatorname{Cof} F, \det F) = \widehat{W}(x, F) \text{ при всех } F \in \mathbb{M}^3$$

и функция $\mathbb{W}(\cdot, F, H, \delta): \Omega \to \mathbb{R}$ измерима при всех $(F, H, \delta) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}$ (а значит, функция $\widehat{W}(x, \cdot): \mathbb{M}^3 \to \mathbb{R}$ поливыпукла при почти всех $x \in \Omega$); существуют постоянные

$$\alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad p \geqslant 2, \quad q \geqslant \frac{p}{p-1}, \quad r > 1,$$

для которых справедливо неравенство коэрцитивности

$$\mathbb{W}(x, F, H, \delta) \geqslant \alpha (\|F\|^p + \|H\|^q + |\delta|^r) + \beta$$

при почти всех $x \in \Omega$ и всех $F \in \mathbb{M}^3$. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ — разбиение границы $\Gamma = \partial\Omega$ на два da-измеримых множества, причём area $\Gamma_0 > 0$. Пусть $\varphi_0\colon \Gamma_0 \to \mathbb{R}^3$ — измеримая функция, такая что множество

$$\Phi := \{\psi \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega);\ \mathbf{Cof}\,\nabla\psi \in \boldsymbol{L}^q(\Omega),\\ \det\nabla\psi \in L^r(\Omega),\ \psi = \varphi_0\ \mathrm{d}a\text{-п. в. на } \Gamma_0\}$$

непусто. Положим

$$I(\psi) = \int_\Omega \widehat{W}(x, \nabla\psi(x))\,\mathrm{d}x - L(\psi),$$

где L — непрерывный линейный функционал на пространстве $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$. Допустим, что $\inf_{\psi\in\Phi} I(\psi) < +\infty$. Покажите, что найдётся по крайней мере одна функция $\varphi \in \Phi$, такая что $I(\varphi) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\psi)$.

(2) Предположим дополнительно, что функция $\mathbb{W}(x, \cdot)\colon \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $\mathscr{C}^1$ для почти всех $x \in \Omega$ и что существуют постоянные A и B, такие что ($p'^{-1} = (p-1)/p$ и $q'^{-1} = (q-1)/q$)

$$\left|\frac{\partial\mathbb{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta)\right| \leqslant A(\|\boldsymbol{F}\|^p + \|\boldsymbol{H}\|^q + |\delta|^r) + B,$$

$$\left|\frac{\partial\mathbb{W}}{\partial \boldsymbol{H}}(x, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta)\right| \leqslant A(\|\boldsymbol{F}\|^{p-1} + \|\boldsymbol{H}\|^{q/p'} + |\delta|^{r/p'}) + B,$$

$$\left|\frac{\partial\mathbb{W}}{\partial \delta}(x, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta)\right| \leqslant A(\|\boldsymbol{F}\|^{p/q'} + \|H\|^{q-1} + |\delta|^{r/q'}) + B$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}, \delta) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}$. Покажите, что любая функция $\varphi \in \Phi$, минимизирующая функционал I на Φ, является *слабым решением уравнений Эйлера — Лагранжа*, т. е.

$$\int_\Omega \frac{\partial\widehat{W}}{\partial \boldsymbol{F}}(x, \nabla\varphi(x)) : \nabla\vartheta(x)\,\mathrm{d}x = L(\vartheta)$$

для всех $\vartheta \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$, равных нулю на Γ_0 (Ball [1977, теорема 7.12]).

Замечание. Установить результат п. (2) удаётся за счёт *сильных ограничений на рост* частных производных функции $\mathbb{W}$: кроме того, предполагается, что подынтегральная функция $\widehat{W}(x, \boldsymbol{F})$ определена *для всех* $\boldsymbol{F} \in \mathbb{M}^3$, и, значит, она не может стремиться к $+\infty$ при $\det \boldsymbol{F} \to 0+$, откуда видно, что условие сохранения ориентации не может быть выполнено. Таким образом, данные предположения не являются приемлемым для реальных гиперупругих материалов.

7.15. Пусть выполнены все условия теоремы 7.7-1. Предположим дополнительно, что функция $\mathbb{W}$ не зависит от $x \in \Omega$ и принадлежит пространству $\mathscr{C}^1(\mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times]0, +\infty[)$. Пусть отображение $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{\Phi}$ минимизирует энергию в пространстве $\boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega)$ и, кроме того, удовлетворяет условию: существует $\delta>0$, такое что $\det\nabla\boldsymbol{\varphi}(x)\geqslant\delta$ при почти всех $x\in\Omega$.

Покажите, что $\boldsymbol{\varphi}$ является *слабым решением уравнений Эйлера—Лагранжа.*

Замечание. Ограничения на рост частных производных, фигурирующие в упражнении 7.14, заменены здесь предположением о *регулярности минимизирующей функции.*

7.16. Рассмотрим *задачу с граничными условиями на перемещения для материала Сен-Венана—Кирхгофа*

$$(*)\quad\begin{cases}-\operatorname{div}\{(\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{u})(\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}))\}\boldsymbol{f} \text{ в } \Omega,\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{o} \text{ на } \Gamma,\end{cases}$$

а также соответствующий функционал полной энергии (записанный через перемещения)

$$J(\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{\frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}))^2+\mu\operatorname{tr}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}))^2\right\}dx-\int_\Omega\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dx,$$

который является корректно определённым и дифференцируемым на пространстве $\boldsymbol{W}^{1,4}(\Omega)$, а значит и на любом другом пространстве, непрерывно вложенном в $\boldsymbol{W}^{1,4}(\Omega)$. Допустим, что $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ при некотором $p>3$ и что норма $|\boldsymbol{f}|_{0,p,\Omega}$ достаточно мала, так что задача $(*)$ имеет единственное решение $\boldsymbol{u}$ в некоторой окрестности нуля пространства $\boldsymbol{V}^p(\Omega)=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega);\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ на $\Gamma\}$ (теорема 6.4-1).

(1) Покажите, что $J'(\boldsymbol{u})=0$.

(2) Покажите, что существует постоянная $\alpha>0$, такая что

$$J''(\boldsymbol{o}((\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v})\geqslant\alpha|\boldsymbol{v}|^2_{1,\Omega}\ \text{для всех}\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega).$$

Таким образом, в случае когда $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{o}$ (и, значит, $J'(\boldsymbol{o})=0$ в силу п. (1)), мы не можем утверждать, что $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$ является строгим локальным минимумом в пространстве $\boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega)$ (в теореме 1.3-1(a) требуется, чтобы в правой части последнего неравенства стояла полунорма $|\cdot|_{1,4,\Omega}$, а не $|\cdot|_{1,\Omega}$); и, действительно, можно построить примеры, когда элемент, реализующий минимум в пространстве $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$, не является точкой *строгого* локального минимума в этом пространстве (см. упражнение 7.17).

(3) Покажите, что существуют постоянные $\varepsilon>0$ и $\beta>0$, такие что

$$|\boldsymbol{u}|_{1,\infty,\Omega}<\varepsilon\Rightarrow J''(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v})\geqslant\beta|\boldsymbol{v}|^2_{1,\Omega}\ \text{для всех}\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega).$$

Поэтому на основании теоремы 1.3-1(b) мы можем заключить, что $\boldsymbol{u}$ является точкой строгого локального минимума в пространстве $\{v \in \boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega);\ v = \boldsymbol{o}$ на $\Gamma\}$.

Замечание. Близкие результаты получены в работах John [1972a], Ball & Marsden [1984], Simpson & Spector [1987], Quintela-Estevez [1986].

7.17. Рассмотрим следующую модификацию задачи, изученной в работе Ball, Knops & Marsden [1978]. Пусть $h(p) = \{p(p^2 - 1)\}^2$, $p \in \mathbb{R}$ и $I =]0, 1[$. Тогда функционал

$$J : v \in W^{1,6}(I) \to J(v) = \int_I h(v'(x))\,\mathrm{d}x$$

корректно определён, и задача о нахождении u, такого что

$$u \in U_p := \{v \in W^{1,p}(I);\ v(0) = v(1) = 0\},\ J(u) = \inf_{v \in U_p} J(v),$$

имеет по крайней мере решение $u_0 := 0$ при всех $6 \leqslant p \leqslant \infty$.

(1) Покажите, что J — строго выпуклый функционал в некоторой окрестности точки u_0 в U_∞, а также что u_0 — точка строгого локального минимума функционала J на U_∞.

(2) Покажите, что $J''(u_0)(v, v) > 0$ при всех $v \in U_p - \{0\}$, $p \geqslant 6$.

(3) Покажите, что при $6 \leqslant p < \infty$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует u, такое что

$$u \in U_p,\ u \neq u_0,\ \|u - u_0\|_{1,p,I} < \varepsilon,\ J(u) = J(u_0) = \inf_{v \in U_p} J(v).$$

Следовательно, ни в какой окрестности точки u_0 в пространстве U_p, $6 \leqslant p < \infty$, функционал J не является строго выпуклым (ср. с. п. (1)).

Замечания. Этот пример показывает, что „естественное" решение задачи на минимум (в частности, решение, которое получается при помощи теоремы о неявной функции, применённой к соответствующим уравнениям Эйлера—Лагранжа, как в упражнении 7.16) не обязано быть изолированным ни в каком из соболевских пространств $W^{1,p}(\Omega)$, $p < \infty$. „Особое положение" занимает пространство $W^{1,\infty}(\Omega)$, на что указывают также примеры из упражнений 7.15 и 7.16.

7.18. *Пусть* Ω — область в $\mathbb{R}^3$. Покажите, что всякий элемент $\boldsymbol{\varphi}$ пространства $\boldsymbol{W}^{1,n}(\Omega)$, удовлетворяющий условию $\det \nabla\boldsymbol{\varphi} > 0$ п.в. в Ω, можно отождествить с непрерывной функцией (см. Водопьянов и Гольдштейн [1977], а также Šverák [1987]).

Литература[1]

ABRAHAM, R.; MARSDEN, J.E.; RATIU, T. [1983]: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Global Analysis Series, No. 2, Addison-Wesley, Reading.

ACERBI, E.; FUSCO, N. [1984]: Semicontinuity problems in the calculus of variations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **86**, 125–145.

ACERBI, E.; FUSCO, N. [1987]: A regularity theorem for minimizers of quasiconvex integrals, *Arch. Rational Mech. Anal.* **99**, 261–281.

ADAMS, R.A. [1975]: *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York.

ADELEKE, S.A. [1983]: On the problem of eversion for incompressible elastic materials, *J. Elasticity* **13**, 63–69.

*AGMON, S.; DOUGLIS, A.; NIRENBERG, L. [1964]: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary condition II, *Comm. Pure Appl. Math.* **17**, 35–92.

ALEXANDER, J.C.; ANTMAN, S.S. [1982]: The ambiguous twist of Love, *Quart. Appl. Math.* **49**, 83–92.

AMBROSIO, L. [1987]: New lower semicontinuity results for integral functionals, *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Sci. Fis. Natur.*, to appear.

AMBROSIO, L.; BUTTAZZO, G.; LEACI, A. [1987]: Continuous operators of the form $T_f = f(x, u, Du)$, to appear.

ANSELONE, P.M.; MOORE [1966]: An extension of the Newton-Kantorovic method for solving nonlinear equations with an application to elasticity, *J. Math. Anal. Appl.* **13**, 476–501.

ANTMAN, S.S. [1970]: Existence of solutions of the equilibrium equations for nonlinearly elastic rings and arches, *Indiana University Mathematics Journal* **20**, 281–302.

ANTMAN, S.S. [1976a]: Ordinary differential equations of non-linear elasticity I: Foundations of the theories of nonlinearly elastic rods and shells, *Arch. Rational Mech. Anal.* **61**, 307–351.

ANTMAN, S.S. [1976b]: Ordinary differential equations of non-linear elasticity II: Existence and regularity for conservative boundary value problems, *Arch. Rational Mech. Anal.* **61**, 352–393.

ANTMAN, S.S. [1978a]: Buckled states of nonlinearly elastic plates, *Arch. Rational Mech. Anal.* **67**, 111–149.

ANTMAN, S.S. [1978b]: A family of semi-inverse problems of non-linear elasticity, in *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations* (G.M. DE LA PENHA & L.A.J. MEDEIROS, Editors), pp. 1–24, North-Holland, Amsterdam.

ANTMAN, S.S. [1979]: The eversion of thick spherical shells, *Arch. Rational Mech. Anal.* **70**, 113–123.

ANTMAN, S.S. [1983a]: Regular and singular problems for large elastic deformations of tubes, wedges, and cylinders, *Arch. Rational Mech. Anal.* **83**, 1–52.

