Е.Вигнер

ЭТЮДЫ О СИММЕТРИИ

Данная книга представляет собой перевод сборника статей известного американского физика, лауреата Нобелевской премии, Е. Вигнера. Статьи посвящены различным проблемам физики, размышлениям над судьбами науки, воспоминаниям о крупных ученых, с которыми автору довелось встречаться и работать. Особенно подробно автор исследует роль принципов симметрии в физике, их значение для отбора, классификации и предсказания новых законов природы. Некоторые работы более специального характера включены в качестве дополнения.

Книга представляет интерес для широких кругов научных работников: физиков, математиков, историков науки, философов.

Содержание

SYMMETRIES AND REFLECTIONS

Scientific Essays of

EUGENE P. WIGNER

INDIANA UNIVERSITY PRESS

BLOOMINGTON – LONDON

1970

ПРЕДИСЛОВИЕ

> «Как показывает опыт, ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знания, как постановка трудной и в то же время полезной задачи».
>
> *Иоганн Бернулли* (1654—1705)

Слова Бернулли привел великий математик Давид Гильберт в августе 1900 г., когда он поставил свои знаменитые 23 проблемы перед лучшими математиками мира, собравшимися на II Международный конгресс. Шестой проблемой была проблема аксиоматизации физики. Действительно, как облегчился бы труд физиков, если бы можно было сформулировать N ($N<\infty$) исходных аксиом и из них уже логическим путем получать все следствия, нужные для описания явлений окружающего нас мира. Но именно 1900 г. был годом рождения новой квантовой физики. Через четыре месяца после доклада Гильберта Макс Планк сообщил удивленному миру свою гипотезу квантов; далее развитие физики (и даже механики, на которую Гильберт возлагал наибольшие надежды) пошло совсем другим путем.

Современная квантовая механика развивается совсем не так, как можно было бы ожидать от логически замкнутой теории. Полная внутренних противоречий в релятивистской области, она не дает никаких надежд на близкую аксиоматизацию и вместе с тем на исчезновение парадоксов, которые она, однако, умеет обходить, когда надо сосчитать реальные эффекты. Но так, сравнительно благополучно, дело обстоит до тех пор, пока мы интересуемся эффектами электродинамическими. Теория и опыт согласуются уже сейчас до тысячных долей процента, оставляя физиков в почтительном изумлении перед всеобъемлющей силой электродинамики, честно описывающей процессы в галактиках и в атомных ядрах. Но взаимодействия в природе значительно богаче тех, которые могут описать уравнения Максвелла и уравнения тяготения Эйнштейна (в точности которых мы также не сомневаемся). Ядерные силы, β-распады и многие другие процессы, известные и хорошо изученные физиками, до сих пор не имеют разумного теоретического обоснования. Многие закономерности и эмпирические правила, накопленные экспериментаторами (не без активной помощи теоретиков), не укладываются в какую-либо единую схему.

И вот на фоне сотен попыток построить удовлетворительную теорию явлений микромира возник новый метод, новая форма рассуждений, лишенная на первый взгляд четких основ. Это — метод симметрий, оказавшийся очень эффективным в применении именно к тем процессам, для которых старая теория бессильна.

Когда-то симметрию называли «гармонией мира». Поиски гармонии мира привели одного из самых ярких естествоиспытателей всех времен Иоганна Кеплера к открытию законов движения планет. Что было известно Кеплеру? Необычайно много наблюдений — результат титанического труда Тихо Браге и самого Кеплера — и совсем ничего из того, что мы сейчас называем механикой. И так, не зная ни одного из законов Ньютона, Кеплер, руководствуясь только идеей о простых соотношениях между орбитами планет, находит законы, которые потом укладываются в фундамент механики Ньютона[1]. Конические сечения как орбиты планет, законы площадей и простые соотношения между размерами орбит и периодами обращения предстали перед Кеплером как проявления гармонии природы. Необычайно искусно соединив оккультные (а потому бесплодные) поиски астрологов с мастерством астронома-наблюдателя и подкрепив с пчелиным трудолюбием свои идеи вычислениями, он открыл новый путь в познании мира. Строгие логические обоснования идей Кеплера пришли лишь много позже.

Идеи симметрии возродились в естествознании только к концу XIX века, когда появились первые признаки того, что логически стройные аналитические методы приводят к тупику в объяснении новых явлений природы.

Замечательно, что в упомянутом докладе Гильберт предсказывал теории групп Ли большую будущность в физике. Но от первых замечаний до реального дела прошло еще немало лет. С большим трудом проникали в физику идеи симметрии и казавшийся почти всем очень сложным и абстрактным аппарат теории групп. Решающая роль здесь принадлежит Г. Вейлю и Е. Вигнеру[2]. В конце 20-х годов они увидели в квантовой механике идеальную среду для самого эффективного применения уже достаточно сильно развитого к тому времени аппарата теории групп. Решение уравнения Шредингера, теория атомных спектров — достаточно простые примеры приложения теории группы трехмерных вращений.

Вероятно, первой работой по теории групп, результат которой не был известен заранее, была работа Вигнера по обращению времени (ее мы поместили в дополнении к данной книге в знак уважения к той роли, которую она сыграла в развитии квантовой механики). Групповые методы внесли большой вклад и в развитие теории релятивистского электрона (уравнение Дирака). Тем не менее, хотя успехи теории групп стали очевидными

---

[1] Характерно, что хотя Ньютон, признававший только логическое развитие науки, и упоминает Кеплера, но идеи Кеплера остаются ему чуждыми.

[2] Книги Е. Вигнера «Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров» (ИЛ, 1961) и Г. Вейля «Классические группы, их инварианты и представления» (ИЛ, 1947), изданные на русском языке, сохранили всю свою ценность до настоящего времени. К сожалению, осталась непереведенной книга Г. Вейля «Теория групп и квантовая механика».

для большинства физиков, она в те годы с трудом пробивала себе путь в учебники и монографии.

Новый максимум интереса к теории групп возник в начале 60-х годов, когда появились статьи Гелл-Манна и Неемана о так называемой унитарной теории элементарных частиц (восьмеричный путь). Работа Гелл-Манна несколько шокировала физиков, и в начале ее даже не хотели принимать к печати. Метод открытия унитарной симметрии находился в резком конфликте со всей предыдущей историей физики. Для этой схемы не было никакой модели, и, несмотря на многие попытки, «кварки», лежащие в основе классификации Гелл-Манна (но не обязанные быть реальными даже в рамках этой схемы), так и не были обнаружены в природе.

Дальнейшие обобщения модели развивались в разных направлениях, и сейчас групповые методы заняли в теоретической физике весьма почетное место. Для молодого поколения физиков язык теории групп стал родным. Однако все достижения теории групп не отвечают на один вопрос: почему теория групп описывает природу? Но тогда законно задать еще два вопроса: почему вообще математические формулы могут описывать явления природы и почему явления природы описываются столь абстрактными формулами квантовой механики? Каждый физик рано или поздно приходит к этим вопросам. Может быть, Кеплер имел право себя об этом не спрашивать, но физика XX века эти вопросы не перестают мучить.

Е. Вигнер, на глазах которого протекала вся история квантовой механики, много думал и писал на эту тему. Его статьи содержат, по-видимому, наиболее полную информацию об эволюции взглядов на роль симметрии в физической теории. Не надо, конечно, ожидать, что эти статьи содержат исчерпывающий ответ на все вопросы. К ним надо относиться скорее как к материалу для размышлений. Автор обращается к читателю-физику и читателю-философу с изложением своих мыслей и, по сути дела, приглашает их к научному спору. В этом ценность книги Вигнера. При чтении книги придется порой заглянуть в учебник квантовой механики или в философскую энциклопедию. Однако в каждой из статей читатель найдет для себя новые точки зрения, которые заставят его задуматься над принципиальными основами современной физической картины мира.

Статьи, включенные в данную книгу, взяты в основном из сборника «Symmetries and Reflections». К ним мы добавили (часть V) несколько журнальных статей Вигнера, имеющих специальный характер, но существенно расширяющих круг идей, затронутых в более популярных статьях.

Я. Смородинский

ОТ РЕДАКТОРОВ АМЕРИКАНСКОГО ИЗДАНИЯ

Профессор Вигнер не только крупный ученый, но и ученый, наделенный необычным даром доходчиво излагать результаты научных исследований для неспециалиста, проявляющий к тому же большой интерес к проблемам, которые возникают перед человечеством при практическом применении науки. В эту книгу мы постарались включить многие из популярных статей Вигнера, опубликованных в различных журналах. Надеемся, что чтение этих статей окажется для читателей столь же стимулирующим, каким оно оказалось для редакторов.

Уолтер Дж. Мур,
проф. химии,
Университет штата Индиана.

Майкл Скривен,
проф. истории и философии науки,
Университет штата Индиана.

I. СИММЕТРИЯ И ДРУГИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

1

ИНВАРИАНТНОСТЬ В ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ[1])

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ, ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ, ИНВАРИАНТНОСТЬ

Мир очень сложен, и человеческий разум явно не в состоянии полностью постичь его. Именно поэтому человек придумал искусственный прием — в сложной природе мира винить то, что принято называть случайным, — и таким образом смог выделить область, которую можно описать с помощью простых закономерностей. Сложности получили название начальных условий, а то, что абстрагировано от случайного, — законов природы. Каким бы искусственным ни казалось подобное разбиение структуры мира при самом беспристрастном подходе и даже вопреки тому, что возможность его осуществления имеет свои пределы, лежащая в основе такого разбиения абстракция принадлежит к числу наиболее плодотворных идей, выдвинутых человеческим разумом. Именно она позволила создать естественные науки.

Возможность абстрагирования законов движения из хаотического множества происходящих вокруг нас явлений основывается на двух обстоятельствах. Во-первых, во многих случаях удается выделить множество начальных условий, которое не слишком велико, но в то же время содержит все, что существенно для интересующих нас явлений. В классическом примере свободно падающего тела можно пренебречь почти всеми условиями, кроме начального положения и начальной скорости падающего тела: его поведение будет всегда одним и тем же независимо от степени освещенности, наличия вблизи от него других тел, их температуры и т. д. Выделение множества условий, оказывающих влияние на тот или иной эксперимент, отнюдь не является тривиальной задачей. Наоборот, умение выделить такие условия и составляет основу искусства экспери-

[1]) Доклад прочитан 19 марта 1949 г. в Принстоне на торжественном заседании, посвященном чествованию проф. Альберта Эйнштейна. Опубликован в журнале: Proc. Amer. Phil. Soc., **93**, 521 (1949).

ментатора. Посещая иногда лаборатории, мы, теоретики, время от времени бываем порожены трудностями этого искусства.

И все же сама по себе возможность выделения начальных условий, определяющих интересующие нас явления, еще не позволяет открывать законы природы. Не менее важное значение имеет то обстоятельство, что при одних и тех же заданных существенных начальных условиях результат будет одним и тем же независимо от того, где и когда мы их реализуем. На языке начальных условий этот принцип можно сформулировать как утверждение о том, что абсолютное положение и абсолютное время никогда не являются существенными начальными условиями. Это утверждение (абсолютное положение и абсолютное время никогда не входят в число существенных начальных условий) стало первым и, может быть, наиболее важным принципом инвариантности в физике. Не будь ее, мы бы не могли открывать законы природы.

Инвариантность, о которой мы только что говорили, на языке современной математики носит название инвариантности относительно сдвигов в пространстве и времени. Не следует забывать, что и эта инвариантность может носить ограниченный характер. Если бы Вселенная оказалась существенно неоднородной, то законы природы в ее отдаленных частях могли бы сильно отличаться от тех, изучением которых занимаемся мы. В этом случае экспериментатор, помещенный в закрытую комнату, в принципе вполне мог бы отличить, находится ли он в центре Вселенной или вблизи от ее границ и живет ли он в раннюю эпоху расширения Вселенной или в более поздний период этого процесса. Постулат об инвариантности относительно сдвигов в пространстве и времени отвергает такую возможность, и его применение в космических масштабах, по существу дела, предполагает однородную и стационарную Вселенную. Имеющиеся в настоящее время данные ясно указывают на приближенный характер такого допущения.

ИНВАРИАНТНОСТЬ

Существуют ли другие принципы инвариантности, и если да, то какие? Принципы инвариантности можно разделить на два типа: старые, нашедшие свою наиболее полную и, по-видимому, окончательную формулировку в специальной теории относительности, и новые, еще не понятые до конца, с которыми мы встречаемся в общей теории относительности.

Помимо несущественности для протекания явления абсолютного положения (места) и времени в старых теориях инвариантности постулируется также несущественность ориентации и, наконец, состояния движения, если последнее равномерно, прямолинейно и не включает в себя вращения. Первые из названных принципов носят геометрический характер и кажутся настолько очевидными, что в явном виде они были сформулированы лишь в конце прошлого века. Последний принцип (несущественности состояния движения) отнюдь не очевиден. Это хорошо известно тем из нас, кто хоть раз пытался объяснить его человеку, далекому от физики. Если бы второй закон движения Ньютона гласил: «Все тела сохраняют состояние покоя до тех пор, пока на них не воздействует внешняя сила», — то принципа инвариантности относительно состояния движения не было бы. Наоборот, если бы тела в отсутствие внешней силы сохраняли ускорение, а не скорость, сферу действия этой инвариантности можно было бы значительно расширить. Можно поэтому без преувеличения сказать, что принцип инвариантности относительно движения был впервые четко сформулирован Ньютоном в его «Началах».

Наш постепенный отказ от одного весьма правдоподобного принципа — принципа подобия — свидетельствует о том, что старые принципы инвариантности следует считать продуктами опыта, а не *априорными* истинами. Согласно принципу подобия, наиболее отчетливо сформулированному Фурье, понятие геометрического подобия распространяется и на физические эксперименты, т. е. абсолютные размеры тел несущественны, если свойства последних рассматривать в надлежаще выбранном масштабе. Существование атомов, элементарного заряда и предельной скорости означало крушение этого принципа.

Формулы, описывающие то, что я называю старыми принципами инвариантности, были впервые полностью даны Пуанкаре, который вывел их из уравнений электродинамики. Он также осознал групповые свойства старых принципов инвариантности и назвал лежащую в их основе группу группой Лоренца, однако всю важность и универсальный характер этих принципов понял лишь Эйнштейн. Его статьи по специальной теории относительности знаменуют собой обращение существовавшей до того тенденции: до появления специальной теории относительности принципы инвариантности было принято выводить из законов движения. Работа Эйнштейна столь прочно утвердила старые принципы инвариантности, что мы теперь нуждаемся в особом напоминании и склонны забывать, что эти принципы основаны лишь на данных опыта. Для нас стало более естественным выводить законы природы и проверять их с помощью принципов инвариантности, чем выводить принципы инвариантности из того, что мы считаем законами природы.

Следующей вехой в истории инвариантности служит общая теория относительности. Уже сам факт, что общая теория относительности представляет собой первую попытку вывести закон природы путем отбора наиболее простого инвариантного уравнения, служит оправданием столь громкого эпитета. Еще более важным я считаю то обстоятельство, что общая теория относительности пытается установить предел применимости старых принципов инвариантности и заменить их одним, более общим принципом. Ограничение старых принципов инвариантности определяется структурой пространства, проявляющейся в переменной кривизне. Поскольку кривизна пространства в принципе наблюдаема, перемещение из области с малой кривизной в область с большой кривизной не оставляет законы природы инвариантными. Правда, физик, мыслящий старыми категориями, всегда может считать, что различия в законах природы, рассматриваемых в разных точках Вселенной, обусловлены отсутствием или, наоборот, близостью каких-либо масс. При таком подходе старые принципы инвариантности вновь обретают былую универсальность, но утрачивают всякий смысл. Однако если две точки в пространстве-времени эквивалентны только тогда, когда распределение масс в их окрестностях одинаково, то ясно, что их эквивалентность является скорее исключением, чем правилом.

Новый принцип инвариантности, которым общая теория относительности заменяет старые принципы, заключается в том, что все действия рассматриваются как передающиеся с помощью полей, переносящих возмущения от одной точки к другой. В переводе на более феноменологический язык это означает, что события в одной части пространства зависят только от полей в окрестности этой части пространства, т. е. от измеримых величин: процессы, происходящие вне рассматриваемой области, распространяются внутрь лишь с конечной скоростью[1]). Такой принцип инвариантности гораздо смелее и носит намного менее искусственный характер, чем старый принцип инвариантности относительно неоднородной группы Лоренца. Приведенная выше формулировка его несколько более феноменологична, чем общепринятая: она, однако, включает обычное требование инвариантности относительно всех дифференцируемых преобразований координат. Обе формулировки (новая и общепринятая) принципа инвариантности общей теории относительности выражают тот факт, что в законах физики и геометрии речь идет лишь о локальных измерениях, которые можно описать с помощью дифференциальных уравнений. В частности, построе-

[1]) Следует подчеркнуть, что сформулированный нами принцип представляет собой не инвариантность относительно произвольных преобразований координат, а менее абстрактный принцип отсутствия действия на расстоянии. Этот принцип в том виде, как он здесь сформулирован, обладает многими свойствами, присущими принципам инвариантности. — *Прим. автора при корректуре американского издания книги.*

ние выделенной галилеевой системы координат путем отнесения к другим, удаленным, галилеевым системам запрещается постулатом о том, что всю информацию, необходимую для описания ближайшего будущего рассматриваемой части пространства, можно получить из локальных измерений. Отсюда следует, что информация, относящаяся к удаленным точкам, не может добавить ничего существенного к знанию локальных условий, как это было бы в том случае, если бы с помощью удаленных точек можно было определить выделенные системы координат.

ИНВАРИАНТНОСТЬ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Лет тридцать назад, когда мы впервые столкнулись с грандиозными парадоксами атомной физики, вера в нашу способность понимать физические законы настолько пошатнулась, что появилась мысль об отказе от всех законов физики, за исключением законов сохранения энергии и импульса. Именно такой выход из создавшегося положения предложил Эйнштейн [2, 3].

Высший результат всех усилий, предпринимавшихся в течение последних 30 лет, сводится к следующему. В настоящее время мы убеждены в том, что располагаем непротиворечивой теорией атомных явлений, согласующейся со старыми представлениями о пространстве-времени и инвариантности. В основу этой теории положен анализ процесса измерения, проведенный главным образом Гейзенбергом и Бором, обратившими особое внимание на то, как сказывается измерение на измеряемом объекте. Ясно, что такая теория противоречит простой концепции сколь угодно точно известного распределения поля, из которой исходит обычная формулировка общей теории относительности. В частности, измерение кривизны пространства, обусловленной отдельно взятой частицей, вряд ли можно было бы провести, не создавая новых полей, во много миллиардов раз превосходящих по интенсивности исследуемое поле[1]).

До сих пор предпринималось очень мало попыток внести в основные понятия общей теории относительности такие изменения, которые позволили бы учесть влияние акта измерения на измеряемый объект. Тем не менее старые принципы инвариантности гармонируют с квантовой механикой, и эта гармония более полна, а взаимосвязь квантовых уравнений и свойств их инвариантности более тесна, чем в доквантовой теории.

Прежде всего я хотел бы обратить внимание на некоторые аналогии между ролью инвариантности в классической и в квантовой теории. И в той и в другой теории принципы инвариантности выполняют двоякую функцию. Во-первых, они

[1]) На интересную проблему в этой связи указал недавно Осборн [4].

определяют необходимое условие, которому должны удовлетворять все основные уравнения. Несущественные начальные условия не должны занимать сколько-нибудь важное место в результатах теории. Во-вторых, коль скоро фундаментальные уравнения заданы, принципы инвариантности либо в форме законов сохранения, либо иным образом оказывают значительную помощь при отыскании решений. И в классической и в квантовой теории законы сохранения импульса, энергии, углового момента и законы движения центра масс можно вывести из инвариантности уравнений относительно инфинитезимальных сдвигов и поворотов в пространстве-времени [1]).

Перечисленными аналогиями сходство между ролью инвариантности в классической и в квантовой теории по существу исчерпывается. Основная причина различий заключается в том, что множество состояний в квантовой теории намного шире, чем в классической. Кроме того, в квантовой теории существует принцип суперпозиции, который определяет структуру сильно расширившегося множества состояний. Именно принцип суперпозиции позволяет указывать состояния систем с особенно простыми трансформационными свойствами. Действительно, можно показать, что любое состояние произвольной квантовомеханической системы независимо от типа взаимодействий представимо в виде суперпозиции состояний некоторых элементарных систем. С математической точки зрения эти элементарные системы соответствуют неприводимым представлениям группы Лоренца, и, следовательно, их можно перечислить. Поскольку уравнения движения элементарных систем полностью определяются свойствами инвариантности последних, любое состояние представимо в виде линейной комбинации состояний, история которых полностью известна. Однако при описании состояний квантовомеханических систем с помощью неприводимых состояний вид почти всех операторов, имеющих физический смысл, остается неизвестным и зависит от выбора конкретной системы, типа взаимодействий и т. д. Это обстоятельство ставит нас перед весьма странной дилеммой. При обычном описании известен вид операторов, имеющих физический смысл, но временна́я зависимость состояний либо непредсказуема, либо вычисление ее сопряжено с большими трудностями. При описании с помощью неприводимых представлений ситуация прямо противоположна: временна́я зависимость состояний следует из их свойств инвариантности, но установить вид операторов, имеющих физический смысл, чрезвычайно трудно. Из сказанного существует исключение: состояния элементарных частиц пред-

[1]) В классической теории это заметили еще Клейн и его ученики. См. также работы [5—7].

ставимы в виде суперпозиции состояний единственного инвариантного множества. Именно это обстоятельство и позволило без труда перечислить возможные уравнения для элементарных частиц, а не столь давно — с помощью одних лишь теоретико-инвариантных соображений — достичь известного прогресса в установлении вида операторов для большинства физически важных величин. Частицу можно считать элементарной в указанном выше смысле, если она не обладает внутренней координатой, которая позволила бы инвариантным образом разделить ее состояния на две или на большее число групп. В этом ее характерное, отличительное свойство. Неслучайно, что все элементарные частицы, в том числе и квант света, подчиняются неприводимым уравнениям и, следовательно, представляют собой элементарные системы. Поскольку в классической механике твердое тело можно рассматривать как аналог элементарной частицы, теоретико-групповое описание движения твердого тела следует считать наиболее глубоким аналогом только что изложенного результата.

Второе, на что я хотел бы обратить внимание при сравнении квантовой и доквантовой теорий, — это роль таких преобразований, как отражения (инверсии), которые не могут быть порождены инфинитезимальными элементами. В классической физике эти преобразования не играли сколько-нибудь значительной роли, но при обсуждении фундаментальных уравнений и при попытках найти их точные решения оказались весьма ценными. К первой категории относится, например, замечание: теория [8], в которой нейтрино отождествляется с антинейтрино за счет того, что к инверсии пространства присоединяется нелинейная операция — переход к комплексно сопряженной волновой функции, — не может быть составной частью теории, описывающей частицы обычного типа [9]. Еще более ярким примером может служить нахождение решений фундаментальных уравнений с использованием инвариантности относительно отражений. Именно так удалось прийти к понятию квантового числа Лапорта — четности — одному из наиболее важных понятий спектроскопии.

Общее впечатление от квантовой механики и теории инвариантности ее уравнений можно выразить, если прибегнуть к менее конкретному, но вряд ли менее точному языку: они образуют неразрывное целое. Сказанное справедливо почти в такой же степени, как и в общей теории относительности. Последним и наиболее убедительным подтверждением справедливости этих слов может служить квантовая электродинамика Швингера: его теорию вообще невозможно сформулировать, не развив органически входящую в нее теорию инвариантности соответствующих величин и выражений. Более того, многие полагают, что именно в этом единстве и состоит наиболее важный успех теории Швингера. По их мнению, даже объяснение ранее неизвестных, а теперь твердо установленных экспериментальных фактов имеет для нас меньшее значение, чем уверенность в том, что мы всегда придем к одним и тем же результатам, если будем исходить из начальных условий, лишь несущественно отличающихся друг от друга, и производить вычисления для тех или иных физических явлений инвариантным образом.

СОХРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Мой обзор роли инвариантности в квантовой механике был бы весьма неполон, если бы я не упомянул об одном диссонансе в гармонии между квантовой механикой и старыми принципами инвариантности. Я имею в виду закон сохранения электрического заряда. В то время как законы сохранения всех остальных величин, таких, как энергия или угловой момент, естественно следуют из принципов инвариантности, все попытки подвести под закон сохранения электрического заряда столь же общую основу до сих пор не увенчались успехом. Разумеется, в классической механике дело обстояло точно так же, но в квантовой механике с присущей ей простотой связи между инвариантностью и обычными законами сохранения ситуация выглядит более подозрительно.

Краткое описание вывода обычных законов сохранения подтвердит сказанное более наглядно, чем абстрактные рассуждения. Чтобы вывести закон сохранения импульса, сначала строят состояния, в которых какая-нибудь одна компонента импульса, например в направлении оси x, имеет определенное значение p. Для этого выбирают произвольное состояние φ_0 системы, для которой требуется доказать закон сохранения, и строят все состояния φ_a, возникающие при смещении системы из состояния φ_0 на a в направлении оси x. Затем рассматривают суперпозицию состояний φ_a с коэффициентами e^{-ipa}

$$\Phi_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a e^{-ipa} da.$$

Состояние Φ_p обладает тем свойством, что новый сдвиг на b приводит к умножению Φ_p на e^{ipb}, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{a+b} e^{-ipa} da = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_c e^{-ip(c-b)} dc = e^{ipb}\Phi_p.$$

Такое состояние называется чистым состоянием с компонентой импульса в направлении оси x, равной p. Свойство состояния Φ_p переходить при сдвигах на b в состояние $e^{ipb}\Phi_p$ с течением времени не утрачивается: если по истечении некоторого периода времени состояние φ_0 переходит в ψ_0, то состояние φ_a переходит в ψ_a, которое получается из ψ_0 при сдвиге на a. Это следует из инвариантности уравнений движения относительно сдвигов. Вследствие этой инвариантности и линейности уравнений движения состояние Φ_p за тот же промежуток времени переходит в состояние

$$\Psi_p = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_a e^{-ipa} da.$$

При сдвиге на b величина Ψ_p умножается на e^{ipb}. Таким образом, свойство, которое характеризует состояние с импульсом p, не утрачивается со временем. В этом и состоит закон сохранения импульса.

Аналогичные рассуждения, примененные к другим принципам инвариантности, приводят к другим законам сохранения. Более того, квантование и допустимые значения квантованных величин также естественно возникают из приведенного выше анализа. Например, квантование углового момента является следствием условия, согласно которому поворот на 2π всегда возвращает систему в исходное состояние.

Никаких соображений, которые позволили бы объяснить закон сохранения электрического заряда и по общности и простоте были бы сравнимы с приведенными выше, не известно. Из классической теории можно заимствовать следующее рассуждение[1]). Предположим, что с помощью какого-то процесса мы можем создавать заряды в некоторой замкнутой системе. Поместим эту замкнутую систему в клетку Фарадея, зарядим клетку и создадим в нашей замкнутой системе определенный заряд. Для этого потребуется затратить некоторое количество энергии E. Поскольку ни одно физическое явление не зависит от абсолютного значения потенциала, количество энергии E не может зависеть от потенциала клетки Фарадея, внутри которой создается заряд. Извлечем затем нашу замкнутую систему из клетки Фарадея и перенесем ее подальше от клетки. При этом мы получим некоторое количество работы W. Обратим теперь процесс, который привел к образованию заряда, и получим количество энергии E, равное ранее затраченной энергии, поскольку процесс в замкнутой системе не должен зависеть от абсолютного значения электрического потенциала, под которым находится система. Разряженную систему вновь поместим в клетку Фарадея. При этом нам не придется производить никакой

[1]) На него обратил наше внимание Оппенгеймер во время дискуссии, последовавшей за докладом.

работы. Таким образом возникает замкнутый цикл, при совершении которого мы получаем работу W. Но, согласно первому началу термодинамики, это невозможно; следовательно, одно из наших исходных допущений должно быть ложным. Таким допущением является предположение о том, что электрический заряд можно создать внутри замкнутой системы.

Проведенное только что рассуждение показывает связь между зако́ном сохранения электрических зарядов и предположением о несущественности абсолютной величины электрического потенциала. Оно было переведено на язык квантовой механики и приобрело более изящный и общий вид [1]). И все же оно остается менее убедительным, чем рассуждения, приводящие к другим законам сохранения, и, разумеется, не позволяет учесть квантование электрического заряда.

Отсутствие полной ясности в обосновании закона сохранения электрического заряда поднимает несколько важных вопросов. Нет ли в известной ныне схеме квантовой механики существенных пробелов? В частности, не является ли комплексное гильбертово пространство более подходящей основой для описания векторов состояний? Не приведет ли использование гиперкомплексных волновых функций к существенно иным результатам? Еще более важен, несомненно, вопрос: является ли существование закона сохранения характерной чертой взаимодействия электромагнитного типа или мы встретим (а может быть, уже и встретили [2])) аналогичные законы сохранения и при взаимодействиях других типов?

---

[1]) См. работу [1], а также работу Вейля [8].

[2]) Вполне возможно, например, что устойчивость протона обусловлена существованием какого-то закона сохранения числа нуклонов (протонов и нейтронов) так же, как устойчивость электрона — законом сохранения электрического заряда. Если бы такого закона сохранения не существовало, то протон мог бы превращаться в позитрон, испуская при этом квант света, так же как электрон в отсутствие закона сохранения электрического заряда мог бы распадаться на квант света и нейтрино. Для доказательства закона сохранения числа нуклонов можно воспользоваться тем же мысленным экспериментом, который привел к установлению закона сохранения электрического заряда, но умышленно придать ему следующую, несколько неясную форму. Предположим, что такого закона сохранения не существует. Тогда ничто не препятствует рождению двух нуклонов на расстоянии, вначале большем радиуса действия ядерных сил. Пусть на рождение двух нуклонов расходуется энергия E. Сблизим нуклоны и получим при этом некоторое количество работы W. Пусть затем нуклоны аннигилируют, высвобождая затраченную ранее энергию E. В итоге мы получаем выигрыш в энергии, равный W. Разумеется, операции такого рода невозможны. Причину этого следует искать во многих физических явлениях, например связать с тем, что нельзя добиться достаточно точной локализации систем, в которых должно происходить рождение нуклонов (т. е. отнести за счет существования фундаментальной длины). Точно так же невыполнимость описанного эксперимента можно связать с зависимостью энергии E, которую необходимо затратить для рождения нуклонов, от абсолютного значения ядерного потенциала. Наша точка зрения отлична от обеих

Теория относительности, к юбилею которой была написана данная статья, обогатила физику в двух направлениях. Она указала выход из острых противоречий и трудностей, возникших в результате экспериментов Майкельсона — Морли, Физо, Трутона — Нобла и др. Найти выход позволил глубокий анализ концепции пространства-времени, и результаты этого анализа ныне составляют неотъемлемую часть арсенала знаний любого физика. Еще более непреходящий и более важный вклад в сокровищницу физических идей теория относительности внесла косвенным путем. Среди таких «побочных продуктов» теории относительности особенно важное значение имеет доказанная ею необходимость и плодотворность анализа вполне установившихся и, казалось бы, хорошо известных понятий, которые многие поколения воспринимали как нечто привычное. Теория относительности продемонстрировала также всю важность понятия инвариантности и расширила его рамки. Это ее достижение, по моему мнению, с полным основанием следует считать вторым по значению из ее косвенных результатов.

Выражаю свою признательность Баргману за критические замечания и обсуждение вопросов, затронутых в настоящей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *London F.*, Zs. Phys,, **42**, 375 (1927).
Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl.
2. *Poincaré H.*, Compt. Rend., **140**, 1504 (1905).
Dynamics of Electrons.
3. *Poincaré H.*, Circolo Mat. Palermo Rend., **21**, 129 (1906).
Sur la dynamique de l'électron.
4. *Osborne M. F. M.*, Bull. Amer. Phys. Soc., **24**, 2 (Berkeley Meeting), Paper A-3 (1949).
Quantum Theory Restrictions on the General Theory of Relativity.
5. *Engel F.*, Nachr. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen, 270 (1916).
Über die zehn allgemeinen Integrale der klassischen Mechanik.
6. *Hamel G.*, Zs. Math. Phys., **50**, 1 (1904).
Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik.
7. *Bessel-Hagen E.*, Math. Ann., **84**, 258 (1921).
Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik.
8. *Weyl H.*, Zs. Phys., **56**, 330 (1929).
Elektron und Gravitation. I.
9. *Okayama T.*, Phys. Rev., **75**, 308 (1949).
On the Mesic Charge.

вышеизложенных; реальное решение парадокса, по нашему мнению, связано с тем, что рождение одних лишь нуклонов (без рождения антинуклонов) невозможно. В качестве третьего проявления аналогии между законами сохранения электрического заряда и числа нуклонов следует упомянуть равенство «мезонного заряда» у всех нуклонов (хотя некоторые эксперименты, проведенные в последнее время, свидетельствуют об обратном). Если равенство «мезонных зарядов» различных нуклонов подтвердится, это будет свидетельствовать о том, что мезонный заряд аналогично хорошо известному квантованию электрического заряда также допускает квантование.

2

СИММЕТРИЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ [1])

ВВЕДЕНИЕ

Симметрия, инвариантность и даже законы сохранения, несомненно, играли важную роль в мышлении таких классиков физики, как Галилей и Ньютон, а может быть, и их предшественников. Однако этим идеям не придавали особого значения, и в явном виде их формулировали крайне редко. Уравнения Ньютона не предполагали существования выделенной системы координат, поэтому все направления и все точки пространства оставались инвариантными. Как мы теперь говорим, уравнения Ньютона были инвариантными относительно вращений и параллельных переносов. То же можно сказать и в отношении ньютоновского закона всемирного тяготения. Эти факты и гипотеза о возможности законов природы, обладающих меньшей симметрией, не считались особенно важными. Что же касается законов сохранения, то закон сохранения энергии использовался и был инстинктивно осознан в механике еще до Галилея [2]). Законы сохранения импульса и углового момента в их наиболее полном виде использовались не очень широко, хотя в частном случае центрального движения они, разумеется, приводят к одному из законов Кеплера. В большинстве книг по механике, написанных в конце прошлого века и даже позднее, вообще не упоминается общая теорема о сохранении углового момента [3]). Между тем эта теорема должна была быть общеизвестна, поскольку механики, занимавшиеся проблемой трех тел, где она используется, разумеется, неоднократно прибегали к ней. И все же должного внимания этой теореме не уделялось.

Положение резко изменилось, когда (в основном после появления теорий Эйнштейна) стали уделять много внимания инвариантности уравнений. Эйнштейн в явном виде сформулировал постулаты о симметрии пространства, т. е. об эквивалентности направлений и различных точек пространства, причем сде-

---

[1]) Опубликовано в журнале: Proc. Nat. Acad. Sci., **51**, № 5 (1964).

[2]) Гамель [1] замечает, что Иорданус де Немур (около 1300 г.) уже владел наиболее существенными сторонами понятия, которое мы теперь отождествляем с механической энергией, а Леонардо да Винчи постулировал невозможность вечного двигателя.

[3]) Так, Кэджори [2] уделяет этой теореме ровно полстрочки.

лал это в весьма яркой форме [1]). Тем самым Эйнштейн в модифицированном виде вновь установил эквивалентность координатных систем, находящихся в состоянии движения и покоя. Что же касается законов сохранения, то их значение стало очевидным, когда физики, заинтересовавшись моделью атома Бора, осознали всю важность теоремы о сохранении углового момента. Мне довелось быть живым свидетелем тех дней, и я помню всеобщую уверенность в правильности этого и других законов сохранения. Причины для такой уверенности были достаточно основательными, поскольку Гамель еще в 1904 г. установил связь между законами сохранения и фундаментальными симметриями пространства и времени [4, 5]. Хотя его основополагающая работа осталась практически неизвестной, по крайней мере среди физиков, уверенность в законах сохранения была столь сильной, как если бы основные идеи статьи Гамеля получили всеобщее признание. Это еще раз подтверждает, что в мышлении физика большую роль играет не знание, а интуиция.

С конца прошлого века наше отношение к симметриям и законам сохранения описало почти полный круг. В настоящее время трудно найти статью, посвященную фундаментальным проблемам физики, в которой не упоминались бы принципы инвариантности, а автор в своих рассуждениях не исходил бы из предположения, иногда излишне широкого [2]), о существовании связи между законами сохранения и принципами инвариантности. Кроме того, понятие симметрии и инвариантности распространилось на новую область, корни которой лежат намного дальше от непосредственного опыта и наблюдения, чем у классической области пространственно-временной симметрии. Учитывая это, мы считаем полезным начать с обсуждения отношения между явлениями, законами природы и принципами инвариантности. Интересующее нас отношение неодинаково для классических принципов инвариантности, которые мы будем называть геометрическими, и новых принципов инвариантности, которые мы назовем динамическими. В заключение я хотел бы рассмотреть с более элементарной, чем это обычно делается, точки зрения связь между законами сохранения и принципами инвариантности.

ЯВЛЕНИЯ, ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ И ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ

Проблема связи, существующей между этими понятиями, не нова — она уже давно (сначала почти бессознательно) занимает

---

[1]) См., например, его полупопулярную брошюру [3].

[2]) См., например, статью автора [6], а также работу Мюраи [7] и более позднюю работу Гринберга [8].

людей. Именно поэтому интересно рассмотреть ее в свете нашего большего опыта и, как мы надеемся, более зрелого понимания.

С весьма абстрактной точки зрения существует глубокая аналогия между отношением законов природы к явлениям, с одной стороны, и отношением принципов симметрии к законам природы — с другой. Мы начнем свое рассмотрение с первого отношения, т. е. с отношения законов природы к явлениям.

Если бы мы знали положение какой-нибудь планеты в любой момент времени, то законы физики не могли бы сообщить нам относительно движения этой планеты ничего нового. Верно и более общее утверждение: если бы мы располагали полной информацией обо всех событиях в мире независимо от того, где и когда они происходят, то законы физики, а в действительности и любой другой науки были бы нам не нужны. Я изрекаю весьма очевидную истину: законы естественных наук полезны нам потому, что без них мы бы знали о мире гораздо меньше. Если бы положение планеты было известно для любого момента времени, то математические соотношения между ее различными положениями, вытекающие из законов движения планет, не были бы нам нужны, но могли бы представлять известный интерес. Созерцание этих закономерностей доставляло бы нам некоторое удовольствие и развлечение даже в том случае, если бы они и не содержали новой информации. И все же, появись у кого-нибудь какие-то иные данные о движении той же планеты, мы, очевидно, могли бы возразить ему с большим успехом, если бы предсказываемые им положения противоречили законам движения планет (разумеется, при условии, что мы убеждены в правильности законов природы, воплощенных в законах движения планет).

Обратимся теперь к отношению симметрии, или принципов инвариантности, к законам природы. Если закон природы, например уравнения электродинамики, известен, то знание различных тонких свойств этих уравнений ничего не добавляет к их физическому содержанию. Интересно отметить, что корреляции между событиями, предсказываемыми уравнениями, остаются неизменными независимо от того, находится ли наблюдатель в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Все корреляции между событиями, однако, определяются уже самими уравнениями, и упомянутый факт инвариантности уравнений не изменяет ни числа, ни характера этих корреляций.

Обобщая ту же мысль, можно сказать, что если бы мы знали все законы или один всеобъемлющий закон природы, то свойства инвариантности этих законов не давали бы нам ничего нового. Созерцание симметрий могло бы доставить нам удовольствие и позабавить даже в том случае, если бы они и не содержали новой информации. Но если бы кто-нибудь предложил какой-то другой закон природы, то опровергать его мы могли бы более эффективно, если бы он противоречил нашему принципу инвариантности (разумеется, в предположении, что мы уверены в правильности этого принципа инвариантности).

Проведенный только что нами анализ отношений законов природы к явлениям и симметрии, или принципов инвариантности, к законам природы носит, очевидно, крайне фрагментарный характер. И той и другой теме можно было бы посвятить многие и многие страницы. Насколько можно судить, новые аспекты, которые были бы затронуты на этих страницах, не нарушили бы аналогию между указанными двумя отношениями, т. е. аналогию между отношением законов природы к явлениям и отношением принципов инвариантности к законам природы. Наоборот, мы открыли бы новые, более глубокие стороны этой аналогии и подтвердили бы, что функция, которую несут принципы симметрии, состоит в наделении структурой законов природы или установлении между ними внутренней связи, так же как законы природы устанавливают структуру или взаимосвязь в мире явлений.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ

В чем заключается различие между старыми, надежно установленными геометрическими и новыми (динамическими) принципами инвариантности? Геометрические принципы инвариантности, хотя они и наделяют структурой законы природы, формулируются в терминах самих явлений. Так, надлежащая формулировка инвариантности относительно сдвигов во времени гласит: корреляции между событиями зависят только от промежутков времени, разделяющих события, но не от момента времени, когда происходит первое событие. Если P_1, P_2, P_3 — положения, которые занимает в моменты времени t_1, t_2, t_3 уже упоминавшаяся нами планета, то она точно так же может занимать их в моменты времени $t_1 + t$, $t_2 + t$, $t_3 + t$, где промежуток времени t совершенно произволен. Новые же, динамические, принципы инвариантности формулируются в терминах законов природы. Они скорее относятся к тем или иным типам взаимодействия, чем к какой бы то ни было корреляции между событиями. Например, говоря о том специфическом законе природы, который управляет генерацией электромагнитного поля движущимися электрическими зарядами и обратным влиянием электромагнитного поля на движение зарядов, можно сказать, что электромагнитное взаимодействие обладает калибровочной инвариантностью.

Итак, динамические принципы инвариантности основаны на существовании определенных типов взаимодействий. Все мы читали, что когда-то давным-давно физики надеялись свести все взаимодействия к механическим. Некоторые из нас еще помнят, что в начале нашего века электромагнитные взаимодействия считались источником всех других видов взаимодействий. Встав на такую точку зрения, нам пришлось бы искать объяснение гравитационному взаимодействию, и наши поиски увенчались бы успехом. В настоящее время мы различаем четыре или пять типов взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, один или два типа сильных (т. е. ядерных) взаимодействий и слабое взаимодействие, обусловливающее β-распад, распад μ-мезона и некоторые аналогичные явления. Таким образом, мы оставили, по крайней мере временно, надежду на существование единого фундаментального взаимодействия. Более того, каждый тип взаимодействия обладает некоторой группой динамической симметрии, аналогичной группе калибровочных преобразований для электромагнитных взаимодействий.

Здесь мы подходим к границе известного. Не следует забывать, что и сама проблема взаимодействий до сих пор представляет собой загадку. Утияма своими работами способствовал появлению плодотворного направления [9, 10] в решении задачи о восстановлении типа взаимодействия по его группе. Однако у нас нет способа, который бы позволил заранее предсказывать группу, и мы не можем сказать, сколько всего имеется групп и, следовательно, различных взаимодействий. Группы динамической симметрии, по-видимому, никак не связаны между собой, не существует соответствия ни между различными группами, характеризующими разные взаимодействия, ни между этими группами и группой геометрической симметрии — единственной точно установленной группой, с которой мы знакомы в течение многих и многих лет.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Поскольку имеет смысл оставаться как можно дольше на *terra cognita,* рассмотрим сначала геометрические принципы инвариантности. Первым, кто обратил на них внимание, был Пуанкаре, и я хочу назвать группу соответствующих преобразований группой Пуанкаре [11, 12]. Истинный смысл и значение этих принципов инвариантности стал ясен лишь после появления специальной теории относительности Эйнштейна. Группа Пуанкаре содержит сдвиги в пространстве и времени. Это означает, что корреляции между событиями всегда и всюду одинаковы и что законы природы — концентрированное выражение корреляций — не зависят от того, когда и где они установлены. В противном случае человеческий разум вообще не мог бы находить законы природы.

Следует подчеркнуть, что законы симметрии применимы именно к законам природы, т. е. к корреляциям между событиями, а не к самим событиям. Разумеется, при переходе от точки к точке события могут меняться, но если кто-нибудь заметит положение брошенного камня в три различных момента времени и установит соотношение между этими тремя положениями, то оно окажется одинаковым для всех точек Земли.

Помимо сдвигов в пространстве и времени группа Пуанкаре содержит еще одну разновидность симметрии, которая не столь очевидна, как первая: она постулирует эквивалентность всех направлений. Этот принцип был осознан лишь после того, как люди поняли, что различие между понятиями «вверх» и «вниз» обусловлено земным притяжением. Иначе говоря, вопреки только что сказанному, событиями, между которыми законы природы устанавливают корреляцию, являются не три положения брошенного камня, а три положения камня относительно Земли.

Последняя симметрия — независимость законов природы от состояния движения, коль скоро оно продолжает оставаться равномерным, — вовсе не очевидна для неподготовленного ума[1]). Одним из ее следствий является то обстоятельство, что законы природы определяют не скорость, а ускорение тела: скорость различна в координатных системах, движущихся с различными скоростями, ускорение же одинаково, коль скоро координатные системы движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно. Поэтому принцип эквивалентности координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно (и их эквивалентность покоящейся координатной системе), не мог быть установлен до того, как был понят второй закон Ньютона. После открытия второго закона этот принцип был сразу же осознан самим Ньютоном. Правда, одно время доверие физиков к принципу независимости законов природы от состояния равномерного и прямолинейного движения было подорвано существованием некоторых электромагнитных явлений, но затем Эйнштейн возродил принцип в несколько измененной редакции.

---

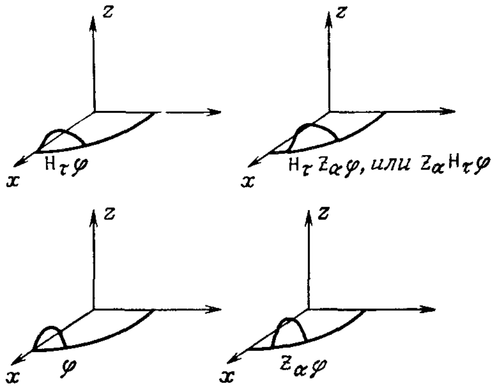
[1]) Так, физика Аристотеля исходит из постулата о том, что движение непременно требует постоянного действия обусловливающей его причины. Следовательно, все тела, если бы они не были подвержены действию причины, сообщившей им скорость, пришли бы в состояние абсолютного покоя (см., например, [13]). Для систем координат, движущихся относительно друг друга, это утверждение неверно. Системы координат, для которых оно верно, должны обладать некоторым выделенным состоянием движения.