[1] Звёздочкой помечены работы, имеющиеся на русском языке (см. ниже). — *Прим. изд. ред.*

ANTMAN, S.S. [1983b]: The influence of elasticity on analysis: Modern developments. *Bull. Amer. Mach. Soc.* **9**, 267–291.

ANTMAN, S.S. [1984]: Geometrical and analytical questions in nonlinear elasticity, in *Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations* (S.S. CHERN, Editor), Springer-Verlag, New York.

ANTMAN, S.S. [1988]: *Nonlinear Problems of Elasticity*. to appear.

ANTMAN, S.S.; BREZIS, H. [1978]: The existence of orientation-preserving deformations in nonlinear elasticity, in *Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. II* (R.J. KNOPS, Editor), pp. 1–29, Pitman, London.

ANTMAN, S.S.; OSBORN, J.E. [1979]: The principle of virtual work and integral laws of motion, *Arch. Rational Mech. Anal.* **69**, 231–262.

ANZELLOTTI, G. [1983]: On the existence of the rates of stress and displacements for Prandtl-Reuss plasticity, *Quart. Appl. Math.* **41**, 181–208.

Anzellotti,, G. [1984]: On the extremal stress and displacement in Hencky plasticity, *Duke Math. J.* **51**, 133–147.

ANZELLOTTI, G. [1985a]: The Euler equation for functionals with linear growth, *Trans. Amer. Math. Soc.* **290**, 483–501.

ANZELLOTTI, G. [1985b]: A class of convex non-coercive functionals and masonry-like materials, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **2**, 261–307.

ANZELLOTTI, G.; GIAQUINTA, M. [1980]: Existence of the displacements field for an elasto-plastic body subject to Hencky's law and von Mises yield condition, *Manuscripta Math.* **32**, 101–136.

ANZELLOTTI, G.; GIAQUINTA, M. [1982]: On the existence of the fields of stresses and displacements for an elasto-perfectly plastic body in elastic equilibrium, *J. Math. Pures Appl.* **61**, 219–244.

ARGYRIS, J.H.; KLEIBER, M. [1977]: Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto-plasticity; Natural approach. Part I. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **11**, 215–248.

*ARNOLD, V.I. [1973]: *Ordinary Differential Equations*. MIT Press, Cambridge.

ARON, M. [1978]: On the physical meaning of a uniqueness condition in finite elasticity, *J. Elasticity* **8**, 111–115.

ARON, M. [1979]: A continuous dependence result for a mixed boundary value problem in finite elastostatics, *Acta Mechanica* **32**, 205–208.

ARON, M.; ROSEMAN, J.J. [1977]: Integral estimates for the displacement and strain energy in nonlinear elasticity in terms of the body force, *Int. J. Engrg. Sc.* **15**, 317.

ATTEIA, M.; DEDIEU, J.P. [1981]: Minimization of energy in nonlinear elasticity. in *Nonlinear Problems of Analysis in Geometry and Mechanics* (M. ATTEIA, D. BANCEL, I. GUMOWSKI, Editors), pp. 73–79, Pitman, Boston.

ATTEIA, M.; RAISSOULI, M. [1986]: On the Saint-Venant problem with mixed condition in nonlinear three dimensional elasticity, to appear.

ATTOUCH, H. [1984]: *Variational convergence for Functions and Operators*. Pitman, London.

AUBERT, G. [1987]: Quelques remarques sur les notions de polyconvexité et de 1-rang convexité en dimensions 2 et 3, *Modél. Math. et Anal. Numér.*, to appear.

AUBERT, G.; TAHRAOUI, R. [1979]: Théorèmes d'existence en calcul des variations, *J. Differential Equations* **33**, 1–15.

AUBERT, G.; TAHRAOUI, R. [1984], Théorèmes d'existence en optimisation non convexe, *Applicable Analysis* **18**, 75–100.

AUBERT, G.; TAHRAOUI, R. [1985]: Conditions nécessaires de faible fermeture et de 1-rang convexité en dimension 3, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Ser. 2*, **34**, 460–488.

AUBERT, G.; TAHRAOUI, R. [1987]: Sur la faible fermeture de certains ensembles de contraintes en élasticité non-linéaire plane, *Arch. Rational Mech. Anal.* **97**, 33–58.

AUBIN, J.P.; EKELAND, I. [1984]: *Applied Nonlinear Analysis*, J. Wiley, New York.

AVEZ, A. [1983]: *Calcul Différentiel*, Masson, Paris (English translation: *Differential Calculus*, J. Wiley, New York, 1986).

BABUŠKA, I. [1974]: Solution of problems with interfaces and singularities, in *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, pp. 213–277, Academic Press, New York.

BABUŠKA, I. [1975]: Homogenization approach in engineering, in *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* (M. BECKMAN & H.P. KINZI, Editors), pp. 137–153, Springer-Verlag, Berlin.

BAIOCCHI, C.; BUTTAZZO, G.; GASTALDI, F.; TOMARELLI, F. [1986]: General existence results for unilateral problems in continuum mechanics, report, Università di Pavia.

BIAOCCHI, C.; CAPELO, A. [1978]: *Disequazioni Variazionali e Quasi Variazionali. Applicazioni a Problemi di Frontiera Libera* (Two Volumes), Pitagora, Bologna (English translation: *Variational and Quasivariational Inequalities. Applications to Free Boundary-Problems*, Wiley-Interscience, New York, 1984).

BALL, J.M. [1977]: Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **63**, 337–403.

BALL, J.M. [1978]: Finite time blow-up in nonlinear problems, in *Nonlinear Evolution Equations* (M.G. CRANDALL, Editor), pp. 189–205, Academic Press, New York.

BALL, J.M. [1980]: Strict convexity, strong ellipticity and regularity in the calculus of variations, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **87**, 501–513.

BALL, J.M. [1981a]: Remarques sur l'existence et la régularité des solutions d'élastostatique non linéaire, in *Recent Contributions to Nonlinear Partial Differential Equations*, pp. 50–62, Research Notes in Math. 50, Pitman, Boston.

BALL, J.M. [1981b]: Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **88A**, 315–328.

BALL, J.M. [1982]: Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **A 306**, 557–611.

BALL, J.M. [1984]: Minimizers and the Euler-Lagrange equations, in *Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics* (P.G. CIARLET & M. ROSEAU, Editors), pp. 1–4, Springer-Verlag, Berlin.

BALL, J.M.; CURRIE, J.C.; OLVER, P.J. [1981]: Null Lagrangians, weak continuity, and variational problems of arbitrary order, *J. Functional Anal.* **41**, 135–174.

BALL, J.M.; JAMES, R.D. [1987]: Fine phase mixtures as minimizers of energy, *Arch. Rational Mech. Anal.*, to appear.

BALL, J.M.; KNOPS, R.J.; MARSDEN, J.E. [1978]: Two examples in nonlinear elasticity, in *Proceedings Conference on Nonlinear Analysis, Besançon*, pp. 41–49, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 466, Springer-Verlag, Berlin.

BALL, J.M.; KNOWLES, G. [1987]: A numerical method for detecting singular minimizers, *Numer. Math.* **51**, 181–197.

BALL, J.M.; MARSDEN, J.E. [1984]: Quasiconvexity at the boundary, positivity of the second variation and elastic stability, *Arch. Rational Mech. Anal.* **86**, 251–277.

BALL, J.M.; MIZEL, V.J. [1984]: Singular minimizers for regular one-dimensional problems in the calculus of variations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **11**, 143–146.

BALL, J.M.; MIZEL, V.J. [1985]: One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equation, *Arch. Rational Mech. Anal.* **90**, 325–388.

BALL, J.M.; MURAT, F. [1984]: $W^{1,p}$-quasiconvexity and weak convergence in the calculus of variations, *J. Functional Analysis* **58**, 225–253.

BAMBERGER, Y. [1981]: *Mécanique de l'Ingénieur II. Milieux Déformables*, Hermann, Paris.

BAMPI, F.; MORRO, A. [1982]: Objective constitution relations in elasticity and viscoelasticity, *Meccanica* **17**, 138–142.

BATRA, R.C. [1972]: On non-classical boundary conditions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **48**, 163–191.

BEATTY, M.F. [1970]: Stability of hyperelastic bodies subject to hydrostatic loads, *Int. J. Non-linear Mech.* **5**, 367–383.

BEATTY, M.F. [1987]: A class of universal relations in isotropic elasticity theory, *J. Elasticity* **17**, 113–121.

BECKMAN, F.S.; QUARLES, JR., D.A. [1953]: On isometries of Euclidean spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 4, 810–815.

BELL, J.F. [1973]: The experimental foundations of solid mechanics, *Handbuch der Physik*, Vol. VIa/1. [C. TRUESDELL, Editor], Springer-Verlag, Berlin.

BENSOUSSAN, A.; LIONS, J.L.; PAPANICOLAOU, G.C. [1978]: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam.

BERGER, M.S. [1967]: On von Kárman equations and the buckling of a thin elastic plate I, *Comm. Pure Appl. Math.* **20**, 687–718.

BERGER, M.S. [1977]: *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press, New York.

BERGER, M.S.; FIFE, P. [1968]: On von Kármán equations and the buckling of a thin elastic plate, II, Plate with general boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.* **21**, 227–247.

BERNADOU, M.; CIARLET, P.G.; HU, JIAN-WEI [1982]: On the convergence of incremental methods in finite elasticity, in *Proceedings of the Chinese-French Conference on Finite Element Methods* (Beijing, 19–23 April, 1982).

BERNADOU. M.; CIARLET, P.G.; HU, JIAN-WEI [1984]: On the convergence of the semi-discrete incremental method in nonlinear, three-dimensional, elasticity, *J. Elasticity* **14**, 425–440.

BHARATHA, S.; LEVINSON, M. [1977]: Signorini's perturbation scheme for a general reference configuration in finite elastostatics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **67**, 365–394.

BIELSKI, W.R.; TELEGA, J.J. [1986]: The complementary energy principle in finite elastostatics as a dual problem, to appear.

BLANCHARD, D.; CIARLET, P.G. [1983]: A remark on the von Kármán equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **37**, 79–92.

BLATZ, P.J. [1971]: On the thermostatic behavior of elastomers: in *Polymer Networks, Structure and Mechanical Properties*, pp. 23–45, Plenum Press, New York.

BLATZ, P.J.; KO, W.L. [1962]: Application of finite elasticity theory to the deformation of rubbery materials, *Trans. Soc. Rheology* **6**, 223–251.

BOEHLER, J.-P. [1978]: Lois de comportement anisotrope des milieux continus, *J. Mécanique* **17**, 153–190.

BOJARSKI, B.; IWANIEC, T. [1983]: Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in R^n, *Annales Academiae Scientiarum, Ser. A.I. Mathematica*, **8**, 257–324.

* BOURBAKI, N. [1966]: *General Topology*, Part 1, Hermann, Paris.

* BOURBAKI, N. [1970]: *Théorie des Ensembles*, Hermann, Paris.

BREUER, S.; ARON, M. [1982]: Sufficient conditions for continuous dependence in nonlinear hyperelasticity, *J. Elasticity* **12**, 161–166.

BREUER, S.; ROSEMAN, J.J. [1978]: Integral bounds on the strain energy for the traction problem in finite elasticity, *Arch. Rational Mech. Analysis* **68**, 333–342.

BREUER, S.; ROSEMAN, J.J. [1979]: An integral bound for the strain energy in nonlinear elasticity in terms of the boundary displacements, *J. Elasticity* **9**, 21–27.

BREUER, S.; ROSEMAN, J.J. [1980]: A bound on the strain energy for the traction problem in finite elasticity with localized non-zero surface data, *J. Elasticity* **10**, 11–22.

BREZIS, H. [1983]: *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris; (*English translation*: Springer-Verlag, Heidelberg, 1987).

BROUWER, L.E.J. [1912]: Uber Abbildung der Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* **71**, 97–115.

BUFLER, H. [1983]: On the work theorem for finite and incremental elastic deformations with discontinuous fields: a unified treatment of different versions, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **36**, 95–124.

BUFLER, H. [1984]: Pressure loaded structures under large deformations, ZAMM, *Z. Angew. Math. u. Mech.* **64**, 287–295.

VAN BUREN, M. [1968]: *On the Existence and Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems in Finite Elasticity*, Thesis, Carnegie-Mellon University.

BURGESS, I.W.; LEVINSON, M. [1972]: The instability of slightly compressible rectangular solids under biaxial loadings, *Int. J. Solids Structures* **8**, 133–148.

BUSEMANN, H., EWALD, G.; SHEPHARD, G.C. [1963]: Convex bodies and convexity on Grassman cones, Parts I–IV, *Math. Ann.* **151**, 1–41.