Мы уже говорили о том, что законы сохранения энергии, импульса и углового момента являются прямыми следствиями только что названных симметрий. Особенно наглядно связь законов сохранения с симметрией проявляется в квантовой механике, где все эти законы сохранения непосредственно следуют из кинематики и при их выводе не приходится обращаться к динамическим законам (например, совершенно не используется уравнение Шредингера). Это утверждение будет нами вскоре доказано. В классической теории ситуация намного сложнее. Здесь основой даже простейшего доказательства законов сохранения служит замечание о том, что классическая теория является предельным случаем квантовой теории. Отсюда делается вывод, что любое уравнение, справедливое в квантовой теории при произвольном значении постоянной Планка h, справедливо и в пределе при $h = 0$. Следы этого рассуждения можно обнаружить и в общих соображениях относительно связи между законами сохранения и пространственно-временно́й симметрией в классической теории. Законы сохранения можно вывести также и элементарными средствами, используя динамическое уравнение, т. е. второй закон Ньютона, и предположение о том, что силы определяются потенциалом, зависящим только от расстояний между частицами. Поскольку понятие потенциала не вполне естественно, такой вывод законов сохранения не совсем обычен. Мах [14], например, считал, что сила, действующая на любую частицу, равна сумме сил, каждая из которых обусловлена действием какой-то другой частицы. Такое утверждение в неявном виде содержится в третьем законе Ньютона, ибо в противном случае понятие противодействия не имело бы смысла. Кроме того, Мах считал, что сила зависит только от положений пар взаимодействующих частиц, но не от их скоростей [1]). При только что сделанных предположениях закон сохранения импульса сразу же следует из третьего закона Ньютона, и, наоборот, третий закон Ньютона выступает в роли необходимого условия сохранения импульса. Все это отчетливо представлял еще Ньютон. Значение изотропности пространства для закона сохранения углового момента, который Эйлер, Бернулли и Дарси открыли почти 60 лет спустя после выхода ньютоновских «Начал», очевидно. Если бы направление силы, действующей между парой частиц, не совпадало с прямой, соединяющей одну частицу с другой, то оно не было бы инвариантным относительно вращений вокруг этой прямой. Отсюда следует, что при сделанных допущениях возможны только центральные силы. Поскольку вращательный момент таких сил, если они равны по величине и противоположны по направлению, равен

[1]) По этому поводу см. работы [6—8].

нулю, мы получаем закон сохранения углового момента. Если бы силы зависели от положения трех или большего числа частиц, этот закон не имел бы места.

В квантовой механике, как уже говорилось, законы сохранения следуют из основных кинематических понятий. Это связано с тем, что в квантовой механике состояниям отвечают векторы в некотором абстрактном пространстве, а физическим величинам, таким, как координата, импульс и т. д., — операторы, действующие на эти векторы. Например, из инвариантности относительно вращений следует, что для произвольно заданного состояния φ существует другое состояние φ_α, которое выглядит точно так же, как φ в системе координат, получающейся из исходной в результате поворота на угол α вокруг оси Z. Обозначим через Z_α оператор, переводящий φ в φ_α. Состояние, в которое переходит φ по истечении промежутка времени τ, обозначим $H_\tau\varphi$ (схематически все операции представлены на фиг. 1).



Фиг. 1.

В силу инвариантности относительно вращений φ_α по истечении того же промежутка времени перейдет в состояние $H_\tau\varphi_\alpha$, которое во второй (повернутой) системе координат выглядит так же, как $H_\tau\varphi$ в исходной. Следовательно, это состояние можно получить из состояния $H_\tau\varphi$, подействовав на последнее оператором Z_α. Итак,

$$H_\tau Z_\alpha\varphi = Z_\alpha H_\tau\varphi, \tag{1}$$

а поскольку это соотношение должно выполняться при всех φ, то

$$H_\tau Z_\alpha = Z_\alpha H_\tau. \tag{2}$$

Таким образом, оператор Z_α коммутирует с H_τ, а это и означает, что Z_α сохраняется. Действительно, угловой момент относительно оси Z совпадает с пределом выражения $(1/\alpha)(Z_\alpha - 1)$, когда угол α стремится к нулю. Аналогично можно вывести и другие законы сохранения. Следует подчеркнуть, что *операторы преобразования, по крайней мере инфинитезимальные, играют двоякую роль и сами являются сохраняющимися величинами.*

На этом мы закончим рассмотрение геометрических принципов инвариантности. Вы уже обратили внимание на то, что я ничего не сказал ни об отражениях (инверсиях), которые помимо всего прочего приводят к понятию четности, ни о заведомо более общем геометрическом принципе инвариантности, положенном в основу общей теории относительности. Причина, по которой я не упомянул об инверсии, состоит в том, что мне еще придется рассматривать ее в конце работы. Причина, по которой я ничего не сказал об инвариантности относительно произвольных преобразований координат, введенных общей теорией относительности, заключается в том, что, по моему мнению, лежащая в ее основе инвариантность носит не геометрический, а динамический характер. Итак, приступим к рассмотрению динамических принципов инвариантности.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ

Изучая динамические принципы инвариантности, мы в основном находимся на *terra incognita*. Тем не менее, поскольку некоторые из попыток развить динамические принципы не лишены остроумия и достаточно успешны, а тема эта сейчас представляет всеобщий интерес, я хотел бы сделать кое-какие замечания. Начнем с наиболее понятного случая электромагнитных взаимодействий.

Чтобы описать взаимодействие зарядов с электромагнитным полем, сначала вводят несколько величин для описания электромагнитного поля — так называемые электромагнитные потенциалы. Зная их, мы можем легко вычислять компоненты электромагнитного поля, но обратное неверно. Более того, потенциалы определяются полем неоднозначно: различные потенциалы (отличающиеся на градиент произвольной функции) порождают одно и то же поле. Отсюда следует, что потенциалы нельзя измерить, и, действительно, измеримыми оказываются лишь величины, инвариантные относительно преобразований, произвольно зависящих от потенциала. Разумеется, такая инвариантность носит искусственный характер. Нечто аналогичное можно было бы получить, введя в наши уравнения координаты какого-нибудь «духа»: уравнения должны были бы быть инвариантными относительно изменений координат «духа», но в действительности никакой пользы от введения такой величины мы бы не получили.

Аналогичная ситуация возникает и при замене полей потенциалами, если при этом все должно остаться неизменным. Поэтому обычно поступают иначе: постулируют (и в этом состоит решающий шаг), что для поддержания неизменности физической картины каждое преобразование, переводящее один набор потенциалов в другой, порождающий то же самое электромагнитное поле, должно сопровождаться некоторым преобразованием поля материи. Комбинация этих двух преобразований, из которых одно действует на электромагнитные потенциалы, а другое — на поле материи, называется калибровочным преобразованием. Поскольку калибровочное преобразование оставляет физическую ситуацию неизменной, всякое уравнение должно быть инвариантным относительно него. Однако если бы вид уравнений движения оставался неизменным, мы пришли бы к противоречию. Оставаясь инвариантными, они обладали бы абсурдным свойством: две абсолютно эквивалентные в один момент времени физические ситуации некоторое время спустя превращались бы в две существенно различные ситуации. Следовательно, уравнения движения необходимо каким-то образом изменить. Проще всего это сделать с помощью математического приема, называемого модификацией лагранжиана. Простейшая модификация, сохраняющая инвариантность, приводит к общепринятым уравнениям электродинамики, находящимся в хорошем согласии со всеми имеющимися в нашем распоряжении данными опыта.

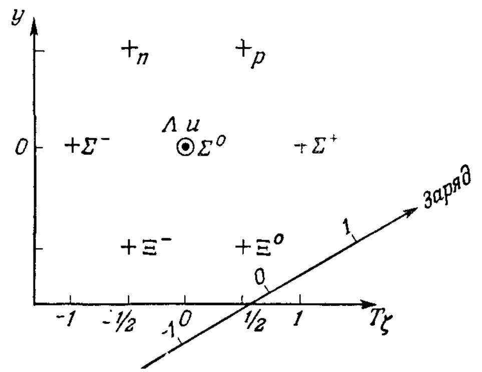
Не останавливаясь на подробностях, замечу все же, что аналогичная процедура допустима и по отношению к гравитационному взаимодействию. На возможность такого подхода обратил внимание еще Утияма [9]. Дополнительное усложнение, возникающее в этом случае, состоит во введении вместо потенциалов обобщенных координат. Получающиеся уравнения должны быть инвариантными относительно всех преобразований координат общей теории относительности. В результате физическое содержание теории остается неизменным, но язык ее становится более гибким, и одна и та же ситуация получает несколько эквивалентных описаний. Однако затем приходится вводить постулат о том, что поле материи преобразуется так же, как метрическое поле, вследствие чего для сохранения инвариантности уравнений последние необходимо модифицировать. Простейшая или одна из простейших модификаций приводит к уравнениям Эйнштейна.

Приведенная выше интерпретация инвариантности общей теории относительности характеризует ее не как геометрическую инвариантность. Динамический характер инвариантности общей теории относительности подчеркивал советский физик Фок [15][1]. Несколько упрощая существо дела, можно сказать, что геометрическая интерпретация постулирует необходимость превращения с течением времени двух физически различных ситуаций (типа изображенных на фиг. 1) лишь в такие ситуации,

[1]) См. также [16].

которые отличаются друг от друга так же, как отличались между собой исходные ситуации. В случае гравитационного взаимодействия дело обстоит иначе: постулируется лишь необходимость перехода с течением времени двух различных описаний одной и той же ситуации в два описания одной и той же физической ситуации. Аналогия со случаем электромагнитных потенциалов очевидна.

К сожалению, рассмотрение других взаимодействий требует иных соображений. Даже о самом слабом из сильных взаимодействий известно очень мало. Как сильное, так и слабое взаимодействия обладают группой, которая гораздо беднее группы калибровочных преобразований или группы произвольных преобразований координат[1]). Вместо бесконечного набора генераторов названных групп динамические группы этих взаимодействий обладают лишь конечным числом генераторов (а именно восемью). Тем не менее и этого оказывается достаточно для того, чтобы в значительной степени определить характерные особенности взаимодействий, а также вывести некоторые теоремы (аналогичные утверждениям, доказываемым в спектроскопии), позволяющие получать приближенные соотношения между амплитудами вероятностей реакций в различных каналах и между энергиями, или массами. На фиг. 2 показан октет барионов. Его члены связаны между собой простейшим нетривиальным представлением фундаментальной группы, эквивалентным представлению, комплексно сопряженному с ним.



Фиг. 2.

Еще одно различие между группами инвариантности электромагнитных и гравитационных взаимодействий, с одной стороны, и по крайней мере группой инвариантности сильного взаимодействия — с другой, заключается в том, что операции первых остаются операциями симметрии даже при учете других типов взаимодействий. Что же касается симметрии сильного взаимодействия, то другие взаимодействия «нарушают» ее, т. е. операции группы сильного взаимодействия остаются операциями симметрии лишь тогда, когда другими типами взаимодействий

---

[1]) По поводу сильного взаимодействия см. работы [17, 18], по поводу слабого взаимодействия — работы [19—22].

можно пренебречь. Группа симметрии помогает определить оператор взаимодействия во всех случаях. Однако, в то время как при действии групп электромагнитного и гравитационного взаимодействий остаются инвариантными все взаимодействия, при действии группы сильного взаимодействия остается инвариантным одно лишь сильное взаимодействие.

Ранее мы видели, что операции группы геометрической симметрии определяют законы сохранения. Естественно возникает вопрос: справедливо ли это утверждение для операций, принадлежащих группам динамической симметрии? По-видимому, и в этом отношении различные группы динамической симметрии ведут себя неодинаково. Закон сохранения электрического заряда обычно принято считать следствием калибровочной инвариантности, т. е. инвариантности относительно группы электромагнитных взаимодействий. С другой стороны, относительно законов сохранения, которые следовало бы приписать динамической группе общей теории относительности, мы можем строить лишь чисто умозрительные заключения. Однако есть основания надеяться на то, что законы сохранения барионного и лептонного зарядов удастся получить с помощью динамических групп сильного и слабого взаимодействий[1]). Если данная гипотеза верна, то это означает лишь, что мы еще не знаем истинных групп сильных и слабых взаимодействий. В пользу последнего утверждения можно привести два соображения. Во-первых, законы сохранения барионного и лептонного зарядов[2]) до сих пор не удалось вывести из свойств симметрии сильных и слабых взаимодействий и маловероятно, что это удастся сделать в будущем[3]). Во-вторых, симметрия сильного и слабого взаимодействий не является точной и нарушается при включении других взаимодействий. Неясно, каким образом точные законы сохранения могут следовать из приближенных симметрий. Между тем все данные говорят о том, что законы сохранения барионного и лептонного зарядов выполняются точно[4]). Все это еще

---

[1]) Идея о связи закона сохранения барионного заряда с группой сильных взаимодействий была высказана автором [23, 24]. Закон сохранения барионного заряда впервые постулировал Штюккельберг [25].

[2]) По поводу экспериментальной проверки этих и других законов сохранения см. работу [26]. Закон сохранения лептонного заряда предложили Маркс [27], Зельдович [28], а также Конопинский и Махмуд [29]; его, по-видимому, окончательно установили Ли и Янг [30]. В этой связи представляет интерес принадлежащее Ферми замечание, которое приводят в своей статье Янг и Тиомно [31].

[3]) К заключению о том, что вывести закон сохранения барионного заряда из свойств симметрии сильных взаимодействий невозможно, приходит в своей чрезвычайно интересной статье Сакураи [32]. Относительно закона сохранения лептонного заряда см. статью [33].

[4]) См. работы [26—31].

раз напоминает о том, что наши представления о динамических принципах инвариантности обоснованы далеко не так полно и прочно, как наша теория геометрических принципов инвариантности.

В заключение этой статьи мне хочется высказать одно замечание о принципе, который я, не колеблясь, называю принципом симметрии и который занимает промежуточное положение между геометрическим и динамическим принципами. Я имею в виду так называемую кросс-симметрию, или соотношения в кросс-каналах [1]). Рассмотрим амплитуду вероятности какого-нибудь процесса, например

$$A + B + \ldots \to X + Y + \ldots . \tag{3}$$

Эта амплитуда есть функция инвариантов, которые можно построить из 4-векторов импульсов налетающих и испущенных частиц. Из одного принципа инвариантности относительно отражений, на обсуждении которого я не буду останавливаться, следует инвариантность относительно «обращения времени», означающая, что амплитуда реакции (3) очень просто связана с амплитудой обратной реакции

$$X + Y + \ldots \to A + B + \ldots . \tag{4}$$

Если все скорости заменить на обратные и одновременно поменять местами прошлое и будущее (в этом по определению и заключается «обращение времени»), то реакция (4) перейдет в реакцию (3). Следовательно, амплитуды обеих реакций по существу совпадают. Аналогично если обозначить через $\bar{A}$ античастицу для частицы A, а через $\bar{B}$ античастицу для частицы B и т. д. и рассмотреть реакцию

$$\bar{A} + \bar{B} + \ldots \to \bar{X} + \bar{Y} + \ldots , \tag{5}$$

то ее амплитуда будет известна, коль скоро известна амплитуда реакции (3), потому что (согласно интерпретации Ли и Янга) реакция (5) получается из реакции (3) при пространственной инверсии. Точно таким же способом получают и амплитуду для реакции

$$\bar{X} + \bar{Y} + \ldots \to \bar{A} + \bar{B} + \ldots . \tag{6}$$

Соотношения (3)—(6) представляют собой не что иное, как следствия геометрических принципов инвариантности.

Можно пойти еще дальше. Соотношения в кросс-каналах говорят нам о том, как вычислить, например, амплитуду процесса

$$\bar{X} + B + \ldots \to \bar{A} + Y + \ldots , \tag{7}$$

[1]) См. [34, 35], а также [36].

если амплитуда реакции (3) известна. Разумеется, ни выкладки, ни конечные результаты не будут простыми. При проведении соответствующих вычислений нам придется учесть, что амплитуда реакции (3) является аналитической функцией инвариантов, построенных из импульсов участвующих в реакции частиц, и продолжить эту аналитическую функцию на такие значения переменных, которые не имеют физического смысла для реакции (3), но дают амплитуду для реакции (7). Существуют и другие реакции, амплитуды которых можно получить аналогичным путем. Амплитуды всех этих реакций вычисляют с помощью аналитического продолжения амплитуды реакции (3) или любой из остальных реакций. Так, для получения (7) можно поменять местами не A и X, а A и Y и т. д.

Соотношения в кросс-каналах обладают двумя свойствами геометрических принципов инвариантности: они не относятся к какому-либо конкретному типу взаимодействия, и большинство из нас убеждено, что эти соотношения обладают неограниченной сферой применимости. С другой стороны, хотя они и допускают формулировку в терминах событий, формулировка соотношений в кросс-каналах все же исходит из предположения о том, что мы располагаем некоторым законом природы, а именно математическим (а в действительности даже аналитическим) выражением для амплитуды одной из упоминавшихся выше реакций. Можно надеяться, что кросс-симметрия позволит установить связь между ныне разрозненными геометрическими и динамическими принципами инвариантности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hamel G.*, Theoretische Mechanik, Stuttgart, B. G. Teubner, 1912, S. 130.
2. *Cajori F.*, History of Physics, New York, Macmillan Company, 1929, p. 108.
3. *Einstein A.*, Relativitätstheorie, Braunschweig, Friedr. Vieweg und Sohn, 1916—1956. (Имеется перевод: «Собрание научных трудов Альберта Эйнштейна», т. I, изд-во «Наука», М., 1965, стр. 410.)
4. *Hamel G.*, Zs. Math. Phys., **50**, 1 (1904).
5. *Engel F.*, Nachr. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen, 270 (1916).
6. *Wigner E.*, Progr. Theor. Phys., **11**, 437 (1954). (Статья 19 данной книги.)
7. *Murai Y.*, Progr. Theor. Phys., **11**, 441 (1954).
8. *Greenberg D. M.*, Ann. Phys., **25**, 290 (1963).
9. *Utiyama R.*, Phys. Rev., **101**, 1597 (1956).
10. *Yang C. N.*, *Mills R. L.*, Phys. Rev., **96**, 191 (1954).
11. *Poincaré H.*, Compt. Rend., **140**, 1504 (1905).
12. *Poincaré H.*, Circolo Mat. Palermo Rend., **21**, 129 (1906).
13. *Crombie A. C.*, Augustine to Galileo, London, Falcon Press, London, 1952, p. 82, 244.
14. *Mach E.*, The Science of Mechanics, Chicago, Open Court Publ. Co., ch. 3, sec. 3. (Имеется перевод: *Мах. Э.*, Механика, СПб., 1909.)
15. *Фок В. А.*, Теория пространства, времени и тяготения, изд. 2-е, Физматгиз, М., 1961.
16. *Kretschman A.*, Ann. Phys., **53**, 575 (1917).
17. *Ne'eman Y.*, Nucl. Phys., **26**, 222 (1961).

18. *Gell-Mann M.*, Phys. Rev., **125**, 1067 (1962).
19. *Feynman R.*, *Gell-Mann M.*, Phys. Rev., **109**, 193 (1958).
20. *Sudarshan E. C. G.*, *Marshak R. E.*, Phys. Rev., **109**, 1960 (1958).
21. *Sakurai J. J.*, Nuovo Cim., **7**, 649 (1958).
22. *Зельдович Я. Б.*, *Герштейн С. С.*, ЖЭТФ, **29**, 698 (1955).
23. *Wigner E.*, Proc. Amer. Phil. Soc., **93**, 521 (1949). (Статья 1 данной книги.)
24. *Wigner E.*, Proc. Amer. Phil. Soc., **96**, 449 (1952).
25. *Stueckelberg E. C. G.*, Helv. Phys. Acta, **11**, 299 (1938).
26. *Feinberg G.*, *Goldhaber M.*, Proc. Amer. Phil. Soc., **45**, 1301 (1959).
27. *Marx G.*, Acta Phys. Hung., **3**, 55 (1953).
28. *Зельдович Я. Б.*, ДАН СССР, **91**, 1317 (1953).
29. *Konopinski E. J.*. *Mahmoud H. M.*, Phys. Rev., **92**, 1045 (1953).
30. *Lee T. D.*, *Yang C. N.*, Phys. Rev., **105**, 1671 (1957).
31. *Yang C. N.*, *Tiomno J.*, Phys. Rev., **79**, 497 (1950).
32. *Sakurai J. J.*, Ann. Phys., **11**, 1 (1960).
33. *Marx G.*, Zs. Naturforsch., **9a**, 1051 (1954).
34. *Goldberger M. L.*, Phys. Rev., **99**, 979 (1955).
35. *Gell-Mann M.*, *Goldberger M. L.*, Phys. Rev., **96**, 1433 (1954).
36. *Goldberger M. L.*, *Watson K. M.*, Collision Theory, John Wiley and Sons, New York, 1964, ch. 10. (Имеется перевод: *Гольдбергер М.*, *Ватсон К. М.*, Теория столкновений, изд-во «Мир», 1967.)

3

РОЛЬ ПРИНЦИПОВ ИНВАРИАНТНОСТИ В НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ[1])

КАКОВА РОЛЬ ПРИНЦИПОВ ИНВАРИАНТНОСТИ И КАКОЕ МЕСТО ОНИ ДОЛЖНЫ ЗАНИМАТЬ В ФИЗИКЕ?

Большая часть моей научной деятельности была посвящена исследованию принципов симметрии в физике, поэтому, получив приглашение проф. Бернардини выступить перед участниками юбилейной, десятой школы «Энрико Ферми» с докладом о философской и теоретико-познавательной роли этих принципов, я был не только польщен, но и весьма обрадован. Я намереваюсь рассмотреть роль симметрии и принципов инвариантности с несколько более общей точки зрения, чем обычная точка зрения физика. Я высоко ценю предоставившуюся мне возможность поделиться с вами некоторыми из выводов, к которым Хутаппель, ван Дам и я пришли после продолжительных дискуссий.

В нашем знании окружающего мира существует странная иерархия. Каждый миг приносит нам сюрпризы и неожиданности. Поистине можно сказать, что будущее неопределенно. Тем не менее между окружающими нас событиями существует определенная взаимосвязь, т. е. корреляции, которые мы познаем. Именно эти корреляции и стремится открыть наука, по крайней мере если речь идет о точных и ясно выраженных корреляциях. Последние содержат уточнения и обобщения нашего повседневного опыта, в некоторых случаях идущие так далеко, что мы не в состоянии проследить их происхождение. В других случаях, зная корреляции, мы можем с уверенностью предсказывать те или иные события. Значительная часть искусства и мастерства инженера и физика-экспериментатора состоит в умении создать условия, при которых определенные события заведомо должны произойти. Тем не менее непредвиденные заранее события всегда происходят.

Рассмотрев эту ситуацию несколько глубже, мы увидим, что не могли бы жить в том смысле, как мы это делаем, если бы между окружающими нас событиями не было корреляций. Даже если бы функции нашего тела остались неизменными, но мы не могли бы влиять на события, а между событиями не было бы корреляций или мы не знали бы их в достаточной степени, наше

[1]) Доклад прочитан 14 июля 1963 г. в Варенне на открытии десятой Международной физической школы «Энрико Ферми». Опубликован в сборнике: Proc. Intern. School of Physics «Enrico Fermi», **29**, 40 (1964).

сознание вряд ли могло бы отличаться от «сознания» растений. Наша воля не могла бы ни в чем проявляться, и то, что мы называем жизнью, было бы невозможно. Разумеется, это отнюдь не означает, что жизнь зависит от того, насколько точно мы знаем корреляции между событиями, выражаемые нашими законами природы, и в действительности точность этих законов, если над ней задуматься, обладает всеми элементами чуда.

Нам известны многие законы природы, и мы надеемся открыть их еще больше. Никто не может заранее предсказать, какой следующий закон природы будет открыт. Тем не менее законы природы обладают структурой, называемой нами принципами инвариантности. В некоторых случаях эта структура простирается настолько далеко, что позволяет находить новые законы природы на основе постулата о том, что законы должны обладать определенной инвариантностью.

Законы природы не могли бы существовать без принципов инвариантности. Нет необходимости глубже вникать в ситуацию, чтобы понять эту истину. Она разъяснена во многих учебниках элементарной физики, хотя лишь немногие читатели этих книг обладают достаточной степенью зрелости, позволяющей по достоинству оценить подобные разъяснения. Если бы корреляции между событиями менялись день ото дня и были бы различными для разных точек пространства, то открыть законы природы было бы невозможно. Таким образом, инвариантность законов природы относительно сдвигов в пространстве и времени служит почти необходимой предпосылкой того, что мы можем открывать корреляции между событиями, т. е. законы природы, и даже составлять их каталоги. Разумеется, это не означает, что точность или сферу применимости принятых в настоящее время принципов инвариантности следует считать необходимыми условиями существования законов природы. Чувство величайшего удивления, если даже не изумления, вызывает точность некоторых законов природы (я всегда испытывал искушение добавить кое-какие из них к кантовскому звездному небу над нами) и категорический императив внутри нас.

Именно переход с одной ступени на другую, более высокую — от явлений к законам природы, от законов природы к симметрии, или принципам инвариантности, — представляет собой то, что я называю иерархией нашего знания об окружающем мире.

К сказанному я хотел бы добавить лишь два замечания. Первое из них эквивалентно допущению о возможности введения некоторых упрощений в процесс познания нами окружающих явлений — тех явлений, между которыми мы хотим установить корреляции. Одни из этих явлений, такие, как восход и заход солнца, мы воспринимаем непосредственно, хотя объяснение того, что́ понимается под непосредственным восприятием, завело бы нас слишком далеко и было бы нелегкой задачей. Другие явления, такие, как движение α-частицы, мы воспринимаем лишь с помощью чрезвычайно сложных приборов типа пузырьковой или искровой камеры. В этих случаях мы верим, что уже известные нам законы природы позволят узнать, как функционирует используемая техника, и что информацию, извлекаемую при *интерпретации* чувственных данных, получаемых с помощью приборов, можно рассматривать наряду с теми чувственными данными, интерпретировать которые мы научились еще в детстве.

Вводимое мной допущение состоит в том, что восприятие явлений в физике обычно зависит от уровня нашего знания законов природы. Например, не располагая определенными знаниями, мы бы не могли интерпретировать то, что непосредственно наблюдаем в пузырьковой камере. Следовательно, отделение наших восприятий от законов природы — не более чем упрощение. Хотя мы и убеждены в том, что оно носит безвредный характер, тем не менее забывать о нем не следует.

Второе замечание, которым я хочу дополнить сказанное выше, имеет более непосредственное отношение к нашей теме. Я хочу объяснить, почему мне все время приходится говорить о *законах* природы, а не об одном универсальном *законе*. Действительно, если бы был открыт универсальный закон природы, то принципы инвариантности свелись бы просто к математическим преобразованиям, оставляющим инвариантным этот закон. Вполне возможно, что при получении различных следствий из универсального закона принципы инвариантности остались бы не менее полезными, чем они оказались при выводе качественных правил спектроскопии из законов квантовой механики. Но если бы универсальный закон природы был открыт, то принципы инвариантности утратили бы то место, которое они занимают в описанной выше иерархии наших знаний о природе. Разумеется, все мы пытаемся открыть универсальный закон природы, и некоторые из нас верят, что когда-нибудь он будет открыт. Другие (и их тоже немало) полагают, что наше знание законов природы никогда не будет полным. Хотя лишь вторая альтернатива отводит принципам инвариантности неизменно важное место, она не гарантирует, что принципы инвариантности будут занимать его всегда. В этой связи уместно заметить, что в отношении законов природы дело обстоит точно так же: если бы мы располагали полным описанием всех явлений, с которыми нам когда-либо придется столкнуться, то корреляции между явлениями, т. е. законы природы, во многом утратили бы свое значение подобно тому, как это произошло бы с принципами инвариантности в результате открытия универсального закона природы. Поскольку лишь немногие из нас (если таковые вообще имеются) верят в возможность лапласовского «сверхразума» с его полным знанием всех явлений, большинство склонно придавать большее значение законам природы, нежели принципам инвариантности.

Обратимся теперь к двум другим вопросам: во-первых, к вопросу о природе и развитии принципов инвариантности, во-вторых, к неизменно важной роли их в возможном и, я надеюсь, близком объединении физики с другими областями человеческого знания.

ПРИРОДА И РАЗВИТИЕ ПРИНЦИПОВ ИНВАРИАНТНОСТИ

В иерархии наших знаний об окружающем мире классические принципы инвариантности, или симметрии, лежат на две ступени выше непосредственных наблюдений, но их формулируют и должны формулировать в терминах непосредственных наблюдений. Так, принятая формулировка инвариантности относительно сдвигов во времени гласит: корреляции между событиями зависят лишь от интервалов времени, разделяющих эти события, и не зависят от момента времени, когда происходит первое из них. Следовательно, если в различные моменты времени созданы одни и те же надлежащие условия, то вероятности последующих событий будут одинаковыми независимо от того, когда были созданы эти надлежащие условия. Я сознаю и охотно допускаю, что эпитет «надлежащие», характеризующий условия, плох и неточен. Такая расплывчатость неизбежна, коль скоро мы ожидаем открытия новых агентов или новых эффектов, вызываемых уже известными агентами. Несмотря на эту неточность, утверждение о том, что, формулируя принципы инвариантности, мы опускаемся на две ступени и используем непосредственно термины наблюдений, остается в силе. Только при таком подходе принципы инвариантности могут обладать общностью, достаточной для того, чтобы указать нам путь к формулировке и проверке новых законов природы. Принципы инвариантности формулируются непосредственно в терминах наблюдений, так как нарушение их лучше всего устанавливается именно в терминах наблюдений. Например, для доказательства нарушения принципа четности была создана система, которая обладала симметрией относительно инверсии и в которой затем обнаружилось отклонение от этой симметрии. Достаточно было построить самую элементарную теорию, чтобы понять, что эксперимент Ву находится в противоречии с принципом четности.

Хотя классические принципы инвариантности формулируются непосредственно в терминах наблюдений, их редко используют для предсказания будущего. Гораздо чаще они служат средством проверки какой-нибудь теории или закона природы (и теория и закон природы соответствуют ближайшей к данным опыта ступени нашей иерархии); при такой проверке нам необходимо удостовериться, согласуются ли следствия из предполагаемого закона или новой теории с тем или иным принципом инвариантности. Для этого нередко приходится прибегать к довольно сложным математическим и логическим операциям, используя хитроумные построения, применяемые при формулировке законов природы. Этим и объясняется «ученый» характер некоторых рассмотрений в теории инвариантности.

Ранее уже говорилось, что законы природы трудно было бы устанавливать, если бы они не были инвариантными относительно сдвигов в пространстве и во времени. Не меньшие трудности возникали бы и в том случае, если бы законы природы не обладали инвариантностью относительно вращений. Все названные нами инвариантности считались твердо установленными еще до того, как возникла ясная концепция законов природы. Тем не менее проверить с помощью прямого эксперимента инвариантность относительно вращений — изотропию физического пространства — крайне трудно: нам кажется, что между направлениями вверх, вниз и в сторону существует явное различие. Вопреки этому, ньютоновская теория тяготения и его уравнения движения обладают инвариантностью относительно вращений и дают адекватное объяснение вышеупомянутому различию, связывая его с земным притяжением. Мы видим на этом примере, как законы природы и принципы симметрии — две соседние ступени лестницы — поддерживают друг друга. Результирующая инвариантность относительно преобразований Галилея или их модификации — преобразований Лоренца — отнюдь не была очевидна до того, как ее осознали Галилей и Ньютон. Приблизительно с этого же времени считалась установленной и симметрия относительно отражений в пространстве и времени, но эффективность и значение этих симметрий в квантовой механике оказались для всех сюрпризом. То же, хотя и в меньшей степени, относится и к другим классическим симметриям.

До сих пор я говорил о классических симметриях, т. е. о симметриях физического пространственно-временно́го континуума, аналогичных клейновским симметриям геометрического пространства. В настоящее время классические инвариантности, встречающиеся в физике, не являются единственными — законы природы могут быть инвариантными относительно сдвигов во времени, чего нельзя сказать о самой концепции инвариантности. Использование одного и того же термина для классических и новых инвариантностей (о последних речь пойдет дальше), может быть, не очень желательно, но это уже проблема из области семантики. То, что мы называем здесь «новыми инвариантностями», по-видимому, лучше было бы называть негеометрическими инвариантностями. В их число входит калибровочная инвариантность электромагнитного взаимодействия, «восьмеричный путь» Неемана — Гелл-Манна и несколько других инвариантностей. Качественное различие между инвариантностью относительно вращений и, например, калибровочной инвариантностью ощущается всеми. Тем не менее для этого интуитивно ощущаемого всеми различия уместно дать четкую и по возможности общую формулировку в терминах фундаментальных понятий.

Основное различие, если говорить кратко, состоит в том, что новые инвариантности представляют собой инвариантности отдельных типов взаимодействий, а не всех законов природы.

Отсюда следует, во-первых, существование различных типов взаимодействий, таких, как гравитационное, слабое, электромагнитное и, может быть, два вида сильных взаимодействий. Во-вторых, отсюда следует, что новые, или негеометрические, типы инвариантностей невозможно сформулировать непосредственно в терминах корреляций между событиями, в то время как классические, или геометрические, инвариантности, как уже подчеркивалось, допускают такую формулировку. Если бы новые инвариантности можно было сформулировать в терминах корреляций между событиями, то ими, так же как и классическими инвариантностями, обладали бы все взаимодействия. В действительности дело обстоит иначе.

Возникновение специфических типов взаимодействий как отдельных, вполне различных сущностей принадлежит к числу наиболее поразительных результатов последнего десятилетия. Позволительно заметить (не без сарказма), что число различных типов взаимодействий обладает тревожной тенденцией к возрастанию. Не меньшее удивление вызывает и то обстоятельство, что каждое из этих взаимодействий инвариантно относительно своей группы. Так, сильное взаимодействие инвариантно относительно группы $SU(3)$, электромагнитное — относительно группы калибровочных преобразований, слабое взаимодействие — относительно несколько более сложной группы, определяемой выражением $V - A$. Гравитационное взаимодействие я считаю инвариантным относительно общей группы координатных преобразований. В каждом случе группа симметрии позволяет найти выражение для соответствующего взаимодействия с помощью небольшого числа дополнительных гипотез, вводимых для большей простоты окончательного выражения. Если мое замечание относительно гравитационного взаимодействия верно, то результаты Фока означают, что инвариантность общей теории относительности при действии группы произвольных преобразований координат следует считать не классическим, а новым, негеометрическим типом инвариантности.

Нельзя не упомянуть и о том, что пять указанных выше типов взаимодействий по-разному связаны с соответствующими группами. Различия здесь довольно велики, и нельзя быть вполне уверенным, что в каждом отдельном случае нам уже известна истинная группа. По-видимому, должен существовать какой-то более глубокий принцип, позволяющий объяснить, почему имеется несколько типов взаимодействий и соответствующих им различных групп.

Рассмотрим неклассическую инвариантность, известную наиболее давно, — калибровочную инвариантность электромагнитного взаимодействия. Введение нового понятия — электромагнитных потенциалов — при описании взаимодействий электрических зарядов и электромагнитного поля почти неизбежно. Мы не утверждаем, что это абсолютно неизбежно, поскольку с помощью того или иного хитроумного приема всегда можно избежать использования любого конкретного понятия. Как это сделать в рассматриваемом нами случае электромагнитного взаимодействия, было показано Мандельстамом. Вместе с тем нет никаких сомнений в том, что электромагнитное взаимодействие с помощью потенциалов выражается гораздо проще. Потенциалы, используемые при описании электромагнитного поля, обладают избыточностью, т. е. одной и той же физической ситуации отвечает бесконечное множество потенциалов. Иначе говоря, физическая ситуация (т. е. все наблюдаемые свойства) инвариантна относительно определенных преобразований потенциалов, и, наоборот, наблюдаемы только те составленные из потенциалов величины, которые инвариантны относительно этих преобразований, называемых калибровочными. До этого момента электромагнитный потенциал выступает как некое громоздкое, но тем не менее не доставляющее никаких неприятностей понятие, служащее для описания электромагнитного поля. Однако на следующем этапе вводят постулат: физическая ситуация сохраняется неизменной лишь в том случае, если каждое преобразование электромагнитных потенциалов в эквивалентные потенциалы сопровождается определенным преобразованием того поля, с которым они взаимодействуют, т. е. поля материи. В этом и состоит решающий шаг. Он приводит к тому, что многие величины, зависящие лишь от поля материи, перестают быть наблюдаемыми, поскольку они не инвариантны относительно калибровочных преобразований. Чтобы эти величины вновь обрели инвариантность, их необходимо модифицировать. Кроме того, две различные комбинации из поля материи и потенциалов, получающиеся одна из другой при калибровочных преобразованиях и потому физически эквивалентные, с течением времени могут перейти в физически неэквивалентные комбинации, если их эволюция во времени будет определяться волновыми уравнениями, не изменяющими своего вида. Такое положение было бы абсурдным. Отсюда мы заключаем, что уравнения поля, определяющие временну́ю зависимость поля материи и потенциалов, должны быть модифицированы. Это означает, что мы должны учесть взаимодействие между полями. По-видимому, даже простейшая модификация, гарантирующая, что эквивалентные поля в течение всего времени остаются эквивалентными, приводит к точному описанию электромагнитного взаимодействия.

Итак, выражение для электромагнитного взаимодействия можно получить с помощью крайне искусственного приема. Во-первых, для описания поля нужно ввести избыточные величины, а именно потенциалы. Во-вторых, необходимо постулировать, что преобразование одного потенциала в эквивалентный ему должно сказываться и на других физических величинах — на поле материи; кроме того, следует принять специальное допущение относительно характера изменения этих величин. Наконец, требуется так модифицировать уравнения поля, чтобы они не приводили к нарушению эквивалентности нескольких возможных описаний одной и той же физической ситуации. Нетрудно видеть, что описанная процедура во многом напоминает ту, которая приводит к эйнштейновским уравнениям в теории гравитации. Действительно, в этой теории мы также можем для начала выбрать некоторую систему координат, удовлетворяющую требованиям Фока, и считать, таким образом, что дивергенция метрического поля равна нулю. Затем можно ввести некоторое избыточное поле, дивергенция которого отлична от нуля, и постулировать, что наблюдаемы или имеют физический смысл лишь те величины, которые одинаковы во всех допустимых системах координат, т. е. инвариантны. Решающий шаг в эйнштейновской теории состоит в принятии постулата, согласно которому все физические величины, в частности тензор энергии-импульса, преобразуются так же, как метрическое поле, т. е. как тензоры. Сделав этот шаг, мы получаем в распоряжение все постулаты римановой геометрии, которые использовал Эйнштейн при выводе своих уравнений в теории гравитации.

Говоря о том общем, что существует между гравитационным и электромагнитным взаимодействием, нельзя не отметить огромное различие между отношением гравитационного и электромагнитного взаимодействий к их группам, с одной стороны, и отношением слабого и сильного взаимодействий к их группам — с другой. Последние отношения и группы гораздо проще и носят более наглядный характер. Может быть, когда-нибудь мы поймем причины столь большого различия, но не исключена и другая возможность: постепенно модифицируя теорию, мы устраним эти различия и придем к более последовательной точке зрения на отдельные типы взаимодействий. Именно в этом состоит цель предложения Утиямы.

Если, говоря о неклассических, или негеометрических, инвариантностях, мы могли надеяться, что они обретут общую структуру и даже сольются в единой, более глубокой симметрии, то различие между классическими и неклассическими инвариантностями оказывается гораздо сильнее. Предположим, что мы хотим рассмотреть лоренц-инвариантность точно таким же образом, как мы только что рассматривали калибровочную инвариантность. Прежде всего в лоренц-инвариантной теории необходимо найти избыточные величины. Можно сказать, что нужной избыточностью обладают обычные абсолютные координаты и что использование их вместо расстояний между частицами или вместо координат относительно центра масс само по себе «неудобно, но безвредно». Однако обычные абсолютные координаты можно наблюдать, относя их к другим физическим системам, слишком удаленным от рассматриваемой системы и потому не влияющим на нее, но придающим физический смысл абсолютным координатам составных частей системы. Абсолютным потенциалам такого смысла придать нельзя, они истинно избыточны.

ВЗГЛЯД В БУДУЩЕЕ

Мы начали наше рассмотрение, упомянув о неопределенности будущего, о сюрпризах и неожиданностях, подстерегающих нас на каждом шагу. Говоря о той роли, которую предстоит сыграть в будущем принципам инвариантности, я вступаю на зыбкую почву. В оправдание заключительной части своего доклада я могу лишь заметить, что обычно под взглядом в будущее имеют в виду не столько точный прогноз тех перемен, которые оно принесет с собой, сколько попытку нарисовать картину возможного будущего.

Роль принципов инвариантности (по крайней мере в физике) еще не исчерпана, и мы пока очень далеки от «универсального закона природы». Мы далеки от него, если он действительно существует, и если перефразировать высказывание Пуанкаре, то современная картина с ее четырьмя или пятью различными типами взаимодействий с сильно отличающимися свойствами не такова, чтобы человеческий разум мог с удовлетворением созерцать ее. Это дает нам основание ожидать, что принципы инвариантности, наделяющие структурой законы природы, и в будущем послужат нам путеводными нитями и будут способствовать уточнению и объединению наших знаний о неодушевленном мире.

Рассматривая вопрос о том, сохранится ли и впредь различие и разобщенность между физическими и биологическими науками, в частности науками о человеческом разуме, мы приходим к менее оптимистическим заключениям. Многое свидетельствует о том, что более глубокое понимание процессов наблюдения и восприятия будет достигнуто в не слишком далеком будущем. В скором времени должны быть установлены и пределы нашей способности воспринимать окружающее. В этом должен состоять решающий шаг к достижению более полного знания об окружающем мире. На пути к такому знанию мы не должны рассматривать порознь физические явления и явления, сопровождающие мышление, забывая при анализе одних явлений средства, использованные при анализе других. Должен признаться, что у меня нет ни малейшего представления о структуре этой более полной науки. Я был бы удивлен, если бы в этой структуре обнаружилась иерархия, аналогичная той, которая была описана выше, и определенные места в ней занимали инвариантность и принципы симметрии. Необходимость в более сильной интеграции науки, по-видимому, лучше всего подтверждается тем, что основными понятиями интуиционистской математики служат физические объекты, что основным понятием в теоретико-познавательной структуре физики является понятие наблюдения и что психология еще не в состоянии дать нам понятия и идеализации, обладающие той степенью точности, которая требуется в математике и даже в физике. Таким образом, перекладывание ответственности с математики на физику, с физики на психологию не имеет конца. Исправить столь плачевное положение может лишь более тесное объединение этих, ныне разрозненных дисциплин.

4

ЯВЛЕНИЯ, ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ И ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ[1])

Возможность выступить здесь сегодня — для меня большая и неожиданная честь. Шесть лет назад в этом зале Янг и Ли дали общий обзор принципов инвариантности и, в частности, рассказали об открытии ими нарушения четности [1, 2]. Вряд ли имеет смысл повторять то, что уже было сказано ими об истории принципов инвариантности или о моем вкладе в развитие этих принципов, значение которого они, разумеется, преувеличили. Вместо этого я хотел бы подробно остановиться на общей роли принципов симметрии и инвариантности в физике, как современной, так и классической. Точнее говоря, я хотел бы обсудить соотношение между тремя категориями, играющими фундаментальную роль во всех естественных науках: явлениями, служащими сырьем для второй категории — законов природы, законами природы и принципами симметрии. Что касается последних, то я склонен отстаивать тезис о том, что для них сырьем служат законы природы.

ЯВЛЕНИЯ И ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ

Часто приходится слышать, будто цель физики состоит в объяснении природы или по крайней мере неживой природы. Что мы понимаем под объяснением? Объяснение — это установление нескольких простых принципов, описывающих свойства того, что подлежит объяснению. Если мы что-то поняли, то поведение этого «что-то», т. е. те явления, которые с ним происходят, не должно удивлять нас какими-либо неожиданностями. Впечатление, что иначе и быть не может, не должно покидать нас.

Ясно, что в этом смысле физика не претендует на объяснение природы. Действительно, огромные успехи физики обусловлены четким ограничением предмета ее исследования: физика пытается объяснить лишь закономерности в поведении различных объектов. Отказ от достижения более широкой цели и точное определение области, для которой можно искать объяснение,

[1]) Опубликовано в книге: «The Nobel Prize Lectures» (Copyright 1964 by the Nobel Foundation).

в настоящее время представляются нам совершенно необходимыми. Более того, точное указание области объяснимого может считаться величайшим открытием физики. Указать точную дату или того, кто совершил это открытие, нелегко. Еще Кеплер пытался найти точные законы, которые были бы аналогичны его законам движений планет и которым подчинялись бы размеры планетных орбит. Ньютон уже понял, что физика в течение долгого времени будет заниматься только объяснением тех открытых Кеплером закономерностей, которые ныне мы называем законами Кеплера [1]).

Закономерности в явлениях, которые стремится обнаружить физика, называются законами природы, и это название очень верно отражает существо дела. Подобно тому как юридические законы регулируют действия и поведение людей при некоторых заранее оговоренных условиях, но не пытаются устанавливать нормы для всех действий и любого варианта поведения, законы физики определяют поведение рассматриваемых ею тел только при вполне определенных условиях и представляют большую свободу вне этих условий. Элементы поведения, не определяемые законами природы, называются начальными условиями. Вместе с законами природы начальные условия определяют поведение настолько, насколько его вообще можно определить: любое сужение допустимых границ поведения всегда можно рассматривать как наложение дополнительных начальных условий. Хорошо известно, что до возникновения квантовой теории все были уверены в возможности полного описания поведения любого объекта: если бы классическая теория была верна, то законы природы вместе с начальными условиями должны были бы полностью определять поведение объекта.

Термин «начальное условие» был определен выше. Поскольку это определение носит несколько необычный характер, мы поясним его смысл на примере. Предположим, что мы не знаем уравнения Ньютона для движения звезд и планет

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = G \sum{}' M_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}, \qquad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i, \tag{1}$$

но сумели найти уравнение, определяющее третью производную радиуса-вектора:

$$\dddot{\mathbf{r}}_i = G \sum{}' M_j \times \frac{\dot{\mathbf{r}}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{r}_{ij}) - 3\mathbf{r}_{ij}(\dot{\mathbf{r}}_{ij}\cdot\mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^5}. \tag{2}$$

[1]) См., например, [3]. Все большее и большее понимание ограниченности области объяснимого, начиная с конца XIII века, можно проследить почти в каждой главе этой книги.

Это уравнение допускает обобщение: если силы F_i негравитационные, то его можно записать в виде

$$M_i\dddot{\mathbf{r}}_i = (\dot{\mathbf{r}}_i \operatorname{grad})\,\mathbf{F}_i + \dot{\mathbf{F}}_i. \tag{2a}$$

Начальные условия в этом случае содержат не только все $\mathbf{r}_i$ и $\dot{\mathbf{r}}_i$, но и $\ddot{\mathbf{r}}_i$. Значения $\mathbf{r}_i$, $\dot{\mathbf{r}}_i$ и $\ddot{\mathbf{r}}_i$ вместе с «уравнением движения» (2) определяют будущее поведение нашей системы так же, как его определяли значения $\mathbf{r}_i$ и $\dot{\mathbf{r}}_i$ и уравнение (1). Утверждение о том, что поведение полностью определяется начальными условиями и законами природы, одинаково верно для любой причинной теории.

Именно в четком разделении законов природы и начальных условий и состоит удивительное открытие ньютоновского века. Первые обладают немыслимой точностью, о вторых практически ничего неизвестно. Вдумаемся в смысл сказанного. Действительно ли то, что мы называем начальными условиями, не подчиняется никаким закономерностям?

Последнее утверждение заведомо неверно, если в качестве законов природы принять уравнения (2) и (2a), т. е. считать $\ddot{\mathbf{r}}_i$ частью начальных условий. В этом случае элементы начальных условий удовлетворяли бы некоторому соотношению, а именно уравнению (1). Следовательно, вопрос о независимости начальных условий должен ставиться так: существуют ли какие-нибудь соотношения между величинами, которые мы считаем начальными условиями? Тот же вопрос можно сформулировать более конструктивно: как удостовериться в том, что все законы природы, имеющие отношение к определенному кругу явлений, уже известны? Не зная всех «причастных» к интересующим нас явлениям законов природы, мы должны были бы задавать излишне много начальных условий для однозначного описания поведения изучаемого нами объекта. Один из способов убедиться в полноте наших знаний законов природы состоит в том, чтобы доказать возможность произвольного выбора всех начальных условий, однако в области очень больших или очень малых масштабов такой подход неприменим (мы не в состоянии изменить орбиты планет или проследить во всех подробностях поведение атомных частиц). Я не знаю других критериев, которые были бы столь же однозначны, но правильно выбранный, т. е. минимальный, набор начальных условий обладает одним характерным свойством, о котором нельзя не упомянуть.

Минимальный набор начальных условий не только не допускает никаких точных соотношений между своими элементами, наоборот, имеются основания полагать, что элементы минимального набора случайны или некогда были случайными в той мере, в какой это допускают наложенные извне связи. Свою мысль я хочу сначала пояснить на примере, который на первый взгляд кажется противоречащим выдвинутому мной тезису, но в действительности лучше всего демонстрирует как сильные, так и слабые стороны моего утверждения.

Рассмотрим снова нашу планетную систему. Ранее уже упоминалось, что приближенные соотношения между начальными условиями, т. е. между размерами орбит, навели Кеплера на некоторые идеи, от которых Ньютон впоследствии отказался. На первый взгляд кажется, что эти соотношения служат контрпримером, опровергающим тезис о минимальности набора начальных данных. Однако существование соотношений между начальными условиями нас не устраивает, поэтому возникает настоятельная необходимость доказать, что эти соотношения представляют собой не более чем следствия некой ситуации, в которой начальные условия *не были* связаны никакими соотношениями. Самую интересную попытку в этом направлении предпринял, по-видимому, Вейцзеккер [4] [1]). Он исходил из предположения о том, что первоначально солнечная система состояла из центральной звезды, окруженной вращающимся газовым облаком (в остальном движение газа предполагалось произвольным). Исходя из этой гипотезы, Вейцзеккер вывел упоминавшееся выше соотношение между радиусами планетных орбит, известное ныне как закон Боде. Предпринимались и более общие попытки вывести аналогичным образом все «организованное движение» и даже существование жизни. Лишь немногие из них были проведены подробно [2]), но уже самый факт, что такие попытки предпринимались, имеет большое значение.

В только что рассмотренных случаях имелось, по крайней мере кажущееся, противоречие со стохастической природой неконтролируемых начальных условий. Делались попытки показать, что «организованным» (точнее, кажущимся «организованным») начальным условиям предшествовало состояние, в котором неконтролируемые начальные условия были случайными. В целом такие ситуации представляют собой не правило, а исключение. В большинстве случаев у нас нет причин сомневаться в случайном характере неконтролируемых начальных условий, т. е. таких условий, которые мы не можем изменять по своему усмотрению. Случайный характер этих начальных условий подтверждается правильностью тех заключений, к которым мы приходим, исходя из предположения об их стохастичности. С такими ситуациями мы встречаемся в кинетической теории газов и вообще всюду, где процессы сопровождаются возраста-

---

[1]) См. также [5].

[2]) Интересным и хорошо понятным примером могут служить «фокусирующие соударения», в результате которых нейтроны, обладающие большими, но случайно ориентированными скоростями, превращаются в нейтроны, скорости которых малы, но имеют предпочтительное направление. См. [6, 7].

нием энтропии. Создается впечатление, что законы природы служат концентрированным выражением простого и изящного порядка, в то время как начальные условия (если только они неконтролируемы) выражают столь же простую и изящную нерегулярность. Маловероятно поэтому, что какой-нибудь из законов природы остается еще не замеченным.

Предыдущее рассмотрение характеризует законы природы как то регулярное, правильное, что имеется в поведении объекта. В квантовой теории такая точка зрения естественна: законы квантовой механики допускают адекватную формулировку в терминах корреляций между последовательными наблюдениями над объектом. Эти корреляции и являются теми закономерностями, которые определяются законами квантовой механики[1]. Утверждения классической теории, ее уравнения движения, обычно не рассматриваются как корреляции между наблюдениями. Тем не менее их назначение и функция состоят в задании таких корреляций, и в сущности они представляют собой не что иное, как краткое выражение таких корреляций.

ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ И ИНВАРИАНТНОСТЬ

Мы перестали ждать от физики объяснения всех явлений, относящихся даже к грубой структуре Вселенной, и хотим лишь открыть законы природы, т. е. порядок, которому подчиняются явления. Сказанное в предыдущем разделе позволяет надеяться, что интересующие нас закономерности образуют множество, допускающее четкое определение, хорошо отличимое от того, что мы называем начальными условиями и что обладает сильным элементом случайного, однако мы еще очень далеки от окончательного установления множества законов природы. Более того, если верно, что законы природы выражают точный порядок, то есть все основания полагать, что нам известна лишь бесконечно малая часть этого множества. Лучшим подтверждением может, по-видимому, служить факт, уже упоминавшийся здесь шесть лет назад Янгом: разнообразие типов взаимодействий. Янг назвал четыре из них: гравитационное, слабое, электромагнитное и сильное. Сегодня нам кажется, что существуют два типа сильных взаимодействий. Все названные взаимодействия играют роль во всяком процессе, но трудно, а быть может, и невозможно поверить в то, что законы природы должны обладать той степенью сложности, которая следует из существования четырех или пяти различных типов взаимодействий (никакой связи или аналогии между ними пока не открыто).

---

[1] См., например, в статье [8] раздел «Что такое вектор состояния?» Эта статья включена в данную книгу (стр. 141).

Естественно поэтому искать некий сверхпринцип, который относится к законам природы так же, как законы природы — к явлениям. Законы природы позволяют нам предвидеть одни явления на основе того, что мы знаем о других явлениях. Принципы инвариантности должны позволять нам устанавливать новые корреляции между явлениями на основании уже установленных корреляций между явлениями. Именно это они и делают. Если установлено, что события A, B, C, ... влекут за собой событие X, то события A', B', C', ... с необходимостью влекут за собой событие X' при условии, что A', B', C', ... и X' получаются из A, B, C, ... и X при действии одного из преобразований симметрии (инвариантности). Существует три категории таких преобразований симметрии:

а. *Евклидовы преобразования.* Явления A', B', C', ... и X' происходят в различных точках пространства, но находятся в том же отношении друг к другу, что и события A, B, C, ... и X.

б. *Сдвиги во времени.* События A', B', C', ... и X' происходят в различное время, но отделены друг от друга такими же интервалами времени, как события A, B, C, ... и X.

в. *Равномерное прямолинейное движение.* В системе координат, движущейся равномерно и прямолинейно, события A', B', C', ... и X' происходят так же, как и события A, B, C, ... и X.

Первые две категории принципов инвариантности всегда считаются твердо установленными. Действительно, нетрудно показать, что законы природы нельзя было бы познать, если бы они не удовлетворяли некоторым элементарным принципам инвариантности, относящимся к категориям «а» и «б». (т. е. если бы законы природы менялись от точки к точке или были различными в разные моменты времени). Принцип инвариантности, относящийся к категории «в», не столь естествен, и его нередко подвергали сомнению. Именно в восстановлении доверия к этому принципу и в его обосновании состоит величайшее достижение эйнштейновской специальной теории относительности. Позднее мы рассмотрим этот вопрос подробнее, но сначала полезно сделать несколько общих замечаний.

Первое замечательное свойство, присущее перечисленным выше принципам инвариантности, состоит в том, что все они геометрические, по крайней мере если под основным геометрическим пространством понимать четырехмерное пространство-время. Это означает, что соответствующие преобразования симметрии изменяют не события, а лишь их положение в пространстве и времени и их состояние движения. Нетрудно представить принцип, согласно которому, например, протоны заменяются электронами и, наоборот, скорости — координатами и т. д. [1]).

Второе замечательное свойство перечисленных нами принципов состоит в том, что они являются скорее принципами инвариантности, нежели принципами ковариантности. Это означает, что они постулируют одинаковые заключения как для «штрихованных», так и для «нештрихованных» посылок. Вполне мыслима такая ситуация, когда протекание некоторых событий A, B, C, ... обусловливает протекание событий X_1, X_2, X_3 ... с определеными вероятностями p_1, p_2, p_3, ... Протекание событий A', B', C', ... (полученных из исходных событий A, B, C, ... при преобразованиях симметрии) *могло бы*, вообще говоря, изменять вероятности протекания «преобразованных» следствий X_1', X_2', X_3', ..., например, следующим образом:

$$p_1' = p_1\left(1 - p_1 + \sum p_n^2\right),$$
$$p_1' = p_2\left(1 - p_2 + \sum p_n^2\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

однако в действительности этого не происходит, поскольку всегда выполняется равенство $p_i' = p_i$.

И первое и второе свойства принципов симметрии заслуживают особого упоминания, потому что существуют принципы симметрии — так называемая кросс-симметрия, или соотношения в кросс-каналах [2]), — которые, *по-видимому*, носят точный характер и явно не зависят от конкретных типов взаимодействий. В этом отношении кросс-симметрия до некоторой степени напоминает геометрические принципы инвариантности. В то же время между кросс-симметрией и геометрической инвариантностью существуют различия: преобразования кросс-симметрии изменяют события, и она в большей мере относится к принципам ковариантности, чем инвариантности. Так, зная сечение рассеяния протона на нейтроне, мы с помощью соотношений в кросс-каналах можем вычислить сечение рассеяния антипротона на нейтроне. Ясно, что первое явление отличается от второго, и сечение рассеяния антипротона на нейтроне не совпадает с сечением рассеяния протона на нейтроне, но получается из последнего в результате весьма сложных математических выкладок. Таким образом, соотношения в кросс-каналах, хотя они и не зависят от конкретного типа взаимодействия, не следует

[1]) Возможность принципа инвариантности, согласно которому скорости можно заменять координатами и наоборот, изучал Борн [9—11].

[2]) Кросс-симметрия была установлена в работах Гольдбергера [12], Гелл-Манна и Гольдбергера [13]. Более подробную библиографию можно найти в книге [14]. Связь между различными типами принципов симметрии была рассмотрена в двух недавно опубликованных статьях автора [15, 16]. (Первая из статей приведена в этой книге, см. стр. 241.) См. также [17].

относить к числу геометрических принципов инвариантности, и мы не будем рассматривать их здесь. Точно так же нас не будут интересовать динамические принципы симметрии, отражающие симметрию отдельных типов взаимодействий и не допускающие формулировку в терминах явлений (см. работы [15—17]).

Что же касается геометрических принципов, то следует заметить, что они зависят от того, как проходит граница между начальными условиями и законами природы. Так, закон природы, выражаемый уравнением (2) или (2а), получается из закона Ньютона дифференцированием по времени: он инвариантен относительно перехода к произвольной системе координат, движущейся с постоянным ускорением:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + t^2\mathbf{a}, \qquad t' = t, \tag{3}$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Ясно, что такой дополнительный принцип не может приводить к физическим следствиям, поскольку если начальные условия $\mathbf{r}_i$, $\dot{\mathbf{r}}_i$, $\ddot{\mathbf{r}}_i$ реализуемы [т. е. удовлетворяют уравнению (1)], то преобразованные начальные условия $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$, $\dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i$, $\ddot{\mathbf{r}}'_i = \ddot{\mathbf{r}}_i + 2\mathbf{a}$ не могут быть реализуемыми.

Рассмотренные нами принципы симметрии представляют собой не что иное, как принципы симметрии ньютоновской механики и специальной теории относительности. С полным основанием можно задать вопрос: почему ничего не было сказано о гораздо более общих принципах инвариантности общей теории относительности, также носящих на первый взгляд геометрический характер? Причина, по которой я умолчал о последних принципах, заключается в том, что я, разделяя взгляды Фока [1]), не считаю преобразования криволинейных координат общей теории относительности преобразованиями симметрии в том смысле, как это понималось выше. Преобразования общей теории относительности принадлежат к числу так называемых активных преобразований, заменяющих события $A, B, C, \ldots$ событиями $A', B', C', \ldots$. До тех пор пока активные преобразования считаются допустимыми, ни о какой инвариантности, имеющей физический смысл, не может быть и речи. Тем не менее, ограничив свои действия лишь заменой одной системы криволинейных координат другой, мы придем к «новому описанию» в смысле Мелвина [20]. Такая замена не изменяет событий и не определяет какой-либо структуры в законах природы. Сказанное вовсе не означает, будто преобразования общей теории относительности не являются полезными средствами отыскания правильных законов гравитации — ясно, что они полезны.

---

[1]) См. [18]. Сомнения относительно геометрического характера постулата об инвариантности относительно общих преобразований координат были ранее также высказаны Кречманом [19].

Однако, как я уже говорил [15—17], принцип, который они позволяют сформулировать, отличается от рассмотренных в этой лекции геометрических принципов инвариантности и принадлежит к числу динамических принципов.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ ИНВАРИАНТНОСТИ, ПРИБЛИЖЕННЫЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

В двух предыдущих разделах мы неоднократно подчеркивали внутренний смысл принципов инвариантности, представляющих собой строгие корреляции корреляций между событиями, существование которых постулировано законами природы. Уже одно это указывает на, несомненно, наиболее важное в настоящее время использование имеющейся в нашем распоряжении системы принципов инвариантности: они играют роль пробного камня при проверке правильности предполагаемого закона природы. Закон природы считается правильным лишь при условии, если постулируемые им корреляции согласуются с принятыми принципами инвариантности.

Кстати сказать, основополагающая статья Эйнштейна [21], в которой он приходит к формулировке специальной теории относительности, может служить ярким подтверждением высказанного только что мнения. В этой статье Эйнштейн обращает внимание на то, что корреляции между событиями одинаковы во всех системах координат, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, хотя в то время причины, которым приписывались эти корреляции, считались зависящими от состояния движения координатной системы. Эйнштейн чрезвычайно широко использовал принципы инвариантности при угадывании правильной формы закона природы — в данном случае закона тяготения, — постулируя, что этот закон не должен противоречить введенным им принципам инвариантности [1]). Столь же замечательным примером в наши дни может служить использование принципов инвариантности в квантовой электродинамике. Эта область физики не является последовательной теорией. Строго говоря, ее вообще нельзя назвать теорией в подлинном смысле этого слова, поскольку ее уравнения противоречат друг другу. Тем не менее эти противоречия удается достаточно разумно разрешить, приняв постулат о том, что следствия, вытекающие из квантовой электродинамики, должны согласовываться с требованиями теории относительности [2]). Другой подход, еще более фундаментальный, пытается аксиоматизировать квантовые теории поля. Краеугольным камнем всей

---

[1]) См. [22—24]. Аналогичные результаты почти одновременно с Эйнштейном получил Гильберт [25].

[2]) См. [26, 27]. В последней книге можно найти дальнейшие ссылки.

аксиоматики служат принципы симметрии[1]). Мне не хотелось бы больше задерживаться на этом вопросе, поскольку его уже обсуждали достаточно часто и красноречиво. Кроме того, некоторые его аспекты были рассмотрены мной раньше [12—17].

Служить пробным камнем для проверки «кандидатов» в законы природы — по-видимому, наиболее важная функция принципов инвариантности, но она не единственна. Во многих случаях следствия из законов природы удается вывести, руководствуясь особыми свойствами, присущими математическому аппарату теории, и постулируя, что эти законы—точная форма которых может быть неизвестна — не противоречат принципам инвариантности. В качестве наиболее яркого примера такой ситуации сошлемся на вывод законов сохранения импульса, углового момента, энергии, движения центра масс на основе либо лагранжевой схемы классической механики, либо гильбертова пространства квантовой механики с помощью перечисленных выше геометрических принципов инвариантности[2]). Замечу кстати, что законы сохранения — это единственные известные в настоящее время универсальные корреляции между наблюдениями. Для тех, кто выводит законы сохранения из геометрических принципов инвариантности, ясно, что область применимости этих законов выходит за рамки любых частных теорий (гравитации, электромагнетизма и т. д.), практически обособленных друг от друга в современной физике. Связь между принципами инвариантности и законами сохранения (в число последних в понимаемом здесь контексте непременно входит закон движения центра масс) неоднократно и со всеми подробностями обсуждалась в литературе.

В квантовой теории принципы инвариантности позволяют прийти к еще более далеко идущим заключениям, чем в классической механике, и мой интерес к принципам инвариантности первоначально был связан именно с этим обстоятельством. Причина возросшей эффективности принципов инвариантности кроется в линейности положенного в основу квантовой теории гильбертова пространства[3]). Последнее означает, что из любых двух векторов состояния ψ_1 и ψ_2 можно построить бесконечно много новых векторов состояния:

$$\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2, \tag{4}$$

[1]) См. статью Вайтмана [28] и многочисленные другие работы в том же сборнике.

[2]) См. работы [29—33]. Квантовотеоретический вывод законов сохранения дал Вигнер [34]. В этой же статье приведен закон сохранения четности, справедливый, как показано в [1, 2], лишь приближенно. Относительно несохранения четности см. также работу [28].

[3]) Это замечание я впервые услышал от Янга на праздновании столетия со дня основания колледжа Брин Моур. См. также мою статью [35].

где a_1 и a_2 — произвольные числа. Аналогично можно построить суперпозицию нескольких состояний (их может быть даже бесконечно много). То, что состояния допускают суперпозицию, физически отнюдь не очевидно. В частности, даже зная, как перевести систему в состояния ψ_1 и ψ_2, мы не можем указать способа, позволяющего перевести ее в суперпозицию этих состояний. Рецепт должен был бы зависеть от коэффициентов, с которыми эти два состояния входят в суперпозицию, и, естественно, просто неизвестен. Следовательно, принцип суперпозиции представляет собой не что иное, как постулат существования и только существования, хотя и весьма эффективный и полезный.

Поясним сказанное на примере. В классической теории если одно состояние задано (предположим, что речь идет об орбите какой-нибудь планеты), то другое состояние, т. е. другую орбиту, можно получить из первого при вращении исходной орбиты вокруг центра притяжения. Этот факт интересен сам по себе, но не приводит к каким-либо особенно удивительным следствиям. В квантовой теории дело обстоит точно так же, но помимо этого из состояний, получающихся при повороте из данного, в соответствии с уже упоминавшимся принципом можно образовывать суперпозицию. Если направления осей поворотов, производимых над первоначальным состоянием, были равномерно распределены в пространстве, а результирующие состояния при составлении суперпозиции брались с одинаковыми коэффициентами, то в итоге мы с необходимостью получим состояние, обладающее сферической симметрией. Построение сферически симметричного состояния могло бы закончиться неудачей только в том случае, если бы искомая суперпозиция оказалась нулевым вектором гильбертова пространства, т. е. если бы мы не получили никакого состояния. Но стоит лишь выбрать суперпозицию с другими коэффициентами (в двумерном случае коэффициенты имеют вид $e^{im\varphi}$, где φ — угол поворота начального состояния), как результирующее состояние, хотя и не обладающее более сферической, а на плоскости — аксиальной симметрией, по-прежнему будет обнаруживать некоторые простые свойства относительно вращений. Именно эта возможность построения состояний, обладающих либо полной вращательной симметрией, либо, по крайней мере, простыми трансформационными свойствами относительно вращений, и есть то фундаментально новое, что приносит квантовая теория. Стационарные состояния покоящихся систем обладают той высокой симметрией относительно вращений, о которой мы только что говорили. Такие состояния играют важную роль в теории простых систем, например атомов, и их высокая симметрия удовлетворительна с точки зрения логического обоснования теории.

Использование принципа инверсии, или отражения, также основано на принципе суперпозиции. В классической механике, так же как и в квантовой механике, справедливо утверждение: если некоторое состояние возможно, то возможно и зеркальное отражение этого состояния. В классической теории из этого факта нельзя извлечь никаких важных следствий. В квантовой же теории мы имеем право построить суперпозицию исходного состояния и его зеркального отражения с равными или равными по величине, но противоположными по знаку коэффициентами. В первом случае мы получим состояние, симметричное относительно отражения (инверсии), во втором — антисимметричное. Выдающееся достижение Ли и Янга, о котором мы уже упоминали ранее [1, 2], состояло именно в том, что им удалось найти чрезвычайно простую новую интерпретацию физической природы одной из операций инверсии, а именно инверсии пространства, и, кроме того, доказать, что старая интерпретация неверна. Рассмотрение операции «обращения времени» требует гораздо больших предосторожностей, потому что соответствующий оператор антиунитарен. Теоретически это обстоятельство должно приводить к новому квантовому числу и новой классификации частиц [1]), однако на практике оно не было использовано.

Мой доклад был бы не полон, если бы я, хотя бы кратко, не упомянул приближенные соотношения симметрии. Подобно всем приближенным соотношениям, они могут выполняться с большой точностью при одних условиях и существенно нарушаться при других. Критические условия могут зависеть от состояния объекта или определять тип явления. Наиболее важным примером соотношений первого рода могут служить малые относительные скорости. В этом случае магнитные поля слабы и направление спинов не сказывается на поведении остальных координат. Мы приходим к известной в спектроскопии схеме связи Рассела — Саундерса (см., например, [37]). Еще более интересным был бы случай очень больших скоростей, при которых величина массы покоя становится несущественной. К сожалению, он не был изучен подробно, хотя первые многообещающие шаги в этом направлении уже сделаны [2]).

Наиболее важным примером явлений, обладающих, помимо уже названных, дополнительными преобразованиями симметрии,

---

[1]) Подробный анализ операций инверсии см. в [36].

[2]) См. [38]. Дополнительные операции симметрии образуют конформную группу. Каннингхэм [39] и Бейтмен [40] обнаружили, что преобразования этой группы оставляют инвариантными уравнения Максвелла в пустоте, т. е. уравнения, описывающие распространение света (происходящее, разумеется, «со скоростью света»). Позднее аналогичные рассмотрения были проведены в работах [41, 42]; там же можно найти и более подробную библиографию по этому вопросу.

следует, по-видимому, считать такие процессы, как столкновения между атомами, молекулами и ядрами. Во всех этих процессах слабое взаимодействие, связанное с β-распадом, роли не играет, а инверсия является полноправной операцией симметрии. То же можно сказать и об обычной спектроскопии.

В явлениях другого, не менее интересного типа электромагнитное взаимодействие также имеет лишь второстепенное значение, вследствие чего электрический заряд частиц становится несущественным и возникает новая операция симметрии: перестановка протона и нейтрона или — в более общем плане — членов изотопического мультиплета. Эти и другие случаи расширенной симметрии приводят к чрезвычайно интересным вопросам, находящимся в настоящее время в центре внимания, однако этот круг проблем весьма обширен и сложен, чтобы его можно было подробно обсуждать здесь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yang C. N.*, Science, **127**, 565 (1958).
2. *Lee T. D.*, Science, **127**, 569 (1958).
3. *Crombie A. C.*, Augustine to Galileo, Falcon Press, London, 1952.
4. *von Weizsäcker C. F.*, Zs. Astrophys., **22**, 319 (1944).
5. *Chandrasekhar S.*, Rev. Mod. Phys., **18**, 94 (1946).
6. *Silsbee R. H.*, Journ. Appl. Phys., **28**, 1246 (1957).
7. *Lehmann C.*, *Leibfried G.*, Zs. Phys., **172**, 465 (1963).
8. *Wigner E.*, Amer. Journ. Phys., **31**, 6 (1963). (Статья 10 данной книги.)
9. *Born M.*, Nature, **141**, 327 (1938).
10. *Born M.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A165**, 291 (1938).
11. *Born M.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A166**, 552 (1938).
12. *Goldberger M. L.*, *Phys. Rev.*, **99**, 979 (1955).
13. *Gell-Mann M.*, *Goldberger M. L.*, Phys. Rev., **96**, 1433 (1954).
14. *Goldberger M. L.*, *Watson K. M.*, Collision Theory, John Wiley and Sons, New York, 1964, ch. 10. (Имеется перевод: *Гольдбергер М.*, *Ватсон К. М.*, Теория столкновений, изд-во «Мир», 1967.)
15. *Wigner E.*, в сборнике: Proc. Intern. School of Physics «Enrico Fermi», **29**, 40 (1964). (Статья 3 данной книги.)
16. *Wigner E.*, Physics Today, **17**, 34 (1964).
17. *Wigner E.*, Progr. Theor. Phys., **11**, 437 (1954). (Статья 19 данной книги.)
18. *Фок Б. А.*, Теория пространства, времени и тяготения, изд. 2-е, Физматгиз, М., 1961.
19. *Kretschman E.*, Ann. Phys. Lpz., **53**, 575 (1917).
20. *Melvin M. A.*, Rev. Mod. Phys., **32**, 477 (1960).
21. *Einstein A.*, Ann. Phys. Lpz., **17**, 891 (1905). (Имеется перевод: «Собрание научных трудов Альберта Эйнштейна», т. I, изд-во «Наука», М., 1965, стр. 7.)
22. *Einstein A.*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., **44**, 2, 778, 1915. (Имеется перевод: «Собрание научных трудов Альберта Эйнштейна», т. I, изд-во «Наука», М., 1965, стр. 425.)
23. *Einstein A.*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., **46**, 2, 799, 1915. (Имеется перевод: «Собрание научных трудов Альберта Эйнштейна», т. I, изд-во «Наука», М., 1965, стр. 435.)

24. *Einstein A.*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., **48**, 2, 844, 1915. (Имеется перевод: «Собрание научных трудов Альберта Эйнштейна», т. I, изд-во «Наука», М., 1965, стр. 448.)
25. *Hilbert D.*, Nachr. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen, 395 (1915).
26. *Schwinger J.*, Phys. Rev., **76**, 790 (1949).
27. *Schweber S. S.*, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Row, Peterson, New York, 1961. (Имеется перевод: *Швебер С.*, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.)
28. *Wightman A. S.*, Quelques problèmes mathematiques de la théorie quantique relativiste, в сборнике «Les Problèmes Mathematiques de la Théorie Quantique des Champs», Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959. [Имеется перевод: *Уайтман А. С.*, Некоторые математические проблемы релятивистской квантовой теории, в сборнике переводов: «Математика», **6**, 4, 96 (1962).]
29. *Hamel G.*, Zs. Math. Phys., **50**, 1 (1904).
30. *Herglotz G.*, Ann. der Phys., **36**, 493 (1911).
31. *Engel F.*, Nachr. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen, 207 (1916).
32. *Noether E.*, Nachr. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen, 235 (1918). (Имеется перевод в сборнике: «Вариационные принципы механики», Физматгиз, М., 1959.)
33. *Bessel-Hagen E.*, Math. Ann., **84**, 258 (1921).
34. *Wigner E.*, Nachr. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen, 375 (1927),
35. *Wigner E.*, Proc. Amer. Phil. Soc., **93**, 521 (1949). (Статья 1 данной книги.)
36. *Wigner E.*, Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group including reflections, в сборнике: «Elementary Particle Physics», Gürsey F., ed., Gordon and Breach, New York, 1964.
37. *Wigner E.*, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931 (Имеется перевод: *Вигнер Е.*, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961.)
38. *Kastrup H. A.*, Phys. Rev. Lett., **3**, 78 (1962).
39. *Cunningham E.*, Proc. London Math. Soc., 8, 77 (1909).
40. *Bateman H.*, Proc. London Math. Soc., **8**, 223 (1910).
41. *Fulton T.*, *Rohrlich F.*, *Witten L.*, Rev. Mod. Phys., **34**, 442 (1962).
42. *Murai Y.*, Progr. Theor. Phys., **11**, 441 (1954).

5

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ[1])

ВВЕДЕНИЕ

Главная цель данного обзора — показать глубокое различие между отношением специальной теории относительности к квантовой теории, с одной стороны, и отношением общей теории относительности к квантовой теории — с другой. Большинство результатов, связанных с анализом общей теории относительности, было получено мной совместно с доктором Салекером[2]), который провел в Принстоне год, работая над исследованием указанной проблемы.

Различие между отношениями специальной и общей теории относительности к квантовой теории, кратко говоря, состоит в том, что между специальной теорией относительности и квантовой теорией нет никакого логического барьера, в то время как общая теория относительности и квантовая теория вряд ли имеют что-либо общее. Утверждение об отсутствии логических противоречий между квантовой теорией и специальной теорией относительности отнюдь не означает, что математические формулировки обеих теорий объединены какой-либо естественной взаимосвязью. В действительности дело обстоит иначе, и потребовались нетривиальные идеи Томонаги, Швингера, Фейнмана и Дайсона [1], чтобы придать квантовой теории вид, совместимый с постулатами специальной теории относительности, причем успеха пока удалось достичь лишь на рабочем уровне. Утверждение об отсутствии противоречий скорее означает, что используемые в квантовой механике понятия, связанные с измерением координат, импульса и т. п., являются теми самыми понятиями, на языке которых формулируются постулаты специальной теории относительности. Следовательно, мы получаем возможность по крайней мере сформулировать требование релятивистской инвариантности квантовых теорий и проверить, удовлетворяют ли они этому требованию. То, что ответ получается скорее *отрицательным*, чем *утвердительным*, и что квантовая

---

[1]) Этот доклад Вигнер прочитал 31 января 1957 г., уходя в отставку с поста президента Американского физического общества. Опубликован в журнале: Rev. Mod. Phys., **29**, № 3 (1957).

[2]) Подробному изложению этих результатов будет посвящена специальная статья.

теория еще не вполне приспособлена к постулатам специальной теории относительности, вызывает чувство досады, но не меняет главного: вопрос о взаимной непротиворечивости обеих теорий может быть по крайней мере сформулирован, а вопрос о релятивистской инвариантности квантовой теории в настоящее время приобрел черты скорее головоломки, чем проблемы.

Иная ситуация складывается в общей теории относительности. Основная предпосылка этой теории состоит в том, что координаты являются вспомогательными величинами, которым для любого события можно приписать совершенно произвольные значения. Следовательно, приняв постулаты общей теории относительности, мы вынуждены признать, что измерение положения, т. е. пространственных координат, заведомо не имеет физического смысла, так как координатам можно придавать какие угодно значения. Лишено физического содержания и измерение импульсов. Большинство из нас ломало голову над тем, как при таких предположениях общая теория относительности вообще позволяет делать имеющие смысл утверждения и предсказания. Ясно, что обычные прогнозы будущего положения частиц, характеризуемого их координатами, в общей теории относительности утрачивают смысл. Это обстоятельство редко пользуется должным вниманием, но именно оно, а не более специальный вопрос о лоренц-инвариантности уравнений квантовой теории поля препятствует нашему продвижению вперед. Названная трудность пронизывает всю общую теорию относительности, и, когда мы вычисляем, например, движение перигелия Меркурия, не объясняя при этом, как наша система координат фиксирована в пространстве и что препятствует ей поворачиваться на несколько секунд в год и следовать за видимым движением перигелия, мы не только заблуждаемся сами, но и вводим в заблуждение своих студентов. Ось x нашей системы координат, очевидно, можно было бы определить так, чтобы она неотрывно следовала за перигелием, и лишь принятие некоторого специального допущения о природе координатной системы должно воспрепятствовать такому «слежению». Ситуация с движением перигелия достаточно проста, и в ней полезно разобраться. В целом же поднятый вопрос имеет далеко не академический интерес, хотя случай с движением перигелия Меркурия сам по себе достаточно академичен. С каждый днем мы все больше и больше отдаем себе отчет в том, что многие противоречивые результаты, полученные на основе общей теории относительности, обусловлены различием в неявных допущениях, фиксирующих систему координат. Представление результатов в виде наборов значений координат настолько вошло у нас в привычку, что мы придерживаемся ее и в общей теории относительности, где значения координат *per se* не имеют смысла. Чтобы они наполнились содержанием, система координат должна, подобно моллюску, каким-то образом «прицепиться» к пространственно-временным событиям, а это часто проделывается в весьма завуалированной форме. Если мы хотим помочь общей теории относительности установить «взаимопонимание» с квантовой теорией, то прежде всего необходимо придать утверждениям общей теории относительности такую форму, в которой они согласовались бы с основными принципами самой общей теории относительности. Каким образом можно попытаться достичь этой цели, будет показано ниже.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СИСТЕМ

Связь между специальной теорией относительности и квантовой механикой особенно проста для свободных частиц. Их уравнения и свойства в отсутствие взаимодействий следуют из одной лишь релятивистской инвариантности. Необходимо различать два случая: частицы, которые можно привести в состояние покоя, и частицы, которые в состояние покоя привести нельзя. В системе координат, в которой частица покоится, она ведет себя так же, как любая другая частица или как атом. Она обладает собственным угловым моментом, обозначаемым J, если речь идет об атомах, и спином s, если речь идет об элементарных частицах. Отсюда возникают различные возможности, известные еще из спектроскопии, а именно значения спинов 0, $^1/_2$, 1, $^3/_2$, 2, ..., каждое из которых соответствует определенному типу частиц. Если же частицу нельзя привести в состояние покоя, то ее скорость непременно должна быть равна скорости света: частицу с любой другой скоростью всегда можно привести в состояние покоя. Масса покоя частиц, летящих со скоростью света, равна нулю, ибо отличная от нуля масса покоя при движении со скоростью света приводила бы к бесконечной энергии.

Частицы с нулевой массой покоя независимо от величины спина имеют только два направления поляризации в отличие от $2s + 1$ направлений поляризации частиц с ненулевой массой покоя и спином s. Наиболее известный пример этого явления — электромагнитное излучение, т. е. свет. «Спин» фотона равен 1, но направлений поляризации лишь 2 вместо $2s + 1 = 3$. При убывании массы покоя и обращении ее в 0 число направлений поляризации, по-видимому, скачком обращается в 2. Для электромагнитного излучения, т. е. для $s = 1$, этот процесс был подробно исследован Бассом и Шредингером [2], однако необходимо ясно представлять себе, что подобное резкое уменьшение числа возможных направлений поляризации обусловлено исключительно свойствами преобразований Лоренца и происходит при любых значениях спина.

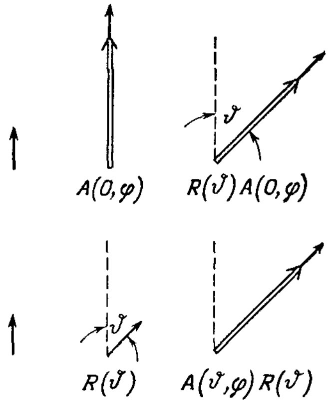
В том, что можно сказать относительно числа направлений поляризации частицы, нет ничего существенно нового, и главная цель последующих разделов этого обзора — наметить несколько иной подход к уже известным вещам [1]). Вместо вопроса: почему частицы с нулевой массой покоя обладают лишь двумя направлениями поляризации? — мы задаем вопрос, слегка отличающийся по форме: почему у частиц с отличной от нуля массой покоя имеется более двух направлений поляризации?

Собственный угловой момент частицы с нулевой массой покоя параллелен направлению ее движения, т. е. параллелен скорости частицы. Какое бы внутреннее движение мы ни связывали со спином, оно всегда будет происходить в плоскости, перпендикулярной скорости. В случае света мы говорим о поперечной поляризации. Более того, утверждение о параллельности спина и скорости (и этот факт наиболее замечателен) релятивистски инвариантно: оно остается в силе даже в том случае, если при описании частицы мы воспользуемся движущейся системой координат. При таком подходе к проблеме поляризации мы в конце концов приходим к вопросам: почему угловой момент частицы с ненулевой массой покоя не может быть параллелен ее скорости или почему плоская волна может быть поперечно поляризованной только в том случае, если она распространяется со скоростью света? На эти вопросы следует ответить так: угловой момент частицы с ненулевой массой покоя вполне *может* быть параллельным направлению движения и волна *может* быть поперечно поляризованной, но и первое и второе утверждения не обладают лоренц-инвариантностью. Иначе говоря, даже если скорость и спин параллельны в какой-нибудь одной системе координат, то они не будут параллельными в других системах координат. Справедливость последнего утверждения видна особенно наглядно, если в «других» системах координат частица покоится: в таких системах координат угловой момент должен был бы быть параллельным «ничему»! В то же время для каждой частицы, если только она не движется со скоростью света, всегда можно указать систему координат, в которой она будет покоиться, и в этой системе координат ее угловой момент заведомо не будет параллелен ее скорости. Следовательно, утверждение о параллельности спина и скорости для частиц с отличной от нуля массой покоя не является универсальным, справедливым для всех без исключения систем координат, и у таких частиц число направлений поляризации должно быть больше двух.

---

[1]) Наиболее существенные моменты проводимого ниже анализа содержатся в статье автора [3]. В более явном виде они высказаны в его докладе в Берне (1955 г.) на торжественном собрании по случаю полувекового юбилея теории относительности [4].

Поясним нашу мысль несколько подробнее. Рассмотрим покоящуюся частицу с заданным направлением поляризации. Пусть, например, этим направлением будет ось z. Будем наблюдать за частицей из системы координат, движущейся в направлении $-z$. Нам будет казаться, что скорость частицы направлена в сторону положительной оси z, а направление поляризации частицы — параллельно ее скорости (фиг. 1). Покажем,



Фиг. 1.

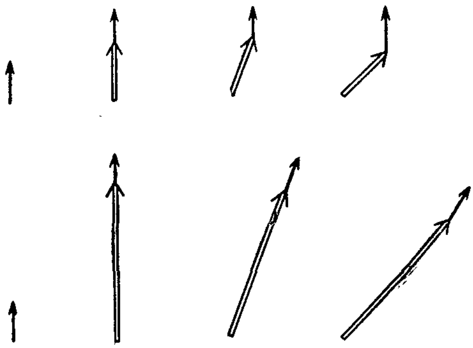
Стрелки, проведенные одной чертой, означают спин, двойные стрелки — скорость частицы. Независимо от того, сообщаем ли мы частице сначала скорость в направлении спина, а затем производим поворот ($R(\vartheta)A(0, \varphi)$) или сначала производим поворот и лишь затем сообщаем скорость ($A(\vartheta, \varphi)R(\vartheta)$) в направлении спина, результат (состояние) будет одним и тем же [см. соотношение (1.3)].

что при больших скоростях последнее утверждение почти инвариантно. Прежде всего ясно, что утверждение строго инвариантно относительно вращений и дальнейшего увеличения скорости в направлении z. Это видно из нижней части фигуры: систему координат сначала повернули влево, а затем ей сообщили скорость в направлении, противоположном старой оси z. Состояние рассматриваемой нами физической системы не изменилось бы, если бы мы сначала сообщили системе координат скорость в направлении $-z$ и лишь затем произвели поворот (такой порядок действий изображен в верхней части фигуры). Состояние физической системы кажется нам одинаковым не по какой-либо физической причине, а только потому, что обе системы координат тождественны и мы описываем с их помощью одну и ту же частицу (см. приложение 1).

Придадим теперь нашей частице большую скорость в направлении оси z и будем следить за ней из системы координат, движущейся в направлении $-y$. Нам будет казаться, что частица приобрела импульс в направлении y, а скорость частицы будет направлена между осями z и y (фиг. 2). Спин частицы не будет более параллелен направлению ее движения. В нерелятивистском случае, когда все скорости малы по сравнению со скоростью света, спин будет параллелен оси z, и его направление будет составлять некоторый угол с направлением движения частицы. Это означает, что утверждение о параллельности спина и направления движения в нерелятивистской области неинвариантно. Однако если начальная скорость частицы близка к скорости света, то лоренцево сокращение приводит к тому, что угол ε между спином и скоростью удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \sin \vartheta, \tag{1}$$

где ϑ—угол между скоростью v в движущейся системе координат и скоростью в покоящейся системе координат. Последняя



Фиг. 2.

Частице сначала придают небольшую скорость в направлении ее спина, а затем — все возрастающую скорость в перпендикулярном направлении (верхняя часть фигуры). Направление спина остается по существу неизменным, но угол между спином и скоростью частицы увеличивается по мере возрастания скорости частицы в направлении, перпендикулярном спину. Если скорости, сообщаемые частице, велики (нижняя часть фигуры), то направление спина следует за направлением скорости [см. соотношения (1.7) и (1.8)].

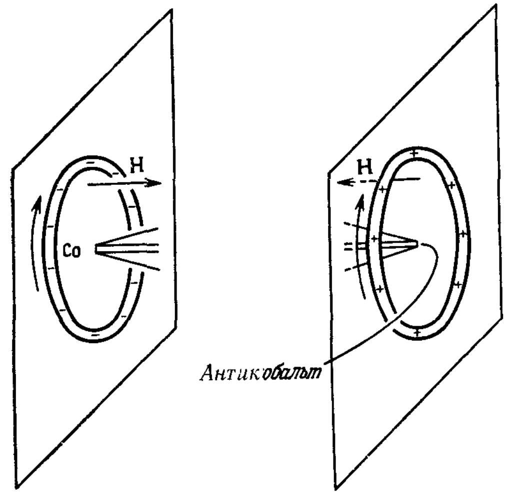
ситуация наглядно показана на нижней части фиг. 2. Если скорость частицы мала по сравнению со скоростью света, то направление спина остается неизменным и одинаково в движущейся и в покоящейся системах координат. Наоборот, если скорость частицы близка к скорости света, то скорость частицы увлекает за собой ее спин, и угол между направлением движения и направлением спина в движущейся системе координат становится малым. Наконец, если частица движется со скоростью света, то утверждение «спин и скорость частицы параллельны» справедливо в любой системе координат. Подобная ситуация и на этот раз обусловлена не каким-либо физическим свойством спина, а определяется исключительно свойствами преобразований Лоренца: своеобразным проявлением лоренцева сокращения. Именно в этом и состоит причина различного поведения частиц с отличной от нуля и нулевой массой покоя — несовпадения числа направлений поляризации. (Подробности выкладок см. в приложении 4.)

Предыдущие рассуждения доказывают больше, чем мы намеревались доказать. Из них видно, что утверждение «для частиц с нулевой массой покоя спин и скорость параллельны» инвариантно и что по релятивистским причинам должно быть *не два*, а лишь *одно* направление поляризации. Такой вывод верен, если мы ограничимся собственными преобразованиями Лоренца. Второе направление поляризации, когда спин и скорость антипараллельны, возникает вследствие симметрии относительно отражений (инверсии). Это также можно продемонстрировать на примере света: правополяризованный свет остается правополяризованным во всех лоренцевых системах отсчета, переходящих друг в друга при непрерывных преобразованиях. Лишь посмотрев на правополяризованный свет в зеркало, мы увидим его левополяризованным. Постулат о симметрии относительно отражений позволяет нам сделать вывод о существовании левополяризованного света, опираясь на факт существования правополяризованного света. Если бы реальный мир не обладал симметрией относительно отражений, то существование *двух* разновидностей круговой поляризации света с практически неотличимыми свойствами должно было бы казаться чудом. Совершенно иная ситуация возникает при рассмотрении частиц с ненулевой массой покоя. Для них существование $2s + 1$ направлений поляризации следует из инвариантности теории относительно собственных преобразований Лоренца. В частности, если такая частица находится в состоянии покоя, то спин ее будет по-разному ориентирован относительно систем координат, различным образом ориентированных в пространстве. Таким образом, существование всех состояний поляризации следует из существования одного состояния, если только теория инвариантна относительно собственных преобразований Лоренца. Для частиц с нулевой массой покоя существует лишь два состояния поляризации, и даже вывод о существовании второго состояния поляризации опирается на постулат о симметрии относительно инверсии.

СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНВЕРСИИ

Существенный прогресс в выяснении характера симметрии относительно инверсии был достигнут в недавних теоретических и экспериментальных исследованиях. К замечаниям и гипотезам Ли, Янга и Эме в настоящее время нельзя прибавить ничего существенного, и все, что происходило потом, было сказано или по крайней мере подразумевалось Саламом, Ли, Янгом и Эме [5]. Всю остроту разрыва со старыми представлениями, по-видимому, лучше всего иллюстрирует эксперимент с кобальтом, проведенный Ву, Эмблером, Хейвардом, Хоппсом и Хадсоном.