CABANE, R. [1981]: Une caractérisation simple des isométries, *Revue de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Pubic*, 821–829.

CAILLERIE, D. [1987]: Non homogeneous plate theory and conduction in fibered composites, in *Homogenization Techniques for Composite Media* (E. SANCHEZ-PALENCIA, A. ZAOUI, Editors), pp. 1–62, Springer-Verlag, Berlin.

CALDERÓN, A.P. [1961]: Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions, *Proc. Symp. in Pure Maths IV*, American Mathematical Society, Providence.

DE CAMPOS, L.T.; ODEN, J.T. [1983]: Non-quasi-convex problems in nonlinear elastostatics, *Advances Appl. Math.* **4**, 380–401.

DE CAMPOS, L.T.; ODEN, J.T. [1985]: On the principle of stationary complementary energy in finite elastostatics, *Intern. J. Engrg. Sci.* **23**, 57–63.

CAPRIZ, G.; PODIO-GUIDUGLI, P. [1974]: On Signorini's perturbation method in finite elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **57**, 1–30.

CAPRIZ, G.; PODIO-GUIDUGLI, P. [1979]: The role of Fredholm conditions in Signorini's perturation method, *Arch. Rational Mech. Anal.* **70**, 261–288.

CAPRIZ, G.; PODIO-GUIDUGLI, P. [1981]: Questions of uniqueness in finite elasticity, in *Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, Vol. III*, pp. 76–95, Pitman, Boston.

CAPRIZ, G.; PODIO-GUIDUGLI, P. [1982]: A generalization of Signorini's perturbation method suggested by two problems of Grioli, *Rend. Sem. Mat. Padova* **68**, 149–162.

CARLSON, D.E.; HOGER, A. [1986]: On the derivatives of the principle invariants of a second-order tensor, *J. Elasticity* **16**, 221–224.

*CARTAN, H. [1967]: *Calcul Différentiel*, Hermann, Paris.

CAUCHY, A.-L. [1823]: Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques, *Bulletin de la Société Philomatique*, 9-13 (Oeuvres (2) 2, pp. 300–304, Gauthier-Villars, Paris, 1889).

CAUCHY, A.-L. [1827a]: De la pression ou tension dans un corps solide, *Exercices de Mathématiques* **2**, 42-56 (Oeuvres (2) 7, pp. 60–93, Gauthier-Villars, Paris, 1889).

CAUCHY, A.-L. [1827b]: Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide (Oeuvres (2) 7, pp. 141–145, Gauthier-Villars, Paris, 1889).

CAUCHY, A.-L. [1828]: Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique (Oeuvres (2) 8, pp. 195–226, Gauthier-Villars, Paris, 1890).

CESCOTTO, S.; FREY, F.; FONDER, G. [1979]: Total and updated Lagrangian descriptions in nonlinear structural analysis: a unified approach, in *Energy Methods in Finite Element Analysis* (R. GLOWINSKI, E.Y. RODIN, O.C. ZIENKIEWICZ, Editors), pp. 283–296, John Wiley, New York.

CHADWICK, P. [1972]: The existence and uniqueness of solutions to two problems in the Mooney-Rivlin theory for rubber, *J. Elasticity* **2**, 123–128.

CHADWICK, P.; HADDON, E.W. [1972]: Inflation-extension and eversion of a tube of incompressible isotropic elastic material, *J. Inst. Math. Appl.* **10**, 258–278.

CHARRIER, P.; DACOROGNA, B.; HANOUZET, B.; LABORDE, P. [1986]: An existence theorem for slightly compressible material in non linear elasticity, to appear.

CHEN, C.; VON WAHL, W. [1982]: Das Rand-Anfangswertproblem für quasilineare Wellengleichungen in Sobolevräumen niedriger Ordnung, *J. reine angew. Math.* **337**, 77–112.

CHEN, W.F.; SALEEB, A.F. [1982]: *Constitutive Equations for Engineering Materials, Vol. 1 – Elasticity and modeling*, Wiley, New York.

CHENEY, E.W. [1966]: *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York.

CHILLINGWORTH, D.R.J.; MARSDEN, J.E.; WAN, Y.H. [1982]: Symmetry and bifurcation in three dimensional elasticity, Part I, *Arch. Rational Mech. Anal.* **80**, 295–331.

CHILLINGWORTH, D.R.J.; MARSDEN, J.E.; WAN, Y.H. [1983]: Symmetry and bifurcation in three-dimensional elasticity, Part II, *Arch. Rational Mech. Anal.* **83**, 363–395.

CHIPOT, M.; KINDERLEHRER, D. [1987]: Equilibrium configurations of crystals, Preprint 326, Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota, Minneapolis.

CHOQUET, G. [1964]: *Cours d'Analyse: Topologie*, Masson, Paris.

CHOQUET-BRUHAT, Y. [1973]: *Distributions, Théorie et Problèmes*, Masson, Paris.

CHOQUET-BRUHAT, Y.; DEWITT-MORETTE, C.; DILLARD-BLEICK, M. [1977]: *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland, Amsterdam.

* CIARLET, P.G. [1978]: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam.

CIARLET, P.G. [1980]: A justification of the von Kármán equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **73**, 349–389.

CIARLET, P.G. [1982]: Two-dimensional approximations of three-dimensional models in nonlinear plate theory, in *Proceedings of the IUTAM Symposium on Finite Elasticity* (SHIELD, R.T. & CARLSON, D.E., Editors), pp. 123–141, Martinus Nijhoff, The Hague.

CIARLET, P.G. [1983]: *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*, Masson, Paris (English Translation: *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimization*, Cambridge University Press, 1987).

CIARLET, P.G. [1985]: *Elasticité Tridimensionnelle*, Masson, Paris.

CIARLET, P.G.; DESTUYNDER, P. [1979]: A justification of a nonlinear model in plate theory, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **17/18**, 227–258.

CIARLET, P.G.; GEYMONAT, G. [1982]: Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. II* **295**, 423–426.

CIARLET, P.G.; LAURENT, F. [1987]: Global existence of displacement fields whose Cauchy-Green strain tensor is known, to appear.

CIARLET, P.G.; NEČAS, J. [1985]: Unilateral problems in nonlinear, three-dimensional elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **87**, 319–338.

Ciarlet, P.G.; Nečas, J. [1987]: Injectivity and self-contact in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **19**, 171–188.

Ciarlet, P.G.; Paumier, J.C. [1986]: A justification of the Marguerre-von Kármán equations, *Computational Mechanics*, **1**, 177–202.

Ciarlet, P.G.; Quintela-Estevez, P. [1987]: Polyconvexity and the von Kármán equations, to appear.

*Ciarlet, P.G.; Rabier, P. [1980]: *Les Equations de von Kármán*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 826, Springer-Verlag, Berlin.

Cioranescu, D.; Saint Jean Paulin, J. [1979]: Homogenization in open sets with holes, *J. Math. Anal. Appl.* **71**, 590–607.

Cioranescu, D.; Saint Jean Paulin, J. [1986]: Reinforced and honeycomb structures, *J. Math. Pures et Appliquées*, **65**, 403–422.

Cocu, M. [1984]: Existence of solutions of Signorini problems with friction, *Internat. J. Engrg. Sci.* **22**, 567.

*Coddington, E.A.; Levinson, N. [1955]: *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw Hill, New York.

Cohen, H.; Wang, C.-C. [1984]: A note on hyperelasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **85**, 213–236.

Cohen, H.; Wang, C.-C. [1987]: On the response and symmetry of elastic materials with internal constraints, *Arch. Rational Mech. Anal.* **99**, 1–36.

Coleman, B.D.; Noll, W. [1959]: On the thermostatics of continuous media, *Arch. Rational Mech. Anal.* **4**, 97–128.

Coleman, B.D., Noll, W. [1963]: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **13**, 167–178.

Coleman, B.D.; Noll, W. [1964]: Material symmetry and thermostatic inequalities in finite elastic deformations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **15**, 87–111.

Crouzeix, M.; Mignot, A. [1984]: *Analyse Numérique des Equations Différentielles*, Masson, Paris.

Dacorogna, B. [1981]: A relaxation theorem and its application to the equilibrium of gases, *Arch. Rational Mech. Anal.* **77**, 359–386.

*Dacorogna, B. [1982a]: *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functionals*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 922, Springer-Verlag, Berlin.

Dacorogna, B. [1982b]: Quasiconvexity and relaxation of non convex problems in the calculus of variations, *J. Functional Analysis* **46**, 102–118.

Dacorogna, B. [1985]: Remarques sur les notions de polyconvexité, quasiconvexité et convexité de rang 1, *J. Math. Pures Appl.* **64**, 403–438.

Dacorogna, B. [1987]: *Direct Methods in the Calculus of Variations*, to appear.

Dafermos, C.M. [1973]: Solutions of the Riemann problem for a class of hyperbolic systems of conservation laws by the viscosity method, *Arch. Rational Mech. Anal.* **52**, 1–9.

Dafermos, C.M. [1986]: Quasilinear hyperbolic systems with involutions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **94**, 373–389.

Dafermos, C.M.; Hrusa, W.J. [1985]: Energy methods for quasilinear hyperbolic initial-boundary value problems. Applications to elastodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **87**, 267–292.

Dahlberg, B.E.J. [1979]: A note on Sobolev spaces, in *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 35, Part 1*, pp. 183–185, American Mathematical Society, Providence.

Dautray, R.; Lions, J.-L. [1984]: *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, Collection du Commissariat à l'Energie Atomique, Masson, Paris.

Davet, J.L. [1985]: Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire: confrontation de modèles et de travaux expérimentaux, *Annales des Ponts et Chaussées*, 3ème trimestre, 2–33.

de Boor, C. [1985]: A naive proof of the representation theorem for isotropic, linear asymmetric stress-strain relations, *J. Elasticity* **15**, 225–227.

De Giorgi, E. [1975]: Sulla convergenza di alcune successioni d'integrali del tipo dell'area, *Rend. Matematica* **8**, 277–294.

De Giorgi, E. [1983]: G-operators and Γ-convergence, in *Proceedings International Congress of Mathematicians, Warsaw, 1983*, pp. 1175–1191.

Deimling, K. [1985]: *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.

Del Piero, G. [1985a]: A mathematical characterization of plastic phenomena in the context of Noll's new theory of simple materials, *Engrg. Fracture Mech.* **21**, 633–639.

Del Piero, G. [1985b]: *Unilateral Problems in Structural Analysis*, Atti dell'Istituto di Meccanica Teorica ed Applicata, Università degli Studi, Udine.

Demengel, F. [1985a] Relaxation et existence pour le problème des matériaux à blocage, *Math. Modelling & Numer. Anal.* **19**, 351–395.

Demengel, F. [1985b]: Déplacements à déformations bornees et champs de contrainte mesure, *Ann. Scuola Norm. Sup Pisa, Classe di Scienze, Ser. IV*, **12**, 243–318.

Demengel, F.; Suquet, P. [1986]: On locking materials, *Acta Applicandae Matematicae* **6**, 185–211.

Demengel, F.; Temam, R. [1984]: Convex functions of a measure and applications, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**, 673–709.

Demengel, F.; Temam, R. [1986]: Convex function of a measure: The unbounded case, in *Fermat Days 1985: Mathematics for Optimization* (J.-B. Hirriart-Urruty, Editor), pp. 103–134, North-Holland, Amsterdam.

Destuynder, P.; Galbe, G. [1978]: Analyticité de la solution d'un problème hyperélastique non linéaire, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **287**, 365–368.

De Turck, D.M.; Yang, D. [1983]: Existence of elastic deformations with prescribed principal strains and triply orthogonal systems.

* Dieudonné, J. [1968]: *Eléments d'Analyse, Tome I: Fondements de l'Analyse Moderne*, Gauthier-Villars, Paris.

Dieudonné, J. [1982]: *Eléments d'Analyse, Tome 9*, Gauthier-Villars, Paris.

DiPerna, R. [1983]: Convergence of approximate solutions to conservation laws, *Arch. Rational Mech. Anal.* **82**, 27–70.

DiPerna, R.J. [1985a]: Measure-valued solutions to conservation laws, *Arch. Rational Mech. Anal.* **88**, 223–270.

DiPerna, R.J. [1985b]: Compensated compactness and general systems of conservation laws, *Trans. Amer. Math. Soc.* **292**, 383–420.

* Doubrovine, B.; Novikov, S.; Fomenko, A. [1982a]: *Géométrie Contemporaine, Méthodes et Applications. Première Partie: Géométrie des Surfaces, des Groupes de Transformations, et des Champs*, Editions Mir, Moscou (original Russian edition: 1979; English translation: *Modern Geometry, Vol. I*, Springer-Verlag, New York, 1984).

* Doubrovine, B.; Novikov, S.; Fomenko, A. [1982b]: *Géométrie Contemporaine, Méthodes et Applications. Deuxième Partie: Géométrie et Topologie des Variétés*, Editions Mir, Moscou (original Russian edition: 1979; English translation: *Modern geometry, Vol II*, Springer-Verlag, New York, 1985).

Doyle, T.C.; Ericksen, J.L. [1956]: Nonlinear elasticity, in *Advances in Applied Mechanics* (H.L. Dryden & T. von Kármán, Editors), pp. 53–115, Academic Press, New York.

Dunn, J.E. [1981]: Possibilities and impossibilities in affine constitutive theories for stress in solids, report.

Duvaut, G. [1978]: Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus, applications à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique, homogénéisation, in *Theoretical and Applied Mechanics* (W.T. Koiter, Editor), pp. 119–131, North-Holland, Amsterdam.

*Duvaut, G.; Lions, J.-L. [1972]: *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris (English translation: Springer-Verlag, Berlin, 1976).

Ebin, D.G.; Saxton, R.A. [1986]: The initial value problem for incompressible elastodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **94**, 15–38.

Edelen, D.G.B. [1969a]: Protoelastic bodies with large deformation, *Arch. Rational Mech. Anal.* **34**, 283–300.

Edelen, D.G.B. [1969b]: Nonlocal variational mechanics, *Internat. J. Engrg. Sci.* **7**, Part I: 269–285, Part II: 287–293, Part III: 373–389, Part IV: 391–399, Part V: 401–415, Part VI: 677–688, Part VII: 843–847.

Edelen, D.G.B. [1970]: Operation separable problems in the nonlocal calculus of variations, *J. Math. Anal. Appl.* **32**, 445–452.

Ekeland, I. [1979]: Nonconvex minimization problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **1**, 443–474.

*Ekeland, I.; Temam, R. [1974]: *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*, Dunod, Paris (English translation: *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1975).

Ekeland, I.; Turnbull, T. [1984]: *Infinite-Dimensional Optimization and Convexity*, The University of Chicago Press, Chicago.

Ericksen, J.E. [1954]: Deformations possible in every isotropic, incompressible perfectly elastic body, *Z. angew. Math. Phys.* **5**, 466–486.

Ericksen, J.L. [1955a]: Deformations possible in every compressible, isotropic, perfectly elastic material, *J. Math. Phys.* **34**, 126–128.

Ericksen, J.L. [1955b]: Inversion of a perfectly elastic spherical shell, *Z. angew. Math. Mech.* **35**, 382–385.

Ericksen, J.L. [1963]: Nonexistence theorems in linear elasticity theory, *Arch. Rational Mech. Anal.* **14**, 180–183.

Ericksen, J.L. [1965]: Nonexistence theorems in linearized elastostatics, *J. Differential Equ.* **1**, 446–451.

Ericksen, J.L. [1979]: On the symmetry of deformable crystals, *Arch. Rational Mech. Anal.* **72**, 1–13.

Ericksen, J.L. [1983]: Ill-posed problems in thermoelasticity theory, in *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations* (J.M. Ball, Editor), pp. 71–93, Reidel, Dordrecht.

Ericksen, J.L. [1986]: Stable equilibrium configurations of elastic crystals, *Arch. Rational Mech. Anal.* **94**, 1–14.

Ericksen, J.L. [1987]: Twinning of crystals I, in *Metastability and Incompletely Posed Problems, IMA Vol. Math. Appl. 3* (S.S. Antman, J.L. Ericksen, D. Kinderlehrer, I. Müller, Editors), pp. 77–96, Springer-Verlag, New York.

Ericksen, J.L.; Toupin, R.A. [1956]: Implications of Hadamard's condition for elastic stability with respect to uniqueness theorems, *Canad. J. Math.* **8**, 432–436.

Eringen, A.C. [1962]: *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill, New York.

Eringen, A.C. [1966]: A unified theory of thermomechanical materials, *Internat. J. Engrg. Sci.* **4**, 179–202.

Eringen, A.C. [1978]: Nonlocal continuum mechanics and some applications, in *Nonlinear Equations in Physics and Mathematics* (A.O. Barut, Editor), pp. 271–318, Reidel.

Eringen, A.C.; Edelen, D.G.B. [1972]: On nonlocal elasticity, *Internat. J. Engrg. Sci.* **10**, 233–248.

EULER, L. [1757]: Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides, *Hist. Acad. Berlin*, 316–361.

EULER, L. [1758]: Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable, *Mem. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres de Berlin* **14**, 154–193.

EULER, L. [1771]: Sectio tertia de motu fluidorum lineari potissimum aquae, *Novi Comm. Petrop.* **15**, 219–360.

EVANS, L.C. [1986]: Quasiconvexity and partial regularity in the calculus of variations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **95**, 227–252.

* FEDERER, H. [1969]: *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York.

FICHERA, G. [1964]: Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei Ser. VIII* **7**, 91–140.

FICHERA, G. [1967]: Semicontinuità ed esistenza del minimo per una classe di integrali multipli, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* **12**, 1217–1220.

* FICHERA, G. [1972a]: Existence theorems in elasticity, *Handbuch der Physik*, VIa/2, pp. 347–389, Springer-Verlag, Berlin.

FICHERA, G. [1972b]: Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints, *Handbuch der Physik*, VIa/2, 391–424, Springer-Verlag, Berlin.

FICHERA, G. [1972c]: *Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems*, Lecture Notes Series, Vol. 8, Springer-Verlag, Berlin.

FICHERA, G. [1977]: Problemi unilaterali nella statica dei sistemi continui, in *Problemi Attuali di Meccanica Teorica e Applicata*, pp. 169–178, Torino.

FLORY, P.J.; TATARA, Y. [1975]: The elastic free energy and the elastic equation of state: elongation and swelling of polydimethylsiloxane networks; *J. Polymer Science* **13**, 683–702.

FONG, J.T.; PENN, W. [1975]: Construction of a strain-energy function for an isotropic elastic material, *Trans. Soc. Rheology* **19**, 99–113.

FONSECA, I. [1987a]: Variational methods for elastic crystals, *Arch. Rational Mech. Anal.* **19**, 189–220.

FONSECA, I. [1987b]: The lower quasiconvex envelope of the stored energy function for an elastic crystal, to appear.

FONSECA, I. [1987c]: Stability of elastic crystals, to appear.

FOSDICK, R.L.; MACSITHIGH, G.P. [1986]: Minimization in incompressible nonlinear elasticity theory, *J. Elasticity* **16**, 267–301.

FOSDICK, R.L.; SERRIN, J. [1979]: On the impossibility of linear Cauchy and Piola-Kirchhoff constitutive theories for stress in solids, *J. Elasticity* **9**, 83–89.

FRAEIJS DE VEUBEKE, B.M. [1979]: *A Course in Elasticity*, Springer-Verlag, New York.

FRANCFORT, G.A.; MURAT, F. [1986]: Homogenization and optimal bounds in linear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **94**, 307–334.

FRÉMOND, M. [1985]: Contact unilatéral avec adhérence, in *Unilateral Problems in Structural Analysis* (G. DEL PIERO, F. MACERI, Editors), Springer-Verlag, Heidelberg.

FRIEDRICHS, K.O. [1947]: On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality, *Annals of Math.* **48**, 441–471.

GALKA, A.; TELEGA, J.J. [1982]: A variational method for finite elasticity in the case of non-potential loadings, I. First Piola-Kirchhoff stress tensor; II. Symmetric stress tensor and some comments, *Bull. Acad. Polonaise des Sc., Sér. Sci. Tech.* **30**, 471–485.

GEAR, C.W. [1971]: *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

GENT, A.N.; THOMAS, A.G. [1959]: The deformation of foamed elastic materials, *J. Applied Polymer Science* **1**, 107–113.

*Germain, P. [1972]: *Mécanique des Milieux Continus*, Tome I, Masson, Paris.

Germain, P. [1973]: La méthode des puissance virtuelles en mécanique des milieux continus, *J. Mécanique* **12**, 236–274.

Geymonat, G. [1965]: Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellitici, *Ann. Mat. Pura Appl.* **69**, 207–284.

Giaquinta, M. [1983a]: The regularity of extremals of variational integrals, in *Systems of Nonlinear Partial differential Equations* (J.M. Ball, Editor), pp. 115–145, Reidel, Dordrecht.

Giaquinta, M. [1983b]: *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Princeton University Press, Princeton.

Giaquinta, M.; Modica, G. [1982]: Non linear systems of the type of the stationary Navier-Stokes system, *J. reine angew. Math.* **330**, 173–214.

Gibson, L.J.; Ashby, M.F. [1982]: The mechanics of three-dimensional cellular materials, *Proc. Roy. Soc. London* **A 382**, 43–59.

Giusti, E. [1983]: Some aspects of the regularity theory for nonlinear elliptic systems, in *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations* (J.M. Ball, Editor), pp. 147–172, Reidel, Dordrecht.

Glimm, J. [1965]: Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **18**, 697–715.

Glowinski, R. [1984]: *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York.

Glowinski, R.; Le Tallec, P. [1982]: Numerical solution of problems in incompressible finite elasticity by augmented Lagrangian methods. I. Two-dimensional and axisymmetric problems, *SIAM J. Appl. Math.* **42**, 400–429.

*Glowinski, R.; Lions, J.-L.; Trémolières, R. [1976]: *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles, Vol. I: Théorie Générale et Premières Applications; Vol. II: Applications aux Phénomènes Stationnaires et d'Evolution*, Dunod, Paris (English translation: *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, North-Holland, Amsterdam, 1981).

Gobert, J. [1962]: Une inégalité fondamentale de la théorie de l'élasticité, *Bull. Soc. Royale Sciences Liège* **3–4**, 182–191.

*Gohberg, I.C.; Krejn, M.G. [1971]: *Introduction à la Théorie des Opérateurs Linéaires Non Auto-Adjoints dans un Espace Hilbertien*, Dunod, Paris, 1971 (original Russian edition: Nauka, Moscow, 1965).

Green, A.E.; Adkins, J.E. [1970]: *Large Elastic Deformations*, Second Edition, Clarendon Press, Oxford.

Green, A.E.; Rivlin, R.S. [1964]: Multipolar continuum mechanics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **17**, 113–147.

Green, A.E.; Zerna, W. [1968]: *Theoretical Elasticity*, University Press, Oxford.

Grioli, G. [1962]: *Mathematical Theory of Elastic Equilibrium*, Ergebnisse der Angew. Math. Vol. 67, Springer, Berlin.

Grioli, G. [1983]: Mathematical problems in elastic equilibrium with finite deformations, *Applicable Analysis* **15**, 171–186.

Grisvard, P. [1985]: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston.

Grisvard, P. [1987]: Singularities in elasticity thoery, in *Applications of Multiple Scaling in Mechanics* (P.G. Ciarlet & M. Roseau, Editors), Masson, Paris.

Guo, Zhong-Heng [1963]: Homographic representation of the theory of finite thermoelastic deformations, *Arch. Mech. Stos.* **15**, 475–505.

Guo, Zhong-Heng [1980]: Unified theory of variation principles in non-linear theory of elasticity, *Applied Mathematics and Mechanics* **1**, 1–22.

GUO, ZHONG-HENG [1981]: Representation of orthogonal tensors, *SM Archives* **6**, 451–466.

GUO, ZHONG-HENG [1983a]: An alternative proof of the representation theorem for isotropic, linear asymmetric stress-strain relations, *Quart. Appl. Math.* **41**, 119–123.

GUO, ZHONG-HENG [1983b]: The representation theorem for isotropic, linear asymmetric stress-strain relations, *J. Elasticity* **13**, 121–124.

GUO, ZHONG-HENG [1984]: Rates of stretch tensors, *J. Elasticity* **14**, 263–267.

GURTIN, M.E. [1972]: The linear theory of elasticity, in *Handbuch der Physik*, pp. 1–295, Vol. VIa/2 (S. FLÜGGE & C. TRUESDELL, Editors), Springer-Verlag, Berlin.

GURTIN, M.E. [1973]: Thermodynamics and the potential energy of an elastic solid, *J. Elasticity* **3**, 23–26.

GURTIN, M.E. [1974]: A short proof of the representation theorem for isotropic, linear stress-strain relations, *J. Elasticity* **4**, 243–245.

GURTIN, M.E. [1978]: On the nonlinear theory of elasticity, in *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations* (G.M. de LA PENHA & L.A.J. MEDEIROS, Editors), pp. 237–253, North-Holland, Amsterdam.

GURTIN, M.E. [1981a]: *Topics in Finite Elasticity*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia.