Текущий по кольцу ток — им может быть незатухающий ток в сверхпроводнике — создает магнитное поле. Кобальтовый источник находится в плоскости тока и испускает β-частицы (фиг. 3). Вся экспериментальная установка, как видно из фиг. 3, обладает плоскостью симметрии, и если принцип достаточного основания верен, то плоскость симметрии должна была бы сохраниться на протяжении всей дальнейшей судьбы системы. Иначе говоря, поскольку правая и левая стороны плоскости первоначально обладали тождественными свойствами, не существует достаточного основания для какого бы то ни было различия в их свойствах и в будущем. Тем не менее интенсивность β-излучения по одну сторону плоскости оказывается больше, чем по другую. Такая ситуация парадоксальна независимо от механизма эффекта. Можно даже сказать, что она приобретает наибольшую парадоксальность именно тогда, когда мы пол-



Фиг. 3.

При традиционной интерпретации экспериментов по несохранению четности исходят из предположения о том, что инверсия принадлежит к числу элементов симметрии всех физических законов, поэтому левая часть фигуры представляет собой зеркальное отражение правой. Предполагается, что материя при отражении переходит в антиматерию: ток электронов по кольцу заменяется током позитронов по кольцу, а радиоактивный кобальт — радиоактивным антикобальтом.

ностью отвлекаемся от механизма и теории явления. Если бы условия эксперимента могли стать идеальными в указанном выше смысле, то даже принцип достаточного основания был бы, по-видимому, нарушен.

Естественно искать такую интерпретацию эксперимента, которая бы избегала столь далеко идущих выводов, и она действительно существует [1]). Необходимо еще раз подчеркнуть, что независимо от того, какая именно интерпретация принята, приходится признать, что симметрия мира беднее, чем мы думали. Тем не менее даже оставшаяся симметрия может включать в себя инверсии.

Если верно, что плоскость симметрии всегда остается плоскостью симметрии, то начальное состояние эксперимента с ко-

[1]) Приводимая нами интерпретация была независимо предложена многими авторами, среди которых следует назвать Салама [6], Ландау [7], Смита и Биденхарна (личное сообщение). Дезер заметил, что на «тревожную возможность» такой интерпретации указывали еще Вик, Вайтман и Вигнер [8], но рассмотрение ее считалось делом далекого будущего. Разумеется, явное единодушие сторонников какого-либо мнения еще не свидетельствует о том, что оно правильно.

бальтом не могло обладать зеркальной симметрией. Иное дело, если бы магнитный вектор был полярным, — в этом случае электрический вектор был бы аксиальным. Тогда плотность заряда и дивергенция электрического вектора были бы не просто скалярами, как в существующей ныне теории, а псевдоскалярами. Зеркальное отражение отрицательного заряда было бы положительным зарядом, зеркальное отражение электрона — позитроном, и наоборот. Зеркальное отражение материи было бы антиматерией. Взглянув на эксперимент с кобальтом в зеркало, мы не увидели бы ничего, что противоречило бы установленным фактам: зеркальное отражение было бы экспериментом, проводимым над антиматерией. На фиг. 3 справа показано зеркальное отражение левой части рисунка. Таким образом, допущение об антиматерии как о зеркальном отражении материи избавляет нас от необходимости отказываться от принципа достаточного основания и от сохранения плоскостей симметрии.

Если воспользоваться специальной терминологией, то только что рассмотренную возможность, согласно современным воззрениям, следовало бы описать как исключение операций инверсии и зарядового сопряжения из числа истинных операций симметрии. Однако произведение преобразований инверсии и зарядового сопряжения по-прежнему считается операцией симметрии, и мы предлагаем назвать ее просто инверсией. Несколько замечаний более специального характера относительно «просто инверсии» содержится в приложении 2. Только что внесенное предложение имеет две стороны: одну — весьма привлекательную, другую — весьма тревожную.

Проанализируем сначала привлекательный аспект нашего предложения. Дирак как-то сказал, что число элементарных частиц обнаруживает тревожную тенденцию к возрастанию. Трудно удержаться от искушения и не добавить, что и число инвариантных свойств также обладает аналогичной тенденцией. Однако вторая тенденция не вызывает у нас таких опасений, как первая, ибо, в то время как увеличение числа элементарных частиц усложняет нашу картину природы, увеличение числа свойств симметрии в целом лишь упрощает ее. Тем не менее четкое соответствие между свойствами инвариантности законов природы и свойствами симметрии пространства-времени особенно заметно нарушается операцией зарядового сопряжения. Используя эту операцию, мы неявно предполагаем, что законы природы не изменятся, если все положительные заряды заменить отрицательными и наоборот или (при более широкой трактовке зарядового сопряжения) если все частицы заменить античастицами. Постулат об инвариантности законов природы относительно зарядового сопряжения, хотя и считается разумным, не отвечает никакой симметрии пространственно-временнóго континуума. Если бы изложенная выше интерпретация экспериментов с кобальтом подтвердилась, то это означало бы восстановление соответствия между естественной симметрией элементов пространства-времени и инвариантными свойствами законов природы. Правда, плоскости симметрии играли бы совсем иную роль, чем та, к которой мы привыкли, — зеркальным отражением электрона был бы позитрон, — но зато зеркальным отражением любой последовательности событий была бы равным образом допустимая последовательность событий. Осуществить такую допустимую последовательность событий в реальном физическом мире было бы труднее, чем мы думали до сих пор, но тем не менее она вполне возможна.

Именно в восстановлении соответствия между естественными свойствами симметрии пространства-времени, с одной стороны, и законами природы, с другой стороны, и заключается привлекательная сторона нашего предложения. В действительности же оно обладает и двумя тревожными аспектами.

Первый из них состоит в том, что операция симметрии физически очень сложна. Если бы оказалось, что операция обращения времени в том виде, как мы понимаем ее сейчас, не принадлежит к числу операций симметрии (так было бы, например, если бы один из предложенных Трейманом и Вильдом экспериментов дал положительный результат), мы все же могли бы сохранить эту операцию симметрии, придав ей иную интерпретацию. Например, можно было бы постулировать, что обращение времени переводит материю в *мета*-материю, которая будет открыта позднее, когда будут построены более мощные ускорители. Таким образом, стремление сохранить плоскости симметрии вынуждает нас принять более искусственную концепцию симметрии и инвариантности физических законов.

Другой тревожный аспект нашего нового знания мы усматриваем в том, что столь долго заблуждались, веря в существование большего числа элементов симметрии, чем их имеется в действительности. У нас были веские причины и достаточно убедительные экспериментальные данные для того, чтобы считать, что зеркальным отражением допустимого события снова является допустимое событие, в котором электроны выступают в качестве зеркальных отражений электронов, а не позитронов. Напомним в этой связи сначала, каким образом понятие четности, возникшее из изящных, но почти забытых экспериментов Лапорта [9][1]), казалось совершенно незыблемым в спектроскопии и в ядерной физике. Четность можно было весьма естест-

[1]) Интерпретация правила Лапорта с помощью квантовомеханической операции симметрии дана в гл. XVIII книги Вигнера [10].

венно объяснить как следствие симметрии пространства-времени относительно инверсии. При этом предполагалось, что электроны при зеркальном отражении переходят снова в электроны, а не в позитроны. Ныне мы вынуждены признать приближенный характер этой симметрии и считать, что понятие четности, широко используемое в спектроскопии и в ядерной физике, также носит лишь приближенный характер. Еще большее значение имеет обширная экспериментальная информация из области химии оптически активных веществ. Каждое такое вещество существует в двух модификациях, переходящих друг в друга при зеркальном отражении и поворачивающих в противоположных направлениях плоскость поляризации света (интенсивность прошедшего света в обоих случаях строго одинакова). Не вызывает сомнений тот факт, что молекулы, обладающие плоскостями симметрии, оптически активны. Столь же несомненно существование плоскостей симметрии в кристаллах [1]). Все эти факты свидетельствуют о связи между свойствами право- и левоориентированной *материи*, но отнюдь не о существовании связи между свойствами правоориентированной материи и левоориентированной *антиматерии*. Новые эксперименты не оставляют сомнения в том, что понятие плоскости симметрии, понимаемое в указанном выше смысле, применимо не ко всем явлениям, в частности оно неприменимо к β-распаду. Если универсальное понятие плоскости симметрии вообще существует, то лишь в том смысле, что материя при отражении переходит в антиматерию.

Следует заметить, что плоскость симметрии в старом понимании — далеко не единственное понятие, связанное с симметрией и носящее приближенный характер. Мы уже упоминали о зарядовом сопряжении. Можно назвать еще изотопический спин, обменное взаимодействие или мультиплеты электронов и ядер. Для последних приближение обменного взаимодействия оказывается настолько точным, что, лишь разрушив сначала молекулы пара-водорода, их удается превратить в молекулы орто-водорода [32]. Таким образом, приближенный характер законов симметрии — явление весьма распространенное, а может быть, и общее. В этой связи нельзя не вспомнить так называемый принцип Маха, согласно которому законы природы зависят от физического «содержимого» Вселенной — распределения в ней материи, а физическое «содержимое» Вселенной явно не обладает симметрией. Невольно напрашивается мысль (в духе идей Янга и Ли) о том, что вообще все свойства симметрии носят лишь приближенный характер. Самое слабое из известных взаимодей-

---

[1]) Относительно роли операторов пространственной инверсии и обращения времени см. работу [11] и указанную в ней литературу.

ствий—гравитационное—обусловливает различие между инерциальными системами координат и системами координат, движущимися с ускорением; следующее в порядке возрастания интенсивности — слабое взаимодействие, отвечающее за β-распад, — приводит к различию между материей и антиматерией. В заключение этого раздела я хочу выразить уверенность в том, что открытия Ву, Эмблера, Хейварда, Хоппса и Хадсона [12] и Гарвина, Ледермана и Вайнрайха [13] (см. также [14]) не останутся изолированными открытиями. Скорее они явятся вестниками пересмотра наших представлений об инвариантности, а может быть, и других концепций, которые ныне пользуются еще большей славой незыблемых.

КВАНТОВЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ПОНЯТИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Последнее замечание, естественно, приводит нас к анализу общей теории относительности. Основная предпосылка этой теории заключается в том, что координаты служат лишь ярлыками, помогающими различать точки пространства-времени. Их конкретные значения не имеют особого смысла, если только система координат не связана каким-либо образом с событиями в пространстве-времени.

Рассмотрим вопрос о том, как проверить уравнения общей теории относительности. Эти уравнения, так же как и все уравнения физики, позволяют нам, зная ситуацию в настоящем, предсказать наиболее вероятное развитие событий в будущем. Величины, определяющие состояние в настоящий момент, называются начальными условиями; уравнения движения описывают изменение этих величин. В теории относительности состояние характеризуется заданием метрики, состоящей из сети точек в пространстве-времени, т. е. из сети событий и из расстояний между этими событиями. Если мы хотим превратить эти общие определения в нечто конкретное, то нам следует решить, какие события мы хотим выбрать в качестве опорных точек и как измерять расстояния между *событиями*. Метрика в общей теории относительности — это метрика в пространстве-времени; ее элементами служат расстояния между точками пространства-времени, а не между точками обычного пространства.

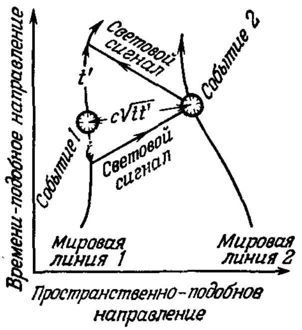
Событиями в общей теории относительности служат совпадения, т. е. столкновения между частицами. Создатель теории, разрабатывая это понятие, явно имел в виду макроскопические тела. Совпадения, т. е. столкновения между такими телами, непосредственно наблюдаемы. В случае элементарных частиц это уже неверно, ибо их столкновения гораздо менее уловимы. Точка, в которой происходит столкновение двух элементарных частиц, может быть локализована с достаточной точностью лишь при очень высоких энергиях соударения (см. приложение 3). Это означает, что создание в пространстве-времени мощной сети точек или (если точки должны быть соединены в связную сеть) густого леса мировых линий требует значительной плотности энергии. Тем не менее указанное обстоятельство нет необходимости обсуждать подробно, поскольку измерение расстояний между точками сети налагает более жесткие ограничения, чем построение самой сети.

Часто говорят, что расстояния между событиями надлежит измерять с помощью линеек с делениями и стержней. Мы же обнаружили, что измерения, проводимые с помощью линеек и стержней, чрезвычайно трудно описывать, и их использование приводит ко многим ненужным усложнениям. Линейка позволяет правильно найти расстояние между событиями только в том случае, если ее деления одновременно (с точки зрения связанной с линейкой системы отсчета) совпадают с двумя событиями. Кроме того, линейку трудно представить себе в виде чего-нибудь иного, кроме макроскопического объекта. В силу этих причин желательно свести все измерения в пространстве-времени к измерениям с помощью часов. Разумеется, с помощью часов можно непосредственно измерять лишь расстояние между точками, разделенными времени-подобными интервалами. Расстояния между событиями в пространстве-времени, разделенными пространственно-подобными интервалами, гораздо естественнее измерять с помощью стержней и линеек, и мы будем измерять их с помощью часов не прямо, а косвенно.

Таким образом, простейшая (и при этом наиболее близкая к микроскопической) система отсчета в пространстве-времени представляется нам в виде набора часов, очень медленно движущихся относительно друг друга так, что их мировые линии почти параллельны. Эти часы, тикая, отмеряют равные промежутки времени. Тиканье часов и образует ту самую сеть событий, которую мы хотим установить. Вместе с тем оно определяет расстояние между соседними точками, лежащими на одной мировой линии.

На фиг. 4 изображены две мировые линии, на каждой из которых отмечено по одному событию — по одному моменту, когда часы, для которых построены эти линии, тикнули. Способ, позволяющий измерять длину пространственно-подобных интервалов, ясен из фигуры. Световой сигнал, посылаемый из мировой точки, где находятся первые часы, достигает вторых часов в точке, где происходит событие 2. Из этой точки в свою очередь посылают световой сигнал, который доходит до первых часов спустя время t' после события 1. Вычисления, приведенные в приложении 4, показывают, что если бы первый световой сигнал был испущен на время t раньше события 1, то пространственно-подобный интервал между событиями 1 и 2 был бы равен среднему геометрическому двух непосредственно измеряемых (с помощью часов) времени-подобных интервалов t и t'. В этом и состоит способ измерения длин пространственно-подобных интервалов с помощью часов вместо измерительных стержней.

Интересно рассмотреть квантовомеханические ограничения точности изображенного на фиг. 4 способа превращения изме-



Фиг. 4. Измерение пространственно-подобных расстояний с помощью часов.

Предполагается, что в пределах изображенной на фигуре области пространства-времени метрический тензор существенно постоянен. Пространственно-подобное расстояние между событиями 1 и 2 измеряется с помощью световых сигналов, проходящих через событие 2, и геодезической линии, проведенной через событие 1. (Объяснение см. в приложении 4).

рения времени-подобных интервалов в измерение пространственно-подобных интервалов. Отрезки времени t и t' точно известны лишь в том случае, если световой сигнал посылается в виде острого импульса. Этот импульс состоит из многих частот, и, следовательно, его энергетический спектр обладает определенной шириной. В результате отдача, испытываемая вторыми часами под действием импульса, также будет обладать известной неопределенностью, что приведет к увеличению неопределенности импульса часов. Все это тесно связано с соотношением неопределенности Гейзенберга. Более подробные вычисления показывают, что внесенная импульсом дополнительная неопределенность по порядку величины сравнима с неопределенностью, присущей самой природе самых лучших часов, какие только можно себе представить, вследствие чего «времени-подобные» измерения можно практически без всяких ограничений заменять «пространственно-подобными» измерениями.

Мы, наконец, подошли к обсуждению одной из основных проблем — проблемы пределов точности часов. Рассматривая ее, мы пришли к заключению, что на точность часов, которые должны иметь данный вес, определенные размеры и идти в течение заранее указанного промежутка времени, наложены весьма жесткие ограничения. Суть их сводится к тому, что часы — объект немикроскопический. В частности, то, что мы несколько туманно называем атомными часами — отдельный атом, отсчитывающий равные промежутки времени, — заведомо представляет идеализацию, противоречащую основным представлениям об измеримости. Эту часть наших выводов следует считать вполне обоснованной. С другой стороны, практическую формулу, которая будет приведена для вычисления ограничений точности измерения времени, — своего рода соотношение неопределенности — надлежит рассматривать лишь как лучшую в настоящее время приближенную оценку.

Сформулируем требования, предъявляемые к часам. Часы должны идти в течение T *сек*, позволять измерять время с точностью $T/n = t$ *сек*, линейные размеры часов не должны превосходить l, а их масса не должна превышать m. Поскольку стрелка часов должна занимать n различных положений, система, которую представляют собой часы, за время T должна успеть побывать по крайней мере в n ортогональных состояниях, поэтому состояние системы должно быть суперпозицией по крайней мере n ортогональных состояний. Кроме того, ясно, что система, полная энергия которой меньше или равна $\hbar/t$, не может измерять промежутки времени, меньшие t. Это утверждение эквивалентно обычному соотношению неопределенности. Оба указанных требования следуют непосредственно из основных принципов квантовой теории, и в них нет ничего неожиданного. Часы, удовлетворяющие обоим постулатам, известны; таков, например, осциллятор, у которого период равен заводу часов и который с одинаковой вероятностью может находиться в любом из n первых квантовых состояний. Энергия такого осциллятора приблизительно в n раз больше энергии первого возбужденного состояния. Это эквивалентно соотношению неопределенности с интервалом Δt, равным требуемой точности t. Вообще говоря, часы вполне допустимо рассматривать как очень мягкий осциллятор с крайне медленно движущейся частицей и весьма большой амплитудой. Стрелка часов соответствует положению осциллирующей частицы.

Часы, о которых мы только что рассказали, все еще остаются чрезвычайно легкими, но тут, однако, наступает момент, когда мы должны учесть требование об ограниченности их линейных размеров. Поскольку эту проблему не имеет смысла рассматривать во всей общности, можно предположить, что характерный линейный размер соответствует требуемой точности измерения времени. Требование $l \approx ct$ увеличивает массу часов в n^3 раз, и этот коэффициент может быть очень большим:

$$m > \frac{n^3 \hbar t}{l^2} \approx \frac{n^3 \hbar}{c^2 t}.$$

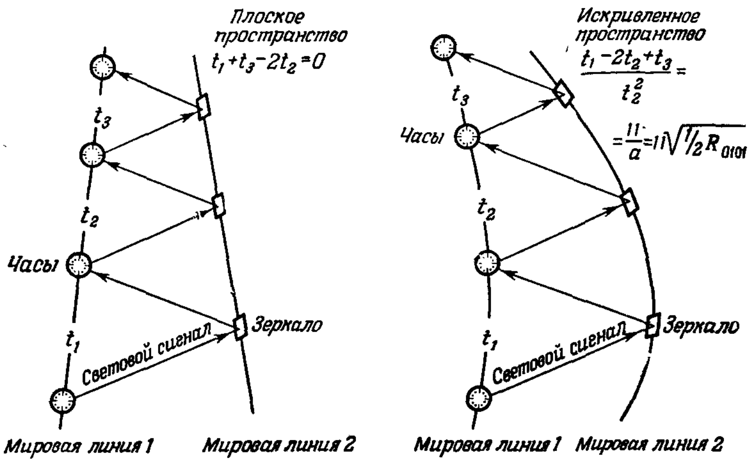
Например, часы с суточным заводом и точностью 10^{-8} *сек* должны весить почти 1 *г* (по причинам, проистекающим из соотношений неопределенности и тому подобных соображений).

До сих пор мы обращали внимание лишь на физические размеры часов и требовали, чтобы с помощью часов можно было различать события, расстояние между которыми по временно́й шкале не меньше t. Если же мы хотим использовать часы в качестве составной части описанной выше системы отсчета, то необходимо иметь возможность *считывать* показания их циферблата и пускать их. Как часть системы отсчета, назначение которой заключается в метризации пространства-времени, часы должны либо регистрировать показания циферблата в момент прихода светового импульса, либо передавать эти показания в часть пространства, лежащую вне метризуемой области. Это обстоятельство было отмечено еще Шредингером [15]. Однако мы обнаружили, что в наиболее интересном случае — при $l=ct$, когда ошибки в определении пространственных координат и времени одного порядка, — требования, предъявляемые к часам как к регистрирующему прибору, приводят лишь к появлению несущественного числового множителя, но не меняют вида выражения для минимальной массы часов.

Таким образом, устройство, позволяющее метризовать пространство-время, могло бы состоять из часов, развешанных в пространстве и находящихся в состоянии большего или меньшего покоя относительно друг друга. Все часы могут испускать и принимать световые сигналы, а также передавать свои показания в момент получения светового сигнала во внешнее пространство. Такие часы во многом напоминают осцилляторы, правда в нерелятивистской области. Действительно, скорость осциллирующей частицы в n раз меньше скорости света, где n — отношение *ошибки* измерения времени к *продолжительности* всего подлежащего измерению интервала времени. Последняя величина есть расстояние между событиями, измеренное вдоль временной оси, или деленное на скорость света обычное (пространственное) расстояние между часами. Мировые линии часов образуют тот густой лес линий, о котором мы говорили вначале. Его «ветви» сплошь покрывают ту область пространства-времени, которую мы хотим метризовать.

Мы отнюдь не убеждены в том, что наши часы наилучшие из возможных. Нас интересовали лишь одномерные пространственно-подобные интервалы. Вследствие этого осциллятор должен был быть одномерным осциллятором. Вполне возможно, что при переходе в трехмерное пространство ограничение размеров часов не приводит к столь заметному увеличению необходимой массы часов.

Тензор кривизны можно получить, как обычно, из метрики, если последняя измерена достаточно точно. Однако нам кажется вполне интересным дать описание более прямого метода измерения кривизны пространства. Он основан на использовании устройства, изображенного на фиг. 5 и аналогичного тому, которым мы пользовались при получении метрики. Основную роль играют часы и зеркало, находящиеся на таком расстоянии друг от друга, что кривизну пространства в пределах лежащей между ними области можно считать постоянной. Нам



Фиг. 5. Непосредственное измерение кривизны с помощью часов и зеркала. Рассматривается только одно пространственно подобное измерение. Кривизна в пределах изображенной на фигуре области пространства-времени предполагается постоянной (объяснение см. в приложении 5).

не нужно, чтобы часы непременно находились в состоянии покоя относительно других часов, так как проверка такого требования сопряжена с необходимостью производить дополнительные измерения. Если пространство плоское, то мировые линии часов имеют вид прямых. Чтобы измерить кривизну, испускают световой сигнал, который отражается в зеркале. Время возвращения сигнала t_1 мы засекаем по часам, после чего сигнал вновь отправляется к зеркалу. Время, которое требуется световому сигналу, чтобы второй раз вернуться к часам, обозначим через t_2, а продолжительность третьего путешествия по маршруту часы — зеркало — часы — через t_3. Тогда, как показано в приложении 5, радиус кривизны a и соответствующая компонента R_{0101} тензора Римана определяются из соотношения

$$\frac{t_1-2t_2+t_3}{t_2^2}=\frac{11}{a}=11\left(\frac{1}{2}R_{0101}\right)^{1/2}. \qquad (2)$$

Если бы классическая теория оставалась верной и в микроскопических областях, то измерения по методу, изображенному на фиг. 5, можно было бы производить с любой степенью точности. Действительно, если величина $\hbar$ бесконечно мала, то промежутки времени t_1, t_2 и t_3 могут быть измерены сколь-угодно точно с помощью бесконечно легких часов. Точно так же световые сигналы, которыми обмениваются часы и зеркало, сколь они ни кратки, должны переносить лишь бесконечно малый импульс и, следовательно, приводить лишь к бесконечно малым отклонениям часов и зеркала от их геодезических траекторий. Однако рассмотренные ранее квантовые явления вынуждают нас использовать часы с некоторой минимальной массой, если требуется, чтобы измерения интервалов времени производились с заданной точностью. В рассматриваемом случае точность должна быть сравнительно высокой, если только интервалы времени t_1, t_2 и t_3 по порядку величины не сравнимы с кривизной пространства. Отклонения часов и зеркала от их геодезических траекторий также должны быть малы, если мы хотим, чтобы результат измерения имел смысл. Все это и определяет тот эффективный предел точности, с которой может быть измерена кривизна. Как и следовало ожидать, кривизна в *точке* пространства-времени оказывается вообще неизмеримой; измерению доступна лишь средняя кривизна конечной области пространства-времени. Ошибка измерения обратно пропорциональна площади обследуемой части пространства-времени (т. е. той части пространства, вокруг которой при обычном определении кривизны производится параллельный перенос вектора), взятой в степени $^2/_3$. Таким образом, ошибка пропорциональна кубическому корню из комптоновской длины волны часов. Основная причина, по которой мы сомневаемся в окончательности этого результата, и на этот раз снова связана с тем, что рассмотрен был лишь одномерный пространственно-подобный интервал. Возможности измерительных устройств, так же как и проблемы, в трехмерном пространстве могут быть совершенно иными.

Как бы то ни было, существенно немикроскопический характер понятий общей теории относительности кажется нам неизбежным. Рассмотрим сначала ситуацию с практической точки зрения, когда она выглядит не столь острой. Прежде всего заметим, что измерение электрического и магнитного полей, как следует из анализа Бора и Розенфельда [16] [1]), также требует макроскопических, а в действительности даже *сугубо* макроскопических приборов, что отнюдь не делает полевые

---

[1]) Ссылки на литературу приведены в статье Розенфельда, помещенной в сборнике [17].

представления бесполезными для целей квантовой электродинамики. Правда, измерение кривизны пространства-времени требует, чтобы область пространства была конечной, и существует минимальная масса (и даже неопределенность массы) измерительного устройства. Однако, прикинув размеры величин, мы убедимся, что ситуацию и в интересующем нас случае нельзя назвать тревожной. Даже в межзвездном пространстве кривизну требуется определять на расстояниях порядка световой секунды или около того. Но это еще не все: масса часов, которые предназначены для таких измерений, составляет несколько миллиграммов, в силу чего конечная масса элементарных частиц не приводит к каким-либо трудностям. Часы состоят из многих частиц, и нет ни необходимости, ни тем более желания использовать для измерений часы, которые были бы легче элементарных частиц. Этому вряд ли следует удивляться, если учесть, что минимальная масса по оценке, полученной с помощью гравитационной постоянной, скорости света и постоянной Планка, составляет около 20 *мг*.

Вместе с тем необходимо еще раз подчеркнуть, что с более принципиальной позиции ситуацию трудно признать удовлетворительной. В обычной квантовой теории мы по-прежнему рассматриваем операторы координат как наблюдаемые, не зная, что означают сами координаты. Еще более странными кажутся в свете основного тезиса общей теории относительности — «физический смысл имеют только совпадения» — понятия квантовой теории поля, и этому вряд ли можно удивляться, ибо даже 20-миллиграммовые часы слишком велики для измерения атомных времен или расстояний. Анализируя способ, с помощью которого нам удается «избежать» использования понятия абсолютного пространства, мы неожиданно обнаруживаем, что ничего не избежали. В своих экспериментах мы окружаем микроскопические объекты сугубо макроскопической системой отсчетов и наблюдаем *совпадения* (т. е. столкновения) между частицами, испускаемыми исследуемой микроскопической системой и частями системы отсчета. Так мы приходим к матрице столкновений, которая наблюдаема, причем наблюдаема в терминах макроскопических совпадений, а так называемые наблюдаемые микроскопической системы не только не наблюдаемы, но даже (насколько можно судить) не имеют смысла. Таким образом, в наших экспериментах существует граница между областью, внутри которой мы свободно пользуемся квантовыми понятиями, не боясь, что это приведет нас к противоречию с основным тезисом общей теории относительности, и гораздо более обширной областью, в которой используемые нами понятия также не противоречат основному тезису общей теории относительности, но не поддаются описанию средствами квантовой теории. Со строго логической точки зрения именно такое разделение вызывает наибольшую неудовлетворенность.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В этом приложении мы хотим сравнить различные состояния одной и той же физической системы. Все эти состояния возникают при рассмотрении одного (стандартного) состояния из разных систем координат. Всякая лоренцева система отсчета определяет некоторое состояние, а именно образ стандартного состояния при переходе к этой системе отсчета. Чтобы задать стандартное состояние, мы выбираем произвольную, но фиксированную лоренцеву систему отсчета и уславливаемся, что в этой системе отсчета стандартным будет считаться состояние покоящейся частицы со спином (если таковой имеется), направленным по оси z. Если мы хотим иметь частицу, движущуюся со скоростью v вдоль оси z, со спином, направленным также вдоль оси z, то должны смотреть на частицу, находящуюся в стандартном состоянии, из системы координат, движущейся со скоростью v в направлении $-z$. Если мы хотим получить покоящуюся частицу со спином, лежащим в плоскости yz и составляющим угол α с осью y, то стандартное состояние надлежит рассматривать из системы координат с осями y и z, повернутыми на угол α относительно осей y и z той системы координат, в которой было определено стандартное состояние. Если же мы хотим получить состояние, в котором и скорость и спин имеют то же направление, что и спин в предыдущем случае (т. е. направление в плоскости yz, образующее угол α с осью y и угол $\pi/2-\alpha$ с осью z), то на стандартное состояние следует смотреть из системы координат, в которой спин стандартного состояния кажется имеющим указанное направление, а сама система координат движется при этом в противоположном направлении.

Два состояния тождественны только тогда, когда определяющие их лоренцевы системы отсчета совпадают. При таком определении получающиеся соотношения справедливы независимо от таких свойств частицы, как спин или масса (при условии, что масса отлична от нуля, т. е. что стандартное состояние существует). Два состояния «почти тождественны», если определяющие их лоренцевы системы отсчета переходят друг в друга при весьма малом преобразовании Лоренца, т. е. при преобразовании Лоренца, близком к тождественному. Все состояния частицы, которые можно сравнивать указанным способом, связаны друг с другом, поскольку их можно считать одним и тем же стандартным состоянием, рассматриваемым из различных систем координат. Тем не менее нам придется сравнивать только такие состояния.

Обозначим через $A(0, \varphi)$ матрицу преобразования, при котором преобразованная система координат движется со скоростью $-v$ в направлении оси z, причем $v = c\,\mathrm{th}\varphi$:

$$A(0, \varphi)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\,\varphi & \mathrm{sh}\,\varphi \\ 0 & \mathrm{sh}\,\varphi & \mathrm{ch}\,\varphi \end{Vmatrix}. \tag{1.1}$$

Поскольку ось x не будет играть роли в дальнейших рассуждениях, она не указана в матрице (1.1), и три строки и три столбца этой матрицы относятся к осям y', z', ct' и y, z, ct соответственно. Матрица (1.1) описывает состояние, в котором частица движется со скоростью v в направлении оси z, а ее спин параллелен этой оси.

Обозначим далее матрицу поворота на угол ϑ в плоскости yz через $R(\vartheta)$:

$$R(\vartheta)=\begin{Vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{1.2}$$

Направление в плоскости yz, проходящее между осями y и z и образующее угол ϑ с осью z, мы в дальнейшем будем называть «направлением ϑ». Система координат, движущаяся со скоростью $-v$ в направлении ϑ, получается при преобразовании

$$A(\vartheta, \varphi)=R(\vartheta)\,A(0, \varphi)\,R(-\vartheta). \tag{1.3}$$

Чтобы получить частицу, движущуюся в направлении ϑ и поляризованную в том же направлении, мы сначала поворачиваем систему координат на угол ϑ против часовой стрелки (и получаем частицу с нужным направлением поляризации), а затем сообщаем системе скорость $-v$ в направлении ϑ. Таким образом, искомое состояние частицы определяется преобразованием

$$T(\vartheta, \varphi)=A(\vartheta, \varphi)\,R(\vartheta)=\begin{Vmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\,\mathrm{ch}\,\varphi & \sin\vartheta\,\mathrm{sh}\,\varphi \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\,\mathrm{ch}\,\varphi & \cos\vartheta\,\mathrm{sh}\,\varphi \\ 0 & \mathrm{sh}\,\varphi & \mathrm{ch}\,\varphi \end{Vmatrix}. \tag{1.4}$$

Из (1.3) следует

$$T(\vartheta, \varphi)=R(\vartheta)\,A(0, \varphi)=R(\vartheta)\,T(0, \varphi). \tag{1.5}$$

Это означает, что интересующее нас состояние можно получить, рассматривая состояние (1.1) из системы координат, повернутой на угол ϑ. Отсюда ясно, что утверждение «скорость и спин параллельны», как и следовало ожидать, инвариантно относительно вращений.

Если состояние, порожденное преобразованием

$$A(0,\ \varphi) = T(0,\ \varphi),$$

рассматривать из системы координат, движущейся со скоростью u в направлении оси z, то нам будет казаться, что частица по-прежнему движется в направлении оси z, а ее спин остается параллельным направлению ее движения. Исключение составляют два случая: если $u > v$, то скорость и спин антипараллельны; если же $u = v$, то утверждение о параллельности скорости и спина утрачивает смысл, ибо мы увидим частицу покоящейся. Другие состояния, в которых спин и скорость параллельны, т. е. состояния, порожденные преобразованиями $T(\vartheta, \varphi)$, также сохраняют свое отличительное свойство, если их рассматривать из системы координат, движущейся в направлении скорости частицы при условии, что система координат движется не быстрее частицы. Этого также можно было ожидать заранее. Однако если состояние, порожденное преобразованием $T(0,\ \varphi)$, рассматривать из системы координат, движущейся со скоростью $v' = c \operatorname{th} \varphi'$ в направлении $-y$, то спин и скорость *не* будут более казаться параллельными, *если только скорость частицы v не будет достаточно близка к скорости света*. Последняя оговорка существенна. Она означает, что при больших скоростях состояния частицы с параллельными спином и скоростью [т. е. состояния, порожденные преобразованием (1.4) с большим φ], если их рассматривать из системы координат, движущейся не слишком быстро в направлении скорости частицы, остаются состояниями того же класса. В предельном случае, когда частица движется со скоростью света, эти состояния становятся инвариантными относительно *всех* преобразований Лоренца.

Убедимся сначала в том, что спин и скорость в состоянии (1.1) с точки зрения системы координат, движущейся в направлении $-y$, не будут казаться параллельными. Рассматриваемое состояние порождено преобразованием

$$A\left(\frac{\pi}{2},\ \varphi'\right) A(0,\ \varphi) = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch}\varphi' & \operatorname{sh}\varphi \operatorname{sh}\varphi' & \operatorname{ch}\varphi \operatorname{sh}\varphi' \\ 0 & \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi' & \operatorname{sh}\varphi \operatorname{ch}\varphi' & \operatorname{ch}\varphi \operatorname{ch}\varphi' \end{Vmatrix}. \tag{1.6}$$

Это преобразование не имеет вида (1.4). Чтобы привести (1.6) к виду (1.4), умножим матрицу преобразования справа на $R(\varepsilon)$, т. е. повернем сначала спин. Угол ε определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{th}\varphi'}{\operatorname{sh}\varphi} = \frac{v'}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}; \tag{1.7}$$

он называется углом между спином и скоростью. При $v \ll c$ угол ε совпадает с углом, который вектор суммы двух взаимно ортогональных скоростей v и v' образует с первой из них. При скоростях v, близких к c, угол ε становится малым. В этом случае вряд ли необходимо поворачивать спин на нужный угол от оси z прежде, чем сообщать частице скорость в направлении оси z. Все сказанное содержится в тождестве

$$A\left(\frac{\pi}{2},\ \varphi'\right) A(0,\ \varphi) R(\varepsilon) = T(\vartheta,\ \varphi''); \tag{1.8}$$

это тождество нетрудно проверить прямым вычислением. Правая часть соответствует частице с параллельными спином и скоростью. Величина и направление последней определяются из хорошо известных соотношений

$$v'' = c\,\mathrm{th}\,\varphi'' = \left(v^2 + v'^2 - \frac{v^2 v'^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{1.8а}$$

и

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{\mathrm{sh}\,\varphi'}{\mathrm{th}\,\varphi} = \frac{v'}{v\,(1 - v'^2/c^2)^{1/2}}. \tag{1.8б}$$

Приведенное в тексте соотношение (1) следует из (1.7) и (1.8б) при $v \approx c$.

Приближенная инвариантность состояний $T(\vartheta,\ \varphi)\psi_0$ (где ψ_0 — стандартное состояние, а $\varphi \gg 1$) относительно всех преобразований Лоренца математически выражается равенствами

$$R(\vartheta)\,T(0,\ \varphi)\,\psi_0 = T(\vartheta,\ \varphi)\,\psi_0, \tag{1.5а}$$

$$A(0,\ \varphi')\,T(0,\ \varphi)\,\psi_0 = T(0,\ \varphi' + \varphi)\,\psi_0, \tag{1.9а}$$

$$A\left(\frac{\pi}{2},\ \varphi'\right) T(0,\ \varphi)\,\psi_0 \to T(\vartheta,\ \varphi'')\,\psi_0. \tag{1.9б}$$

Эти равенства показывают, как выглядит из других лоренцевых систем отсчета волновая функция состояния $T(0,\ \varphi)\psi_0$. Аналогичные равенства нетрудно выписать и для всех состояний $T(\alpha,\ \varphi)\psi_0$. В частности, соотношение (1.5а) показывает, что интересующие нас состояния инвариантны относительно поворотов системы координат, соотношение (1.9а) — что эти состояния инвариантны относительно преобразований Лоренца, скорость которых *в направлении движения* частицы не слишком велика (так что $\varphi' + \varphi \gg 0$, т. е. φ' не слишком большое отрицательное число). Наконец, чтобы доказать (1.9б), вычислим вероятность перехода между состояниями

$$A\left(\frac{\pi}{2},\ \varphi'\right) T(0,\ \varphi)\,\psi_0 \quad \text{и} \quad T(\vartheta,\ \varphi'')\,\psi_0,$$

где ϑ и φ'' определяются из соотношений (1.8a) и (1.8б). Из тождества (1.8) получаем

$$\left(A\left(\frac{\pi}{2}, \varphi'\right) T(0, \varphi)\,\psi_0,\ T(\vartheta, \varphi'')\,\psi_0\right) = \\ = (T(\vartheta, \varphi'')\,R^{-1}(\varepsilon)\,\psi_0,\ T(\vartheta, \varphi'')\,\psi_0) = \\ = (R^{-1}(\varepsilon)\,\psi_0,\ \psi_0) \to (\psi_0,\ \psi_0).$$

Перейти ко второй строке можно потому, что $T(\vartheta, \varphi'')$ означает преобразование координат и, следовательно, унитарно. Последний переход мы имеем право сделать, так как при $\varphi \to \infty$ угол $\varepsilon \to 0$ [что нетрудно усмотреть из формулы (1.7) и равенства $R(0) = 1$].

Проведенные рассуждения не содержат ничего принципиально нового и используют по существу лишь два факта:

а) подгруппа группы Лоренца, оставляющая инвариантным нулевой вектор, отлична от подгруппы той же группы, оставляющей инвариантным времени-подобный вектор;

б) если последнюю подгруппу «сжать» до подгруппы, оставляющей инвариантным нулевой вектор, то ее представления разлагаются на одномерные [18].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

До того как Ли и Янг выдвинули свою гипотезу (см. [19], а также [20]), было широко распространено мнение, что, помимо операций симметрии, образующих собственную группу Пуанкаре, существуют еще три независимые операции симметрии. Собственная группа Пуанкаре состоит из всех преобразований Лоренца, которые можно непрерывно получить из тождественного преобразования, и всех преобразований в пространственно-подобных и времени-подобных направлениях, а также произведений всех перечисленных преобразований. Это непрерывная группа; входящие в нее преобразования Лоренца не изменяют направление временно́й оси, а их определитель равен 1. Перечислим три дополнительные независимые операции, относительно которых предполагалась строгая инвариантность законов природы:

Пространственная инверсия I, т. е. преобразование $x, y, z \to -x, -y, -z$, не переводящее частицы в античастицы [1]).

Обращение времени T (для которого Людерс [21] предложил более адекватное название *Umkehr der Bewegungsrichtung* — обращение направления движения), т. е. преобразование, заме-

[1]) В настоящее время эту операцию принято обозначать буквой *P*. — *Прим. автора при корректуре американского издания книги.*

няющее каждую скорость на противоположно направленную, вследствие чего частица в момент времени $+t$ занимает то же положение, какое она без обращения времени занимала бы в момент $-t$. Оператор обращения времени T (названный также Людерсом обращением времени первого рода [22]) не переводит частицы в античастицы.

Зарядовое сопряжение C, т. е. замена всех положительных зарядов отрицательными и вообще частиц античастицами без изменения положения или скорости этих частиц[1]). Квантовомеханические выражения для операций симметрии I и C унитарны, выражение для T антиунитарно.

Три операции I, T, C вместе с их произведениями TC (по Людерсу TC называется обращением времени второго рода), IC, IT, ITC и тождественной (единичной) операцией образуют группу. Считалось, что все законы физики инвариантны относительно произведений элементов этой группы и элементов собственной группы Пуанкаре. Высказанное в тексте предложение сводится к исключению каждой из операций I и C в отдельности, но сохранению в качестве операции симметрии их произведения IC. В этом случае дискретная группа симметрии состояла бы из тождественной операции плюс

$$IC, \; T \; \text{и} \; ICT, \tag{2.1}$$

а полная группа симметрии законов природы включала бы в себя собственную группу Пуанкаре плюс произведения ее элементов на элементы (2.1). Такая полная группа изоморфна (по существу тождественна) неограниченной группе Пуанкаре, т. е. произведению *всех* преобразований Лоренца на все сдвиги в пространстве и во времени. Квантовомеханические выражения для операций собственной группы Лоренца и ее произведения на IC унитарны, аналогичные выражения для T и ICT (а также для их произведений на элементы собственной группы Пуанкаре) антиунитарны. Людерс заметил, что при некоторых весьма естественных условиях ICT принадлежит к группе симметрии любой *локальной* теории поля.

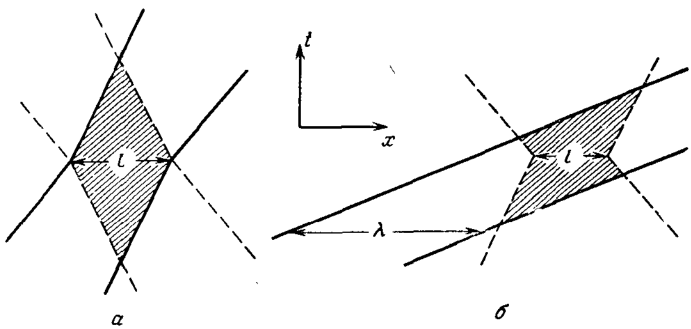
ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Рассмотрим сначала столкновение двух частиц равной массы m в системе координат, в которой среднее значение их

---

[1]) Все три операции симметрии впервые были подробно рассмотрены Швингером [23]. См. также статью Крамерса [24] и статью Паули в сборнике [25]. Важность двух первых операций симметрии (и их связь с понятиями четности и крамерсовским вырождением) была впервые замечена автором [26, 27]. См. также [28, 29]. Мысль о возможности зарядового сопряжения была высказана еще Ферри [30].

суммарного импульса равно нулю. Предположим, что в данный момент волновые функции обеих частиц существенно отличны от нуля на отрезке длиной l в направлении их средней скорости относительно друг друга. Если мы рассмотрим только это пространственно-подобное направление и временну́ю ось, то площадь той части пространства-времени, в которой волновые



Фиг. 6. *а* — локализация столкновения двух частиц с одинаковой массой покоя.

Сплошные линии — эффективные границы волнового пакета частицы, движущейся вправо: *пунктирные* — эффективные границы волнового пакета частицы, движущейся влево. Столкновение возможно в заштрихованной части пространства-времени.

б — локализация столкновения между частицей с массой покоя, отличной от нуля, и частицей с нулевой массой покоя.

Сплошные линии, отстоящие друг от друга на расстоянии λ в направлении оси x — границы волнового пакета частицы с нулевой массой покоя; *пунктирные* — границы волнового пакета частицы с массой покоя, отличной от нуля. Столкновение возможно в заштрихованной области.

функции существенно перекрываются (фиг. 6, *а*), будет равна

$$a = \frac{l^2}{2v_{\text{мин}}}, \tag{3.1}$$

где $v_{\text{мин}}$ — наименьшая скорость, входящая в волновые пакеты сталкивающихся частиц и имеющая ненулевую вероятность. Если $\bar{p}$ — средний импульс (для обеих частиц его значение одинаково), а δ — полуширина распределения импульса, то

$$v_{\text{мин}} = (\bar{p} - \delta)\left[m^2 + \frac{(\bar{p}-\delta)^2}{c^2}\right]^{-1/2}.$$

Поскольку l не может быть меньше $\hbar/\delta$, площадь (3.1) ограничена снизу величиной

$$\frac{\hbar^2}{2\delta^2}\,\frac{[m^2 + (\bar{p}-\delta)^2/c^2]^{1/2}}{\bar{p}-\delta} \tag{3.1a}$$

(заметим, что при $\delta = \bar{p}$ эта величина обращается в бесконечность). С точностью до численного множителя минимум выражения (3.1а) равен

$$a_{\text{мин}} \approx \frac{\hbar^2}{\bar{p}^3}\left(m^2 + \frac{\bar{p}^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx \frac{\hbar^2 c}{E^{3/2}(E+mc^2)^{1/2}}, \tag{3.2}$$

где E — кинетическая энергия (полная энергия минус энергия покоя) частиц.