GURTIN, M.E. [1981b]: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York.

GURTIN, M.E. [1982]: On uniqueness in finite elasticity, in *Finite Elasticity* (D.E. CARLSON & R.T. SHIELD, Editors), pp. 191–199, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague.

GURTIN, M.E.; MARTINS, L.C. [1976]: Cauchy's theorem in classical physics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **60**, 305–324, 325–328.

GURTIN, M.E.; MIZEL, V.J; WILLIAMS, W.O. [1968]: A note on Cauchy's stress theorem, *J. Math. Anal. Appl.* **22**, 398–401.

GURTIN, M.E.; SPECTOR, S.J. [1979]: On stability and uniqueness in finite elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **70**, 153–165.

GURTIN, M.E.; TEMAM, R. [1981]: On the anti-plane shear problem in finite elasticity, *J. Elasticity* **11**, 197–206.

GURTIN, M.E.; WILLIAMS, W.O. [1967]: An axiomatic foundation for continuum thermodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **26**, 83–117.

GWINNER, J. [1986]: A penalty approximation for unilateral contact problems in nonlinear elasticity, Preprint Nr. 1024, Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule Darmstadt.

HADHRI, T. [1985]: Fonction convexe d'une measure, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **301**, 687–690.

HADHRI, T. [1986]: Convex function of a measure and application to a problem of nonhomogeneous elastoplastic material, to appear.

HANYGA, A. [1985]: *Mathematical Theory of Non-Linear Elasticity*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, and Ellis Horwood, Chichester.

HARTMAN, P. [1964]: *Ordinary Differential Equations*, John Wiley, London.

HENRICI, P. [1962]: *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley, New York.

HILDEBRANDT, S. [1977]: Regularity results for solutions of quasilinear elliptic systems, *Convegno su: Sistemi ellitici nonlineari ed applicazioni*, Ferrara.

HILL, R. [1957]: On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain, *J. Mech. Phys. Solids* **5**, 229–241.

HILL, R. [1961]: Bifurcation and uniqueness in non-linear mechanics of continua, in *Problems of Continuum Mechanics*, SIAM, Philadelphia.

HILL, R. [1968]: On constitntive inequalities for simple materials, I, *J. Mech. Phys. Solids* **16**, 229–242.

HILL, R. [1970]: Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain, *Proc. Roy. Soc. London* **A314**, 457–472.

HLAVÁČEK, I., NEČAS, J. [1970a]: On inequalities of Korn's type, I. Boundary value problems for elliptic systems of partial differential equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **36**, 305–311.

HLAVÁČEK, I.; NEČAS, J. [1970b]: On inequalities of Korn s type, II. Applications to linear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **36**, 312–334.

HOGER, A. [1985]: On the residual stress possible in an elastic body with material symmetry, *Arch. Rational Mech. Anal.* **88**, 271–289.

HOGER, A. [1986]: On the determination of residual stress in an elastic body, *J. Elasticity* **16**, 303–324.

HOGER, A.; CARLSON, D.E. [1984a]: On the derivative of the square root of a tensor and Guo's rate theorems, *J. Elasticity* **14**, 329–336.

HOGER, A.; CARLSON, D.E. [1984b]: Determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient, *Quart. Appl. Math.* **42**, 113–117.

*HÖRMANDER, L. [1983]: *The Analysis of Partial Differential Equations*; *I*; Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 256, Springer-Verlag, Berlin.

HRUSA, W.J.; RENARDY, M. [1986]: An existence theorem for the Dirichlet initial-boundary value problem in incompressible nonlinear elasticity, to appear.

HUGHES, T.J.R.; KATO, T.; MARSDEN, J.E. [1976]: Well-posed quasi linear second-order hyperbolic systems with applications to non-linear elastodynamics and general relativity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **63**, 273–294.

*HUREWICZ, W.; WALLMAN, H. [1948]: *Dimension Theory*, Princeton.

*IOFFE, A.D.; TIKHOMIROV, V.M. [1974]: *Theory of Extremal Problems* (in Russian), Nauka, Moscow (English translation: North-Holland, Amsterdam, 1979).

JAMES, R.D. [1981]: Finite deformations by mechanical twinning, *Arch. Rational Mech. Anal.* **77**, 143–176.

JOHN, F. [1961]: Rotation and strain, *Comm. Pure Appl. Math.* **14**, 391–413.

JOHN, F. [1964]: Remarks on the non-linear theory of elasticity, *Seminari Ist. Naz. Alta Matem. 1962/1963*, 474–482.

JOHN, F. [1972a]: Uniqueness of non-linear elastic equilibrium for prescribed boundary displacements and sufficiently small strains, *Comm. Pure Appl. Math.* **25**, 617–634.

JOHN, F. [1972b]: Bounds for deformations in terms of average strains, in *Inequalities, III* (O. SHISHA, Editor), pp. 129–144, Academic Press, New York.

JOHN, F. [1975]: A priori estimates, geometric effects and asymptotic behavior, *Bull. Amer. Math. Soc.* **81**, 1013.

VON KÁRMÁN, T.; BIOT, M.A. [1940]: *Mathematical Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York.

KATO, T. [1979]: *Linear and Quasi-Linear Equations of Evolution of Hyperbolic Type*, CIME Lectures, Cortona.

KEELING, S.L. [1987]: On Lipschitz continuity of nonlinear differential operators, *ICASE Report No. 87-12*, NASA Langley Research Center.

KIKUCHI, N.; ODEN, J.T. [1987]: *Contact Problems in Elasticity*, SIAM Publications, Philadelphia.

KINDERLEHRER, D. [1987a]: Twinning in crystals II, in *Metastability and Incompletely Posed Problems, IMA Vol. Math. Appl. 3.* (S.S. ANTMAN, J.L. ERICKSEN, D. KINDERLEHRER, I. MÜLLER, Editors), pp. 185–211, Springer-Verlag, New York.

KINDERLEHRER, D. [1987b]: Remarks about the equilibrium configurations of crystals, in *Proceedings, Symposium on Material Instabilities in Continuum Mechanics, Heriot-Watt University* (J. BALL, Editor), Oxford.

KINDERLEHRER, D.; STAMPACCHIA, G. [1980]: *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press.

KIRCHHOFF, G. [1852]: Über die Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien* **9**, 762–773.

KNOPS, R.J.; PAYNE, L.E. [1971]: *Uniqueness Theorems in Linear Elasticity*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 19.

KNOPS, R.J.; STUART, C.A. [1984]: Quasiconvexity and uniqueness of equilibrium solutions in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **86**, 233–249.

KNOWLES, J.K.; STERNBERG, E. [1973]: An asymptotic finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack, *J. Elasticity* **3**, 67–107.

KNOWLES, J.K.; STERNBERG, E. [1975]: On the ellipticity of the equations of non-linear elastostatics for special material, *J. Elasticity* **5**, 341–361.

KNOWLES, J.K.; STERNBERG, E. [1977]: On the failure of ellipticity of the equations for finite elastic plane strain, *Arch. Rational Mech. Anal.* 63, 321–336.

KNOWLES, J.K.; STERNBERG, E. [1978]: On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics, *J. Elasticity* **8**, 329–379.

KOHN, R.V. [1982]: New integral estimates for deformations in terms of their nonlinear strains, *Arch. Rational Mech. Anal.* **78**, 131–172.

KOHN, R.V.; STRANG, G. [1983]: Explicit relaxation of a variational problem in optimal design, *Bull. Amer. Math. Soc.* **9**, 211–214.

KOHN, R.V.; STRANG, G. [1986]: Optimal design and relaxation of variational problems, *Comm. Pure Appl. Math.* **39**, Part I: 113–137, Part II: 139–182, Part III: 353–377.

KOHN, R.; TEMAM, R. [1983]: Dual spaces of stresses and strains with applications to Hencky plasticity, *Appl. Math. Optimization* **10**, 1–35.

KORN, A. [1907]: Sur un problème fondamental dans la théorie de l'élasticité, *C.R. Acad. Sci. Paris* **145**, 165–169.

KORN, A. [1908]: Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* **10**, 165–269.

KORN, A. [1914]: Über die Lösungen der Grundprobleme der Elastizitatstheorie, *Math. Annal.* **75**, 497.

*KOŠELEV, A.I. [1958]: A priori estimates in L_p and generalized solutions of elliptic equations and systems; *Uspehi Mat. Nauk* (*N.S.*) **13**, n° 4 (82), 29–88 (English translation: *American Mathematical Society Translations, Series 2*, **20** (1962), 105–171).

*KOSLOV, S.M.; OLEINIK, O.A.; ZHIKOV, V.V.; KHA TEN NGOAN [1979]: Averaging and G-convergence of differential operators, *Russian Math. Surveys* **34**, 69–147.

*KRASNOSELSKII, M.A.; ZABREYKO, P.P.; PUSTYLNIK, E.I.; SBOLEVSKII, P.E. [1976]: *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*, Noordhoff, Leyden.

LABISCH, F.K. [1982]: On the dual formulation of boundary value problems in nonlinear elastostatics, *Internat. J. Engrg. Sci.* **20**, 413–431.

*LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. [1967]: *Théorie de l'Elasticité*, Mir, Moscou.

*LANG, S. [1962]: *Introduction to Differential Manifolds*, John Wiley, New York.

LANZA DE CRISTOFORIS, M.; VALENT, T. [1982]: On Neumann's problem for a quasilinear differential system of the finite elastostatics type. Local theorems of existence and uniqueness, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **68**, 183–206.

Lavrentiev, M. [1926]: Sur quelques problèmes du calcul des variations, *Ann. Mat. Pura Appl.* **4**, 7–28.

Lax, P.D. [1964]: Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic differential equations, *J. Math. Phys.* **5**, 611–613.

Lay, S.R. [1982]: *Convex Sets and their Applications*, J. Wiley, New York.

Le Dret, H. [1985]: Constitutive laws and existence questions in incompressible nonlinear elasticity, *J. Elasticity* **15**, 369–387.

Le Dret, H. [1986]: Incompressible limit behaviour of slightly compressible nonlinear elastic materials, *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* **20**, 315–340.

Le Dret, H. [1987]: Structure of the set of equilibrated loads in nonlinear elasticity and applications to existence and nonexistence, *J. Elasticity* **17**, 123–141.

Lelong-Ferrand, J. [1963]: *Géométrie Différentielle*, Masson, Paris.

*Leray, J.; Schauder, J. [1934]: Topologie et équations fonctionnelles, *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.* **51**, 45–78.

Le Tallec, P.; Oden, J.T. [1980]: On the existence of hydrostatic pressure in regular finite deformations of incompressible hyperelastic solids, in *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Science* (R.L. Sternberg; A.J. Kalinowski; J.S. Papadakis, Editors), pp. 1–13, Marcel Dekker, New York.

Le Tallec, P.; Oden, J.T. [1981]: Existence and characterization of hydrostatic pressure in finite deformations of incompressible elastic bodies, *J. Elasticity* **11**, 341–358.

Le Tallec, P.; Vidrascu, M. [1984]: Une méthode numérique pour les problèmes d'équilibre de corps hyperélastiques compressibles en grandes déformations, *Numer. Math.* **43**, 199–224.

Lions, J.-L. [1965]: *Problèmes aux Limites dans les Equations aux Dérivées Partielles*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal.

*Lions, J.-L. [1969]: *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris.

*Lions, J.-L.; Magenes, E. [1968]: *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Tome 1, Dunod, Paris.

Lions, J.-L.; Stampacchia, G. [1967]: Variational inequalities, *Comm. Pure Applied Math.* **20**, 493–519.

Lloyd, N.G. [1978]: *Degree Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

*Love, A.E.H. [1927]: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, Cambridge (reprinted by Dover Publications, New York, 1944).

Malliavin, P. [1972]: *Géométrie Différentielle Intrinsèque*, Hermann, Paris.

Marcellini, P. [1984]: Quasiconvex quadratic forms in two dimensions, *Appl. Math. Optimization* **11**, 183–189.

Marcellini, P. [1986a]: On the definition and the lower semicontinuity of certain quasiconvex integrals, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **3**, 391–409.

Marcellini, P. [1986b]: Approximation of quasiconvex functions, and lower semicontinuity of multiple integrals, to appear.

Marcellini, P. [1986c]: A relation between existence of minima for non convex integrals and uniqueness for non strictly convex integrals of the calculus of variations, to appear.

Marcellini, P.; Sbordone, C. [1980]: Semicontinuity problems in the calculus of variations, *Nonlinear Anal.* **4**, 241–257.

Marcellini, P.; Sbordone, C. [1983]: On the existence of minima of multiple integrals of the calculus of variations, *J. Math. Pures Appl.* **62**, 1–9.

Marcus, M.; Mizel, V.J. [1973]: Transformations by functions in Sobolev spaces and lower semicontinuity for parametric variational problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **79**, 790–795.

MARQUES, M.D.P.M. [1984]: Hyperélasticité et existence de fonctionnelle d'énergie, *J. Mécanique Théorique et Appliquée* **3**, 339–347.

MARQUES, M.D.P.M.; MOREAU, J.J. [1982]: Isotropie et convexité dans l'espace des tenseurs symétriques, *Séminaire d'Analyse Convexe*, Exposé n° 6, Montpellier.

MARSDEN, J.E.; HUGHES, T.J.R. [1978]: Topics in the mathematical foundations of elasticity, in *Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium*, Vol. 2, pp. 30–285, Pitman, London.

MARSDEN, J.E.; HUGHES, T.J.R. [1983]: *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

MARSDEN, J.E.; WAN, Y.H. [1983]: Linearization stability and Signorini series for the traction problem in elastostatics, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **A95**, 171–180.

MARTINI, R. [1976]: On the Fréchet differentiability of certain energy functionals, *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet.* **A79**, 326–330.

MARTINS, L.C. [1976]: On Cauchy's theorem in classical physics: some counterexamples, *Arch. Rational Mech. Anal.* **60**, 325–328.

MARTINS, L.C.; OLIVEIRA, R.F.; PODIO-GUIDUGLI, P. [1987]: On the vanishing of the additive measures of strain and rotation for finite deformations, *J. Elasticity* **17**, 189–193.

MARTINS, L.C.; PODIO-GUIDUGLI, P. [1978]: A new proof of the representation theorem for isotropic, linear constitutive relations, *J. Elasticity* **8**, 319–322.

MARTINS, L.C.; PODIO-GIUDUGLI, P. [1979]: A variational approach to the polar decomposition theorem, *Rend. Accad. Naz. Lincei.* **66**, 487–493.

MARTINS, L.C.; PODIO-GUIDUGLI, P. [1980]: An elementary proof of the polar decomposition theorem, *American Math. Monthly* **87**, 288–290.

MASCOLO, E.; SCHIANCHI, R. [1983]: Existence for non convex problems, *J. Math. Pures Appl.* **62**, 349–359.

MASON, J. [1980]: *Variational, Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell Theory*, Elsevier, Amsterdam.

MEISTERS, G.H.; OLECH, C. [1963]: Locally one-to-one mappings and a classical theorem on Schlicht functions, *Duke Math. J.* **30**, 63–80.

MEYERS, N.G. [1965]: Quasi-convexity and lower semicontinuity of multiple variational integrals of any order, *Trans. Amer. Math. Soc.* **119**, 125–149.

MINDLIN, R.D. [1964]: Micro-structure in linear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **16**, 51–78.

MINDLIN, R.D. [1965]: Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity, *Int. J. Solids Structures* **1**, 417–438.

MIRSKY, L. [1959]: On the trace of matrix products, *Math. Nach.* **20**, 171–174.

MIRSKY, L. [1975]: A trace inequality of John von Neumann, *Monat. für Math.* **79**, 303–306.

MIYOSHI, T. [1985]: *Foundations of the Numerical Analysis of Plasticity*, North-Holland, Amsterdam.

MOREAU, J.J. [1974]: On unilateral constraints, friction and plasticity, in *New Variational Techniques in Mathematical Physics* (G. CAPRIZ & G. STAMPACCHIA, Editors), pp. 173–322, C.I.M.E., Edizioni Cremonese, Rome.

MOREAU, J.J. [1979]: Lois d'élasticité en grande déformation, *Séminaire d'Analyse Convexe*, Exposé n° 12, Montpellier.

MORREY, JR., C.B. [1952]: Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals, *Pacific J. Math.* **2**, 25–53.

MORREY, JR., C.B. [1966]: *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer, Berlin.

MÜLLER, S. [1987]: Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials, *Arch. Rational Mech. Anal.* **99**, 189–212.

MURAT, F. [1978]: Compacité par compensation, *Annali Scu. Norm. Sup. Pisa Ser. IV*, **5**, 489–507.

MURAT, F. [1979]: Compacité par compensation II, in *Proceedings International Conference on Recent Methods in Non-Linear Analysis, Rome, 1978* (E. DE GIORGI, E. MAGENES & U. MOSCO, Editors), pp. 245–256, Pitagora, Bologna.

MURAT, F. [1981]: Compacité par compensation: condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant, *Annali Sc. Norm. Sup. Pisa* **8**, 69–102.

MURAT, F. [1987]: A survey on compensated compactness, in *Contributions to Modern Calculus of Variations* (L. CESARI, Editor), pp. 145–183, Longman, Harlow.

MURDOCH, A.I. [1979]: Symmetry considerations for materials of second grade, *J. Elasticity* **9**, 43–50.

MURNAGHAN, F.D. [1937]: Finite deformations of an elastic solid, *American Journal of Mathematics* **59**, 235–260.

MURNAGHAN, F.D. [1951]: *Finite Deformations of an Elastic Solid*, John Wiley, New York.

NEČAS, J. [1967]: *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris.

NEČAS, J. [1976]: Theory of locally monotone operators modeled on the finite displacement theory for hyperelasticity, *Beiträge zur Analysis* **8**, 103–114.

NEČAS, J. [1981]: *Régularité des Solutions Faibles d'Equations Elliptiques Non Linéaires; Applications à l'Elasticité*, Lecture Notes, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

NEČAS, J. [1983a]: On regular solutions to the displacement boundary value problem in finite elasticity, in *Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, Vol. IV* (J. BRILLA, Editor), Pitman, Boston.

NEČAS, J. [1983b]: *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*, Teubner – Texte zur Mathematik, Band 52, Leipzig.

NEČAS, J. HLAVÁČEK, I. [1981]: *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction*, Elsevier, Amsterdam.

NEČAS, J.; JARUŠEK, J.; HASLINGER, J. [1980]: On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction, Boll. UMI **17**, 796.

VON NEUMANN, J. [1937]: Some matrix-inequalities and metrization of matric-space, *Tomsk Univ. Rev.* 1, 286–300.

*NIRENBERG, L. [1974]: *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, Lecture Notes, Courant Institute, New York.

NITSCHE, J.A. [1981]: On Korn's second inequality, *RAIRO Analyse Numérique* **15**, 237–248.

NOLL, W. [1955]: On the continuity of the solid and fluid states, *J. Rational Mech. Anal.* **4**, 3–81.

NOLL, W. [1958]: A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media, *Arch. Rational Mech. Anal.* **2**, 197–226.

NOLL, W. [1959]: The Foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics, in *The axiomatic method, with Special Reference to Geometry and Physics*, pp. 266–281, North-Holland, Amsterdam.

NOLL, W. [1966]: The foundations of mechanics, in *C.I.M.E., Non Linear Continuum Theories* [G. GRIOLI & C. TRUESDELL, Editors], pp. 159–200, Cremonese, Rome.

NOLL, W. [1972]: A new mathematical theory of simple materials, *Arch. Rational Mech. Anal.* 43, 1–50.

NOLL, W. [1973]: Lectures on the foundations of continuum mechanics and thermodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **52**, 62–92.

NOLL, W. [1978]: A general framework for problems in the statics of finite elasticity, in *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations* (G.M. DE LA PENHA & L.A.J. MEDEIROS, Editors), pp. 363–387, North-Holland, Amsterdam.

NOLL, W.; PODIO-GUIDUGLI, P. [1986]: Discontinuous displacements in elasticity, in *Contributi del Centro Linceo Interdisciplinare di Scienze Matematiche e loro Applicazioni, n. 76.*, pp. 151–163, Accademia dei Lincei, Roma.

* NOVOZHILOV, V.V. [1953]: *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*, Graylock Press, Rochester.

* NOVOZHILOV, V.V. [1961]: *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1961.

NZENGWA, R. [1987]: Incremental methods in nonlinear, three-dimensional, incompressible elasticity, *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, to appear.

* ODEN, J.T. [1972]: *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, New York.

ODEN, J.T. [1979]: Existences theorems for a class of problems in nonlinear elasticity, *J. Math. Anal. Appl.* **69**, 51–83.

ODEN, J.T. [1986]: *Qualitative Methods in Nonlinear Mechanics*, Prentice-Hall.

ODEN, J.T.; MARTINS, J.A.C. [1985]: Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Comput. Meth. Applied Mech. Engrg.* **52**, 527–634.

ODEN, J.T.; REDDY, J.N. [1983]: *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Universitext series, Springer-Verlag, Berlin (second edition).

OGDEN, R.W. [1970]: Compressible isotropic elastic solids under finite strain-constitutive inequalities, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **23**, 457–468.

OGDEN, R.W. [1972a]: Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids, *Proc. Roy. Soc. London* **A326**, 565–584.

OGDEN, R.W. [1972b]: Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubber-like solids, *Proc. Roy. Soc. London* **A328**, 567–583.

OGDEN, R.W. [1976]: Volume changes associated with the deformation of rubber-like solids, *J. Mech. Phys. Solids* **24**, 323–338.

OGDEN, R.W. [1977]: Inequalities associated with the inversion of elastic stress-deformation relations and their implications, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **81**, 313–324.

OGDEN, R.W. [1984]: *Non-Linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood, Chichester, and John Wiley.

OLEINIK, O.A. [1984]: On homogenization problems, in *Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics* (P.G. CIARLET & M. ROSEAU, Editors), pp. 248–272, Springer-Verlag, Berlin.

* OSTROWSKI, A.M. [1966]: *Solution of Equations and Systems of Equations*, (second edition), Academic Press, New York.

OWEN, N. [1986]: On a variational problem from one-dimensional nonlinear elasticity, *Lefchetz Center for Dynamical Systems Report No. 86-30*, Brown University, Providence.

OWEN, N. [1987]: Existence and stability of necking deformations for nonlinearly elastic rods, *Arch. Rational Mech. Anal.* **98**, 357–383.

PANAGIOTOPOULOS, P.D. [1975]: A nonlinear programming approach to the unilateral contact and friction boundary value problem in the theory of elasticity, *Ing. Archiv.* **44**, 421.

RABINOWITZ, P.H. [1975]: *Théorie du Degré Topologique et Application à des Problèmes aux Limites Non Linéaires* (rédigé par H. BERESTYCKI), publication 75010 du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université de Paris VI, Paris.

RADO, T.; REICHELDERFER, P.V. [1955]: *Continuous transformations in Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.

RAJAGOPAL, K.R.; WINEMAN, A.S. [1987]: New universal relations for nonlinear isotropic elastic materials, *J. Elasticity* **17**, 75–83.

RAOULT, A. [1985]: Construction d'un modèle d'évolution de plaques avec terme d'inertie de rotation, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **139**, 361–400.

RAOULT, A. [1986]: Non-polyconvexity of the stored energy function of a Saint Venant-Kirchhoff material, *Aplikace Matematiky*, **6**, 417–419.

REISSNER, E. [1984]: Formulation of variational theorems in geometrically nonlinear elasticity, *J. Engrg. Mech.* **110**, 1377–1390.

REISSNER, E. [1986]: Some aspects of the variational principles problem in elasticity, *Computational Mechanics* **1**, 3–9.

RHEINBOLDT, W.C. [1974]: *Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations*, CBMS Series, N° 14, SIAM, Philadelphia.

RHEINBOLDT, W.C. [1981]: Numerical analysis of continuation methods for nonlinear structural problems, *Computers & Structures* **13**, 103–113.

RHEINBOLDT, W.C. [1986]: *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations*, John Wiley, New York.

RIVLIN, R.S. [1948]: Large elastic deformations of isotropic materials. II. Some uniqueness theorems for pure homogeneous deformation, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **240**, 491–508.

RIVLIN, R.S. [1973]: Some restrictions on constitutive equations, in *Proceedings, International Symposium on the Foundations of Continuum Thermodynamics*, Bussaco.

RIVLIN, R.S. [1974]: Stability of pure homogeneous deformations of an elastic cube under dead loading, *Quart. Applied Math.* **32**, 265–271.

RIVLIN, R.S.; ERICKSEN, J.L. [1955]: Stress-deformation relations for isotropic materials, *J. Rational Mech. Anal.* **4**, 323–425.

ROBERTS, A.W.; VARBERG, D.E. [1973]: *Convex Functions*, Academic Press, New York.

* ROCKAFELLAR, R.T. [1970]: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton.

RODRIGUES, J.F. [1987]: *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, North-Holland, Amsterdam.

ROMANO, G. [1972]: Potential operators and conservative systems, *Meccanica* 7, 141–146.

ROSEAU, M. [1976]: *Equations Différentielles*, Masson, Paris.