Кинетическая энергия E позволяет сузить в направлениях, ортогональных средней относительной скорости частиц, размеры той части пространства-времени, в которой волновые функции сталкивающихся частиц существенно отличны от нуля, до величины

$$\frac{\hbar^2 c^2}{E(E+2mc^2)}.$$

Следовательно, объем четырехмерного пространства, в пределах которого может произойти столкновение, с точностью до численного множителя равен

$$V_{\text{мин}} = \frac{\hbar^4 c^3}{E^{5/2}(E+mc^2)^{3/2}}. \tag{3.3}$$

Здесь E означает среднюю кинетическую энергию частиц в системе координат, относительно которой их центр масс в среднем находится в состоянии покоя. Соотношение (3.3) верно с точностью до численного множителя порядка единицы, зависящего от E/mc^2.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, в каком-то смысле противоположный предыдущему: столкновение частицы с отличной от нуля массой покоя и частицы с нулевой массой покоя. Столкновение по-прежнему будем рассматривать в системе координат, в которой средний суммарный импульс частиц равен нулю. Волновую функцию частицы с отличной от нуля массой покоя желательно ограничить областью l, которая уже эффективной области определения волновой функции частицы с нулевой массой покоя. Пусть ширина последней области равна λ (фиг. 6, *б*). Тогда неопределенности в значениях импульса и энергии частицы будут не меньше $\hbar/\lambda$ и $\hbar c/\lambda$, причем эти же величины будут определять с точностью до численного множителя средние значения импульса и энергии частицы. Таким образом, $\bar{p} \approx \hbar/\lambda$. Кинетическая энергия частицы с отличной от нуля массой покоя по порядку величины будет равна

$$\frac{1}{2}\left[m^2c^4 + \left(\bar{p} + \frac{\hbar}{l}\right)^2 c^2\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\left[m^2c^4 + \left(\bar{p} - \frac{\hbar}{l}\right)^2 c^2\right]^{1/2} - mc^2, \tag{3.4}$$

так как $\hbar/l$ — неопределенность в значении импульса. Поскольку $l \leqslant \lambda$, величиной $\bar{p}$ в (3.4) при оценке порядка величины можно пренебречь. Отсюда для полной кинетической энергии получаем

$$E \approx \frac{\hbar c}{\lambda} + \left(m^2c^4 + \frac{\hbar^2 c^2}{l^2}\right)^{1/2} - mc^2, \tag{3.5}$$

а площадь заштрихованной части пространства-времени на фиг. 6, *б* по порядку величины равна

$$a = \frac{\lambda}{c}\left(l + \frac{\Delta v \lambda}{c}\right). \tag{3.6}$$

где Δv — неопределенность в значении скорости второй частицы:

$$\Delta v = \frac{\bar{p} + \hbar/l}{[m^2 + (\bar{p} + \hbar/l)^2/c^2]^{1/2}} - \frac{\bar{p} - \hbar/l}{[m^2 + (\bar{p} - \hbar/l)^2/c^2]^{1/2}}. \tag{3.6a}$$

Это выражение можно снова заменить на

$$\frac{\hbar}{l}\left(m^2 + \frac{\hbar^2}{l^2 c^2}\right)^{-1/2}.$$

При данном E минимальное значение a достигается в том случае, если *кинетические энергии* обеих частиц имеют один и тот же порядок: оба члена в (3.6) становятся тогда почти равными, и

$$\frac{l}{\lambda} \approx \left(\frac{E}{mc^2 + E}\right)^{1/2}.$$

Если минимальное значение a требуется оценить лишь по порядку величины, то достаточно воспользоваться формулой (3.2), уже известной из рассмотрения первого предельного случая. Формула (3.3) также пригодна, если одна из двух частиц имеет нулевую массу покоя.

Двумерный случай особенно упрощается, если обе частицы обладают нулевыми массами покоя. В этом случае волновые пакеты вообще не распространяются, и непосредственно видно, что формула (3.2) верна. В четырехмерном случае формула (3.3) также верна, но ее доказательство с помощью явно построенных волновых пакетов (без ссылок на соотношение неопределенности) отнюдь не просто. Волновые пакеты требуется построить так, чтобы они были ограничены по всем направлениям, распространялись не слишком быстро и перемещались лишь в сторону одного из двух полупространств (поскольку одна частица движется вправо, а другая — влево). Мы не будем подробно останавливаться здесь на построении таких волновых пакетов. Они необходимы для более строгого доказательства соотношений (3.2) и (3.3) и в случае конечных масс. Приведенные выше доказательства, опиравшиеся на соотношения неопределенности, показывают лишь, что величины a и v не могут быть *меньше* правых частей соответствующих равенств. В самом деле, реализовать пределы, определяемые соотношениями (3.2) и (3.3), чрезвычайно трудно. Исключением служит лишь двумерный случай и соударение двух частиц с нулевыми массами покоя. Во всех остальных случаях предсказание о сравнительно низких значениях $a_{\text{мин}}$ и $V_{\text{мин}}$ сделано в предположении, что волновые пакеты сталкивающихся частиц достигают минимальных размеров в момент соударения. Независимо от того, о каком именно случае идет речь, формулы (3.2) и (3.3) показывают, что точная локализация в пространстве-времени возможна лишь при соударениях со сравнительно высокой энергией столкновения и большой неопределенностью по энергии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Обозначим компоненты вектора, направленного из события 1 в событие 2, через x_i, а компоненты единичного вектора с началом в событии 1, направленного вдоль мировой линии первых часов, через e_i. Тогда компоненты первого светового сигнала будут иметь вид $x_i + te_i$, а компоненты второго светового сигнала $x_i - t'e_i$. Следовательно (см. фиг. 4),

$$g^{ik}(x_i + te_i)(x_k + te_k) = 0, \tag{4.1}$$

$$g^{ik}(x_i - t'e_i)(x_k - t'e_k) = 0. \tag{4.2}$$

Умножая (4.1) на t', а (4.2) на t и складывая, мы исключаем члены, линейные по t и t', и получаем

$$2g^{ik}x_i x_k + 2tt'g^{ik}e_i e_k = 0. \tag{4.3}$$

Поскольку e — единичный вектор, справедливо соотношение

$$g^{ik}e_i e_k = 1,$$

и из формулы (4.3) видно, что длина пространственно-подобного интервала между точками 1 и 2 равна $(tt')^{1/2}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Поскольку описанный в работе метод измерения кривизны предполагает *постоянную кривизну* во всех областях пространства-времени, в которых производится измерение, мы при проведении выкладок будем использовать пространство постоянной кривизны, точнее часть пространства с постоянной кривизной. Рассматривать мы будем лишь одну пространственно-подобную ось, т. е. двумерное пространство де Ситтера. Последнее, как обычно [31], можно погрузить в трехмерное пространство с координатами x, y, τ. Точки пространства де Ситтера при этом образуют гиперболоид

$$x^2 + y^2 - \tau^2 = a^2, \tag{5.1}$$

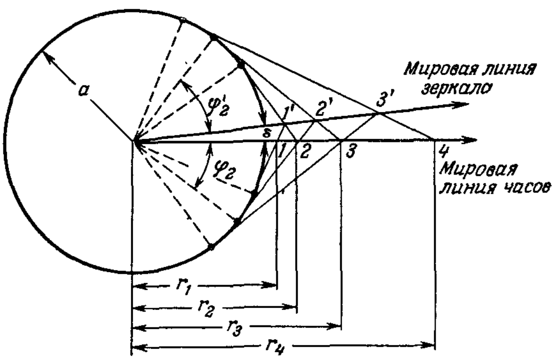
где a — «радиус Вселенной». В качестве координат точки мы будем использовать x и y или соответствующие полярные координаты r и φ. Метрическая форма в полярных координатах имеет вид

$$(ds)^2 = \frac{a^2}{r^2 - a^2} dr^2 - r^2 d\varphi^2. \tag{5.2}$$

Каждой паре значений r, φ (за исключением $r = a$) соответствуют две точки пространства де Ситтера с положительным и отрицательным

$$\tau = (r^2 - a^2)^{1/2}.$$

Это не приводит ни к каким недоразумениям, поскольку все события происходят при положительных τ. Нулевые линии (траектории световых сигналов) касаются окружности $r = a$.



Фиг. 7. Анализ эксперимента, изображенного на фиг. 5.

Показан вид, который имеет гиперболоид де Ситтера, если на него смотреть вдоль оси. Каждая точка вне окружности отвечает двум точкам мира де Ситтера с одинаковыми пространственными координатами и равными по величине, но противоположными по знаку временными координатами. Первой световой сигнал, испущенный в точке *1*, достигает зеркала в точке *1'* и возвращается к часам в точке *2*. Второй и третий световые сигналы проходят пути *22'3* и *33'4*.

Описанный в тексте эксперимент удобно анализировать с помощью фиг. 7. Предположим для простоты, что часы и зеркало «покоятся», т. е. их мировые линии имеют постоянные полярные углы, равные соответственно 0 и δ. Первый световой луч проходит путь из *1* в *1'* и из *1'* в *2*, второй — из *2* в *2'* и из *2'* в *3* и третий — из *3* в *3'* и из *3'* в *4*. Полярный угол радиуса-вектора, перпендикулярного первой части *22'* мировой линии второго светового луча, обозначим через φ_2. Из фиг. 7 видно, что угол φ_2', который мировая линия зеркала образует с радиусом-вектором, перпендикулярным второй части *2'3* мировой линии второго светового сигнала, равен

$$\varphi_2' = \varphi_2 + \delta. \tag{5.3}$$

Углы φ_1, φ_1', φ_3 и φ_3' имеют аналогичный смысл. Мы не указали их на фиг. 7, чтобы не загромождать ее. Рассуждая так же, как при выводе (5.3), получаем

$$\varphi_3 = \varphi_2' + \delta = \varphi_2 + 2\delta, \tag{5.3а}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 - 2\delta, \tag{5.3б}$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 + 2\delta = \varphi_2 + 4\delta. \tag{5.3в}$$

Пусть r_1, r_2, r_3, r_4 — радиусы-векторы (в полярных координатах) точек *1*, *2*, *3*, *4*:

$$r_i = \frac{a}{\cos\varphi_i}. \tag{5.4}$$

Собственное время t, регистрируемое часами, можно получить, интегрируя метрическую форму (5.2) по мировой линии часов $\varphi = 0$:

$$t = a\ln\left[r + (r^2 - a^2)^{1/2}\right]. \tag{5.5}$$

Тогда время t_2 нахождения в пути второго сигнала будет определяться формулой

$$t_2 = a\ln\frac{r_3 + \left(r_3^2 - a^2\right)^{1/2}}{r_2 + \left(r_2^2 - a^2\right)^{1/2}} = a\ln\frac{\cos\varphi_2\left(1 + \sin\varphi_3\right)}{\cos\varphi_3\left(1 + \sin\varphi_2\right)}. \tag{5.6}$$

Аналогичные выражения получаются и для первого и третьего сигналов. Все полярные углы φ можно выразить через φ_2 и δ. Это позволяет вычислить углы φ_i'. При малых δ находим

$$\frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{t_2^2} \approx \frac{11}{a}. \tag{5.7}$$

Следовательно, инвариант Римана $R = 2/a^2$ пропорционален квадрату выражения (5.7). В частности, R обращается в нуль, если выражение (2) равно нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jauch J. M., Rohrlich F.*, The Theory of Protons and Electrons, Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge, 1955.
2. *Bass L., Schrödinger E.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A232**, 1 (1955).
3. *Wigner E.*, Ann. Math., **40**, 149 (1939).
4. Jubilee of Relativity Theory, Mercier A. and Kervair M., eds., Birkhauser Verlag, Basel, 1956.
5. *Lee T. D., Yang C. N., Oehme R.*, Phys. Rev., **106**, 340 (1957).
6. *Salam A.*, Nuovo Cim., **5**, 229 (1957).
7. *Ландау Л.*, Nucl. Phys., **3**, 127 (1957).
8. *Wick G. C., Wightman A. S., Wigner E.*, Phys. Rev., **88**, 101 (1952). (Статья 24 данной книги.)
9. *Laporte O.*, Zs. Phys., **23**, 135 (1924).

10. *Wigner E.*, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931, Kap. XVIII. (Имеется перевод: *Вигнер Е.*, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961.)
11. *Zocher H.*, *Török C.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**, 681 (1953).
12. *Wu C. S.*, *Ambler E.*, *Hayward R. W.*, *Hoppes D. D.*, *Hudson R. P.*, Phys. Rev., **105**, 1413(L) (1957).
13. *Garwin R. L.*, *Lederman L. M.*, *Weinreich M.*, Phys. Rev., **105**, 1415(L) (1957).
14. *Friedman J. L.*, *Telegdi V. L.*, Phys. Rev., **105**, 1681(L) (1957).
15. *Schrödinger E.*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Klasse, 238 (1931).
16. *Bohr N.*, *Rosenfeld L.*, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-Fys. Medd., **12**, 8 (1933).
17. Niels Bohr and the Development of Physics, Pergamon Press, London, 1955. (Имеется перевод: Нильс Бор и развитие физики, ИЛ, 1958.)
18. *Wigner E.*, *Inönü E.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**, 510 (1953).
19. *Lee T. D.*, *Yang C. N.*, Phys. Rev., **104**, 254 (1956).
20. *Purcell E. M.*, *Ramsey N. F.*, Phys. Rev., **78**, 807 (1950).
21. *Lüders G.*, Zs. Phys., **133**, 325 (1952).
22. *Lüders G.*, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-Fys. Medd., **28**, 5 (1954).
23. *Schwinger J.*, Phys. Rev., **74**, 1439 (1948).
24. *Kramers H. A.*, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, **40**, 814 (1937).
25. *Pauli W.*, статья в сборнике [17].
26. *Wigner E.*, Zs. Phys., **43**, 624 (1927).
27. *Wigner E.*, Nachr. Gesell. der Wissen., Mathematisch-Physikalische Klasse, Heft 5, 546 (1932). (Статья 21 данной книги.)
28. *Newton T. D.*, *Wigner E.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 400 (1949). (Статья 22 данной книги.)
29. *Watanabe S.*, Rev. Mod. Phys., **27**, 26 (1945).
30. *Furry W.*, Phys. Rev., **51**, 125 (1937).
31. *Robertson H. P.*, Rev. Mod. Phys., **5**, 62 (1933).
32. *Farkas A.*, Orthohydrogen, Parahydrogen and Heavy Hydrogen, Cambridge University Press, New York, 1935. (Имеется перевод: *Фаркас А.*, Ортоводород, параводород и тяжелый водород, ОНТИ, М. — Л., 1936.)

6

О СТРУКТУРЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ [1])

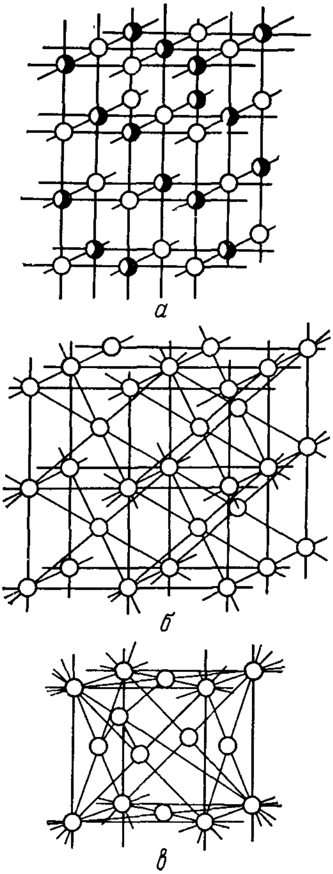
1. Физика всегда развивается по двум направлениям. Один ее фронт обращен к явлениям, не вписывающимся в общую картину мира. Победы на этом фронте знаменуют важные изменения в фундаментальных концепциях. В наши дни именно на этом направлении, используя как теорию, так и эксперимент, физики ведут борьбу за лучшее понимание ядерных явлений. Но помимо поиска новых концепций, никогда не ослабевает стремление углубить и расширить наши знания о явлениях, которые, по нашему убеждению, *могут* быть поняты на основе уже существующих представлений и теорий. Это второе направление развития физики, несомненно, имеет меньшее значение. Оно редко приводит к фундаментальным открытиям в самой физике, но очень важно для исследований, проводимых в ее пограничных областях, таких, как физическая химия, и в прикладных науках. Около шести лет назад спектроскопия внезапно совершила переход из первой категории во вторую. Немного позднее стало ясно, что изучение твердых тел также принадлежит ко второму направлению. Несмотря на это, физика твердого тела остается одной из наиболее привлекательных областей исследования, ибо в ней научными методами изучается то, с чем нам приходится сталкиваться в нашей повседневной практике. Например, мы никогда не боимся, что ключ, если его уронить, разлетится на части, как стекло. Нам никогда не придет в голову опасаться, что золотая монета может раствориться в воде или испариться, если ее оставить на открытом воздухе.

Рентгеноскопические исследования позволили установить, что большинство окружающих нас твердых тел — кристаллы. Это вовсе не означает, что они непременно представляют собой монокристалл, хотя и такое возможно даже для тел столь больших размеров, как айсберги. Обычно твердые тела обладают поликристаллическим строением, т. е. представляют собой конгломерат микроскопических кристаллов различных размеров. Таковы, например, металлические части обычных инструментов, орудий труда и т. п. Слово «кристаллы» в данном случае озна-

---

[1]) Опубликовано в журнале: Scientific Monthly, 42 (January 1936).

чает не тела правильной формы, какие мы видим в кристаллографических коллекциях, а лишь подчеркивает, что отдельные зерна твердого тела обладают правильной *внутренней структурой*, возникающей вследствие удивительно правильного расположения атомов в виде пространственных *решеток*[1]). Примеры таких решеток показаны на фиг. 1. (Кружки означают центры атомов; линии не имеют физического смысла и проведены только для того, чтобы подчеркнуть объемность решеток.) Определенным образом ориентированная область, в пределах которой атомы расположены правильно, называется микрокристаллом; она может иметь размеры от 0,00001 до 1 *мм* и даже больше. У таких микрокристаллов граница обычно имеет крайне неправильную форму. Хаотически примыкая друг к другу, микрокристаллы образуют поликристаллическое тело. (Очень мало известно о том, каким образом микрокристаллы с их различной ориентацией пристраиваются и примыкают друг к другу. Некоторые считают, что существует очень тонкий слой некристаллической фазы, «склеивающий» микрокристаллы, но убедительных данных, подтверждающих такое мнение, нет.)



а, *б*, *в*

Фиг. 1. *а* — фрагмент решетки KCl.

Зачерненными кружками указаны положения ионов калия; *светлыми* — положения ионов хлора. Расстояние между ближайшими соседями равно 0,00000031 *мм*. Обычная каменная соль обладает решеткой такого же вида, но с несколько меньшими расстояниями между узлами.

б — фрагмент решетки щелочного металла.

Кружками изображены центры масс атомов. Расстояние между ближайшими соседями для натрия составляет 0,000000372 *мм*

в — элементарная ячейка решетки алмаза.

Расстояние между ближайшими соседями равно 0,000000154 *мм*. Аналогичной решеткой с расстоянием 0,000000234 *мм* между ближайшими соседями обладает кремний.

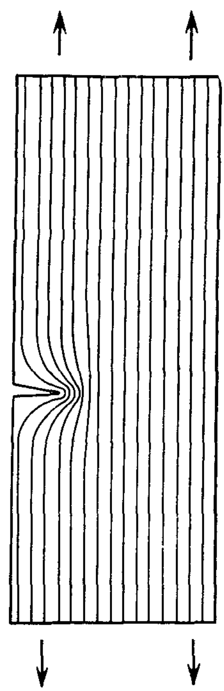
Из всех твердых тел, обнаруженных в природе, преобладаю-

[1]) В современной кристаллографии правильное расположение атомов в пространстве называется структурой. Например, говорят *структура* KCl, *структура* алмаза и т. д. — *Прим. ред. американского издания.*

щую часть составляют кристаллы. Практически при ближайшем рассмотрении кристаллами оказываются все скальные породы, лед, а также все металлы. Песчинки являются не чем иным, как маленькими кристалликами; жирная глина также имеет кристаллическое строение. Некристаллических твердых тел, если не считать стекол и веществ органического происхождения, например древесину, крайне мало.

2. При исследовании твердых тел приходится выделять различные группы их свойств и изучать их отдельно. При исследовании газов или жидкостей такой необходимости не возникало.

Всякому ясно, что рассмотрение правильной решетки намного проще, чем изучение груды беспорядочно нагроможденных атомов. Чрезвычайно важно поэтому, что многие свойства поликристаллов совпадают со свойствами идеальных монокристаллов. Такие свойства связаны с явлениями, затрагивающими всю массу материала, например с испарением, плавлением, удельным весом и сжимаемостью. В понимании именно этих «нечувствительных» свойств нам удалось продвинуться особенно далеко, и в этой статье основное внимание будет уделено именно им.



Фиг. 2.

К сожалению, очень многие важные свойства принадлежат ко второму классу — к классу «чувствительных» свойств. Сопротивление разрушению, например, определяется наиболее слабой частью кристалла. Одного дефекта иногда бывает достаточно, чтобы вызвать разрушение образца при очень малой нагрузке, составляющей $^1/_{10}$ или даже $^1/_{100}$ долю той, что может выдержать идеальный кристалл. На фиг. 2 показана грубая схема того, как это может произойти: напряжения, изображаемые в виде линий напряжений, концентрируются в окрестности дефекта и достигают значений, во много раз превосходящих величину напряжения в остальном объеме материала. Сильная концентрация напряжений может привести к расширению трещины, а затем и к разрушению всего тела. Таким образом, те части тела, которые расположены выше и ниже трещины, не только не увеличивают прочность материала, но явно уменьшают ее, т. е. прочность всего тела гораздо меньше, чем прочность его слабейшей части.

Можно провести параллель между электрическим пробоем изолятора и пределом упругости (наименьшим напряжением, вызывающим остаточную деформацию), поэтому при изучении «чувствительных» свойств кристаллов необходимо знать не только кристалл в целом, но и его «патологию», т. е. особо опасные изъяны и дефекты.

Помимо «чувствительных» и «нечувствительных» существует ряд промежуточных свойств, связанных с границами. Одни из них, например термоионная эмиссия электронов, отчасти обусловлены особенностями наружной поверхности тела, другие, например электропроводность солей под давлением, зависят от свойств внутренних границ кристаллов. На эти свойства оказывают влияние даже небольшие примеси. Приняв особые меры предосторожности и проявив недюжинное искусство, экспериментаторы иногда получают воспроизводимые результаты и для этого круга явлений. Нередко обнаруженные факты поддаются теоретической интерпретации так же легко, как «нечувствительные» свойства.

3. Обратимся теперь к «нечувствительным» свойствам. Оказывается, что даже эти свойства твердых тел по своему разнообразию намного превосходят аналогичные свойства газов. С чисто эмпирической точки зрения различают четыре основных класса веществ, обладающих «нечувствительными» свойствами:

а) молекулярные кристаллы;
б) металлы;
в) валентные кристаллы;
г) ионные кристаллы.

Между этими классами возможны многие постепенные переходы. Принципы такой классификации были заложены Гриммом.

а. Молекулярные кристаллы. Из таких кристаллов состоят инертные газы, например He, Ne, Ar и т. д., или соединения с насыщенными связями, например H_2, N_2, O_2 и т. д., CH_4, C_2H_6, H_2O, H_2S и т. д., а также все органические соединения. Эти вещества обладают малой теплотой испарения и конденсируются только при сравнительно низких температурах. Они мягки, умеренно хрупки, хорошие изоляторы, прозрачны (если не считать тех областей спектра, в которых образующие их молекулы поглощают свет).

б. Металлы. Свойства металлов во многом противоположны свойствам веществ класса «а». Для металлов характерны намного большие силы связи между атомами, они обладают более высокими теплотами испарения и значительно большей твердостью. Особенно замечательное свойство металлов — их хорошая электро- и теплопроводность. Они непрозрачны, и многие важные применения металлов в промышленности связаны с их пластичностью, т. е. с их способностью разрушаться лишь после значительной деформации[1]). Металлы хорошо растворяются в металлах (сплавы), но едва растворимы в веществах других классов.

в. Валентные кристаллы. К их числу относятся, например, алмаз, кварц, карборунд.

г. Ионные кристаллы (соли). Они однотипны по своему строению. Для них характерны высокая теплота испарения и значительные силы сцепления. Подобно молекулярным кристаллам, они прозрачны, хорошие изоляторы, тверды и хрупки. Основное различие между молекулярными и ионными кристаллами состоит в том, что первые образованы нейтральными атомами, а «кирпичиками», из которых построены соли, служат электрически заряженные ионы, удерживаемые силами притяжения, действующими между разноименными зарядами. Вследствие этого соли хорошо растворяются в жидкостях с большой диэлектрической постоянной (например, в воде), поскольку такие жидкости сильно ослабляют притяжение между ионами.

Приведенную характеристику четырех классов твердых тел следует понимать в том же смысле, как принято понимать аналогичную характеристику какого-нибудь семейства растений в ботанике. Такая классификация не устанавливает жестких правил, а определяет лишь некий идеал, от которого реально существующие образцы, особенно сложные соединения, нередко отклоняются. Кроме того, существует множество твердых тел, занимающих промежуточное положение между названными четырьмя классами. Иногда внутри отдельных слоев вещества мы наблюдаем решетку одного типа, в то время как силы взаимодействия *между* слоями характерны для кристаллических решеток другого типа. Встречаются и такие случаи, когда вещество нельзя с уверенностью отнести ни к одному из четырех классов и оно по своим свойствам занимает промежуточное положение между двумя (и даже тремя) классами. Особенно много веществ обладает одновременно свойствами, присущими валентным и ионным кристаллам.

Все же такие исключения редки. Важность предложенной классификации становится особенно понятной, если учесть, что инстинктивно мы подразделяем на четыре названных выше класса все твердые тела неорганического происхождения, какие

---

[1]) Именно поэтому кусок металла не разрушится, если его бросить на пол. Резкий удар о пол вызывает огромные напряжения, под действием которых металл претерпевает пластическую деформацию, но не разрушается. Пластическая деформация позволяет металлу играть роль самоамортизатора, поскольку волна сжатия распространяется по всему металлу за большое время.

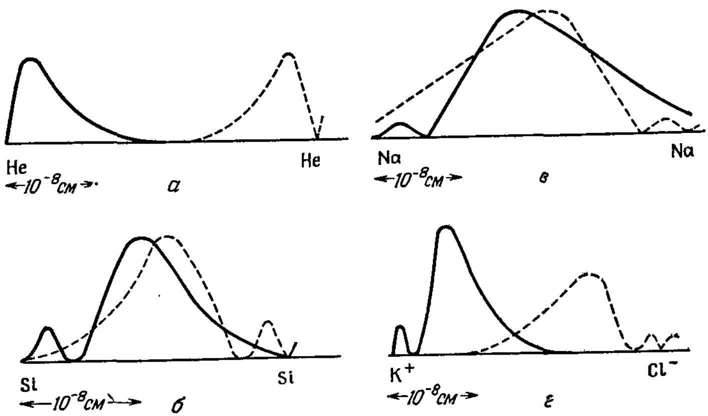
только попадают нам в руки. Характеристику каждого из четырех классов можно рассматривать как научное описание физических свойств (теплоты испарения, твердости, электропроводности, хрупкости и т. д.), которые мы надеемся обнаружить после осмотра и некоторой обработки у таких веществ, как твердая углекислота, родий, карборунд, глауберова соль, даже если эти вещества встречаются нам впервые. С другой стороны, мы совершенно не знаем, что́ ожидать от веществ с такими переходными решетками, как у карбида или даже у графита.

4. Огромные различия между физическими свойствами разных кристаллов ясно показывают, что силы, удерживающие атомы или молекулы, у всех четырех классов кристаллов неодинаковы. Чтобы понять происхождение и природу этих сил, необходимо прежде всего напомнить, как устроены отдельные атомы и молекулы. Читателям журнала *Scientific Monthly* это, наверное, хорошо известно. Лишь недавно на его страницах с блестящим обзором на тему о строении атомов и молекул выступил проф. Эйринг [1]). По Резерфорду, атом состоит прежде всего из тяжелого ядра, в котором сосредоточен весь положительный заряд и вся масса атома (за исключением $\sim 1/2000$). Центр тяжести атома периодически совпадает с ядром, в силу чего кружки на фиг. 1 можно рассматривать либо как положения атомов, либо как положения ядер. Атомное ядро, несмотря на его малые размеры, полно тайн и загадок. К счастью, для понимания твердого состояния они не имеют значения. Роль носителей отрицательных зарядов, в точности компенсирующих положительный заряд ядра нейтрального атома, играют легкие частицы — электроны. Эти электроны окружают ядро наподобие гигантского облака, размеры которого в сотни тысяч раз превосходят размеры атомного ядра, хотя толщина самого облака составляет всего лишь около 0,0000001 *мм*. Квантовая механика, созданная около восьми лет назад Гейзенбергом, Шредингером и Дираком, открыла нам точные законы движения электронного облака. Теперь мы уже в состоянии рассчитать плотность этого облака на различных расстояниях от ядра. Сравнивая плотность распределения электронов в различных точках решетки, мы, естественно, надеемся получить важные сведения о строении твердых тел. Внешние, или валентные, электроны определяют все химические свойства атома. На фиг. 3 сплошной линией показана плотность валентных электронов как функция расстояния от ядра. Кроме того, на оси абсцисс отмечено положение ближайшего соседа, а пунктирной кривой показано распределение плотности валентных электро-

---

1) *Eyring H.*, Scientific Monthly, **39**, 415 (1934).

нов ближайшего соседа *вдоль прямой, соединяющей его с первым атомом.* На фиг. 3, *а* обе кривые даны для гелия, наиболее характерного представителя молекулярных кристаллов; на фиг. 3, *б* — для валентного кристалла кремния; на фиг. 3, *в* — для типичного металла — натрия и на фиг. 3, *г* — для решетки



Фиг. 3. *а* — распределение заряда двух соседних атомов гелия в кристаллической решетке.

б — распределение заряда валентных электронов в свободном атоме кремния (*сплошная* кривая).

Пунктирной кривой показано распределение заряда валентных электронов другого атома кремния, расположенного от первого на таком же расстоянии, как в решетке.

в — распределение заряда валентных электронов в свободном атоме натрия (*сплошная* кривая).

Пунктирной кривой показано распределение заряда валентных электронов другого атома натрия, расположенного на расстоянии, равном расстоянию между ближайшими соседями в кристаллической решетке.

г — распределение заряда валентных электронов в ионах калия (*сплошная* кривая) и хлора (*пунктирная* кривая).

Расстояние между нулями двух функций распределения равно расстоянию между ближайшими ионами в решетке KCl.

KCl, очень напоминающей решетку обычной поваренной соли.

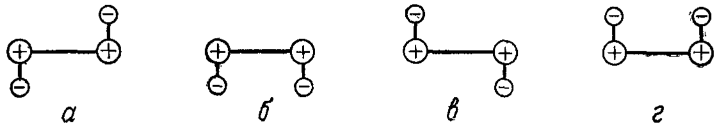
Сразу же заметно существенное различие между молекулярным и ионным кристаллами (фиг. 3, *а* и *г*), с одной стороны, и валентным кристаллом и металлом (фиг. 3, *б* и *в*) — с другой. У первых перекрытие электронных облаков мало, у вторых электронные облака перекрываются настолько сильно, что невозможно сказать, какому атому принадлежит определенный валентный электрон. В молекулярных и ионных кристаллах атомы или ионы, хотя и испытывают притяжение со стороны своих соседей, однако на распределении их заряда оно сказывается лишь незначительно. Иначе обстоит дело в металлах и валентных кристаллах. В этих случаях между атомами нет области с малой плотностью заряда и, следовательно, запрещенной для электронов. Электроны могут переходить от одного атома к другому. Таким образом, валентные электроны свободно передвигаются по всей решетке и принадлежат всей решетке. Это обстоятельство имеет решающее значение для свойств упомянутых веществ.

Элементарные составные части молекулярной и ионной решеток можно считать независимыми. Борновская классическая теория механических, электрических и тепловых свойств кристаллов, рассматривающая атомы и ионы решетки как индивидуальные частицы, достигла при изучении молекулярных и ионных кристаллов выдающихся успехов.

Сильное различие в поведении веществ этих двух классов обусловлено разным характером составных частей их решеток. В первом случае — это нейтральные атомы, в ионных решетках — заряженные частицы. Электрические силы, действующие между ионами, очень велики, что приводит к значительным силам сцепления, большой теплоте испарения и высокой твердости. Расстояния между соседними ионами, как видно из фиг. 3, совпадают с расстояниями между максимумами кривой распределения заряда. Значения радиусов ионов, вычисленные Полингом в Калифорнии, оказались в отличном согласии со значениями, полученными Гольдшмидтом из наблюдений. Ионные решетки устроены так, что положительные ионы в них всегда окружены отрицательными ионами, а отрицательные ионы — положительными (см. решетку на фиг. 1). Поскольку противоположные заряды притягиваются, внутри этих решеток возникают значительные силы сцепления.

Природа сил в молекулярных решетках не столь проста. Ван-дер-Ваальс был первым, кто предположил, что конденсацию вызывают те же силы, которые обусловливают отклонения в поведении реальных газов от законов идеального газа. Для случая молекулярных решеток гипотеза оказалась верной. Свойства этих сил были изучены Лондоном и Ваном методами квантовой механики, а сами силы получили название вандерваальсовых.

Притяжение между элементарными составными частями молекулярной решетки не может быть электростатическим, поскольку эти части лишены заряда. Понять природу вандерваальсовых сил, рассматривая электроны как облака распределенных зарядов, невозможно, но стоит лишь вспомнить о корпускулярной природе электронов, как сразу становится ясно, что электроны могут образовывать с ядром *диполи*. Вследствие быстрого движения электронов направление таких диполей изменяется очень быстро. На диполь с постоянной ориентацией в среднем будет действовать сила, равная нулю, поскольку притяжение для одной ориентации компенсируется отталкиванием для противоположной ориентации, а все направления диполя равновероятны. Иное дело, если встречаются два диполя, способные изменять ориентацию. Может случиться так, что две притягивающиеся конфигурации (фиг. 4, *а* и *в*) встречаются чаще отталкивающихся конфигураций (фиг. 4, *б* и *г*), хотя все ориентации *отдельных* диполей равновероятны. Лондон и Ван показали, что в действительности все так и происходит, и тем самым заложили основы не только теории молекулярных решеток, но и теории реальных газов.



Фиг. 4.

Вандерваальсовы силы, естественно, гораздо слабее кулоновских, действующих между ионами. Этим и объясняется, почему в молекулярных кристаллах сцепление мало и легко происходит испарение. Ясно также, что столь малые силы могут играть заметную роль лишь в отсутствие других, более мощных сил. К молекулярным относятся обычно кристаллы насыщенных соединений и инертных газов.

5. Из фиг. 3 видно, что металлы и валентные кристаллы образуют более компактные модификации вещества, чем молекулярные кристаллы и соли. Это позволяет получить важную информацию о поведении твердых тел при очень высоких давлениях. По мнению Бернала, который первым обратил внимание на столь интересный факт, все твердые тела при сверхвысоких давлениях должны переходить в металлы или в валентные кристаллы. Убедительным подтверждением правильности его точки зрения, совершенно не зависящим от вычислений распределения заряда, служит явление *аллотропии*. Так называется явление, состоящее в том, что один и тот же химический элемент существует в нескольких модификациях с сильно отличающимися физическими и химическими свойствами. Обычная белая разновидность фосфора обладает довольно сложной молекулярной решеткой. Белый фосфор — хороший изолятор, он мягок, растворяется в органических растворителях и имеет плотность 1,83 *г/см*³. Бриджмен в Гарварде подверг эту модификацию фосфора сжатию под очень большими давлениями, и ее решетка «сломалась»: белый фосфор перешел в *черный фосфор*, обладающий плотностью 2,70 *г/см*³, довольно хорошей электропроводностью и плохой растворимостью в органических жидкостях. То, что произошло с фосфором, — не исключение, а общее правило: если элемент существует в двух аллотропических модификациях, то *металлическая или валентная форма обладает большей плотностью*. Следующая таблица подтверждает это правило (плотность в *г/см*^{3}):

Мышьяк металлический	5,72	Мышьяк желтый	2,03
Алмаз	3,51	Графит	2,24
Фосфор черный	2,70	Фосфор белый	1,83
Селен металлический	4,82	Селен красный	4,47
Олово белое	7,28	Олово серое	5,76

Вычисления, проведенные в нашей лаборатории Хантингтоном, показывают, что должен существовать также металлический водород, хотя и при очень высоких давлениях, причем плотность его должна быть во много раз больше плотности обычной молекулярной формы.

Я не буду вдаваться в подробности по поводу естественно возникающего вопроса о причине принципиального различия между валентными кристаллами и металлами. Хотя эти формы и образуют компактную модификацию вещества, между ними (если не считать большую теплоту испарения и высокую точку кипения) нет ничего общего. Причины столь резкого различия своими корнями глубоко уходят в квантовую механику; они были выяснены недавно в работах Пайерлса и Бриллюэна. Согласно их исследованиям, для валентного кристалла число валентных электронов должно быть *четным*. Это правило выполняется без исключений. Многими ценными сведениями о структуре и кристаллической форме валентных решеток мы обязаны Полингу и Слетеру, однако обзор их работ выходит далеко за рамки этой статьи.

Я надеюсь, что мне удалось убедить читателя в главном: основы для понимания природы твердого состояния, несомненно, уже заложены. Все же потребуется еще большая и упорная работа, настойчивость и много новых идей, прежде чем мы сможем добавить теорию твердого тела как законченный этаж к зданию физики и с успехом начнем применять наши знания в промышленности.

Прогресс в теоретическом объяснении свойств твердых тел основан на успехах недавно созданной квантовой механики, а в экспериментальном — в основном на рентгеноструктурных исследованиях кристаллов. Не будь этих средств, проблемы изучения свойств твердых тел представлялись бы нам такими же безнадежными, какой мы считаем проблему строения жидкостей, где рентгеноструктурные исследования пока не увенчались сколько-нибудь заметным успехом.

7

О РАЗВИТИИ МОДЕЛИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ЯДРА[1])

МОДЕЛЬ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ЯДРА

В модели промежуточного ядра ядерную реакцию рассматривают как последовательность двух событий. Первое событие состоит в объединении сталкивающихся ядер в единое целое — так называемое промежуточное ядро. Хотя это промежуточное ядро нестабильно, оно тем не менее обладает многими свойствами стабильных ядер, в частности четко различимыми уровнями энергии. Вторым событием является распад промежуточного ядра либо на те ядра, из которых оно образовалось, либо на другую пару ядер. В первом случае реакции нет, а происходит лишь процесс рассеяния; второй случай отвечает собственно ядерной реакции.

Вероятность образования промежуточного ядра очень мала, за исключением того случая, когда энергия сталкивающейся пары ядер очень незначительно отличается от одного из уровней энергии промежуточного ядра. С другой стороны, если энергия двух сталкивающихся частиц в точности совпадает с одним из уровней промежуточного ядра, то сечение его образования очень велико: прицельный параметр соответствует угловому моменту $\hbar$ сталкивающейся пары ядер относительно их общего центра масс. Следовательно, сечение образования промежуточного ядра имеет резкие максимумы, между которыми спадает почти до нулевого значения. Распад промежуточного ядра подчиняется вероятностным законам: коль скоро промежуточное ядро образовалось, вероятность его распада по тому или иному каналу не зависит от того, как именно оно было образовано. Как уже упоминалось, различные каналы распада приводят к разным продуктам реакции; если в результате распада образуются те же ядра, слиянием которых было создано промежуточное ядро, то никакой реакции не происходит.

Только что описанная модель предназначалась также и для химических реакций (см., например, работу [1]). В этом случае ее первая ступень носила название промежуточной молекулы. Однако оказалось, что не все химические реакции обладают сечением с резкими максимумами, разделенными глубокими

[1]) Лекция посвящена памяти Рихтмайера (прочитана 28 января 1955 г.). Опубликована в журнале: Amer. Journ. Phys., 23, № 6 (1955).

минимумами; поэтому модель промежуточной молекулы верна лишь для ограниченного класса химических реакций. Для описания других реакций более пригодны другие механизмы, т. е. другие модели[1]). Можно ли считать, что модель промежуточного ядра верно передает общую схему всех ядерных реакций, и в каком именно смысле? — таков один из вопросов, который я намереваюсь рассмотреть в этой работе.

Мне не хотелось бы подробно излагать историю модели промежуточного ядра. Те, кто читал статью Бора и Калькара [3], не нуждаются в напоминании о ней. Для тех же, кто знаком лишь с более поздним состоянием теории и не знает первых работ, такое напоминание значило бы немного. Мне кажется, что наиболее важный шаг в развитии модели промежуточного ядра позволил сделать эксперимент. Экспериментальные работы Муна и Тилльмана, Бьерга и Весткотта, Сцилларда и других исследователей [4—8] показали, что для поглощения медленных нейтронов многими ядрами характерны высокие максимумы, разделенные глубокими провалами, т. е. те особенности, которые уже были известны как следствия модели промежуточной молекулы в теории химических реакций. Отсюда естественно возникла мысль о том, чтобы с помощью теории двухступенчатого процесса попытаться дать описание по крайней мере некоторых ядерных реакций.

Образование и последующий распад некоего комплекса — обычная схема, принятая при описании рассеяния и флуоресценции света. Поглощение света приводит к возбужденному состоянию поглотителя. Это возбужденное состояние и соответствует промежуточному ядру. Последующее испускание света возбужденным состоянием отвечает распаду промежуточного ядра. Таким образом, модель промежуточного ядра формально имеет много общего с процессом поглощения и последующего испускания света. Действительно, модель, некогда введенную для объяснения поглощения и последующего испускания света, можно было бы полностью перенести на область ядерных реакций, пополнив ее лишь одним новым элементом — энергетической зависимостью вероятностей распада промежуточного ядра по различным каналам, в частности линейной зависимостью между вероятностью испускания нейтрона и квадратным корнем из энергии, с которой данный нейтрон должен быть испущен. Хотя при данной энергии вероятности распада промежуточного ядра не зависят от того, как оно образовалось, они все же являются функциями от энергии ядра (меняющимися иногда довольно резко).

---

[1]) Для простейшего типа обменных реакций особенно полезна адиабатическая модель (см. [2]).

РАСШИРЕНИЕ СФЕРЫ ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ЯДРА

Даже после того, как модель промежуточного ядра доказала свою пригодность для описания явлений, связанных с поглощением нейтронов, по крайней мере при малых энергиях, некоторые из нас, памятуя об ограниченной применимости этой модели для описания химических реакций, выражали сомнение в целесообразности ее использования как общей схемы протекания всех ядерных реакций. Лагерь более отважных защитников универсального характера модели промежуточного ядра, которым мы обязаны существенным расширением области ее применимости, возглавили в основном Бете [9], Брейт [10, 11] и Вейскопф [16]. Их во многом вдохновляли результаты Хафштада, Хейденберга и Туве [12, 13], а также Херба и его сотрудников [14, 15], почти одновременно показавших, что реакции, индуцированные протонами с энергией около 1 *Мэв*, обнаруживают резонансную структуру такого же типа, как и реакции, индуцированные нейтронами с энергией в несколько электронвольт. Их наблюдения явились убедительным подтверждением широты диапазона применимости модели промежуточного ядра. Однако внимание Вейскопфа привлекли в основном другие реакции — те, в которых резонансы были столь многочисленны, а ширина их столь велика, что они перекрывались, и это приводило к плавной зависимости сечения от энергии без резких пиков и провалов. Плавную зависимость сечения от энергии можно было бы интерпретировать как указание на неприменимость модели промежуточного ядра (что и было сделано, причем с полным основанием, в случае химических реакций), но Вейскопф и Эвинг [17] предложили способ, позволивший применить теорию промежуточного ядра и в случае перекрывающихся уровней. Если уровни промежуточного ядра расположены очень близко друг к другу, то исследование их индивидуальных свойств становится невозможным, поэтому в теории Вейскопфа и Эвинга рассматриваются коллективные свойства большого числа уровней промежуточного ядра и дочерних ядер.

Вряд ли найдется еще одна модель, которая бы по широте охвата могла сравниться со статистической моделью Вейскопфа и Эвинга. Эта модель не только позволила получить выражение для сечения любой ядерной реакции, но и стимулировала экспериментальные исследования почти всех типов ядерных реакций. Разумеется, модель Вейскопфа и Эвинга содержит ряд важных допущений, и каждое из них в отдельности полезно рассмотреть в свете того, что нам известно о ядерных превращениях в настоящее время.

Фундамент статистической модели Вейскопфа и Эвинга особенно прочен в диапазоне энергий, где уровни промежуточного ядра достаточно резки и их легко можно различить. Для этого энергия налетающих частиц должна быть ограничена в случае тяжелых ядер несколькими миллионами электронвольт, а в случае легких ядер она может изменяться в более широких пределах. При таких энергиях статистическая модель исходит лишь из допущения о том, что при распаде промежуточного ядра все возможные состояния дочерних ядер образуются «почти равновероятно». Последнее означает, что упоминавшейся ранее зависимостью вероятности распада от энергии пренебрегают. И хотя имеется много фактов, свидетельствующих о том, что такое допущение, по крайней мере при определенных условиях, неверно, не меньшее, если не большее, число фактов свидетельствует о его пригодности.

Намного слабее обоснована статистическая теория в том диапазоне энергий, где уровни промежуточного ядра достаточно широки и перекрываются. Как мы уже говорили, в аналогичных условиях модель промежуточной молекулы в теории химических реакций оказывается неприменимой. Даже само понятие промежуточного ядра становится сомнительным в том смысле, что его свойства, и в частности вероятности различных типов его распада, определяются его энергией. Подобно тому, как при очень высоких энергиях электрон может проходить сквозь атом без больших энергетических потерь, протон при очень больших энергиях может проходить сквозь ядро, не испытывая со стороны последнего заметного влияния. Такое поведение протона противоречит модели промежуточного ядра в том виде, как она используется в статистической теории, поскольку там постулируется, что испускание протона должно быть равновероятным независимо от того, образовалось ли промежуточное ядро при столкновении очень быстрого протона или очень быстрого нейтрона с соответствующим ядром-мишенью. Естественно ожидать, что во втором случае при распаде будет испущен нейтрон. Отсюда ясно, что применимость не только статистической модели, но и первоначальных идей теории промежуточного ядра ограничена со стороны области высоких энергий. Статистическая теория требует не только, чтобы продукты реакции зависели лишь от энергии (и углового момента) промежуточного ядра, но и чтобы все энергетически возможные продукты реакции образовывались «почти равновероятно».

Многие эксперименты, проведенные даже при самых неблагоприятных для статистической теории условиях, убедительно подтверждали ее правильность, однако в последнее время стало появляться все больше и больше противоречащих результатов. Все они приводятся к общему знаменателю: вероятность образования дочернего ядра в различных возбужденных состояниях неодинакова, причем вероятность образования низколежащих возбужденных состояний больше. Это было непосредственно показано в экспериментах Гюгло [18] и Коэна [19]. Аналогично можно объяснить и открытое шведской школой [20, 21] преимущественное испускание протонов и α-частиц.