ROSEMAN, J.J. [1981]: An integral bound on the strain energy for the traction problem in non-linear elasticity with sufficiently small strains, *Internat. J. Non-Linear Mech.* **16**, 317–325.

ROSTAMIAN, R. [1978]: Internal constraints in boundary value problems of continuum mechanics, *Indiana Univ. Mathematics J.* **27**, 637–656.

SABLÉ-TOUGERON, M. [1987]: Existence pour un problème de l'élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2, to appear.

SALENÇON, J. [1983]: *Calcul à la Rupture et Analyse Limite*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

* SANCHEZ-PALENCIA, E. [1980]: *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, Vol. 127, Springer-Verlag, Berlin.

SAWYERS, K.N. [1976]: Stability of an elastic cube under dead loading, *Internat. J. Non-Linear Mech.* **11**, 11–23.

SCHOCHET, S. [1985]: The incompressible limit in nonlinear elasticity, *Comm. Math. Phys.* **102**, 207–215.

SCHWARTZ, L. [1966]: *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris.

*SCHWARTZ, L. [1967]: *Cours d'Analyse*, Hermann, Paris.

SCHWARTZ, L. [1970]: *Analyse, Deuxième Partie: Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle*, Hermann, Paris.

SCOTT, N.H. [1986]: The slowness surfaces of incompressible and nearly incompressible elastic materials, *J. Elasticity* **16**, 239–250.

SERRE, D. [1981a]: Relations d'ordre entre formes quadratiques en compacité par compensation, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, **292**, 785–787.

SERRE, D. [1981b]: Condition de Legendre-Hadamard; espaces de matrices de rang $\neq 1$, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **293**, 23–26.

SERRE, D. [1983]: Formes quadratiques et calcul des variations, *J. Math. Pures Appl.* **62**, 177–196.

SERRIN, J. [1961]: On the definition and properties of certain variational integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **101**, 139–167.

SEWELL, M.J. [1967]: On configuration-dependent loading, *Arch. Rational Mech. Anal.* **23**, 327–351.

SHAMINA, V.A. [1974]: Determination of displacement vector from the components of strain tensor in nonlinear continuum mechanics (in Russian), *Izv. AN SSR, Mech. of Solids*, **1**, 14–22.

SHIELD, R. [1971]: Deformations possible in every compressible, isotropic, perfectly elastic material, *J. Elasticity* **1**, 91–92.

SIDOROFF, R. [1974]: Sur les restrictions à imposer à l'énergie de déformation d'un matériau hyperélastique, *C.R. Acad. Sci. Paris* **279**, 379–382.

SIGNORINI, A. [1930]: Sulle deformazioni termoelastiche finite, in *Proc. 3rd Intern. Congress Applied Mechanics* **2**, pp. 80–89.

SIGNORINI, A. [1933]: Sopra alcune questioni di elastostatica, *Atti Soc. Ital. per il Progresso delle Scienze*.

SIGNORINI, A. [1943]: Trasformazioni termoelastiche finite, Memoria 1ª, *Annali Mat. Pura Appl.* **22**, 33–143.

SIGNORINI, A. [1949]: Trasformazioni termoelastiche finite, Memoria 2ª, *Annali Mat. Pura Appl.* **30**, 1–72.

SIGNORINI, A. [1959]: Questioni di elasticità nonlinearizzata o semilinearizzata, *Rend. di Matem. e delle sue Appl.* **18**, 1–45.

SIMO, J.C.; MARSDEN, J.E. [1984a]: On the rotated stress tensor and the material version of the Doyle-Ericksen formula, *Arch. Rational Mech. Anal.* **86**, 213–231.

SIMO, J.C.; MARSDEN, J.E. [1984b]: Stress tensors, Riemannian metrics and the alternative descriptions in elasticity, in *Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics* (P.G. CIARLET & M. ROSEAU, Editors), pp. 369–383, Springer-Verlag, Berlin.

SIMPSON, H.C.; SPECTOR, S.J. [1983]: On compositive matrices and strong ellipticity for isotropic elastic materials, *Arch. Rational Mech. Anal.* **84**, 55–68.

SIMPSON, H.C.; SPECTOR, S.J. [1984a]: On barrelling instabilities in finite elasticity, *J. Elasticity* **14**, 103–125.

SIMPSON, H.C.; SPECTOR, S.J. [1984b]: On barrelling for a special material in finite elasticity, *Quart. Applied Math.* **42**, 99–111.

SIMPSON, H.C.; SPECTOR, S.J. [1987]: On the positivity of the second variation in finite elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **98**, 1–30.

SIVALOGANATHAN, J. [1986a]: Uniqueness of regular and singular equilibria for spherically symmetric problems of nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **96**, 97–136.

SIVALOGANATHAN, J. [1986b]: A field theory approach to stability of radial equilibria in nonlinear elasticity, to appear.

SMITH, K.T. [1983]: *Primer of Modern Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, New York.

*SOBOLEV, S.L. [1938]: On a theorem of functional analysis, *Mat. Sb.* **46**, 471–496.

*SOBOLEV, S.L. [1950]: *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Leningrad (English translation: *Transl. Amer. Math Soc.*, Mathematical Monograph 7, 1963).

SOKOLNIKOFF, I.S. [1956]: *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill.

SPAONOLO, S. [1976]: Convergence in energy for elliptic operators, in *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, SYNSPADE. III (B.E. HUBBARD, editor), pp. 469–498, Academic Press.

SPECTOR, S.J. [1980]: On uniqueness in finite elasticity with general loading, *J. Elasticity* **10**, 145–161.

SPECTOR, S.J. [1982]: On uniqueness for the traction problem in finite elasticity, *J. Elasticity* **12**, 367–383.

STEPHENSON, R.A. [1980]: On the uniqueness of the square-root of a symmetric, positive-definite tensor, *J. Elasticity* **10**, 213–214.

STETTER, H.J. [1973]: *Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

STOKER, J.J. [1968]: *Nonlinear Elasticity*, Gordon and Breach, New York.

STOPPELLI, F. [1954]: Un teorema di esistenza e di unicità relativo alle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite, *Ricerche di Matematica* **3**, 247–267.

STOPPELLI, F. [1955]: Sulla svilluppabilità in serie di potenze di un parametro delle soluzioni delle equazioni dell'elastostatic isoterma, *Ricerche di Matematica* **4**, 58–73.

STORÅKERS, B. [1979]: An explicit method to determine response coefficients in finite elasticity, *J. Elasticity* **9**, 207–214.

*STRANG, G. [1976]: *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, New York.

STUART, C.A. [1985]: Radially symmetric cavitation for hyperelastic materials, *Ann. Institut Henri Poincaré* **2**, 33–66.

STUART, C.A. [1986]: Special problems involving uniqueness and multiplicity in hyperelasticity, in *Nonlinear Functional Analysis and its Applications* (S.P. SINGH, editor), pp. 131–145, D. Reidel.

DE ST VENANT, A.-J.-C.B. [1844]: Sur les pressions qui se développent à l'intérieur des corps solides lorsque les déplacements de leurs points, sans altérer l'élasticité, ne peuvent cependant pas être considérés comme très petits, *Bull. Soc. Philomath.* **5**, 26–28.

SUQUET, P. [1979]: Sur les équations de la plasticité, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **1**, 77–87.

SUQUET, P. [1981]: Sur les éqnations de la plasticité, existence et régularité des solutions, *J. Mécanique* **20**, 3–39.

ŠVERÁK, V. [1987]: Regularity properties of deformations with finite energy, *Arch. Rational Mech. Anal.*, to appear.

SYNGE, J.L. [1960]: Classical dynamics, in *Handbuch der Physic* (S. FLÜGGE, Editor), Vol. III/1, pp. 1–225.

TAHRAOUI, R. [1986]: Théoremes d'existence en calcul des variations et applications à l'élasticité non linéaire, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, **14**, 495–498.

TANG QI [1987]: Almost everywhere injectivity in nonlinear elasticity, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, to appear.

TARTAR, L. [1977]: *Problèmes d'Homogénéisation dans les Equations aux Dérivées Partielles*, Cours Peccot, Collège de France, Paris.

TARTAR, L. [1978]: Quelques remarques sur l'homogénéisation, in *Functional Analysis and Numerical Analysis* (H. FUJITA, Editor), pp. 469–481, Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo.

TARTAR, L. [1979]: Compensated compactness and partial differential equations, in *Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium, Vol. IV* (R.J. KNOPS, Editor), pp. 136–212, Pitman.

TARTAR, L. [1983a]: The compensated compactness method applied to systems of conservation laws, in *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations* (J.M. BALL, Editor), pp. 263–285, Reidel, Dordrecht.

TARTAR, L. [1983b]: Etude des oscillations dans les équations aux dérivées partielles non linéaires, in *Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics* (P.G. CIARLET & M. ROSEAU, Editors), pp. 384–412.

TAYLOR, A.E. [1965]: *General Theory of Functions and Integration*, Blaisdell, Waltham.

*TEMAM, R. [1983]: *Problèmes Mathématiques en Plasticité*, Gauthier-Villars, Paris (English translation: *Mathematical Problems in Plasticity*, Gauthier-Villars, Paris, 1985).

TEMAM, R.; STRANG, G. [1980a]: Duality and relaxation in the variational problems of plasticity, *J. de Mécanique* **19**, 493–527.

TEMAM, R.; STRANG, G. [1980b]: Functions of bounded deformation, *Arch. Rational Mech. Anal.* **75**, 7–21.

THOMPSON, J.L. [1969]: Some existence theorems for the traction boundary value problem of linearized elastostatics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **32**, 369–399.

THOMPSON, R.C.; FREEDE, L.J. [1971]: On the eigenvalues of sums of Hermitian matrices, *Linear Algebra and Appl.* **4**, 369–376.

van TIEL, J. [1984]: *Convex Analysis: An Introductory Text*, J. Wiley, New York.

*TIMOSHENKO, S. [1951]: *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill.

TING, T.C.T. [1985]: Détermination of $C^{1/2}$, $C^{-1/2}$ and more general isotropic tensor functions of C, *J. Elasticity* **15**, 319–323.

TONELLI, L. [1920]: La semicontinuità nel calcolo delle variazioni, *Rend. Circ. Matem. Palermo* **44**, 167–249.

TOUPIN, R.A. [1962]: Elastic materials with couple-stresses, *Arch. Rational Mech. Anal.* **11**, 385–414.

TOUPIN, R.A. [1964]: Theories of elasticity with couple-stress, *Arch. Rational Mech. Anal.* **17**, 85–112.

TRELOAR, L.R.G. [1975]: *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford University Press, Oxford.

TRIANTAFYLLIDIS, N.; AIFANTIS, E.C. [1986]: A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials, *J. Elasticity* **16**, 225–237.

TROIANIELLO, G.M. [1987]: *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*, Plenum, New York.

*TRUESDELL, C. [1977]: *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Academic Press, New York.

TRUESDELL, C. [1978]: Some challenges offered to analysis by rational thermomechanics, in *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations* (G.M. DE LA PENHA & L.A.J. MEDEIROS, Editors), pp. 495–603, North-Holland, Amsterdam.

TRUESDELL, C. [1983]: The influence of elasticity on analysis: The classic heritage, *Bull. Amer. Math. Soc.* **9**, 293–310.

TRUESDELL, C.; NOLL, W. [1965]: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik*, Vol. III/3, Springer, Berlin.

TRUESDELL, C.; TOUPIN, R.A. [1960]: *The Classical Field Theories, Handbuch der Physik*, Vol. III/1, Springer, Berlin.

TRUESDELL, C.; TOUPIN, R.A. [1963]: Static grounds for inequalities in finite elastic strain, *Arch. Rational Mech. Anal.* **12**, 1–33.

*VAINBERG, M.M. [1952]: Some questions of differential calculus in linear spaces, *Usp. Math. Nauk* **7**, 55.

*VAINBERG, M.M. [1956]: *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators* (in Russian), G.I.T.T.L., Moscow (English translation, Holden-Day, San Francisco, 1964).

VALENT, T. [1978a]: Sulla differenziabilità dell'operatore di Nemytsky, *Rend. Acc. Naz. Lincei* **65**, 1–12.

VALENT, T. [1978b]: Osservazioni sulla linearizzazione di un operatore differenziale, *Rend. Acc. Naz. Lincei* **65**, 1–11.

VALENT, T. [1978c]: Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **60**, 165–181.

VALENT, T. [1982]: Local theorems of existence and uniqueness in finite elastostatics, in *Finite Elasticity* (D.E. CARLSON & R.T. SHIELD, Editors), pp. 401–421, Nijhoff, The Hague.