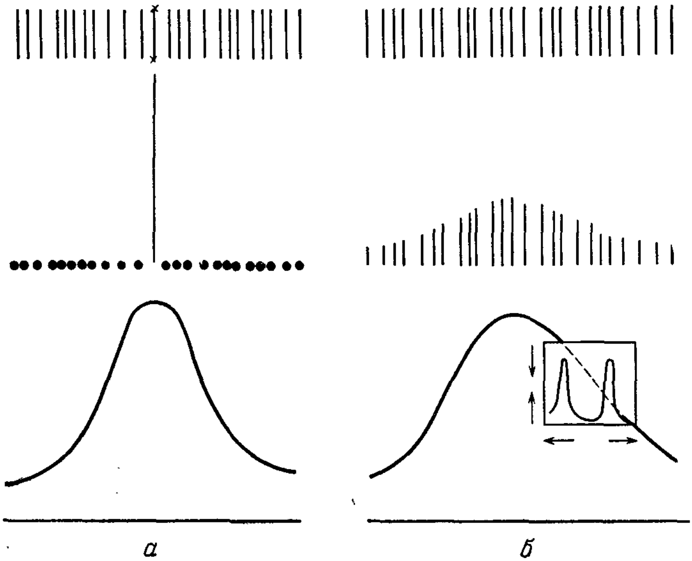
Естественно возникает вопрос о том, существует ли область энергий, в которой наивная форма теории промежуточного ядра остается верной, а нарушаются лишь отдельные гипотезы статистической теории. Лично я склонен сомневаться в основном постулате статистической теории, согласно которой все каналы распада промежуточного ядра равновероятны. Тем не менее следует подчеркнуть, что, по моему мнению, у нас нет данных, которые позволили бы сделать однозначный вывод о нарушении статистической теории еще до того, как перестает быть верной теория промежуточного ядра. Наоборот, приведенные Курантом аргументы [22, 23] наводят на мысль, что область применимости статистической гипотезы отнюдь не у́же области применимости описанного выше варианта модели промежуточного ядра.

Главное возражение против предположения о том, что переходы во все возможные состояния равновероятны, по существу совпадает с возражениями против всех теорий, унаследованных нами в основном от нас же самих еще с довоенных лет. Во всех этих теориях все ядерные свойства считаются плавными функциями массового числа, зарядового числа и энергии. Наблюдения Майера [24] (см. также [25]) и Хакселя, Йенсена и Зюсса [26] и их теории оболочечной структуры ядра опровергли это предположение, по крайней мере для основных состояний ядер. Немногое изменяется и при переходе к ядерным реакциям. Большие сечения рассеяния группы железа и большие сечения поглощения редких земель слишком систематичны, чтобы быть случайными, и подтверждаются измерениями полных сечений, проведенных Филдсом, Расселом, Заксом и Ваттенбергом [27]. Бом и Форд [28] предприняли попытку интерпретировать эти измерения на основе модели независимых частиц, однако эта модель, правильно воспроизводящая общий ход кривой сечений, не передает ее тонкую структуру, т. е. ее резонансный характер. После того как экспериментальная ситуация в результате работ Баршалла и его сотрудников полностью прояснилась [1]), решение

[1]) Информация о сечениях при малых энергиях (от 50 до 3000 *кэв*) была получена Баршаллом и его сотрудниками после проведения серии экспериментов, начатых в 1948 г. Они выполнялись на Fe, Ni, Bi [29], на Be, O, Na, Ca [30], на Zr, Ag, In, Sb, I, Ta, Pb [31], на изотопах свинца [32], на Li, Be, B, C, O [33], на Co, Ga, Se, Cd, Te, Pt, Au, Hg, Th [37], на Nd, Sm, Er, Yb, Hf [38]. В работе [36] использовались более высокие энергии, а в работе [39] изучалось угловое распределение. См. также работы обзорного характера [34, 35] и работы [40, 41].

было снова предложено Вейскопфом совместно с Фешбахом и Портером: модель независимых частиц (правильнее было бы сказать модель *независимой частицы*) позволяет получить лишь среднее сечение, т. е. грубую структуру сечения, так как дает только произведение плотности на интенсивность уровней промежуточного ядра [42, 43]. Сама реакция протекает по схеме промежуточного ядра. Иначе говоря, в расхождении с экспериментом повинна не модель промежуточного ядра, а статистические допущения. Несмотря на всю правдоподобность этих допущений, их приходится изменять так, чтобы достичь хотя бы грубого соответствия между средним сечением и моделью независимых частиц. Из этих слов некоторые могут заключить, будто модели независимых частиц отводится роль некоего таинственного принципа соответствия. Такой вывод неверен. Скотт, Томас, Лейн и другие [44—46] весьма конкретно показали, каким образом результаты теории Вейскопфа можно включить в модель независимых частиц в качестве ее рудиментарных признаков. Выдержит ли эта уточненная интерпретация баршалловских максимумов испытание временем, пока еще не ясно.

Поскольку модель, упомянутая мной, не слишком известна, я позволю себе бегло охарактеризовать ее. Предположим (в духе модели независимых частиц), что влияние ядра-мишени на налетающую частицу можно учесть с помощью надлежащим образом подобранного потенциала. Тогда любое состояние промежуточного ядра будет определяться заданием состояния ядра-мишени и состоянием налетающей частицы, находящейся в потенциале, создаваемом ядром-мишенью. На фиг. 1, *а* показан ряд уровней промежуточного ядра при энергии возбуждения около 8 *Мэв*. Большинство уровней соответствует *возбужденному* состоянию ядра-мишени плюс какое-то определенное состояние налетающей частицы. Предполагается, однако, что состояние, отмеченное крестиками, отвечает *основному* состоянию ядра-мишени и состоянию налетающей частицы с энергией около 8 *Мэв*. Это состояние промежуточного ядра, если только последнее заслуживает такого названия, чрезвычайно быстро распадается на состояние исходного ядра-мишени и состояние налетающей частицы с ее первоначальной энергией. Действительно, рассматриваемое промежуточное состояние живет ровно столько, сколько требуется налетающей частице, чтобы преодолеть потенциал, порожденный ядром-мишенью. Распаду такого промежуточного состояния всегда предшествует испускание налетевшей частицы с ее первоначальной энергией. В этом и проявляется свойство модели независимых частиц: в ней нет места реакциям, происходит одно лишь рассеяние. Другие состояния промежуточного ядра также обладают малым временем жизни; каждое из них распадается только на одно состояние ядра-мишени. Если частица сталкивается с ядром-мишенью, находящимся в каком-либо из состояний, не отмеченных крестиками, то состояние, полученное после распада, будет возбужденным.



Фиг. 1. *а* — модель независимых частиц.

Здесь действие ядра-мишени на налетающую частицу можно описать с помощью потенциала, зависящего, разумеется, от состояния возбуждения ядра-мишени. В верхней части фигуры показаны уровни энергии промежуточного ядра. Уровень, отмеченный крестиками, соответствует основному состоянию ядра-мишени плюс некоторое определенное состояние налетающей частицы. Остальные уровни соответствуют возбужденным состояниям ядра-мишени. Высота линий в средней части фигуры — вероятность перехода из состояния ядра-мишени, которое находится над ней, в основное состояние ядра-мишени (плюс выбранное состояние налетающей частицы). Для всех состояний промежуточного ядра, за исключением отмеченного крестиками, эта вероятность равна нулю. В нижней части фигуры показана зависимость сечения от энергии. Ширина линии обусловлена большой вероятностью распада состояния, отмеченного крестиками.

б — рассматриваемая нами модель.

На этот раз возбужденное состояние ядра-мишени определяется выбором промежуточного состояния неоднозначно: возбужденным может быть любое из нескольких состояний. Это означает, что определенного, «помеченного крестиками» состояния промежуточного ядра в нашей модели не существует. Наоборот, многие состояния промежуточного ядра при распаде могут переходить в основное состояние ядра-мишени (плюс выбранное состояние налетающей частицы) .Высота линий в средней части фигуры — вероятность распада состояний промежуточного ядра. Чем ближе уровни промежуточного ядра (в энергетической шкале) к отмеченному крестиками уровню в модели независимых частиц (*а*), тем больше вероятность перехода в основное состояние. В нижней части фигуры показана зависимость сечения от энергии. На небольшой схеме показан общий вид кривой [по оси ординат (оси сечений) график сжат, а по оси абсцисс (оси энергий) растянут]. Ширина максимума среднего сечения обусловлена главным образом тем, что уровни промежуточного ядра, которые при распаде могут переходить в основное состояние ядра-мишени, распределены по шкале энергий. Тем не менее заметно явное сходство между средним сечением (*б*) и истинным (неусредненным) сечением в модели независимых частиц (*а*).

Наоборот, если налетающая частица сталкивается с ядром-мишенью, находящимся в *основном* состоянии, то образуется лишь состояние, отмеченное крестиками. Вероятность распада различных промежуточных состояний, образующихся из основного состояния ядра-мишени, показана в средней части фиг. 1. Эти же вероятности дают парциальные ширины образования промежуточного состояния из налетающей частицы и основного состояния ядра-мишени. Таким образом, на нижней части фигуры показана зависимость сечения рассеяния на ядре-мишени от энергии в соответствии с моделью независимых частиц. Это и есть кривая сечений Бома и Форда.

Приняв допущение о том, что модель независимых частиц неточна, мы лишимся возможности однозначно сопоставлять состояниям промежуточного ядра те состояния ядра-мишени, из которых их можно получить. Более того, каждое состояние в окрестности состояния, отмеченного крестиками, приобретет некоторые свойства последнего. Следовательно, для состояния, первоначально отмеченного крестиками, вероятность распада в основное состояние ядра-мишени заметно уменьшится, но многие промежуточные состояния, для которых эта вероятность в модели независимых частиц была равна нулю, смогут распасться в основное состояние ядра-мишени с отличной от нуля вероятностью. То же справедливо и для парциальных ширин этих состояний, в силу чего сечение будет иметь резонансный характер. Ситуация, возникающая в рассматриваемой модели, показана на фиг. 1, *б* для сравнения с моделью независимых частиц. Среднее сечение, получающееся в этой модели, показано на нижней части фигуры. Именно это сечение дает оптическая модель ядра Фешбаха — Портера — Вейскопфа.

Вместе с тем наша модель указывает на возможную причину систематических отклонений от статистической теории, наблюдаемых в эксперименте. При некоторых условиях вероятности перехода в различные состояния дочернего ядра не равны. Более того, вероятность перехода во все состояния, лежащие внутри единичного интервала энергии, не зависит от положения этого интервала на энергетической оси. При этих условиях на область высоких энергий, хотя она и содержит большое число уровней, уже не приходится львиная доля переходов. Небольшое число уровней, лежащих в единичном интервале при малых энергиях, получает столько же переходов, сколько их приходится на гораздо более многочисленные уровни, лежащие в единичном интервале при высоких энергиях. В этом и состоит сущность преимущественного образования низколежащих уровней, о которых уже говорилось при объяснении систематических отклонений от статистической модели.

Приведенный нами далеко не полный обзор дает возможность получить некоторое представление о разнообразии проблем, к которым применялась модель промежуточного ядра. Позвольте мне поэтому перейти к последней теме, которую я хотел затронуть в своей лекции, — основам модели промежуточного ядра и тем фундаментальным проблемам, на которые она проливает некоторый свет.

ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ЯДРА

История постепенных обобщений модели промежуточного ядра, неизменно следующих экспериментальным результатам, на мой взгляд, заслуживает, чтобы ее рассказать. История кроющихся за этой моделью теоретических соображений кажется мне еще более интересной.

Первоначально мы с Брейтом намеревались решить весьма узкую задачу: объяснить аномальное поведение поглощения медленных нейтронов кадмием [47, 48]. Мы приняли два далеко идущих допущения: первое постулировало существование несколько загадочного «промежуточного» состояния, второе предполагало отсутствие прямой связи между состояниями континуума. Наша формула содержала три «подгоночных» параметра, а как мы теперь знаем, имея в своем распоряжении три параметра, всегда можно добиться прекрасного согласия между формулой и экспериментальными данными.

Дальнейшая история воспроизводит в уменьшенном масштабе основные этапы развития почти всякой физической теории. Во-первых, из теории были выделены все эфемерные и общие элементы. Во-вторых, общим элементам была придана как можно более широкая формулировка, чтобы они могли служить основой для описания широкого класса явлений. К сожалению, общность основ свидетельствовала о бедности их физического содержания: найти противоречащий им экспериментальный результат было почти невозможно. Естественно поэтому, что наш интерес переместился с основ теории на ту информацию, которую можно описать на языке этих основ. В-третьих, была предпринята попытка вывести физическое содержание, еще сохранившееся в основах теории, из весьма общих принципов. История почти каждой физической теории развивается по такому же пути. Одни теории проходят его быстро, другие — более важные — медленнее.

Поясню сказанное на одном примере. Открытие Галилеем законов свободного падения привело к вполне конкретному и определенному уравнению. Эфемерным в нем было лишь постоянство ускорения. То общее, что содержалось в этом уравнении, было сформулировано в виде второго закона Ньютона о пропорциональности между ускорением и силой. Это — первая из названных выше фаз развития физической теории. Второй закон Ньютона обладает такой общностью, что допускает почти любой тип движения; он не столько сам определяет движение, сколько дает язык для описания различных движений. Следовательно, после установления второго закона Ньютона проблемой становится не описание движения, а выяснение природы сил, действующих между телами. В этом и состоит то, что мы назвали второй фазой развития теории. Последняя фаза — поиски фундаментальной причины элементов общего физического закона, наделяющих теорию тем физическим содержанием, которым она обладает, — в рассматриваемом случае завершилась установлением первого закона Ньютона. Его фундаментальная основа (эквивалентность движущихся определенным образом наблюдателей) нашла свое окончательное воплощение в преобразованиях Галилея и Лоренца.

Наиболее важная эфемерная часть теории промежуточного ядра, как мы вскоре поняли, заключалась в предположении об изолированном промежуточном состоянии, из которого следовало существование одиночного резонансного уровня. Однако, когда теория была обобщена так, что стала допускать существование многих промежуточных состояний и описывать много резонансных уровней, число подгоночных параметров также стало произвольным. Было ясно, что почти любой экспериментальный результат, относящийся к ядерным превращениям, будет согласовываться с такой теорией. С увеличением общности резонансной формулы ее специфичность пошла на убыль. Приобрели излишнюю «универсальность» и предпосылки, положенные в основу теории. Возможность дальнейшего обобщения теории и доведения его до «предела», когда основы теории уже не будут включать в себя никаких конкретных допущений, была впервые осознана Капуром и Пайерлсом [49]. Их теорию сначала понимали плохо. Тем не менее в ней содержалось много идей, вошедших практически во все последующие работы.

Может быть, некоторый интерес вызовет мой рассказ о том, как и почему я обратился к этой теме. Примерно за год до окончания второй мировой войны Ферми в разговоре со мной обратил внимание на аномалию, состоявшую в том, что теория промежуточного ядра получила широкое признание, не будучи хорошо обоснованной в рамках фундаментальной теории. Я усмотрел в этом замечании Ферми вызов и попытался сформулировать допущения, из которых можно было бы вывести формулу для одиночного уровня. Допущение о несколько загадочном «промежуточном» состоянии было заменено гипотезой о независимости волновой функции от энергии в той части конфигурационного пространства, в которой налетающая частица находится внутри ядра или очень близко от него. Вместо предположения об отсутствии взаимодействия между состояниями континуума было введено предположение о том, что вне непосредственной окрестности ядра-мишени налетающая частица ведет себя как свободная частица. На основании этих допущений мне удалось заново вывести весьма специфическую формулу — формулу для одиночного уровня, содержащую три параметра. В нарисованной мной выше схеме развития физической теории это соответствует первой фазе.

Затем появилось искушение исключить первое допущение и заменить его более общей гипотезой о том, что волновая функция во внутренней части конфигурационного пространства, т. е. там, где расстояние между ядром-мишенью и налетающей частицей мало, представима в виде линейной комбинации нескольких волновых функций с коэффициентами, зависящими от энергии (в отличие от старой гипотезы, согласно которой волновая функция не должна зависеть от энергии). Фактически принятие новой гипотезы означало полный отказ от первого из названных выше допущений, потому что любую функцию можно представить в виде достаточно большого числа данных функций. Оставалось единственное существенное допущение о конечном радиусе взаимодействия. Возможность построения теории при более общем предположении о характере поведения волновой функции во внутренней части конфигурационного пространства не была для меня чем-то удивительным: соображения Капура и Пайерлса и некоторые аргументы, выдвинутые Брейтом, явно предвосхищали такую возможность, но простота конечной формулы не могла не вызвать удивления. Она наводила на мысль о возможности упрощенного подхода к выводу формулы, который почти одновременно предложили Айзенбуд, Швингер и Вейскопф (см. [50, 51]). Еще раньше аналогичные идеи высказывались в радиотехнике.

Замечу в скобках, что Томас [52] исключил впоследствии также и допущение о конечном радиусе взаимодействия. В окончательном варианте модели, описанном, например, в книгах Блатта и Вейскопфа [53] или Сакса [54], сохраняется разбиение конфигурационного пространства на две части. Всякое специфически ядерное взаимодействие происходит во внутренней области; во внешней области волны распространяются свободно. Вместо ядерного взаимодействия рассматривается формальное соотношение между нормальной производной и значением волновой функции на границе между внутренней и внешней областями:

$$v_s = \sum_t R_{st} d_t. \qquad (1)$$

Уместно напомнить, что соотношение (1) выражает свойства внутренней части конфигурационного пространства, зависит от взаимодействия во внутренней области и фактически заменяет обычное описание этого взаимодействия с помощью потенциалов и т. д. Соотношение (1) не зависит от какого бы то ни было взаимодействия, если последнее происходит вне внутренней части конфигурационного пространства. Величины v_s играют роль коэффициентов разложения волновой функции на границе внутренней области, d_t — коэффициентов разложения нормальной производной. Величины R_{st} образуют матрицу — так называемую R-матрицу; ее зависимость от энергии определяется формулой

$$R_{st} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda s}\gamma_{\lambda t}}{E_{\lambda} - E}, \tag{2}$$

где E_{λ} — уровни энергии промежуточных состояний (их не следует путать с полной энергией E системы). Коэффициенты $\gamma_{\lambda s}$, $\gamma_{\lambda t}$ определяют вероятности распада промежуточного состояния λ по каналу s или t. Если E приближается к одному из значений E_{λ}, величина R_{st} становится очень большой; случай, когда энергия системы E совпадает с каким-нибудь уровнем энергии E_{λ} промежуточного ядра, соответствует большому сечению. Формула для одиночного уровня будет верна, если в сумме (2) одно слагаемое существенно превосходит остальные. Действительно, числитель тогда имеет вид произведения двух сомножителей, один из которых зависит только от s, а другой — только от t; это обеспечивает независимость вероятностей распада промежуточного ядра по различным каналам от способа образования ядра. Таким образом, формула (2) сохраняет многие свойства простой теории промежуточного ядра. В то же время формула (2) содержит так много параметров (в действительности бесконечно много), что она вряд ли имеет физический смысл. Тем не менее ее нельзя считать бесполезной: она дает основу (язык) для описания процессов ядерных превращений. Приведенные ширины $\gamma^2_{\lambda s}$ и резонансные энергии E_{λ} позволяют получить более простое описание ядерных процессов, чем все кривые зависимости сечения от энергии. Первые величины легче сравнивать, интерпретировать и даже вычислять, чем непосредственно сами сечения. Для вычисления величин $\gamma^2_{\lambda s}$ и E_{λ} была развита специальная теория и накоплен обширный экспериментальный материал. Вопрос о правильности формулы (2) утратил интерес, и его место заняла проблема отыскания величин $\gamma_{\lambda s}$ и E_{λ}.

В этом, как мне кажется, и состоит ответ на вопрос, поставленный в начале данной лекции: насколько общий характер имеет модель промежуточного ядра как описание ядерных реакций? Модель промежуточного ядра обладает почти неограниченной общностью, если рассматривать ее как основу для описания ядерных реакций, как язык, на котором можно формулировать результаты[1]). Физическое содержание, которое мы первоначально вкладывали в эту модель, не имеет общего характера, но особенно просто формулируется на языке модели. Существуют, однако, простые и важные физические картины, которые удается выразить на ее языке с гораздо большим трудом. Например, Томас сформулировал предположения статистической модели с помощью соотношений (1) и (2), а предложенную Курантом [22, 23] довольно простую картину непосредственного взаимодействия между налетающей частицей и частицей-мишенью выразить на языке нашей модели не удалось. Мне кажется, что язык этот действительно полезен лишь в тех случаях, когда уровни энергии промежуточного ядра хорошо разделены и можно говорить о сохранении по крайней мере некоторых черт исходной модели промежуточного ядра. В противном случае язык утрачивает точность и изящество и напоминает мне доказательство равенства $\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 1 - x^2$ путем разложения $\sqrt{1-x^2}$ в степенной ряд.

На этом описание второй фазы в развитии теории промежуточного ядра заканчивается. Если допустимо говорить о сходстве между слоном и муравьем, то я хотел бы подчеркнуть, что и второй закон Ньютона также несет лишь функции языка — основы описания. Коль скоро он установлен, проблема сводится к определению сил, изучению их зависимости от материала и расстояния, разделяющего тела, между которыми они действуют. Для теории промежуточного ядра соответствующие проблемы были рассмотрены нами немного раньше.

Итак, остается третья фаза развития теории — более глубокое понимание той весьма скудной информации, что содержится в соотношении (2). Хотя соотношение (2) и определяет весьма общую функцию энергии E, функция эта не вполне произвольна. Из соотношения (2), например, следует, что диагональный матричный элемент R_{ss} с увеличением энергии всегда возрастает (если только он отличен от нуля).

Многие из нас ломали голову над вопросом, чем обусловлено это и многие другие свойства элементов R-матрицы, пока, наконец, причину не нашли Шутцер и Тиомно [56]. Вдохновляемые более ранними исследованиями Кронига [57] и Крамерса [58] эти авторы показали, что если R не имеет вида (2), то возможно возникновение парадоксальной ситуации, когда выходящая волна будет покидать внутреннюю область до того, как ее достигнет приходящая волна. Принцип, запрещающий подобную ситуацию, получил название «условия причинности».

---

[1]) В частности, было показано, что формулы (1) и (2) позволяют описывать и процесс самопроизвольного распада. См. § 5 гл. 9 в книге [55].

Введение его внесло большой вклад в наше понимание соотношения (2).

УСЛОВИЕ ПРИЧИННОСТИ

Гипотезу Тиомно и Шутцера доказали для широкого круга явлений Ван Кампен [59, 60] (см. также [61]) и Гелл-Манн, Голдбергер и Тирринг [62]. Их работы в значительной мере способствовали выяснению связи между оператором R и матрицей столкновения.

Вывод результата Тиомно, Шутцера, Ван Кампена, Гелл-Манна, Голдбергера и Тирринга, который сейчас будет изложен, я считаю весьма общим, по крайней мере для нерелятивистского случая. Основное уравнение, используемое при этом выводе, постулирует, что производная по времени от вероятности найти систему во внутренней области конфигурационного пространства равна потоку вероятности через граничную поверхность внутренней области. Если мы не хотим использовать понятия, относящиеся к внутренней области, то можно принять другой постулат: отрицательная производная по времени от вероятности найти систему во внешней области равна потоку вероятности через поверхность, отделяющую внутреннюю область от внешней. Чтобы воспользоваться этим постулатом, очевидно, нельзя ограничиться одними лишь стационарными волнами: необходимо взять суперпозицию состояний с различными значениями энергии. Предположим для простоты, что нормальные производные всех участвующих в суперпозиции состояний обладают одинаковой зависимостью от положения точки на границе, т. е. что нормальная производная полной волновой функции на границе имеет вид

$$\operatorname{grad}_n \varphi = \sum_k a(E_k) f(x) e^{-iE_k t/\hbar}. \tag{3}$$

Суммирование в формуле (3) производится по k, т. е. по значениям энергии E_k, а переменная x отвечает точкам конфигурационного пространства. Значение волновой функции на границе дается оператором R:

$$\varphi(x) = \sum_k a(E_k) R(E_k) f(x) e^{-iE_k t/\hbar}. \tag{3a}$$

Поток, втекающий во внутреннюю область, можно записать как интеграл от выражения $-i(\varphi \operatorname{grad}_n \varphi^* - \varphi^* \operatorname{grad}_n \varphi)$, т. е.

$$\text{Поток} = -i \sum_{l,k} a(E_l)^* a(E_k) e^{i(E_l - E_k)t/\hbar} \times$$
$$\times \left[\int f^* R(E_k) f \, dS - \int (R(E_l) f)^* f \, dS \right], \tag{4}$$

где dS означает, что интегрирование производится по границе, отделяющей внутреннюю область от внешней.

Хотя приведенные выше формулы не дают явного выражения для волновой функции во внутренней области, тем не менее они должны полностью определять ее, коль скоро нормальная производная любой моноэнергетической функции на границе задана. Но тогда из принципа суперпозиции и из квадратичного характера всех выражений для вероятностей в квантовой механике следует, что вероятность найти систему во внутренней области определяется выражением вида

$$\sum_{k,\, l} P_{lk} a(E_l)^* a(E_k)\, e^{i(E_l - E_k)\, t/\hbar}. \tag{5}$$

Коэффициенты P_{lk} могут зависеть лишь от выбора функции f, но не от времени. Кроме того, поскольку выражение (5) имеет смысл вероятности, матрица P должна быть положительно определена. Приравнивая производную от выражения (5) по времени выражению для потока, получаем

$$(E_l - E_k) P_{lk} = (R(E_l) f,\ f) - (f,\ R(E_k) f). \tag{6}$$

Скалярное произведение означает здесь интегрирование по границе. С помощью довольно элементарных рассуждений можно показать, что все операторы R, действующие на функции на границе S, вещественны и симметричны. Следовательно, матрица с элементами вида

$$P_{lk} = \left(f,\ \frac{R(E_l) - R(E_k)}{E_l - E_k}\, f\right) \tag{7}$$

положительно определена независимо от того, какие значения энергии E_l, E_k выбраны и сколько таких значений выбрано, т. е. каков порядок матрицы. Но это и есть условие, при котором справедливо разложение

$$(f,\ R(E) f) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_\lambda^2}{E_\lambda - E}, \tag{8}$$

где γ_λ^2 — положительные величины; тот факт, что такое разложение существует при всех f, доказывает нашу основную формулу [1]).

Нерелятивистский характер нашей теории использовался лишь один раз — при составлении выражения для потока, однако вывод протекает почти без изменений и при более общих выражениях для потока, например таких, которые удовлетворяют требованиям теории относительности. Единственное скользкое место

[1]) См. [63]. Вигнер и Нейман [64] получили те же результаты более простым способом.

во всем выводе находится там, где делается предположение, что величины E_k произвольны и могут, например, принимать отрицательные значения. Если исключить отрицательные E_k, то результат становится не столь однозначным, и к сумме в выражении для R, по-видимому, нужно прибавлять интеграл по отрицательным энергиям. Это утверждение также лишь повторяет результат Ван Кампена. Из него следует, что если мы желаем рассматривать формулу (2) как следствие «условия причинности», то нам необходимо исходить из другой физической гипотезы.

Я считаю наиболее естественным предположение о допустимости рассмотрения во внешней области любого потенциала-константы при условии, что матричные элементы R_{st} в соотношении (1) остаются одними и теми же независимо от значений этих потенциалов. Аналогичные допущения о существовании полупроницаемых перегородок и т. д. известны нам из термодинамики. В настоящее время общими методами статистической механики можно показать, что такие допущения никогда не приводят к противоречию. Будет ли это верно и по отношению к гипотезе о произвольных потенциалах-константах для различных ядерных реакций, пока еще неясно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Polani M.*, Zs. Phys., **2**, 90 (1920).
2. *London F.*, в сборнике: «Sommerfeld Festschrift», S. Hirzel, Leipzig, 1928, S. 104.
3. *Bohr N.*, *Kalckar F.*, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-Fys. Medd., **14**, 106 (1937).
4. *Moon P. B.*, *Tillman J. R.*, Nature, **135**, 904 (1935).
5. *Szilard L.*, Nature, **136**, 150 (1935).
6. *Bjerge T.*, *Westcott C. H.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A150**, 709 (1935).
7. *Amaldi E.*, *Fermi E.*, Ricerca Sci., **1**, 310 (1936).
8. *Dunning J. R.*, *Pegram G. B.*, *Fink G. A.*, *Mitchell D. P.*, Phys. Rev., **48**, 265 (1935).
9. *Bethe H. A.*, Rev. Mod. Phys., **9**, 71 (1937).
10. *Breit G.*, Phys. Rev., **58**, 1068 (1940).
11. *Breit G.*, Phys. Rev., **69**, 472 (1946).
12. *Hafstad L. R.*, *Tuve M. A.*, Phys. Rev., **48**, 306 (1935).
13. *Hafstad L. R.*, *Heydenberg N. P.*, *Tuve M. A.*, Phys. Rev., **50**, 504 (1936).
14. *Herb R. G.*, *Kerst D. W.*, *McKibben J. L.*, Phys. Rev., **51**, 691 (1937).
15. *Bernet E. J.*, *Herb R. G.*, *Parkinson D. B.*, Phys. Rev., **54**, 398 (1938).
16. *Weisskopf V. F.*, *Ewing D. H.*, Phys. Rev., **57**, 472 (1940).
17. *Weisskopf V. F.*, *Ewing D. H.*, Phys. Rev., **57**, 935 (1940).
18. *Gugelot P.*, Phys. Rev., **93**, 425 (1954).
19. *Cohen B. L.*, Phys. Rev., **92**, 1245 (1953).
20. *Hirzel O.*, *Waffer H.*, Helv. Phys. Acta, **20**, 373 (1947).
21. *Paul E. B.*, *Clarke R. L.*, Canad. Journ. Phys., **31**, 267 (1953).
22. *Courant E. D.*, Phys. Rev., **82**, 703 (1951).
23. *McManus H.*, *Sharp W. T.*, Phys. Rev., **87**, 188 (1952).
24. *Mayer M. G.*, Phys. Rev., **74**, 235 (1948).
25. *Elsasser W.*, Journ. Phys. Radium, **5**, 625 (1934).

26. *Haxel O., Jensen J„ Suess H.*, Zs. Phys., **128**, 295 (1950).
27. *Fields R., Russel B., Sachs D., Wattenberg A.*, Phys. Rev., **71**, 508 (1947).
28. *Ford K. W., Bohm D.*, Phys. Rev., **79**, 745 (1950).
29. *Barschall H. H., Bockelman C. K., Seagondollar L. W.*, Phys. Rev., **73**, 659 (1948).
30. *Adair R. K., Barschall H. H., Bockelman C. K., Sala O.*, Phys. Rev., **75**, 1124 (1949).
31. *Bockelman C. K., Peterson R. E., Adair R. K., Barschall H. H.*, Phys. Rev., **76**, 277 (1949).
32. *Peterson R. E., Adair R. K., Barschall H. H.*, Phys. Rev., **79** (1950).
33. *Bockelman C. K., Miller D. W., Adair R. K., Barschall H. H.*, Phys. Rev., **84**, 69 (1951).
34. *Barschall H. H.*, Phys. Rev., **86**, 431L (1952).
35. *Miller D. W., Adair R. K., Bockelman C. K., Darden S. E.*, Phys. Rev., **88**, 83 (1952).
36. *Nereson N., Darden S.*, Phys. Rev., **89**, 775 (1953).
37. *Walt M., Becker R. L., Okazakj A., Fields R. E.*, Phys. Rev., **89**, 1271 (1953).
38. *Okazaki A., Darden S. E., Walton R. B.*, Phys. Rev., **93**, 461 (1954).
39. *Walt M., Barschall H. H.*, Phys. Rev., **93**, 1062 (1954).
40. *Adair R. K.*, Rev. Mod. Phys., **22**, 249 (1950).
41. *Langsdorf A.*, Phys. Rev., **80**, 132 (1950).
42. *Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F.*, Phys. Rev., **90**, 166 (1953).
43. *Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F.*, Phys. Rev., **96**, 448 (1954).
44. *Scott J. M. C.*, Phil. Mag., **45**, 1332 (1954).
45. *Wigner E.*, Science, **120**, 790 (1954).
46. *Lane A. M., Thomas R. G., Wigner E.*, Phys. Rev., **98**, 693 (1955).
47. *Breit G., Wigner E.*, Phys. Rev., **49**, 519 (1936).
48. *Breit G., Wigner E.*, Phys. Rev., **49**, 642 (1936).
49. *Kapur P. L., Peierls R.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A166**, 277 (1938).
50. *Eisenbud L., Wigner E.*, Phys. Rev., **72**, 29 (1947).
51. *Teichmann T., Wigner E.*, Phys. Rev., **87**, 123 (1952).
52. *Thomas R. G.*, Phys. Rev., **100**, 25 (1955).
53. *Blatt J., Weisskopf V. F.*, Theoretical Nuclear Physics, John Wiley and Sons, New York, 1952, ch. 8 and 10. (Имеется перевод: *Блатт Дж., Вайскопф В.*, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954, гл. 8 и 10.)
54. *Sachs R. G.*, Nuclear Theory, Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge, 1953, p. 290.
55. *Eisenbud L., Wigner E.*, Nuclear Structure, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1958. (Имеется перевод: *Айзенбуд Л., Вигнер Е.*, Структура ядра, ИЛ, 1959.)
56. *Schutzer W., Tiomno J.*, Phys. Rev., **83**, 249 (1951).
57. *Kronig R. L.*, Journ. Opt. Soc. Amer., **12**, 547 (1926).
58. *Kramers H. A.*, Atti. congr. intern. fisici Como, **2**, 545 (1927).
59. *Van Kampen N. G.*, Phys. Rev., **89**, 1072 (1953).
60. *Van Kampen N. G.*, Phys. Rev., **91**, 1267 (1953).
61. *Toll J. S.*, Princeton University Dissertation, 1952.
62. *Gell-Mann M., Goldberger M. L., Thirring W. E.*, Phys. Rev., **95**, 1612 (1954).
63. *Loewner K.*, Math. Zs., **38**, 177 (1953).
64. *Wigner E., von Neumann J.*, Ann. Math., **59**, 418 (1954).

II. ЯДЕРНАЯ ЭНЕРГИЯ

8

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА В МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ ЧИКАГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА [1])

Доктор Дарроу предложил, чтобы статьям более специального характера, которые будут доложены Обществу членами старой группы теоретической физики Металлургической лаборатории («Плутониевого проекта»), для облегчения понимания было предпослано краткое введение. Поскольку эти статьи изложены очень сжато и некоторые из наших сотрудников не успели представить к заседаниям тезисы своих выступлений, я с радостью принял предложение нашего секретаря и взял на себя составление общего обзора проделанной нами работы.

В период, продолжавшийся примерно с середины 1942 г. до середины 1945 г., т. е. почти 3 года, на четвертом этаже Эккарт-Холла собиралось около 20 физиков-теоретиков, работавших над теми проблемами реакторов, которые можно было решить или по крайней мере попытаться решить методами теоретической физики. Состав группы не был все время постоянным, но я счастлив сказать и говорю с большой гордостью, что мы были одной счастливой семьей, и я не могу припомнить ни одного случая, когда разногласия касались бы вопросов, не связанных с техникой.

Большая часть нашей работы касалась весьма срочных проблем, и лишь малая доля полученных результатов была опубликована в научной печати. Нашей группе приходилось много заниматься чисто инженерной работой. Например, считалось, что в наши обязанности входит определение секундного расхода жидкостей. Не одна двухтавровая балка была рассчитана нами! Приходилось заниматься решением и других инженерных вопросов. И хотя мы чувствовали себя в чуждой нам области не совсем уверенно, мы делали все, что от нас требовалось. Кроме

---

[1]) Доклад прочитан 22 июня 1946 г. в Чикаго на сессии Американского физического общества. Опубликован в журнале: Journ. Appl. Phys., 17, № 11 (1946).

того, нам приходилось поддерживать многочисленные контакты с экспериментальными группами и с живейшим интересом вникать в самые различные проблемы от производства и коррозии алюминиевых труб до радиоактивности кислорода, возникающей при поглощении нейтронов. Вся эта работа была необходима, и, оглядываясь назад, я должен, не колеблясь, сказать, что наша политика — принятие на себя функций, обычно отводимых инженерам, — доказала свою правильность. Во-первых, «Плутониевый проект» в первые дни своего существования был недостаточно обеспечен инженерными кадрами: к моменту, когда нами практически был разработан план объекта W [1]) (построенного впоследствии в Хэнфорде), в «Плутониевом проекте» имелось лишь два-три инженера-проектировщика. Во-вторых, в любом новом деле (а в 1942 г. таким делом было создание ядерных реакторов) важно, чтобы нашлось хоть несколько людей, которые были бы достаточно знакомы со всей картиной в целом, знали бы все трудности и умели преодолевать их. Второе обстоятельство приобретает особую важность в связи с предполагаемой постройкой реактора доктора Дэниэлса в Клинтоне. Боюсь, что нынешнее распределение обязанностей, возлагающее на тех, кто в основном заинтересован в строительстве этого реактора, намного меньшую ответственность, чем несли мы по отношению к реактору W, не слишком способствует выполнению графика, опубликованного в газетах. Этот график, прежде всего, чрезвычайно оптимистичен, и я не верю, что реактор будет пущен до 1948 г.

Как я уже сказал, быть в курсе всех деталей проекта W было нашей основной функцией и занимало большую часть нашего времени. Практически все старшие члены нашей группы в той или иной форме выполняли эту главную функцию, хотя основное бремя взяли на себя Фридман, Олинджер, Вейнберг, Янг и мисс Уэй. Кроме того, на второй год существования проекта Уилер был переведен в Уилмингтон для оказания непосредственной помощи компании Дюпона. Хотя разработка проектов объекта W в течение первых двух лет была нашей основной работой, она менее всего подходила в качестве темы для публичных докладов. В последующие годы наш интерес был сосредоточен главным образом на производстве энергии, однако это направление, в развитие которого решающий вклад внес Янг, пока еще слишком засекречено, чтобы обсуждать его открыто, и мой

---

[1]) Интересно заметить, что на проекте объекта W стояла дата 9 января 1943 г. Он был окончен ровно через 42 дня после того, как Ферми и его сотрудники впервые экспериментально осуществили цепную ядерную реакцию (2 декабря 1942 г.). Разумеется, все размеры реактора на объекте W нам пришлось выбрать задолго до этой даты (правда, они нуждались в экспериментальной проверке).

доклад будет посвящен вопросам, которыми мы могли заниматься лишь время от времени. Наши результаты я разобью на четыре группы:

1) элементарная теория цепных ядерных реакций;
2) более подробная теория цепных реакций;
3) действие радиации на вещество;
4) теоретическая физика.

В этом порядке я и буду рассматривать наши работы.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЦЕПНЫХ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Самым удивительным в цепных ядерных реакциях была та легкость, с которой их удалось осуществить. Появившаяся в январе 1940 г. статья Сцилларда уже содержала описание установки, вполне способной действовать. Но мы, делая первые шаги в этой области, опирались не на статью Сцилларда, а на работу Ферми, основанную на более простых соображениях. Идеи, аналогичные идеям Ферми, высказывали и другие физики, главным образом фон Хальбан. Кроме того, вся работа без сколько-нибудь существенных отклонений была дублирована немецкими физиками-ядерщиками.

В цепной реакции интересующего нас типа ядра урана претерпевают деление и испускают нейтроны. Сначала эти нейтроны движутся быстро, но вскоре замедлитель — в нашем случае это углерод (графит) — понижает их скорость. Замедленные нейтроны в течение некоторого времени диффундируют, после чего поглощаются. Большинство нейтронов поглощает уран, который затем претерпевает деление и испускает нейтроны следующего поколения. Отношение числа нейтронов одного поколения к числу нейтронов предшествующего поколения называется коэффициентом размножения и обычно обозначается буквой k. В теории Ферми проблема определения коэффициентов размножения и критических размеров делится на две части. Первая часть проблемы состоит в вычислении коэффициента размножения для бесконечной среды k_∞, называемого обычно для краткости просто коэффициентом размножения. Он зависит только от геометрии и материалов системы, в которой происходит цепная реакция, и определяет отношение числа нейтронов двух последовательных поколений в предположении, что те же материалы и в той же геометрии, как и в интересующем нас случае, заполняют все бесконечное пространство.

Вторая часть проблемы состоит в вычислении критической длины l, не зависящей от внутренней структуры устройства, в котором происходит цепная реакция, а определяемой исключительно его размерами и формой. Критическая длина l или обратная ей величина $\varkappa$ позволяет вычислить эффективный коэффициент размножения $k_{эфф}$, если коэффициент k_∞ известен. Эффективный коэффициент размножения — это отношение числа нейтронов двух последовательных поколений в конечном реакторе. Именно этот коэффициент размножения представляет интерес с практической точки зрения. Он зависит не только от материалов и их расположения в решетке, как это было в случае k_∞, но и от истинной протяженности решетки, т. е. от размеров и формы реактора. В реакторе, работающем в стационарном режиме, коэффициент $k_{эфф}$ всегда равен 1 и превышает 1 только при возрастании мощности реактора, например при его пуске, и то на очень небольшую величину. Коэффициент $k_{эфф}$ всегда меньше k_∞ потому, что в реальном реакторе конечных размеров часть нейтронов каждого поколения вылетает за пределы реактора и не дает вклада в следующее поколение. В бесконечном реакторе такой «утечки» не существует.

Может сложиться впечатление, будто реальное значение имеет только эффективный коэффициент размножения, но оказывается, что для вычисления $k_{эфф}$ всякий раз предварительно необходимо вычислить k_∞.

Я кратко напомню, как происходит вычисление k_∞, поскольку более подробно оно уже приводилось в докладе Смита. Чтобы найти число нейтронов следующего поколения, производимых одним нейтроном данного поколения, можно начать с рождения одного нейтрона. Поскольку процесс происходит в кусках урана и нейтрон первоначально обладает большой скоростью, он может вызвать деление не только ядер U^{235}, но и ядер U^{238}. Последнее гораздо важнее, потому что ядер U^{238} больше. С этим процессом конкурирует процесс неупругого рассеяния нейтронов на атомах урана, который может замедлить нейтроны до скорости, меньшей порога деления U^{238} [1, 2], и процесс вылета нейтронов из куска урана в замедлитель.

Важность деления на быстрых нейтронах первыми поняли Сциллард и его сотрудники. Остальные факторы, определяющие коэффициент k_∞, были известны еще раньше и учитывались теорией Ферми.

Предположим, что первичный нейтрон вызывает деление урана с образованием $\varepsilon - 1$ новых нейтронов. В своем докладе на этой сессии Физического общества Ферми упомянул о том, что $\varepsilon - 1 \approx 0{,}03$. Следовательно, на каждый акт деления приходится $\varepsilon \approx 1{,}03$ нейтронов с энергией, чуть меньшей порога деления. Бо́льшая часть этих нейтронов попадет в замедлитель и замедляется до тепловых энергий. Некоторые из них случайно возвращаются в уран и поглощаются одним из многочисленных резонансных уровней U^{238}. Такие акты поглощения не приводят к делению и обусловливают лишь потерю нейтронов. На важность этого процесса еще в 1940 г. обратили внимание Бор и другие. Лишь в том случае, когда нейтрон потерял достаточно энергии и оказался ниже самого глубокого резонансного уровня U^{238} (по имеющимся в литературе данным [3] энергия этого уровня составляет около 5 *эв*), он может избежать такой судьбы. Вероятность того, что нейтрон избежит резонансного захвата, обычно обозначают буквой p. Эта величина меньше 1. В результате резонансного поглощения каждый первичный нейтрон приводит к появлению εp нейтронов с энергией, меньшей 5 *эв*.

Полное описание всех подробностей вычисления p было бы слишком утомительным. Среди всех процессов, участвующих в цепной реакции, резонансное поглощение было единственным процессом, который мы, приступая к работе, не знали по-настоящему. Данкова и меня особенно интересовали физические принципы, лежащие в основе резонансного поглощения в макроскопических телах, но идеи, аналогичные нашим, были развиты также и другими. Вычисление p было описано Кристи, Вейнбергом и мной, хотя вклад в разработку метода внесли и многие другие, в том числе Андерсон. Материальные константы, необходимые для расчетов, измерили Крейтц, Юпник, Снайдер и Уилсон[1]) в Принстоне и группа Митчелла в Университете штата Индиана.

Итак, теперь у нас имеется εp нейтронов с энергией ниже резонансных уровней урана. Согласно теории, скорости этих нейтронов понижаются замедлителем до тепловых энергий. После этого нейтроны поглощаются частично замедлителем и имеющимися в реакторе примесями, частично — ураном. Долю нейтронов, поглощенных ураном, Ферми обозначает через f. Всего уран поглощает εpf тепловых нейтронов, отсюда для числа вторичных нейтронов имеем

$$k_\infty = \varepsilon pf\eta, \qquad (1)$$

где η — число (быстрых) нейтронов деления на один поглощенный ураном тепловой нейтрон. Принципы вычисления «теплового использования» f независимо установили Ферми, Плачек и наша группа. Формулы, которыми мы пользовались в работе, были выведены Кристи, миссис Монк, Плассом и мной методом, аналогичным вычислению волновой функции в металлах по методу ячеек (см., например, [5]).

В целом вычисление коэффициента размножения для бесконечной решетки удалось произвести совершенно «прямым» методом, а легкость, с которой это было сделано, явилась одним из величайших сюрпризов «Плутониевого проекта». Еще в 1942 г. Пласс и я предприняли попытку рассчитать «оптимальную ре-

---

[1]) См. статьи в журнале [4]. — *Прим. автора при корректуре американского издания книги.*

шетку», т. е. решетку с наибольшим k_∞. Хотя физические константы в то время были известны не с очень высокой точностью, нам удалось оценить размеры оптимальной решетки (позднее эти данные были использованы при создании первого ядерного реактора). Насколько можно судить сейчас, найденные нами размеры приводили к коэффициенту размножения k_∞, который ровно на $1/2$% был меньше значения k_∞ реальной оптимальной решетки. Мы ничуть не сомневаемся, что и любые другие достаточно компетентные специалисты пришли бы к такому же результату. Впоследствии вычисления k_∞ были намного облегчены путем использования диаграмм, специально для этой цели составленных миссис Монк и миссис Учиямада под руководством профессора Уилера. Вычисления k_∞ были распространены на все типы решеток, в том числе на решетки, содержащие тяжелую и обычную воду, и т. п. Большую часть этой работы проделали Вейнберг и его сотрудники, миссис Монк, Пласс, миссис Учиямада, Стефенсон и другие. Результаты для всех изученных систем оказались в хорошем качественном согласии.