VALENT, T. [1985]: A property of multiplication in Sobolev spaces. Some applications, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **74**, 63–73.

VALENT, T.; ZAMPIERI, G. [1977]: Sulla differenziabilità di un operatore legato a una classe di sistemi differenziali quasi-lineari, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **57**, 311–322.

VALID, R. [1977]: *La Mécanique des Milieux Continus et le Calcul des Structures*, Eyrolles, Paris (English translation: *Mechanics of Continuous Media and Analysis of Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1981).

VARGA, O.H.: *Stress-strain Behaviour of Elastic Materials*, Interscience, Wiley, New York, 1966.

VILLAGGIO, P. [1972]: Energetic bounds in finite elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **45**, 282–293.

VILLAGGIO, P. [1977]: *Qualitative Methods in Elasticity*, Noordhoff, Leyden.

VILLAGGIO, P. [1980]: A unilateral contact problem in linear elasticity, *J. Elasticity* **10**, 113–119.

*VIŠIK, M.I. [1976]: Sobolev-Slobodeckii spaces of variable order with weighted norms and their applications to mixed elliptic boundary problems, *Amer. Math. Sol. Transl. Ser. 2*, **105**, 104–110.

*VODOPYANOV, S.K.; GOLDSHTEIN, V.M. [1977]: Quasiconformal mappings and spaces of functions with generalized first derivatives, *Siberian Math. J.* **17**, 515–531.

*VODOPYANOV, S.K.; GOLDSHTEIN, V.M.; RESHETNYAK, YU. G. [1979]: On geometric properties of functions with generalized first derivatives, *Russian Math. Surveys* **34**, 19–74.

VOIGT, W. [1893–1894]: Ueber eine anscheinend notwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität, *Nachrichten von der Königlichen Gesellochaft der Wissenschaften zu Göttingen*, pp. 534–552 (1893); pp. 33–42 (1894).

VO-KHAC, K. [1972]: *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*, Vol. 1, Vuibert, Paris.

WAN, Y.H. [1986]: The traction problem for incompressible materials, to appear.

WAN, Y.H.; MARSDEN, J.E. [1984]: Symmetry and bifurcation in three-dimensional elasticity, Part III: Stressed reference configuration, *Arch. Rational Mech. Anal.* **84**, 203–233.

WANG, C.-C.; TRUESDELL, C. [1973]: *Introduction to Rational Elasticity*, Noordhoff, Groningen.

*Washizu, K. [1975]: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Second Edition, Pergamon, Oxford.

Weinstein, A. [1985]: A global invertibility theorem for manifolds with boundary, *Proc. Royal Soc. of Edinburgh* **99**, 283–284.

Wheeler, L. [1977]: A uniqueness theorem for the displacement problem in finite elastodynamics, *Arch Rational Mech. Anal.* **63**, 183–189.

Yale, P.B. [1968]: *Geometry and Symmetry*, Holden-Day, San Francisco.

Yang, W.H. [1980]: A generalized von Mises criterion for yield and fracture, *J. Applied Mechanics* **47**, 297–300.

*Yosida, K. [1966]: *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.

Young, L.C. [1937]: Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations, *C.R. Soc. Sci. Lett. Varsovie Classe III* **30**, 212–234.

Young, L.C. [1942]: Generalized surfaces in the calculus of variations I and II, *Ann. Math.* **43**, 84–103 and 530–544.

*Young, L.C. [1980]: *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Chelsea.

Zee, L.; Strenberg, E. [1983]: Ordinary and strong ellipticity in the equilibrium theory of incompressible hyperelastic solids, *Arch. Rational Mech. Anal.* **83**, 53–90.

Zeidler, E. [1986]: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vol. I: Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, New York.

Ziemer, W.P. [1983]: Cauchy flux and sets of finite perimeters, *Arch. Rational Mech. Anal.* **84**, 189–201.

*Zienkiewicz, O.C. [1977]: *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, New York (third edition).

Некоторые исправления и дополнения переводчика и редактора к авторскому списку литературы (воспроизведённому факсимильно)

Anzelloti [1983]: Anzelloti → Anzellotti
Biaocchi & Capelo [1978]: Biaocchi → Baiocchi
Dacorogna [1987]: to appear → Springer-Verlag, Heidelberg
Grisvard [1987]: thoery → theory
Koslov et al. [1979]: Ten → Tien

[Кроме того, просим читателя вручную пририсовать звёздочки к работам Baiocchi & Capelo [1978] и Fichera [1972b]; наличие русского перевода первой выяснилось лишь при корректуре, а перевод второй, как оказалось, содержится в книге Фикеры, уже приведённой в списке работ, имеющихся на русском языке (в паре с переводом работы [1972a]). Добавить звёздочки типографским способом мы не можем по техническим причинам. — *Изд. ред.*]

Работы, имеющиеся на русском языке [1]

Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. — М.: ИЛ, 1962.

Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971.

Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. — М.: Наука, 1988.

Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1962.

[1] В основном тексте ссылки с *русской* транскрипцией авторов (например, Арнольд [1971]) отсылают к этому списку. — *Прим. изд. ред.*

Бурбаки Н. Теория множеств. — М.: Мир, 1965.
Вайнберг М. М. Некоторые вопросы дифференциальиого исчислення в линейных пространствах. — УМН, 1952, т. 7, № 4, с. 55—102.
Вайнберг М. М. Вариационные методы исследовання нелинейных операторов. — М.: Гостехиздат, 1956.
Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987.
Вишик М. И., Эскин Г. И. Пространства Соболева—Слободецкого переменного порядка с весовыми нормами и их приложения к смешанным краевым задачам. — Сиб. мат. ж., 1968, т. 9, № 5, с. 973—997.
Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными. — Сиб. мат. ж., 1976, т. 17, № 3, с. 515—531.
Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщёнными производными. — УМН, 1979, т. 34, № 1, с. 17—65.
Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. — М.: Мир, 1979.
Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. — М.: ИЛ, 1948.
Дакоронья Б. Слабая непрерывность и слабая полунепрерывность снизу для нелнненйых функционалов. — УМН, 1989, т. 44, № 4, с. 35—98.
Дьёдонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.
Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.
Жермен П. Курс механики сплошной среды. — М.: Высшая школа, 1983.
Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов. — УМН, 1981, т. 36, № 1, с. 11—58.
Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
Картан А. Дифференциальное исчисленне. Дифференциальные формы. — М.: Мнр, 1971.
Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
Кошелев А. И. Априорные оценки в L_p и обобщённые решения эллиптических уравнений и систем. — УМН, 1962, т. 13, № 4, с. 29—88.
Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевскнй П. Е. — М.: Наука, 1966.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1965.
Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
Лерэ Ж., Шаудер Ж. Топология и функциональные уравнения. — УМН, 1946, т. 1, № 3—4, с. 71—95.
Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их прнложения. — М.: Мир, 1971.
Ляв А. Математическая теория упругостн. — М., ОНТИ, 1935.
Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.
Новожилов В. В. Основы нелинейной теорнн упругости. — М.: Гостехиздат, 1948.

Новожилов В. В. Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958.
Одеи Дж. Конечные элементы в нелииейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976.
Островский А. Решение уравнений и систем уравнений. — М.: ИЛ, 1963 Перевод 1-го издаиии.
Паиагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. — М.: Мир, 1989.
Петровский И. Г. Лекции об уравнеииях с частными производиыми. — М.: Физматгиз, 1961.
Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа. — Мат. сб., 1938, т. 4 (46), с. 471—498.
Соболев С. Л. Некоторые применения функциоиального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
Стреиг Г. Линейиая алгебра и ее примеиения. — М.: Мир, 1980.
Сьярле Ф. Метод коиечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.
Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана. — М.: Мир, 1983.
Темам Р. Математические задачи теории пластичности. — М.: Наука, 1990.
Тимошенко С. П. Теория упругости. — М.: ОНТИ, 1934.
Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошиых сред. — М.: Мир, 1975.
Федерер X. Геометрическая теория меры. — М.: Наука, 1987.
Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. — М.: Мир, 1974.
Хартман Ф. Обыкновеиные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
Хёрмаидер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. — М.: Мир, 1986.
Шварц Л. Анализ. В 2-х томах. — М.: Мир, 1972.
Эклаид И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариациоииые проблемы. — М.: Мир, 1979.
Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимальиого управления. — М.: Мир, 1974.

Литература, добавленная редактором перевода[1]

Ильюшин А. А. Нелинейная теория упругости. — М.: изд-во МГУ, 1990.
Колмогоров А. Н., Фомии С. В. Элементы теории фуикций и функциональиого анализа. — М.: Наука, 1976.
Кондратьев В. А., Олейник О. А. О зависимости коистант в неравеистве Корна от параметров, характеризующих геометрию области. — УМН, 1989, т. 44, № 6, с. 483—487.
Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна. — УМН, 1988, т. 43, № 5, с. 55—98.
Кондратьев В. А., Олейиик О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производиыми в иегладких областях. — УМН, 1988, т. 38, № 2, с. 3—76.
Кондратьев В. А., Копачек И., Олейник О. А. О поведении обобщённых решений эллиптических уравнений второго порядка и системы теории упругости в окрестности граничной точки. — В сб.: „Труды семинара им. И. Г. Петровского". — М.: изд-во МГУ, 1982, т. 8, с. 135—152.

[1] Ссылки на работы из этого списка (в подстрочных примечаниях редактора) производятся по следующему образцу: Ильюшин [1990]′. — *Прим. изд. ред.*

Копачек И., Олейник О. А. О поведении решений системы уравнений теории упругости в окрестности иерегулярных точек границы и на бесконечности. — Труды ММО, 1981, т. 43, с. 260—274.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1965.

Лопатииский Я. Б. Об одном способе приведения граничиых задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического тнпа к регулярным интегральным уравнениям. — Укр. мат. ж., 1953, т. 5, с. 123—151.

Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980.

Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. — УМН, 1956, т. 12, № 3, с. 3—73.

Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: изд-во МГУ, 1990.

Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. — М.: Наука, 1976.

Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному аиализу. — М.: Мир, 1979.

Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

Соболев С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщённых функций. — М.: Наука, 1989.

Хёрмандер Л. Анализ лииейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2—4. — М.: Мир. 1986, 1987, 1988.

Kondratiev V. A., Oleinik O. A. On Korn's inequalities, C. R. Acad. Sci. Paris, ser. I, **308** (1989), 483—487.

Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Hardy's and Korn's type inequalities and their applications, Rend. di Mat. e Appl., ser. VII, **10** (1990), 641—666.

Oleinik O. A. Korn's type inequalities and applications to elasticity. — Convegno internationale in memoria di Vito Volterra (Roma, 6—10 Oct. 1990). — Atti dei Acad. Naz. dei Lincei **92** (1992).

Oleinik O. A., Yosifian G. A. On singularities at the boundary points and uniqueness theorems for solutions of the first boundary value problem of elasticity, Comm. in part. diff. equations **2** (1977), 937—969.

Sobolev S. L. Methode nouvelle a resoudre le probléme de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. — Мат. сб., 1936, т. 1 (43), № 1, с. 39—72.

Именной указатель

Предметный указатель[1]

[1] При повторении слова иногда заменяются на тире, даже если у них разные окончания. На возможность изменения окончания указывает курсивный шрифт (например, вариационн*ое*). — *Прим. изд. ред.*

Содержание тома II

ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ МЕНЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ: ПЛАСТИНЫ И СТЕРЖНИ

Часть С. Двумерные модели пластин

Часть D. Одномерные модели стержней

Оглавление[1]

Часть А

Основные положения трёхмерной теории упругости

[1] Звёздочкой помечены параграфы, посвящённые изложению подготовительного чисто математического материала.

Часть B

Математические методы трёхмерной теории упругости

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, её оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир»

Научное издание

Филипп Сьярле

Математическая теория упругости

Заведующий редакцией академик В. И. Арнольд
Зам. зав. редакцией А. С. Попов
Ведущий редактор В. И. Авербух
Редактор Т. А. Денисова
Художник О. С. Василькова
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор И. И. Володина

ИБ № 7719

Сдано в набор 03.07.91. Подписано к печати 21.04.92. Формат 60 × 90[1]/16. Бумага кн. журн. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 14.75 бум. л. Усл. печ. л. 29,5. Усл. кр.-отт. 29,5. Уч.-изд. л. 27.49. Изд. № 1/8102. Тираж 1200 экз. Зак. 933 С 092.

Издательство „Мир"
129820, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Набрано в типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени ГПО «Техническая книга» Мининформпечати РФ. 198052. г. Санкт-Петербург, Измайловский проспект, 29.

Отпечатано в типографии № 8 ордена Трудового Красного Знамени ГПО «Техническая книга» Мининформпечати РФ. 190000, г. Санкт-Петербург, Прачечный пер., 6.