Несмотря на это, свойства, делающие решетку оптимальной, не очень просты. Хорошо, если нейтроны с большой энергией будут оставаться в уране, — это позволит получить большие значения ε. С другой стороны, желательно, чтобы нейтроны с малой энергией («резонансные») оставались по возможности вне урана — тогда значение p было бы близко к 1. Кроме того, тепловые нейтроны необходимо возвращать в уран, чтобы f было как можно ближе к 1. Эти противоречивые требования определяют геометрию оптимальной решетки, т. е. определяют соотношение количеств замедлителя и урана, а также параметры решетки. Однако даже при сравнительно больших отклонениях от оптимальных размеров величина k_∞ понижается не очень сильно.

То, что я рассказывал до сих пор, относилось к вычислению k_∞. Хотя Ферми предложил метод, позволяющий вычислять $k_{эфф}$ по известному k_∞, я не буду излагать его здесь, а перейду к более сложной теории, дающей непосредственно $k_{эфф}$.

БОЛЕЕ ПОДРОБНАЯ ТЕОРИЯ ЦЕПНЫХ РЕАКЦИЙ

Более подробная теория цепных реакций должна была бы давать более точные методы вычисления как k_∞, так и $k_{эфф}$. В действительности же расчет k_∞ был улучшен весьма незначительно: вычисление ε и p производилось так же, как и в элементарной теории, и лишь одно усовершенствование было внесено в вычисление f.

Поведение «тепловых» нейтронов в решетке из урана и замедлителя далеко не просто. Ясно, что для установления подлинного теплового равновесия между нейтронами и замедлителем должно произойти бесконечно много столкновений, а в хорошо спроектированной решетке нейтроны будут поглощаться ураном после сравнительно небольшого числа столкновений. В результате энергетический спектр нейтронов становится чрезвычайно сложным, а их средняя энергия остается значительно выше $^3/_2kT$. Более того, даже эта средняя энергия в различных точках решетки будет разной. На реальное распределение энергии оказывают влияние поглощающая и замедляющая способности материала. Последняя в свою очередь зависит от атомного веса замедлителя, от эффекта Ферми — влияния химической связи на рассеяние нейтронов — и от кристаллических свойств замедлителя, приводящих к значительной анизотропии его для рассеянных (преломленных) нейтронов.

Единственную серьезную попытку учесть эти факторы (если не считать рассеяния нейтронов на кристаллах) предприняли Теллер и его сотрудники, главным образом Метрополис и Моррисон. Более строгая, но существенно более формальная попытка, предпринятая несколько позднее Уилкинсом и мной, не внесла каких-либо заметных изменений в качественную картину явления. На заседании, состоявшемся в четверг, Вик уже докладывал о своей работе над этой проблемой. Результаты Теллера позволили, по крайней мере приближенно, оценить разность эффективных температур нейтронов и замедлителя. И все же, несмотря на все достигнутые успехи, мы и поныне далеки от адекватного знания энергетического спектра нейтронов в ядерном реакторе.

Впрочем, проблема вычисления f отнюдь не проста и в том случае, если энергетический спектр нейтронов известен. Более того, вычисление f остается чрезвычайно сложным, даже если предположить, что все нейтроны обладают одинаковой энергией. Причина такого положения заключается в том, что обычное диффузионное приближение совершенно не соответствует действительности. Наиболее точные расчеты диффузии моноэнергетических нейтронов произвел Плачек. Некоторые из его результатов были получены также немецкими и итальянскими теоретиками и опубликованы [6]. Наша работа в этом направлении велась без особого усердия еще и потому, что мы слишком ясно сознавали неадекватность модели, в которой нейтроны рассматривались как моноэнергетические. В настоящее время мы располагаем данными, подтверждающими правильность замечаний Плачека о приближенном характере наших диффузионных уравнений.

Особого различия между эффектом влияния химической связи на рассеяние нейтронов в конечной и в бесконечной решетках не существует. Что же касается вероятности p превращения нейтрона с энергией, лишь чуть меньшей порога деления, в тепловой нейтрон, то в конечной решетке она меньше, чем в бесконечной: помимо захвата ядрами урана, некоторые нейтроны будут покидать конечную решетку за счет «утечки» (диффузии) из нее. Эта утечка была рассчитана Ферми и его сотрудниками [7, 8] еще до того, как было открыто деление урана. Для конечной решетки они получили величину

$$p_{\text{эфф}} = p \exp(-\tau \varkappa^2), \tag{2}$$

где τ — $^1/_6$ среднего квадрата расстояния между точкой бесконечной решетки, в которой нейтрон рождается, и точкой, в которой он становится тепловым. К обсуждению величины $\varkappa^2$, равной отношению $-\Delta n/n$, где n — плотность нейтронов, усредненная по ячейке решетки, мы сейчас перейдем.

Из формулы (2) ясно, что эффективное значение величины p меньше ее значения при постоянной плотности нейтронов n в бесконечной решетке, т. е. при $\varkappa = 0$. Утечка зависит от «возраста» нейтронов τ, который, в свою очередь, растет с увеличением средней длины свободного пробега нейтронов в замедлителе и числа столкновений, необходимых для замедления нейтронов до тепловых энергий. Следовательно, величина τ имеет наименьшее значение для реактора с водяным замедлителем и намного большее значение для реактора с графитовым замедлителем.

Подобно тому как вследствие утечки доля нейтронов, замедляемых до тепловых энергий, в конечной решетке меньше, чем в бесконечной, доля нейтронов, поглощаемых ураном, также убывает из-за вылета некоторых тепловых нейтронов из реактора. Соотношение, аналогичное (2), имеет вид

$$f_{\text{эфф}} = f\left(1 + L_p^2 \varkappa^2\right)^{-1}. \tag{3}$$

Величина $\varkappa$ в формуле (3) имеет тот же смысл, что и в (2). Величина L_p^2 аналогична величине τ в формуле (2), т. е. возрасту нейтрона: она равна $^1/_6$ среднего квадрата расстояния между точкой бесконечной решетки, в которой нейтрон становится тепловым, и точкой, до которой он успевает дойти, прежде чем будет поглощен. Величина L_p называется диффузионной длиной тепловых нейтронов в данной решетке потому, что в области, где тепловые нейтроны не образуются, n экспоненциально спадает на расстоянии L_p:

$$n \sim \exp(-x/L_p). \tag{4}$$

Пласс в работе, во многом перекликающейся с работой Бардина [9] о волновых функциях в металлах, показал, что выражение

$$L_p^2 = L_m^2(1 - f) \tag{5}$$

дает очень хорошее приближение для L_p, если под L_m понимать диффузионную длину в чистом замедлителе без урана.

Условие, что решетка может поддерживать цепную реакцию в стационарном режиме, имеет вид $k_{\text{эфф}} = 1$, т. е.

$$k_{\text{эфф}} = \varepsilon p_{\text{эфф}} f_{\text{эфф}} \eta = 1. \qquad (6)$$

Подставляя в (6) $p_{\text{эфф}}$ и $f_{\text{эфф}}$ из (2) и (3), получаем

$$\varepsilon p f \eta \exp\left(-\tau\varkappa^2\right)\left(1 + L_p^2\varkappa^2\right)^{-1} = 1,$$

или, если воспользоваться соотношением (1),

$$k_\infty = \left(1 + L_p^2\varkappa^2\right)\exp\left(\tau\varkappa^2\right). \qquad (7)$$

Это выражение эквивалентно тому, которое ранее было получено Ферми.

Последнее соотношение можно рассматривать как уравнение относительно $\varkappa$. Эта величина, как мы увидим, зависит лишь от размеров и формы реактора. Следовательно, соотношение (7) дает нам размеры реактора, если его форма и внутренняя структура, в частности его коэффициент размножения бесконечной решетки k_∞, заданы.

Связь между величиной $\varkappa$ и размерами и формой реактора определяется классическим уравнением

$$\Delta n + \varkappa^2 n = 0. \qquad (8)$$

Средняя плотность нейтронов n, помимо уравнения (8), должна удовлетворять краевому условию: обращаться в нуль на внешних границах реактора. Известно, что краевая задача для уравнения (8) допускает решения лишь при определенных дискретных значениях $\varkappa^2$, зависящих от размеров и формы области, на границе которой плотность n должна обращаться в нуль, т. е. от размеров и формы реактора. Лишь при наименьшем из всех возможных $\varkappa^2$ средняя плотность нейтронов n всюду положительна, и именно это наименьшее значение $\varkappa^2$ и входит в (7). Уравнение (8) сопоставляет эффективное значение $\varkappa^{-1}$ каждому размеру и каждой форме реактора, а (6) показывает, как это эффективное значение влияет на эффективный коэффициент размножения. Если значение $\varkappa$ для реактора, получающееся из уравнения (8), меньше решения уравнения (7), то реактор находится в подкритическом состоянии, его эффективный коэффициент размножения меньше 1. Если же решение уравнения (7) больше значения $\varkappa$, удовлетворяющего уравнению (8), то реактор надкритичен.

Входящая в (8) величина n означает среднюю плотность нейтронов (усреднение производится по элементарной ячейке). [illegible] что уравнение (8) для такой средней величины может быть точным лишь в том случае, если это среднее при переходе от одной ячейки к другой меняется не слишком быстро. Связь средней плотности n из уравнения (8) с истинной плотностью нейтронов аналогична связи макроскопической плотности тел с их быстро флуктуирующей плотностью, определяемой атомной структурой тел. Этим и объясняется, почему теория уравнения (8) получила название макроскопической теории реактора, в то время как величины, входящие в соотношения (1)—(7), относятся к микроскопической теории реактора. В действительности же уравнение (8) — это лишь самое простое уравнение макроскопической теории реактора; оно применимо, если пространственные вариации плотности нейтронов не зависят от энергии. Важность этого частного случая не подлежит сомнению, но общая ситуация совсем иная. Например, регулирующие стержни поглощают в основном нейтроны с малой энергией — тепловые нейтроны, поэтому поверхность регулирующего стержня является границей, на которой плотность тепловых нейтронов обращается в нуль. Плотность же быстрых нейтронов на поверхности регулирующего стержня в нуль не обращается, и пропорциональность между плотностями быстрых и медленных нейтронов нарушается. Решение подобных проблем требует привлечения уравнений, более сложных, чем уравнение (8). Наиболее важные результаты в решении таких проблем принадлежат Фридману, Вейнбергу и Уилеру.

Ряд интересных задач возникает и в связи с простым уравнением (8). Если форма реактора достаточно сложна (а в случае, если делящийся материал жидкий, это почти неизбежно), то решение уравнения (8) удается получить только методами теории возмущений. Некоторые из них обнаруживают замечательное сходство с методом Рэлея — Шредингера, с которым мы знакомы по его применениям к квантовомеханическим задачам. Многими интересными результатами, относящимися к уравнению (8), мы обязаны Мюррею, Нордхейму и Судаку.

Значительная часть работы, проделанной в этом направлении, слишком специальна, чтобы я мог входить здесь в детали. О других результатах расскажут в своих выступлениях следующие докладчики, поэтому я закончу ту часть моего обзора, которая относится к вычислению коэффициентов размножения и критических размеров, но прежде я хотел бы подчеркнуть, что, по моему мнению, основную часть работы еще предстоит проделать. В частности, поведение тепловых нейтронов в реакторе и переход от больших энергий к тепловым требуют дальнейшего уточнения как с экспериментальной, так и с теоретической стороны. Не менее интересные детали все еще ждут своей разработки и в остальных частях теории. Имеются также некоторые проблемы, уже привлекшие к себе внимание, которые [illegible] не упомянул в своем обзоре. Главная из них — изменение плотности нейтронов со временем в тех случаях, когда уравнения (6) и (7) выполняются лишь приближенно, а реактор либо подкритичен, либо надкритичен. В этой области особенно активно работали Кристи, Нордхейм и Уилкинс.

ДЕЙСТВИЕ РАДИАЦИИ НА ВЕЩЕСТВО

Плотности радиации (имеется в виду как γ-излучение, так и нейтронные потоки) внутри реактора, предназначенного для получения плутония, выше, чем удается поддерживать вне реактора в течение продолжительных промежутков времени. Действие этой радиации на структуру материалов было одной из первых задач, которая заинтересовала нас с теоретической точки зрения. Экспериментальные исследования проводились Химическим отделом. На сессии Американского химического общества в Атлантик-сити Бэртон доложил свои результаты в этой области, а также работы своих сотрудников и доктора Франка. Из теоретиков мой интерес к радиационным повреждениям материалов (о некоторых аспектах этой проблематики мы не можем говорить открыто и поныне) разделяли Гольдбергер, Малликен и Зейтц.

Ясно, что столкновение нейтронов с атомами любого вещества, помещенного в реактор, приводит к смещению атомов этого вещества. Если вещество представляет собой некоторое сложное химическое соединение, то смещение его атомов вызовет изменение химических свойств соединения. Такие явления были обнаружены и исследованы еще до появления ядерных реакторов. Их обзор приведен, например, в книге Линда [10]. В реакторе вследствие большей интенсивности радиации все эти изменения протекают намного заметнее. Следует ожидать, что структура тел элементарного химического состава также будет подвергаться изменениям под действием излучения. Этот вопрос представляет большой научный интерес потому, что с помощью мощной радиации внутри реактора мы могли бы искусственно создавать определенное число дефектов и изучать (требуемое теорией) влияние их на тепло- и электропроводность, предел прочности, пластичность и т. д. Можно надеяться, что исследования твердых тел, в особенности свойств, зависящих от структуры, будут в значительной мере стимулированы теми дополнительными экспериментальными возможностями, которые открывает перед нами ядерный реактор.

Еще до того, как будет найдена окончательная интерпретация экспериментальных результатов, наши знания радиусов низкоэнергетических ионов будут значительно расширены. Этим вопросом занимались в основном Голдбергер и Зейтц. Большая часть остальной нашей работы сводилась к чисто умозрительным построениям. Будущие эксперименты либо подтвердят их правильность, либо опровергнут.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Как я уже подчеркнул, теоретическая физика в нашей группе всегда находилась на положении падчерицы. Подобную ситуацию вряд ли можно оправдать тем, что на нас были возложены многие обременительные обязанности. Мы пытались по возможности освободить Данкова от срочной текущей работы, и он выполнил ряд исследований, представляющих общий интерес. Можно назвать еще лишь одну обязанность, которой мы никогда не давали отходить на второй план, — поддержание таблиц ядерных констант на уровне последних достижений. Эта обязанность была возложена на миссис Учиямада. Большую помощь ей оказывал Информационный отдел нашего проекта, и в частности Голдсмит, внесший в составление таблиц поистине неоценимый вклад. Нам было приятно узнать, что наши таблицы констант вскоре будут частично опубликованы.

Теоретические работы нашей группы можно разделить на две категории: помощь в обработке и планировании экспериментов и собственно теоретическую работу. К первой категории относятся работы Кана, Швейнлера, Вейнберга и других по так называемому реакторному осциллятору — прибору, позволяющему приводить в колебательное движение помещенный внутрь реактора образец поглотителя нейтронов с известными или неизвестными характеристиками. Колебания поглотителя нейтронов модулируют интенсивность нейтронного потока. Эти модуляции аналогичны температурным волнам, распространяющимся в Земле вследствие суточных и годовых флуктуаций притока тепла к ее поверхности. Амплитуда и длина волны модуляций позволяют вычислять характеристики осциллирующего поглотителя нейтронов и свойства самого реактора.

Голдбергер и Зейтц много внимания уделяли дифракции нейтронов. Они интерпретировали и значительно расширили результаты Вейнштока [11] и учли в своей теории явления, которыми до них пренебрегали. Их работу продолжил в Принстоне Мошинский[1]).

В качестве последнего примера я хотел бы упомянуть работу Данкова о короткодействующих α-частицах. Эта работа была начата из-за необходимости решить некоторые острые проблемы, которые к тому времени, когда Данков приступил

---

[1]) На заседании Физического общества по этим вопросам выступили Зейтц и Голдбергер.

к своей работе, были практически забыты. Данков заметил, что интенсивность короткодействующих α-частиц часто противоречит теории Гамова [12], согласно которой после вылета α-частицы остаточное ядро должно находиться в возбужденном состоянии. Данков исследовал некоторые другие механизмы, среди которых особенно важно возбуждение остаточного ядра α-частицей уже после проникновения ее через потенциальный барьер. Новый интерес к этому в последнее время пробудился после экспериментов Чана [13]. Чан независимо открыл механизм Данкова [1]).

Я не хотел бы закончить обзор работ нашей группы, не выразив моей искренней благодарности всем ее членам за их самоотверженное и лояльное сотрудничество. Я хотел бы извиниться перед теми, чьи работы, может быть, не были оценены мной по достоинству. Как я уже говорил, мы ставили перед собой весьма конкретную цель на протяжении всего периода нашей совместной деятельности, и наиболее важные из решенных некогда задач не всегда кажутся заслуживающими упоминания теперь. Как бы то ни было, в процессе работы мы столкнулись со многими интересными проблемами, и некоторые из них, несомненно, заслуживают дальнейшего исследования. Разнообразие этих проблем и сохранение важности поставленной перед нами цели в немалой мере способствовали сердечности отношений, сложившихся в нашей группе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haxby, Shoupp, Stephens, Wells*, Phys. Rev., **57**, 1088A (1940).
2. *Haxby, Shoupp, Stephens, Wells*, Phys. Rev., **58**, 199A (1940).
3. *Anderson H. L.*, Phys. Rev,, **57**, 566 (1940).
4. Journ. Appl. Phys., **26** (1955).
5. *Seitz F.*, The Modern Theory of Solids, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1940, ch. 9. (Имеется перевод: *Зейтц Ф.*, Современная теория твердого тела, Гостехиздат, М., 1949, гл. 9.)
6. *Wick G. C.*, Zs. Phys,, **121**, 702 (1943).
7. *Fermi E.*, *Rasetti F.*, Ricerca Sci., **9**, 472 (1938).
8. *Placzek G.*, Phys. Rev., **69**, 423 (1946).
9. *Bardeen J.*, Phys. Rev., **49**, 653 (1936).
10. *Lind S. C.*, Chemical Effects of α-Particles and Electrons, Chemical Catalogue Co., New York, 1928.
11. *Weinstock R.*, Phys. Rev., **65**, 1 (1944).
12. *Gamow G.*, Structure of Atomic Nuclei, Clarendon Press, Oxford, 1937.
13. *Chang W. Y.*, Phys. Rev., **69**, 60 (1946).

[1]) Об этой фазе работы Чана доложил на заседании Данков.

9

ДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ТВЕРДЫЕ ТЕЛА[1])

В те беспокойные дни, когда ученые-атомщики строили первый реактор в Металлургической лаборатории Чикагского университета, их особенно волновал один вопрос: как будет действовать на реактор его собственная радиация? В большинстве других проблем — оценке критических условий для создания цепной реакции, управлении, защите, охлаждении — физики были абсолютно уверены в своих расчетах, но вопрос о радиации был далеко неясен. Мы знали, что даже под действием слабой естественной радиоактивности структура и свойства материалов могут изменяться. Что же случится с урановыми стержнями в реакторе под действием разрушительных сил интенсивного нейтронного излучения, при делении ядер и т. д.? Еще более серьезным был вопрос: что произойдет с графитовым замедлителем? Графит входит в ответственные детали реактора. В отличие от урана его нельзя время от времени вынимать и заменять, и мы знали, что радиация вызывает в нем повреждения.

Группа, занимавшаяся вопросами «здоровья» нашего будущего атомного «дитяти», была настолько не уверена в способности реактора переносить радиацию и другие «болезни», что расценивала его шансы «выжить» довольно пессимистично и в своем докладе сообщала: «Было бы антинаучным оценивать полезную продолжительность жизни реактора свыше 100 дней». В настоящее время этот период превзойден уже более чем в 50 раз и почти все реакторы первого поколения живы и благополучно работают. Что нам было совсем неизвестно в то время — это способность графита (да и металла) восстанавливать свои радиационные повреждения, так сказать «залечивать раны». Тем не менее действие радиации на твердые тела и поныне остается важной задачей, отнимающей много сил и времени. Это главная проблема, которая возникает при создании реакторов. Помимо чисто практического значения, радиационные эффекты стали ценным средством исследования важных свойств твердых тел. Исследование радиационных повреждений проводится в настоящее время не только в национальных лабораториях Комиссии по

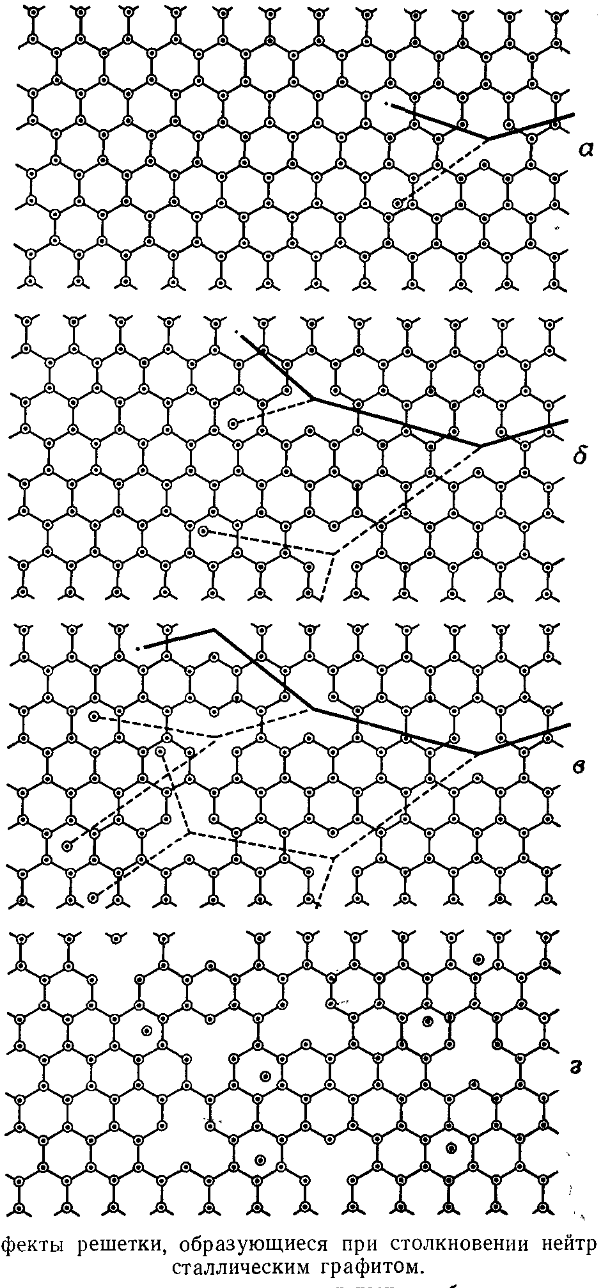
[1]) Статья написана совместно с Ф. Зейтцем. Опубликована в журнале: Sci. Amer., **195**, № 2 (1956).

атомной энергии США, но и в ряде университетов и промышленных лабораторий. Недавно эта комиссия объявила о подписании восьми контрактов на проведение таких исследований на общую сумму более 250 000 долларов в год. Программа изучения радиационных эффектов непрерывно возрастает как по масштабам, так и по широте охватываемых проблем.

Попробуем рассказать кое-что из того, что мы узнали о радиационных повреждениях в твердых телах. Металлы и неметаллы на действие облучения реагируют по-разному. Рассмотрим сначала радиационные эффекты в неметалле — графите (кристаллическом углероде), обычно применяемом в реакторах в качестве замедлителя (фиг. 1). Нейтроны, высвобождающиеся при делении урана в реакторе, обладают кинетической энергией около 10^6 *эв*. Когда быстрый нейтрон сталкивается с ядром атома углерода в замедлителе, он передает значительную долю своей кинетической энергии этому атому, и последний от удара испытывает отдачу. Поскольку энергия отдачи атома углерода во много раз превосходит энергию связи, удерживающую его в кристаллической решетке (последняя меньше 10 *эв*), атом оказывается выбитым из своего обычного положения. В результате в решетке возникают сразу два дефекта: смещенный атом располагается где-то между узлами решетки (как участник парада, отставший от своей шеренги или опередивший ее), а в одном из узлов образуется вакансия.

То, о чем мы сейчас рассказали, — прямые последствия столкновений между быстрыми нейтронами и атомами в решетке. Сами по себе такие столкновения обусловливают лишь незначительную часть вызванных в графите разрушений. Быстрый нейтрон, прежде чем скорость его замедлится до безопасной величины, успевает столкнуться самое большее с 60 атомами углерода. Именно эти атомы, смещающиеся со своих «насиженных» мест при отдаче, и вызывают основные разрушения в решетке. Они не только обладают скоростью, но и занимают довольно большой объем. Энергия отдачи первого атома углерода, с которым сталкивается нейтрон с энергией около 10^6 *эв*, составляет около 150 000 *эв*. Такой атом действует, подобно сильному, рослому человеку, который внезапно решил выбраться из переполненного вагона метро: он разбрасывает другие атомы направо и налево до тех пор, пока не достигнет конца своего пробега, т. е. пока его энергия не будет исчерпана.

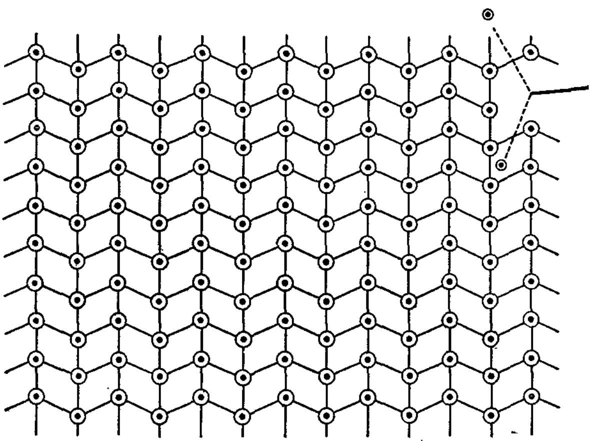
Описываемая нами цепь событий, происходящих в мире атомов, таит в себе одну неожиданность. Она в корне противоречит всему, что можно было бы ожидать, если исходить из аналогии со столкновениями обычных шариков: проталкивающийся сквозь толпу других атомов атом углерода в конце своего пути производит больше разрушений, чем в начале! Парадокс раз-



Фиг. 1. Дефекты решетки, образующиеся при столкновении нейтрона с кристаллическим графитом.

Гексагональная структура кристалла схематически изображеиа на плоскости. *а* — иейтрон (*чёрная* точка) при соудареиии сместил один атом; *б, в* — дальиейшее развитие процесса, когда и нейтрои и выбитые им атомы продолжают выбивать новые атомы решетки (траектория иейтрона показана *сплошной* лиииеи, траектории атомов — *пунктирными*); *г* — конечный результат: решетка с вакансиями и атомами «внедреиий».

решается просто: мы имеем здесь дело с межатомными силами, а не с привычным столкновением шаров. Когда быстро движущийся атом начинает свой стремительный бег сквозь толпу окружающих его атомов, он сталкивается с каждым из них лишь мимолетно и не успевает передать им значительный импульс, поэтому выбить какой-нибудь атом с занимаемой им в решетке позиции наш атом может лишь случайно. Если же путешествующий атом снижает свою скорость, то межатомные силы получают



Фиг. 2.

Картина радиационных повреждений решетки урана, помимо дефектов, уже известных нам из рассмотрения решетки графита, усложнена появлением еще одного дополнительного фактора. Иногда ядра урана захватывают нейтрои, что приводит к делению ядер урана. Продукты деления могут вызвать гораздо более сильные повреждения решетки, чем первичные нейтроны.

все больше и больше времени для действия, и наш атом сдвигает со своих мест все больше и больше атомов решетки. Наконец, когда его скорость падает ниже определенного предела, он передает оставшуюся энергию той группе атомов, которая в этот момент встречается на его пути. В результате крохотный участок решетки внезапно разогревается до высокой температуры (иногда до 10 000° С). Это явление, называемое «тепловым пиком» или «пиком смещения», длится всего лишь около 1/100 000 000 *сек*, но тем не менее может привести к повреждениям или деформации кристалла.

Эффекты, сопровождающие тепловой пик, чрезвычайно сложны и пока еще до конца не поняты. По-видимому, в крохотной «пиковой» области происходит плавление. Данные, свидетельствующие о плавлении, были получены в экспериментах по облучению тщательно приготовленного сплава меди и цинка. Атомы сплава были расположены в узлах правильной решетки, в которой каждый атом меди окружен восемью атомами цинка и наоборот. Бомбардировка сплава нейтронами производилась при низких температурах (вблизи температуры жидкого гелия) для того, чтобы «заморозить» любые изменения в решетке. Последующие анализы показали, что расположение атомов стало хаотичным, причем большинство нарушений порядка пришлось на области тепловых пиков.

Помимо плавления нагретые области расширяются. Такое раздувание их приводит к деформациям кристалла; некоторые из деформаций, по-видимому, сохраняются и после остывания горячих областей. Таким образом, материал вокруг тепловых пиков оказывается деформированным.

Повреждения, которые наносят облученному кристаллу такие пики, очень трудно отличить от повреждений, вызванных простым смещением атомов. В металлах пики как источник повреждений играют, по-видимому, более важную роль, чем в графите, потому что у более тяжелых элементов атомы отдачи обладают большей энергией, когда образуют пики, и, следовательно, на повреждения кристаллической решетки могут затрачивать бóльшую долю своих энергетических ресурсов. В случае же графита движущиеся атомы углерода успевают израсходовать на смещение встречных атомов почти всю свою энергию, прежде чем их скорость упадет настолько, что станет возможным образование пиков. Наши вычисления показывают, что наиболее «разрушительная» часть пробега атомов отдачи в графите приходится на скорости, соответствующие энергиям 100 000—10 000 *эв*.

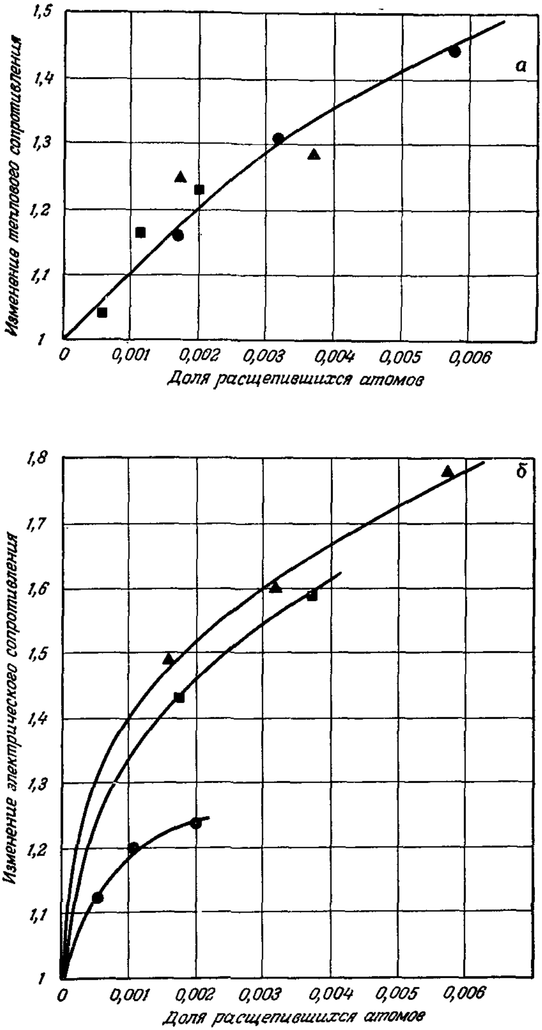
Итак, ясно, что радиация может приводить к образованию разнообразных дефектов в кристаллической решетке, в силу чего и повреждения в облученном материале могут быть самыми разнообразными.

Описывая разрушения, производимые радиацией в твердых телах, мы обращали основное внимание на графит, но многое из того, что было сказано, в равной мере относится и к металлическому топливу в реакторе (фиг. 2). Носитель разрушений остается тем же самым — быстро движущиеся частицы. Основное различие состоит в том, что в уране среди бомбардирующих частиц главную роль играют не нейтроны, а продукты деления. Тяжелые осколки ядер урана сталкиваются с атомами кристаллической решетки намного сильнее, чем нейтроны, и передают атомам в среднем в 1000 раз больше энергии, поэтому и повреждения в уране намного больше, чем в графите. Кроме того, превращение части урана при делении в другие элементы также уменьшает прочность металла. К счастью, металлы обладают вязкостью и могут выдерживать большие нагрузки, в особенности если противостоять нагрузкам требуется не слишком долго.

Рассмотрим теперь способность материалов восстанавливать радиационные повреждения. Обычно смещенные атомы пытаются вернуться в положение, более или менее напоминающее то, которое они занимали в решетке до облучения, и таким образом восстановить свои первоначальные свойства. Процессы восстановления лучше всего изучать при низких температурах. Если поврежденный материал выдерживать при такой температуре, при которой интенсивность движения атомов будет крайне мала, атомы внедрения и вакансии начнут рекомбинировать и повреждения решетки будут «исцеляться». В результате и свойства всего кристалла начнут возвращаться к нормальным. Наглядным примером протекания всех этих процессов может служить восстановление свойств меди после облучения при температуре жидкого гелия. Измерялась электропроводность меди. Если медь — почти идеальный металл — облучать при комнатной температуре, то радиационные повреждения будут восстанавливаться очень быстро. Чтобы «заморозить» все повреждения и предотвратить процессы восстановления непосредственно в момент облучения, медь необходимо держать при температуре, ненамного превышающей абсолютный нуль. При возрастании температуры облученных образцов примерно до 35° К их электропроводность сильно возрастает. Пока мы еще не знаем, с чем связано столь резкое и необратимое изменение электропроводности, свойственное не только меди, но и другим металлам: с рекомбинацией расположенных близко друг к другу вакансий и атомов внедрения или с «рассасыванием» некоторых деформаций, вызванных тепловыми пиками. Это один из важных вопросов, исследуемых в настоящее время в ряде лабораторий.

Интересно отметить, что каждое повышение температуры сопровождается «залечиванием» какого-нибудь «неисцеленного» повреждения. Это указывает на существование широкого спектра различных типов дефектов, из которых одни поддаются исправлению легче, другие — тяжелее. Известно, что даже небольшие следы примесных атомов могут оказывать существенное влияние на скорость восстановления. Некоторые из образовавшихся дефектов оказываются настолько устойчивыми, что для снятия их металлы приходится нагревать до температур, составляющих примерно половину температуры плавления.

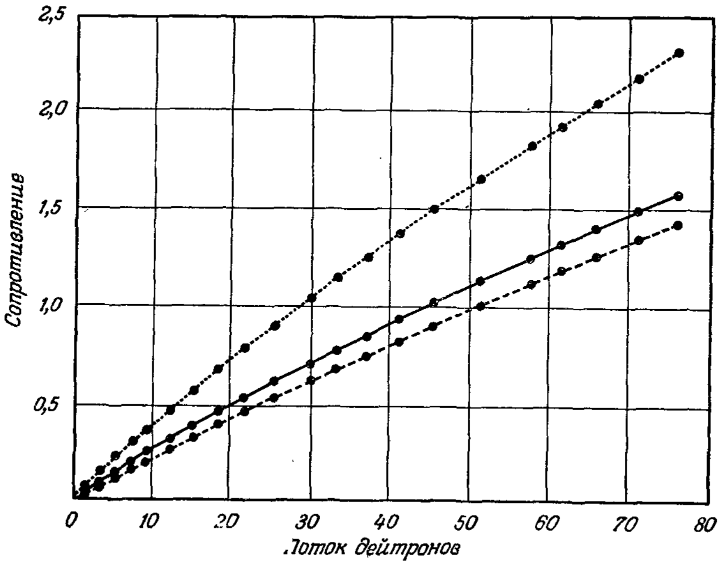
В целом чистые металлы лучше, чем все остальные материалы, сопротивляются радиационным повреждениям и легче восстанавливают первоначальные свойства. Может быть, это связано с тем, что атомы в металлах наиболее подвижны. Правда, некоторые особенности в поведении, свойственные металлам, обнаружены при облучении и у таких валентных соединений, как алмаз, кремний и германий, и у простых солей и окислов, например у хлористого натрия и окисла бериллия. С другой



Фиг. 3. Изменение свойств сплавов урана и алюминия, вызванное распадом некоторых атомов урана (по данным Биллингтона из Ок-Риджской национальной лаборатории).

а — зависимость теплового сопротивления от доли расщепившихся атомов; *б* — зависимость электрического сопротивлеиия от доли расщепившихся атомов. Квадраты, кружки и треугольники соответствуют наблюдениям над сплавами, содержащими 5,7, 15 и 17,2 вес. % урана. По оси ордииат отложено отношение конечного значения измеряемой величины к начальному. Так, видно, что при распаде 0,002 атомов урана тепловое сопротивление (*а*) возрастает в 1,2 раза по сравнению с нормальным значением.

стороны, органические материалы, в особенности полимеры, например пластические массы, крайне чувствительны к радиации, действие которой приводит к образованию в них постоянных и не поддающихся восстановлению повреждений. В этих случаях считают, что облучение приводит к разрыву химических связей, которые трудно восстановить в первоначальном виде. Большинство полимеров даже при умеренной продолжительности



Фиг. 4.

Бомбардировка меди (*штриховая* кривая), серебра (*сплошная* кривая) и золота (*пунктирная* кривая) дейтронами увеличивает электрическое сопротивление этих металлов. По оси абсцисс отложено число частиц, проходящих через 10^{-15} *см*² поперечного сечения пучка, по оси ординат — сопротивление куба с ребром 1 *см*, выраженное в единицах 10^{-7} *ом*. Измерения проводились при температуре 10° К.

облучения утрачивает свою пластичность. Короче говоря, свойства полимеров почти противоположны свойствам металлов.

Какие типы радиационных повреждений существуют и чем они могут быть нам полезны? Как мы уже знаем, на микроскопическом уровне облучение приводит к образованию дефектов решетки. Какие изменения в макроскопических свойствах материала вызывают эти дефекты? Предсказуемые изменения можно разделить на четыре основных типа.

Во-первых, известно, что такие свойства, как электропроводность и теплопроводность, зависят от того, правильна ли решетка и нет ли у нее дефектов. Неудивительно поэтому, что при возрастании интенсивности радиации электро- и теплопроводность материала резко падают (фиг. 3 и 4). Экспериментально было измерено 30-кратное уменьшение. К счастью, теплопроводность замедлителя не так уже сильно влияет на работу реактора, а теплопроводность металлов в существенно меньшей степени подвержена действию радиации, поэтому тем, кто призван обеспечить нормальное функционирование реактора, уменьшение теплопроводности особых хлопот не доставляет. Следует сразу же добавить, что радиационные повреждения вызывают изменения в материале приборов, введенных в реактор, и это следует учитывать при решении проблем, связанных с его приборным оснащением.

Во-вторых, можно говорить о потере пластичности. Дефекты решетки приводят к тому, что плоскости скольжения в кристаллах оказываются блокированными, материал становится жестким и хрупким. Этот тип радиационных повреждений требует особой осторожности при обращении с урановыми тепловыделяющими элементами, и с ним приходится считаться в первую очередь. Изменения пластических свойств материала можно продемонстрировать наглядно. Этот эффект могли наблюдать посетители выставки «Атомная энергия в США», показанной в Женеве. Каждые несколько секунд легкий шарик попеременно бросали то в один, то в другой медный цилиндр. Оба цилиндра внешне выглядели одинаково, но отличались тем, что один из них был подвергнут облучению нейтронами в Ок-Риджском реакторе. Нормальный цилиндр при ударе о него шарика не издавал звука, в то время как облученный «пел», как камертон. Никакая холодная обработка меди не могла бы придать ей такой жесткости, какая была у облученного образца.

Оба названных нами типа эффектов — падение теплопроводности и потеря пластичности — наиболее поразительны, но отнюдь не наиболее опасны. Для нормальной работы реактора бóльшую опасность представляют два других типа радиационных повреждений.

Примером одного из них служит разбухание материала. Смещение атомов из узлов решетки приводит к расширению кристалла. Следовательно, по мере увеличения дозы радиации объем блока из материала также увеличивается. Когда в лабораториях Комиссии по атомной энергии в Айдахо был введен в действие реактор для испытания материалов с новым замедлителем из окиси бериллия, объем замедлителя в первый день увеличился на 1%. К счастью, расширение замедлителя не росло линейно со временем: через 10 дней объем возрос менее чем на 10% по сравнению с первоначальным. Тем не менее использование в качестве элементов решетки материалов, способных изменять свои размеры после окончания монтажа, может доставить много хлопот.

Другой, не менее неприятный радиационный эффект — энергетическая неустойчивость облученного материала. Атомы внедрения обладают большими запасами энергии. При их отходе назад (в вакансии решетки) эта энергия освобождается. Таким образом, над облученным материалом висит своеобразный энергетический дамоклов меч. Количество энергии, запасенной в атомах внедрения, может доходить до сотен калорий на 1 *моль* (молекулярный вес вещества, выраженный в граммах). Ясно, что внезапное освобождение этого запаса может приводить к неприятным последствиям. С другой стороны, это явление открывает и новые конструктивные возможности материала: некоторые ученые предлагают использовать облученный графит как своеобразную аккумуляторную батарею.

Мы называем перечисленные выше эффекты «повреждениями» потому, что они изменяют важные свойства материалов, помещенных в реактор для выполнения определенных функций, основанных именно на этих свойствах. Изменение свойств считается вредным не потому, что новые свойства ни при каких обстоятельствах не смогут найти себе полезных применений, а лишь потому, что эти изменения влияют на те функции материала, для выполнения которых он был предназначен. Чтобы свести до минимума влияние нежелательных изменений на работу реактора, было предложено подвергать материалы, используемые в его конструкции, предварительному облучению. Такая «хитрость» позволяет наделять материалы требуемыми свойствами и делать их устойчивыми к дальнейшему облучению.

Можно надеяться, что предварительно облученные материалы будут находить все более и более широкое применение, по мере того как будет расти наше понимание их свойств и возможностей. Графитовые аккумуляторные батареи и сверхтвердая медь — лишь первые строки обширного списка этих неожиданных свойств. То, что известно сегодня о свойствах материалов, подвергшихся действию радиации, — лишь первые, едва заметные царапины на поверхности глубокого знания их свойств.

Нас, авторов этой статьи, радиационные эффекты заинтересовали в связи с созданием первых больших реакторов, и мы считаем особой удачей, что явление, первоначально казавшееся лишь досадной помехой, ныне обещает снабдить нас ценной информацией о свойствах твердого тела в целом и о свойствах многих материалов, используемых в нашей повседневной практике.

10

ПРОБЛЕМА ИЗМЕРЕНИЯ [1])

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних нескольких лет заметно усилился интерес к логическим основам квантовой механики [1—24] [2]). Стимулом послужили попытки изменить вероятностную интерпретацию квантовой механики. Даже после того, когда выяснилось, что предпринятые попытки оказались менее плодотворными, чем надеялись их адепты [3]), интерес к логическим основаниям теории сохранился. После более чем 20-летнего забвения мы вновь слышим дискуссии об основных принципах квантовой механики и совместимых с ними теоретико-познавательных (эпистемологических) взглядах. Как это нередко бывает в подобных обстоятельствах, некоторые из ранее высказанных идей оказались забытыми; почти все наследие прошлых лет было открыто заново в современной литературе. Разумеется, кое-что в языке изменилось, но главное уже было сделано: новые идеи брошены, новые попытки предприняты. Обсудив проблему измерения со многими моими друзьями, я понял, что изложить ту стандартную теорию, которая была развита лет двадцать тому назад, было бы весьма полезно. В этом и будет состоять первая задача данной статьи. Стандартная теория измерения берет свое начало в статье Гейзенберга [27] [4]), в которой впервые было сформулировано соотношение неопределенности. Первым, кто полностью оценил далеко идущие следствия идей Гейзенберга, был, как мне кажется, фон Нейман [32] [5]), но к аналогичным выводам независимо от него пришли и многие другие физики. Наиболее полно теория измерения, которую я буду называть

---

[1]) Опубликовано в журнале: Amer. Journ. Phys., **31**, 6 (1963).

[2]) См. также статьи Теллера, Борна, Ланде, Боппа и Людвига в сборнике [25].

[3]) См. статью Фока в сборнике [26] (стр. 177 и особенно раздел II).

[4]) См. также статью Гейзенберга в сборнике [28], статьи Бора [29, 30] и в особенности книгу Бора [31].

[5]) См. также работу Иордана [33].

ортодоксальной, изложена в превосходной книге Лондона и Бауэра [34][1]).

Ортодоксальная теория измерения весьма специфична по своим эпистемологическим следствиям. Именно поэтому мы считаем особенно желательным тщательнейший анализ ортодоксальных взглядов и поиск лазеек, позволяющих избежать тех выводов, к которым приводит ортодоксальная теория. Большая группа физиков находит, что принять эти выводы трудно, и, хотя автор настоящей статьи придерживается иного мнения, далеко идущий характер эпистемологических выводов из ортодоксальной теории не может не вызывать у него беспокойства. Опасения автора, разделяемые также и многими другими физиками, придерживающимися ортодоксальных взглядов на проблему измерения, основаны на подозрении, что к правильным эпистемологическим выводам нельзя прийти без подробного анализа *процесса приобретения знаний*. Задачи этой статьи более ограничены: в ней будет проанализирован лишь тот тип информации, который мы, согласно квантовомеханической теории, можем получить и которым располагаем о внешнем неодушевленном мире.

Здесь перед нами встает извечный вопрос: не выходим ли мы, физики, в поисках философской истины за пределы нашей компетенции? Я думаю, что, вероятно, выходим[2]). Тем не менее отдельные следствия квантовомеханической формулировки законов физики представляют интерес, даже если допустить, что они могут и не приводить к абсолютной истине.

ОРТОДОКСАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ

Согласно квантовомеханической теории, возможные состояния любой системы допускают описание с помощью векторов состояния. Эти векторы состояния (я почти дословно цитирую фон Неймана) могут изменяться двумя способами. С течением времени они изменяются непрерывно согласно временно́му уравнению Шредингера (это уравнение мы будем называть квантовомеханическим уравнением движения). Кроме того, если над системой производить измерения, вектор состояния будет меняться дискретно, по вероятностным законам. Второй способ изменения часто называют редукцией (reduction), или стягиванием, волновой функции. Именно эта редукция вектора состояния и неприемлема для многих наших коллег.

Допущение о двух способах изменения вектора состояния означает введение своеобразного дуализма. Следует подчеркнуть, что этот дуализм имеет мало общего с часто обсуждае-

---

[1]) См. также работы Шредингера [35, 36].

[2]) Это мнение особеино хорошо выразил Маргенау в первых двух разделах своей статьи [37].

мым дуализмом волна — частица. Последний является лишь частью более общего «плюрализма» или даже «инфинитезилизма», связанного с существованием бесконечно многих некоммутирующих измеримых величин: измерять можно либо положение частиц, либо их скорость, либо бесконечно много других наблюдаемых. Рассматриваемый нами дуализм — истинный, он обусловлен существованием *двух* способов изменения вектора состояния. Необходимо также заметить, хотя бы вскользь, что вероятностный аспект квантовой теории почти диаметрально противоположен тому, что заставляет ожидать обычный опыт. Особенно важную роль вероятностные законы должны играть в эволюции системы во времени. Взаимодействие частиц, их столкновения — все это события, которые принято считать подчиняющимися статистическим законам. В интересующем же нас случае все обстоит совершенно иначе: неопределенность в поведении системы не возрастает со временем, если система предоставлена самой себе, т. е. если над ней не производятся измерения. Свойства такой системы, описываемые ее вектором состояния, изменяются причинно независимо от того, в течение какого периода времени она предоставлена самой себе. Наоборот, производя над нашей системой измерения и пытаясь проверить, изменяются ли ее свойства так, как они должны были бы изменяться в силу наших причинных уравнений, мы вносим элемент случайного. Однако, согласно квантовомеханической теории, степень предсказуемости результатов всевозможных измерений, производимых над системой, не убывает с увеличением промежутка времени, в течение которого система предоставлена самой себе: непосредственно после наблюдения степень предсказуемости так же велика, как и много времени спустя. Неопределенность результатов, так сказать, для одних измерений возрастает ровно настолько, насколько убывает для других. В классической механике аналогом этого утверждения служит теорема Лиувилля. Она говорит нам следующее: если известно, что в некоторый момент времени точка, изображающая в фазовом пространстве состояние рассматриваемой системы, находится в элементе объема определенной величины, то для любого момента времени в будущем можно указать равный по величине элемент объема, который будет содержать точку, изображающую состояние рассматриваемой системы. Аналогично неопределенность в результате измерения в момент времени 0 величины Q_0 равна неопределенности измерения в момент времени t величины

$$Q_t = \exp(-iHt/\hbar)\, Q_0 \exp(iHt/\hbar).$$

Информация, получаемая в более поздние моменты времени, может оказаться менее ценной, чем информация, полученная в более раннем состоянии системы (вследствие возрастания энтропии), но в принципе количество информации со временем не меняется.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ОРТОДОКСАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЯ

Два способа изменения вектора состояния проще всего свести к одному, описав весь процесс измерения как некое событие во времени, подчиняющееся квантовомеханическим уравнениям движения. Можно было бы рассуждать так: если такое описание возможно, то отпадает необходимость в гипотезе о существовании второго способа изменения вектора состояния; если же оно невозможно, то постулат об измерении несовместим с остальной частью квантовой механики. К сожалению, в действительности ситуация оказывается не столь простой.

Если мы хотим описать процесс измерения с помощью уравнений квантовой механики, то необходимо проанализировать взаимодействие между объектом измерения и измерительным прибором. Пусть при измерении некоторого объекта мы «четко различаем» состояния $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, ... Производя измерения над объектом, находящимся в этих состояниях, мы получаем числа λ_1, λ_2, ... Начальное состояние измерительного прибора обозначим через a. Если измеряемая система сначала находилась в состоянии $\sigma^{(\nu)}$, то состояние полной системы «объект измерения плюс измерительный прибор» до того, как они вступили во взаимодействие, будет определяться прямым произведением $a \times \sigma^{(\nu)}$. В рассматриваемом нами случае, когда измеряемая система находится в одном из четко различимых состояний, взаимодействие не должно влиять на объект измерения, что приводит к отображению

$$a \times \sigma^{(\nu)} \to a^{(\nu)} \times \sigma^{(\nu)}. \qquad (1)$$

Состояние объекта в результате измерения не изменилось, но изменилось (в зависимости от начального состояния объекта) состояние прибора. Предположим, что $a^{(\nu)}$ — состояния прибора, которым соответствуют различные положения стрелки, указывающей состояние объекта измерения. Тогда состояние прибора $a^{(\nu)}$ можно назвать «положением стрелки ν». Векторы состояния $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ... взаимно ортогональны: обычно соответствующие состояния можно легко отличить даже макроскопически. Поскольку до сих пор мы рассматривали лишь «четко различимые» состояния, для каждого из которых проводимое измерение заведомо приводит к некоторому вполне определенному числу, статистический элемент еще не входил в наши рассуждения [1]).

Выясним теперь, что произойдет, если начальное состояние объекта измерения будет не «четко различимым», а произвольной линейной комбинацией $\alpha_1\sigma^{(1)} + \alpha_2\sigma^{(2)} + \ldots$ таких состояний. В этом случае из линейности квантовомеханического уравнения движения (в силу так называемого принципа суперпозиции) *следует*, что вектор состояния системы «объект измерения плюс измерительный прибор» после измерения совпадает с выражением, стоящим справа от стрелки:

$$a \times \left[\sum \alpha_\nu \sigma^{(\nu)}\right] \to \sum \alpha_\nu \left[a^{(\nu)} \times \sigma^{(\nu)}\right]. \tag{2}$$

Разумеется, в этом результате также нет, да и не может быть статистического элемента. Однако в состоянии (2), возникающем в результате измерения, существует статистическая корреляция между состоянием объекта и состоянием прибора: одновременное измерение у системы «объект измерения плюс измерительный прибор» двух величин (первой — подлежащей измерению характеристики исследуемого объекта и второй — положения стрелки прибора) всегда приводит к согласующимся результатам. Вследствие этого одно из названных измерений становится излишним — к заключению о состоянии объекта измерения можно прийти на основании наблюдения за прибором. Это следует из специальной формы вектора состояния (2), не содержащей члена $a^{(\nu)} \times \sigma^{(\mu)}$ с $\nu \neq \mu$.

Хорошо известно, что статистическая корреляция только что описанной природы играет весьма важную роль в структуре квантовой механики. Одним из первых указаний на это следует считать данное Моттом объяснение прямолинейного трека, оставляемого сферической волной вылетающей α-частицы [39]. Принципиальное различие в логических основах квантовой механики и более ранней теории Бора — Крамерса — Слэтера состоит в том, что квантовая механика, используя для своих волн не обычное, а конфигурационное пространство, допускает статистические корреляции подобного рода.

Возвращаясь к проблеме измерения, мы видим, что нам не удалось ни достигнуть конфликта между теорией измерения и уравнениями движения, ни интерпретировать теорию измерения в терминах уравнений движения. Уравнения движения допускают описание процесса измерения лишь постольку, поскольку состояние объекта, над которым производится измерение, нахо-

---

[1]) Самосопряженный (эрмитов) характер каждой наблюдаемой можно вывести из соотношения (1) и унитарности отображения, указанного стрелкой. См. в работе [38] примечание 2 на стр. 102.

дится в соответствии с состоянием измерительного прибора. Тем самым проблема производимого над объектом измерения превращается в проблему наблюдения, производимого над измерительным прибором. Введение еще одного, второго прибора для установления состояния первого прибора и т. д., очевидно, позволяет, в свою очередь, свести новую проблему к проблеме наблюдения, производимого над вторым, третьим и т. д. приборами, но не меняет главного: нельзя получить полного описания наблюдения, поскольку квантовомеханические уравнения движения причинны и не содержат статистического элемента, в то время как измерение содержит его.

Следует признать, что физик, разделяющий квантовомеханические концепции, при обсуждении измерений делает много упрощающих предположений. Например, он исходит из допущения о том, что измерительный прибор независимо от начального состояния объекта измерения всегда «что-нибудь покажет». Такое допущение, очевидно, нереалистично, поскольку наблюдаемый объект может удалиться от прибора и никогда не прийти в соприкосновение с ним. Еще важнее то обстоятельство, что сторонник квантовой теории избрал слово «измерение» и использует его для обозначения специального типа взаимодействия, с помощью которого можно получить информацию о состоянии определенного объекта. Так, измерение такой физической константы, как сечение, не относится к категории, называемой последователем квантовой теории «измерением». Его измерения отвечают лишь на вопросы, относящиеся к эфемерному состоянию физической системы, типа: какова компонента импульса этого атома вдоль оси x? С другой стороны, поскольку наш физик не в состоянии проследить путь информации до того момента, когда она попадает в его сознание или в сознание другого наблюдателя, он считает, что измерение завершено, как только установлено статистическое соотношение между подлежащей измерению величиной и состоянием некоего идеализированного прибора. Ясно, что употребление сторонником квантовой теории слова «измерение» в столь специальном смысле следовало бы особо подчеркнуть.

Этим замечанием я закончу обзор ортодоксальной теории измерения. Как уже говорилось, практически все сказанное нами можно найти в книге Лондона и Бауэра [34].

КРИТИКА ОРТОДОКСАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Попытки модифицировать ортодоксальную теорию за счет полного отказа от картины, концентрированным выражением которой следует считать соотношения (1) и (2), предпринимались неоднократно. Здесь мы рассмотрим лишь те из них, которые исходят из предположения о том, что результатом измерения является не вектор состояния, представимый в виде суммы, стоящей в правой части соотношения (2), а так называемая смесь, т. е. *один* из векторов состояния вида

$$a^{(\mu)} \times \sigma^{(\mu)}, \tag{3}$$

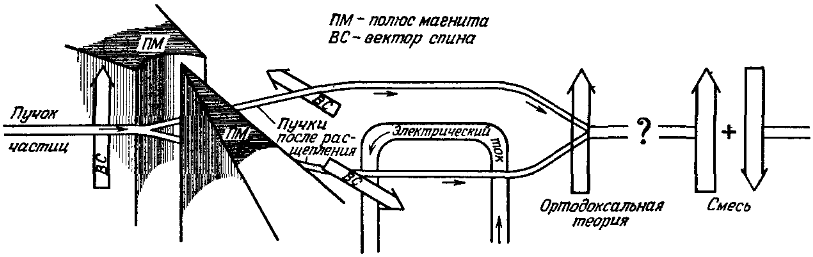
и что при взаимодействии между объектом измерения и измерительным прибором это состояние возникает с вероятностью $|\alpha_\mu|^2$. Если бы это было так, то, установив тем или иным способом (точный рецепт не дается), какой из векторов состояния (3) отвечает истинному состоянию системы, мы не изменили бы самого состояния системы: мы просто «установили бы, какая из различных возможностей реализуется в действительности». Иначе говоря, конечное наблюдение лишь увеличивает сумму наших знаний о системе и ничего не меняет. Это неверно, если вектор состояния после взаимодействия между объектом измерения и измерительным прибором имеет вид (2), потому что *состояния с векторами вида* (2) *обладают свойствами, которыми не обладает ни одно из состояний* (3). Поясним это обстоятельство на примере, поскольку оно имеет фундаментальное значение для последующего анализа.

В качестве примера рассмотрим опыт Штерна — Герлаха[1]), в котором у налетающего пучка частиц измеряется проекция спина на направление, перпендикулярное плоскости чертежа (фиг. 1). Индекс ν принимает два значения. Они соответствуют двум возможным ориентациям спина. «Измерительным прибором» служит координата положения частицы, измеряемая в направлении, также перпендикулярном плоскости чертежа. Если эта координата в рассматриваемом эксперименте положительна, то спин частицы направлен к нам; если же координата отрицательна, то спин направлен от нас. Эксперимент доказывает существование статистической корреляции между состоянием «измерительного прибора» (координаты положения) и состоянием объекта измерения (спина), которую мы уже обсуждали. Обычно эксперимент проводят для того, чтобы по положению пучка частиц определить направление спина. Измерение считается законченным (поскольку цель эксперимента состоит в установлении статистической корреляции), когда частица достигает того места, где на фиг. 1 стоят горизонтальные стрелки, указывающие направление спина.

Для нас же важна правая часть фиг. 1. Из нее видно, что состояние объединенной системы «объект плюс прибор» (спин

[1]) Недавно тот же эксперимент с другой точки зрения рассмотрел Вакита [40].

плюс координата частицы, т. е. полное состояние системы) обладает некоторыми свойствами, отсутствующими у каждого из разделенных пучков частиц. Если эти два пучка свести вместе с помощью магнитного поля, создаваемого током в кабеле, то они будут интерферировать, и спин снова станет вертикальным. Это можно проверить, пропустив пучок, образовавшийся от слияния двух первых пучков, через второй магнит, не показанный на фиг. 1. Если состояние системы соответствует пучку, первоначально отклонившемуся в нашу сторону, то, пропуская его через второй магнит, мы увидим, что он с одинаковой вероятностью отклоняется как в нашу, так и в противоположную сторону. То же справедливо и по отношению ко второму пучку,



Фиг. 1.

первоначально отклонившемуся в сторону от нас. Хотя осуществить предлагаемый эксперимент было бы трудно, нет никаких сомнений в том, что поведение частиц и их спинов при описанных условиях согласуется с квантовомеханическими уравнениями движения. Следовательно, выражение (2), обладающее в *данном случае* свойствами, отличными от свойств *любой* из альтернатив (3), правильно передает свойства системы «объект плюс прибор».

Таким образом, рассматривая эксперимент Штерна — Герлаха, можно указать конкретный и, по-видимому, экспериментально осуществимый способ, позволяющий отличить вектор состояния (2), следующий из ортодоксальной теории, от более наглядной смеси состояний (3), которую можно было бы ожидать, исходя из интуитивных соображений. Нет никаких сомнений в том, что здесь вопрос решается в пользу ортодоксальной теории. Интересно, что даже в столь простом случае осуществить выбор между вектором состояния (2) и смесью состояний (3) очень трудно. Возникают два вопроса. Во-первых, существует ли принцип, согласно которому в более сложных случаях нельзя провести различие между вектором состояния (2) и смесью состояний (3)? Насколько известно автору, этот вопрос до сих пор серьезно не обсуждался, и мы затронем его также лишь вскользь. Второй вопрос можно сформулировать так: существует ли непрерывный переход между вектором состояния (2) и смесью состояний (3), т. е. переход от более простых случаев, когда в результате взаимодействия между объектом измерения и измерительным прибором возникает вектор состояния (2), к более сложным и более реалистичным случаям, когда истинное состояние системы «объект плюс прибор» больше напоминает смесь состояний (3)? Этот вопрос, так же как и первый, можно исследовать в рамках квантовой механики или же можно постулировать отклонения от квантовомеханических уравнений движения, в частности от принципа суперпозиции.

«Более сложный» и «более реалистичный» случай в данном контексте означает, что измерительный прибор, состояние которого должно коррелировать с измеряемой величиной, в силу самой природы позволяет без труда измерять *свои* состояния, т. е. устанавливать корреляцию между этими состояниями и состоянием другого «измерительного прибора». После установления такой корреляции состояние второго «прибора» будет коррелировано и с состоянием объекта измерения. Установление корреляций между состоянием прибора, непосредственно контактирующего с объектом измерения, и состоянием другого прибора особенно распространено в тех случаях, когда первый прибор имеет макроскопическую природу, т. е. сложен с квантовомеханической точки зрения. Легкость установления вторичных корреляций служит мерой того, насколько реалистично утверждение о полноте измерения. Если установить состояние прибора, производившего первичное измерение, так же трудно, как состояние объекта измерения, то утверждение о том, будто установление корреляции между состоянием первичного прибора и объекта измерения является полным измерением, не слишком реалистично. Тем не менее ортодоксальная теория считает его соответствующим действительности. Возникает вопрос: согласуется ли с принципами квантовой механики допущение о том, что в конце реально проводимого измерения состояния системы «объект плюс прибор» волновая функция будет определяться не соотношением (2), а смесью состояний (3)? Как мы увидим, ответ на этот вопрос отрицателен. Следовательно, та модификация ортодоксальной теории, о которой шла речь в начале этого раздела, противоречит принципам квантовой механики.

Обратимся теперь к выкладкам. Хотя обычно это и не подчеркивается, тем не менее ясно, что для того, чтобы в результате взаимодействия прибора с объектом измерения получилась смесь состояний, само начальное состояние должно быть смесью состояний[1]). Это следует из общей теоремы о том, что характеристические корни матрицы плотности являются интегралами движения. Действительно, предположение о том, что начальное состояние системы «объект плюс прибор» есть смесь, весьма естественно, так как вектор состояния прибора, обычно рассматриваемого как макроскопический объект, вряд ли известен. Итак, предположим, что начальное состояние нашего измерительного прибора представимо в виде смеси состояний $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., причем вероятность состояния $A^{(\rho)}$ равна p_ρ. Не ограничивая общности, можно считать, что векторы $A^{(\rho)}$ взаимно ортогональны. Для состояния $A^{(\rho)}$ прибора и состояния $\sigma^{(\nu)}$ объекта уравнения движения дают конечное состояние

$$A^{(\rho)} \times \sigma^{(\nu)} \to A^{(\rho\nu)} \times \sigma^{(\nu)}. \tag{4}$$

Каждое состояние $A^{(1\nu)}$, $A^{(2\nu)}$, ... будет указывать одно и то же состояние $\sigma^{(\nu)}$ объекта; стрелка для всех $A^{(1\nu)}$, $A^{(2\nu)}$, ... будет находиться в положении ν. При различных ν положения стрелки также будут различными. Следовательно, при различных ν векторы $A^{(\rho\nu)}$ ортогональны, даже если индексы ρ у них различны. С другой стороны, состояния $A^{(\rho\nu)}$ и $A^{(\sigma\nu)}$ при $\rho \neq \sigma$ также ортогональны, потому что произведения $A^{(\rho\nu)} \times \sigma^{(\nu)}$ и $A^{(\sigma\nu)} \times \sigma^{(\nu)}$ получаются при действии унитарного преобразования на два ортогональные состояния $A^{(\rho)} \times \sigma^{(\nu)}$ и $A^{(\sigma)} \times \sigma^{(\nu)}$, а скалярное произведение векторов $A^{(\rho\nu)} \times \sigma^{(\nu)}$ и $A^{(\sigma\nu)} \times \sigma^{(\nu)}$ равно $(A^{(\rho\nu)}, A^{(\sigma\nu)})$.

---

[1]) Некоторые из авторов, открывших заново неймановское описание измерения [соотношения (1) и (2)], упустили из виду это обстоятельство. Они полагают, будто из макроскопической природы измерительного прибора следует, что если несколько «положений стрелки» имеют отличные от нуля вероятности [как в случае, когда вектор состояния представим в виде (2)], то состояние системы с необходимостью является скорее *смесью* (чем линейной комбинацией) состояний (3), т. е. состояний, которым соответствует строго определенное («четко различимое») положение стрелки. Свою точку зрения они аргументируют ссылкой на то, что к макроскопическим объектам применима классическая механика, а состояния вида (2) не имеют аналогов в классической теории. *Подобные аргументы противоречат современной квантовомеханической теории.* Движение макроскопического тела действительно может быть адекватно описано с помощью классических уравнений движения, если состояние тела допускает классическое описание. Последнее допущение, согласно современной теории, выполняется не всегда. Об этом ясно, хотя и в несколько гротескной форме, свидетельствует шредингеровский парадокс с кошкой (см. [34—36]). Кроме того, проведенное сейчас нами обсуждение опыта Штерна — Герлаха наглядно показывает, что в принципе между вектором состояния, определяемым правой частью соотношения (2), и *смесью* состояний (3), каждому из которых отвечает вполне определенное положение стрелки, имеются заметные различия. Позднее мы коснемся предложений о такой модификации квантовомеханических уравнений движения, при которой результат измерения сможет быть *смесью* состояний (3) даже в том случае, если начальное состояние описывалось вектором состояния (2).

Следовательно, векторы $A^{(\rho\nu)}$ образуют ортонормированную (хотя, по-видимому, и не полную) систему

$$\left(A^{(\rho\nu)},\ A^{(\sigma\mu)}\right)=\delta_{\rho\sigma}\,\delta_{\nu\mu}. \tag{5}$$

Из линейности уравнения движения следует, что если начальное состояние объекта измерения было линейной комбинацией $\sum\alpha_\nu\sigma^{(\nu)}$, то состояние системы «объект плюс прибор» после измерения будет смесью состояний

$$A^{(\rho)}\times\sum\alpha_\nu\sigma^{(\nu)}\to\sum_\nu\alpha_\nu\left[A^{(\rho\nu)}\times\sigma^{(\nu)}\right]=\Phi^{(\rho)} \tag{6}$$

с вероятностями p_ρ. Эта смесь в силу принятых допущений эквивалентна смеси ортогональных состояний

$$\Psi^{(\mu k)}=\sum_\rho x_\rho^{(\mu k)}\left[A^{(\rho\mu)}\times\sigma^{(\mu)}\right]. \tag{7}$$

Это наиболее общий вид состояний, в которых измеряемая величина имеет строго определенное значение λ_μ, а соответствующее состояние объекта измерения связано с некоторым состоянием измерительного прибора $\left(\text{одним из состояний } \sum\limits_\rho x_\rho^{(\mu k)}A^{(\rho\mu)}\right)$, определяемым положением стрелки μ. Кроме того, если $P_{\mu k}$ — вероятность состояния $\Psi^{(\mu k)}$, то должно выполняться равенство

$$\sum_k P_{\mu k}=|\,\alpha_\mu\,|^2. \tag{7a}$$

Коэффициенты $x_\rho^{(\mu k)}$, естественно, зависят от α.

Однако оказывается, что смесь состояний $\Phi^{(\rho)}$ не может одновременно быть смесью состояний $\Psi^{(\mu k)}$ (за исключением того случая, когда лишь один из коэффициентов α отличен от нуля). Чтобы смесь состояний $\Phi^{(\rho)}$ была смесью состояний $\Psi^{(\mu k)}$, должно выполняться необходимое условие: состояния $\Psi^{(\mu k)}$ должны быть линейными комбинациями состояний $\Phi^{(\rho)}$. Если это условие выполнено, то всегда можно найти коэффициенты u, такие, что

$$\sum_\rho x_\rho^{(\mu k)}\left[A^{(\rho\mu)}\times\sigma^{(\mu)}\right]=\Psi^{(\mu k)}=\sum_\rho u_\rho\Phi^{(\rho)}=\sum_{\rho,\,\nu}u_\rho\alpha_\nu\left[A^{(\rho\nu)}\times\sigma^{(\nu)}\right]. \tag{8}$$

В силу линейной независимости $A^{(\rho\nu)}$ из этого равенства имеем

$$u_\rho\alpha_\nu=\delta_{\nu\mu}x_\rho^{(\mu k)}; \tag{8a}$$

последнее же соотношение не может выполняться, если более чем один коэффициент α отличен от нуля. Отсюда следует, что предположение о возникновении после измерения состояния системы «объект плюс прибор», представимого в виде смеси состояний, каждое из которых соответствует строго определенному положению стрелки, противоречит квантовомеханическим уравнениям движения.

Итак, мы с необходимостью приходим к выводу о том, что *измерения, оставляющие систему «объект плюс прибор» в одном из состояний с определенным положением стрелки, нельзя описать с помощью линейных законов квантовой механики.* Следовательно, если такие измерения существуют, то квантовая механика верна лишь в ограниченных пределах. Такое заключение должно быть известно многим, хотя только что проведенного подробного доказательства до сих пор никто не давал. Людвиг в Германии и автор настоящей статьи независимо высказали предположение о необходимости такой модификации квантовомеханических уравнений движения, которая бы допускала описание вышеупомянутого типа измерений [41, 42]. Это предложение до сих пор подробно не обсуждалось, потому что оно было высказано лишь как предположение и в настоящее время еще не имеет доказательной силы. И хотя оно вполне может оказаться правильным, все же приходится признать, что пока единственно обоснованной среди известных теорий измерения нужно считать ортодоксальную теорию. Из такого признания с необходимостью следует дуалистическая теория изменений вектора состояния, и в частности редукция вектора состояния. Однако на ранее поставленный вопрос мы должны ответить утвердительно: существует [41, 42] непрерывный переход между вектором состояния (2), полученным на основе ортодоксальной теории, и необходимой смесью состояний (3), постулируемой более интуитивной теорией измерения.

ЧТО ТАКОЕ ВЕКТОР СОСТОЯНИЯ?

Вектор состояния играет настолько важную роль в формулировке квантовомеханической теории, что эту роль желательно обсудить подробнее. Кроме того, нам необходимо знать, каким образом можно определить вектор состояния. Поскольку (согласно квантовой механике) вся информация получается в форме результатов измерения, стандартный способ получения вектора состояния также сводится к проведению измерений над системой [1].

---

[1]) Существуют, однако, и другие способы, позволяющие привести систему в определенное состояние. Они основаны на том обстоятельстве, что малая система, взаимодействуя с большой системой, находящейся в определенном и хорошо известном состоянии, сама может почти с абсолютной достоверностью переходить в определенное состояние. Так, возбужденный атом водорода, если его поместить в большой контейнер, внутри которого нет излучения, с вероятностью, почти равной единице, передаст всю свою энергию полю излучения контейнера и перейдет в основное состояние. На этот способ «приготовления» состояний особое внимание обращал Маргенау.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо прежде всего вывести формулу для вероятности того, что последовательные измерения, производимые над системой, приведут к некоторым заранее заданным результатам. Мы выведем формулу вероятности и в представлении Шредингера и в представлении Гейзенберга. Пусть над системой в моменты времени t_1, t_2, ..., t_n производится n последовательных измерений. Обозначим через Q_1, Q_2, ..., Q_n операторы измеряемых величин в представлении Шредингера. Собственные векторы этих операторов будем обозначать буквой ψ с соответствующими верхними индексами, а собственные значения — буквой q. Тогда

$$Q_j \psi_\varkappa^{(j)} = q_\varkappa^{(j)} \psi_\varkappa^{(j)}. \tag{9}$$

В представлении Гейзенберга измеряемым величинам (если измерения производились в соответствующие моменты времени) отвечают операторы

$$Q_j^H = e^{iHt_j} Q_j e^{-iHt_j}. \tag{10}$$

Их собственные векторы мы обозначим через $\varphi_\varkappa^{(j)}$, где

$$\varphi_\varkappa^{(j)} = e^{iHt_j} \psi_\varkappa^{(j)}, \qquad Q_j^H \varphi_\varkappa^{(j)} = q_\varkappa^{(j)} \varphi_\varkappa^{(j)}. \tag{10a}$$

Если Φ — начальный вектор состояния, то вероятность появления последовательности $q_\alpha^{(1)}$, $q_\beta^{(2)}$, ..., $q_\mu^{(n)}$ результатов измерения равна квадрату модуля выражения

$$\left(e^{-iHt_1}\Phi,\ \psi_\alpha^{(1)}\right)\left(e^{-iH(t_2-t_1)}\psi_\alpha^{(1)},\ \psi_\beta^{(2)}\right) \dots \left(e^{-iH(t_n-t_{n-1})}\psi_\lambda^{(n-1)},\ \psi_\mu^{(n)}\right). \tag{11}$$

То же выражение с помощью собственных векторов операторов в представлении Гейзенберга записывается проще:

$$\left(\Phi,\ \varphi_\alpha^{(1)}\right)\left(\varphi_\alpha^{(1)},\ \varphi_\beta^{(2)}\right) \dots \left(\varphi_\lambda^{(n-1)},\ \varphi_\mu^{(n)}\right). \tag{11a}$$

Следует заметить, что искомая вероятность не определяется n гейзенберговскими операторами Q_j^H и их собственными векторами: результат существенно зависит от *последовательности* проводимых измерений *во времени*. Эти выражения, так же как и их обобщения на случай, когда собственным числам $q_\alpha^{(1)}$, $q_\beta^{(2)}$, ... отвечает по несколько собственных векторов, вывел еще фон Нейман. При рассмотрении кратных собственных значений удобно ввести проекционные операторы для каждого собственного значения $q^{(j)}$ гейзенберговского оператора Q_j^H. Если $P_{j\varkappa}$ — такой оператор, то вероятность появления последовательности результатов измерения $q_\alpha^{(1)}$, $q_\beta^{(2)}$, ..., $q_\mu^{(n)}$ равна

$$(P_{n\mu} \dots P_{2\beta} P_{1\alpha}\Phi,\ P_{n\mu} \dots P_{2\beta} P_{1\alpha}\Phi). \tag{12}$$

Выражения (11) и (11а) можно получить также, приняв постулат о том, что вектор состояния переходит в $\psi_{\varkappa}^{(j)}$ всякий раз, когда при измерении величины $Q^{(j)}$ получается число $q_{\varkappa}^{(j)}$. Действительно, утверждение «вектор состояния совпадает с $\psi_{\varkappa}^{(j)}$» есть не что иное, как краткое выражение именно того факта, что в результате последнего произведенного над системой измерения величины $Q^{(j)}$ получено число $q_{\varkappa}^{(j)}$. В случае простых собственных чисел вектор состояния зависит лишь от результата последнего измерения, и будущее поведение системы не зависит от всей ее предыстории. Иначе обстоит дело, если собственное значение $q^{(j)}$ кратно.

В этом случае наиболее простое выражение для вектора состояния в представлении Гейзенберга при условии, что j-е измерение дало число $q_{\varkappa}^{(j)}$, имеет вид

$$P_{j\varkappa} \ldots P_{2\beta}P_{1\alpha}\Phi \tag{12a}$$

[вектор (12а) необходимо еще надлежащим образом нормировать]. Если выражение (12а) после нормировки не зависит от начального вектора состояния Ф, то число измерений достаточно для полного описания состояния системы, и мы получаем чистое состояние. Если же вектор (12а) после нормировки все еще зависит от начального вектора состояния Ф, а сам начальный вектор неизвестен, то состояние системы есть смесь состояний (12а) со всеми возможными Ф. Измерение единственной величины Q, все собственные значения которой невырождены, достаточно для того, чтобы привести систему в чистое состояние, хотя сказать заранее, в какое из чистых состояний перейдет система, в общем случае невозможно.

Итак, из наших рассуждений следует, что в векторе состояния в сжатом виде запечатлена та часть нашей информации о прошлом системы, которая существенна для предсказания (насколько это возможно) ее поведения в будущем. Кстати сказать, аналогичную роль играет и матрица плотности. Единственное различие состоит в том, что она предсказывает будущее системы не столь полно, как вектор состояния. Итак, мы заключаем, что *законы квантовой механики позволяют получить лишь вероятностные корреляции между результатами последовательных наблюдений, производимых над системой.* Правда, законы классической механики также можно сформулировать в терминах вероятностных корреляций между последовательно проводимыми измерениями, но они допускают и другую формулировку — в терминах объективной реальности. Законы же квантовой механики — и это очень важно — формулируются лишь в терминах вероятностных корреляций.

ПРОБЛЕМЫ ОРТОДОКСАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Несовместимость интуитивной интерпретации законов квантовой механики с уравнениями движения и, в частности, с принципом суперпозиции может означать необходимость сохранения лишь ортодоксальной интерпретации, но может иметь и другой смысл — означать необходимость отказа от принципа суперпозиции. Для этого можно воспользоваться различными способами: тем, который был указан Людвигом, способом, предложенным мной, или каким-то третьим, еще неизвестным способом. Дилемма, с которой мы сталкиваемся при осуществлении нашей программы, делает желательным анализ всех слабых мест в логическом обосновании ортодоксальной интерпретации. Такому анализу и посвящается этот последний раздел нашей статьи.

В логическом обосновании ортодоксальной теории я считаю наиболее уязвимым чисто абстрактное постулирование взаимодействий, указанных стрелками в соотношениях (1) или (4). Никто всерьез не верит в существование измерительного прибора для некоторых, а в действительности для большинства наблюдаемых (таких, как xyp_z). Можно даже показать, что ни одну наблюдаемую, не коммутирующую с аддитивными сохраняющимися величинами (например, с импульсом, угловым моментом или с электрическим зарядом), нельзя измерить точно, и для увеличения точности измерения необходимо пользоваться измерительным прибором огромных размеров. Простейшее из известных в настоящее время доказательств этого утверждения дали Араки и Яназе [43][1]. С другой стороны, большинство величин, в измеримость которых мы твердо верим, и заведомо все наиболее важные величины (например, положение, импульс) не коммутируют со всеми сохраняющимися величинами, и их измерение нельзя осуществить с помощью микроскопического прибора. Отсюда возникает подозрение, что макроскопическая природа измерительного прибора принципиально необходима, и у нас снова пробуждаются сомнения в справедливости принципа суперпозиции для процесса измерения, которые и раньше были связаны с макроскопической природой прибора. Вектор состояния (2) системы «объект плюс прибор», получающийся в результате измерения с помощью очень большого прибора, так же *нельзя отличить от смеси*, как и вектор состояния, получавшийся в рассмотренном нами эксперименте Штерна — Герлаха[2]).

---

[1]) См. также работу [44].

[2]) На это обратил внимание еще Бом. См. раздел 22.11 в его книге [45].

Со второй, хотя и менее серьезной, трудностью мы сталкиваемся при попытке вычислить вероятность того, что взаимодействие между объектом и прибором по самой своей природе допускает существование таких состояний $\sigma^{(\nu)}$, для которых справедливо соотношение (1). Напомним, что взаимодействие, приводящее к этому соотношению, удовлетворяло лишь одному постулату: взаимодействие должно быть таким, чтобы измерение было возможным. Говоря о вероятности того или иного взаимодействия, я понимаю ее в смысле Розенцвейга или Дайсона [46—51], рассмотревших ансамбли возможных взаимодействий и определивших вероятности некоторых типов взаимодействий. Если принять их определение (или какое-нибудь аналогичное определение), то вероятность взаимодействия, приводящего к состояниям $\sigma^{(\nu)}$, удовлетворяющим соотношению (1), будет равна нулю. Доказательство этого результата проводится почти так же, как доказательство равенства нулю вероятности отыскания самовоспроизводящейся системы [52], и это не случайно: в силу соотношения (1) каждое состояние $\sigma^{(\nu)}$ можно рассматривать как самовоспроизводящую систему. Выход из создавшегося затруднения состоит, по-видимому, в том, что если система с вектором состояния a (т. е. прибор) очень велика, то соотношение (1) выполняется почти точно. Возможность измерения также должна существенно зависеть от больших размеров прибора.

Если опустить технические подробности, то итог тех выводов, к которым мы пришли, проанализировав ортодоксальную интерпретацию квантовых законов, проще всего сформулировать так: квантовые законы позволяют получить лишь вероятностные корреляции между результатами нескольких последовательных наблюдений над системой. Такое заключение вполне разумно: поскольку установлено, что в наших измерениях неизбежно остается некий случайный элемент, мы, естественно, стремимся к установлению статистических корреляций между измерениями. В приведенной выше формулировке нашего вывода несколько неудачно выражение «последовательных наблюдений», поскольку за ним кроется нерелятивистское понятие. Действительно, большинство наблюдений нелокально и характеризуется определенной протяженностью во времени, т. е. некоторой минимальной продолжительностью. «Наблюдаемые» же существующей ныне теории мгновенны (т. е. имеют нулевую продолжительность) и, следовательно, не принадлежат к числу релятивистских понятий. Единственное исключение составляют локальные полевые операторы. Из анализа же, проведенного Бором и Розенфельдом (см. [53—56]), мы знаем, сколько крайне абстрактных понятий приходится вводить для описания измерения полевых величин. Такое положение дел нельзя считать особенно обнадеживающим.

Все три только что рассмотренные проблемы (или по крайней мере две из них) вполне реальны. Небесполезно поэтому еще раз подчеркнуть, что все они являются проблемами формальной, математической, теории измерения и описания измерений, производимых с помощью макроскопических приборов. Названные проблемы не затрагивают вывода о том, что в некоторых случаях происходит «стягивание волнового пакета» (хотя это выражение не слишком удачно). Рассмотрим, например, столкновение протона и нейтрона. Предположим, что мы находимся в системе координат, в которой центр масс сталкивающихся частиц покоится. Если рассматривать нерассеянный пучок, то очень хорошим приближением для вектора состояния (поскольку происходит только S-рассеяние) будет выражение

$$\psi(r_p, r_n) = r^{-1} e^{ikr} w(r), \tag{13}$$

где $r = |r_p - r_n|$ — расстояние между двумя частицами, а $w(r)$ — некоторая медленно меняющаяся затухающая функция, обращающаяся в нуль при $r < r_0 - {}^1/_2 c$ и $r > r_0 + {}^1/_2 c$, r_0 — среднее расстояние между частицами в рассматриваемый момент времени, а c — длина когерентности пучка. Как только мы производим измерение импульса одной частицы (возможность такого измерения считается бесспорной) и получаем величину $\mathbf{p}$, вектор состояния другой частицы переходит в плоскую (слегка затухающую) волну с импульсом $-\mathbf{p}$. Наш результат эквивалентен утверждению о том, что после измерения импульс второй частицы оказался равным $-\mathbf{p}$, и следует из закона сохранения импульса. К тому же выводу приводят и чисто формальные вычисления возможных результатов одновременного измерения импульсов обеих частиц.

Можно пойти еще дальше и вместо импульса одной частицы измерять ее угловой момент относительно некоторой фиксированной оси[1]). Если в результате измерения мы получим величину $m\hbar$, то вектор состояния другой частицы станет цилиндрической волной, у которой та же компонента углового момента равна $-m\hbar$. Это утверждение также эквивалентно утверждению о том, что измерение указанной компоненты углового момента второй частицы с вероятностью 1 приводит к значению $-m\hbar$. Так же как и в случае импульса, последнее утверждение можно вывести из закона сохранения углового момента (равного нулю для системы двух частиц) или получить с помощью формальных выкладок. Следовательно, «стягивание волнового пакета» происходит и в этом случае.

---

[1]) Аналогичную ситуацию рассматривали Эйнштейн, Подольский и Розен [57].

В предыдущем примере было бы ошибочно утверждать, что даже до измерения состояние было смесью распространяющихся в противоположных направлениях плоских волн двух частиц. Нет никаких оснований ожидать, что у какой-нибудь пары плоских волн обнаружится описанная выше корреляция угловых моментов, и это естественно, так как плоские волны отличаются от цилиндрических и свойства вектора состояния (13) не совпадают со свойствами любой смеси. Для статистических корреляций, в явном виде постулируемых квантовой механикой (существование корреляций подтверждается экспериментально; см., например, эксперимент Боте — Гейгера), в некоторых случаях требуется «редукция вектора состояния». Единственное, о чем еще можно спросить, — это следует ли постулировать редукцию вектора состояния в том случае, когда измерение производится с помощью макроскопического прибора. Некоторые соображения, связанные с равенством (8), показывают, что даже такое допущение верно, *если* квантовую механику считать применимой ко всем системам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aharonov Y., Bohm D.*, Phys. Rev., **122**, 1649 (1961).
2. *Aharonov Y., Bohm D.*, Nuovo Cim., **17**, 964 (1960).
3. *Bertotti B.*, Nuovo Cim. Suppl., **17**, 1 (1960).
4. *de Broglie L.*, Journ. Phys. Radium, **20**, 963 (1959).
5. *de Silva J. A.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **16**, 289 (1960).
6. *Datzeff A.*, Compt. Rend., **251**, 1462 (1960).
7. *Datzeff A.*, Journ. Phys. Radium, **21**, 201 (1960).
8. *Datzeff A.*, Journ. Phys. Radium, **22**, 101 (1961).
9. *Jauch J. M.*, Helv. Phys. Acta, **33**, 711 (1960).
10. *Landé A.*, Zs. Phys., **162**, 410 (1961).
11. *Landé A.*, Zs. Phys., **164**, 558 (1961).
12. *Landé A.*, Amer. Journ. Phys., **29**, 503 (1961).
13. *Margenau H., Nill R. N.*, Progr. Theor. Phys., **26**, 727 (1961).
14. *Peres A., Singer P.*, Nuovo Cim., **15**, 907 (1960).
15. *Putnam H.*, Phil. Sci., **28**, 234 (1961).
16. *Renninger M.*, Zs. Phys., **158**, 417 (1960).
17. *Rosenfeld L.*, Nature, **190**, 384 (1961).
18. *Schlögl F.*, Zs. Phys., **159**, 411 (1960).
19. *Schwinger J.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **46**, 570 (1960).
20. *Tharrats J.*, Compt. Rend., **250**, 3786 (1960).
21. *Wakita H.*, Progr. Theor. Phys., **23**, 32 (1960).
22. *Wakita H.*, Progr. Theor. Phys., **27**, 139 (1962).
23. *Weidlich W.*, Zs. Naturforsch., **15a**, 651 (1960).
24. *Wesley J. P.*, Phys. Rev., **122**, 1932 (1961).
25. Werner Heisenberg und die Physik unsere Zeit, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1961.
26. Max Planck Festschrift, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958.
27. *Heisenberg W.*, Zs. Phys., **43**, 172 (1927).
28. Niels Bohr and the Development of Physics, Pergamon Press, London, 1955. (Имеется перевод: Нильс Бор и развитие физики, ИЛ, 1958.)

29. *Bohr N.*, Nature, **121**, 580 (1928).
30. *Bohr N.*, Naturwiss., **17**, 483 (1929).
31. *Bohr N.*, Atomic Physics and Human Knowledge, John Wiley and Sons, New York, 1958. (Имеется перевод: *Нильс Бор*, Атомная физика и человеческое познание, ИЛ, 1961.)
32. *von Neumann J.*, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag, Berlin, 1932. (Имеется перевод: *Иоганн фон Нейман*, Математические основы квантовой механики, «Наука», М., 1964.)
33. *Jordan P.*, Anschauliche Quantentheorie, Springer Verlag, Berlin, 1936, Kap. 5.
34. *London F.*, *Bauer E.*, La Théorie de la observation en mécanique quantique, Hermann et Cie., Paris, 1939.
35. *Schrödinger E.*, Naturwiss., **23**, 807 (1935).
36. *Schrödinger E.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **31**, 555 (1935).
37. *Margenau H.*, Phil. Sci., **25**, 23 (1958).
38. *Wigner E.*, Zs. Phys., **133**, 101 (1952).
39. *Mott N. F.*, Proc. Roy. Soc. (London), **126**, 79 (1929).
40. *Wakita H.*, Progr. Theor. Phys., **27**, 139 (1962).
41. *Ludwig G.*, Solved and Unsolved Problems in the Quantum Mechanics of Measurement в сборнике [25].
42. *Wigner E.*, Remarks on the Mind-Body Question в сборнике: «The Scientist Speculates», I. J. Good, ed., Heinemann, London, 1962.
43. *Araki H.*, *Yanase M.*, Phys. Rev., **120**, 666 (1961).
44. *Wigner E.*, Zs. Phys., **131**, 101 (1952).
45. *Bohm D.*, Quantum Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1951. (Имеется перевод: *Бом Д.*, Квантовая теория, Физматгиз, М., 1961; см. также изд. 2-е, исправленное, «Наука», М., 1965.)
46. *Porter C. E.*, *Rosenzweig N.*, Suomalaisen Tideakatemian Toimotuksia, **VI**, 44 (1960).
47. *Porter C. E.*, *Rosenzweig N.*, Phys. Rev., **120**, 1698 (1960).
48. *Dyson F.*, Journ. Math. Phys., **3**, 140 (1962).
49. *Dyson F.*, Journ. Math, Phys., **3**, 157 (1962).
50. *Dyson F.*, Journ. Math. Phys., **3**, 166 (1962).
51. *Wigner E.*, в книге «Proceedings of the Fourth Canadian Mathematics Congress», University of Toronto Press, Toronto, 1959, p. 174.
52. *Wigner E.*, The Probability of then Existence of a Self-Reproducing Unit, в сборнике: «The Logic of Personal Knowledge. Essays in Honor of Michael Polanyi», Routledge and Kegan Paul, London, 1961, ch. 10, p. 231.
53. *Bohr N.*, *Rosenfeld L.*, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-Fys. Medd., **12**, № 8 (1933).
54. *Bohr N.*, *Rosenfeld L.*, Phys. Rev., **78**, 194 (1950).
55. *Cordinaldesi E.*, Nuovo Cim., **8**, 494 (1951).
56. *Ferretti B.*, Nuovo Cim., **12**, 558 (1954).
57. *Einstein A.*, *Podolsky B.*, *Rosen N.*, Phys. Rev., **47**, 777 (1935).

11

ВЕРОЯТНОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ САМОВОСПРОИЗВОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ [1]

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В своем «Аналитическом исследовании» жизни и размножения организмов Эльзассер [1] анализирует способ хранения информации в клетках зародыша, позволяющей этим клеткам развиваться в организмы, подобные родительским — подобные по способности в свою очередь производить зародыши, клетки которых содержат информацию того же типа. Хотя автор и не располагает точным доказательством, приведенных им веских фактов вполне достаточно [2]), чтобы утверждать: «...структуру бабочки, змеи, дерева или птицы нельзя математически вывести из сравнительно компактного набора основных данных, хранящегося в хромосомах... Неизменность передаваемой из поколения в поколение информации... неадекватно описывается в терминах механистического приближения». Автор данной статьи также был потрясен чудом существования живых организмов, т. е. с точки зрения физики структур, которые (если они имеют доступ к определенной питательной среде) размножаются, иначе говоря, производят новые, тождественные себе структуры. У автора возникло подозрение, что с точки зрения известных законов физики существование структур такой природы крайне невероятно, и настоящую статью надлежит рассматривать как отчет о размышлениях и вычислениях, предпринятых им в этой связи [3]). Точка зрения автора несколько отличается от точки зрения Эльзассера. Эльзассер рассматривает способ хранения в клетках зародыша информации, необходимой для развития взрослых особей, и показывает, что клетки зародыша не обладают свойствами, которые, по мнению физика, делали бы их пригодными для хранения больших объемов информации. Нас же, наоборот, больше будет интересовать то, что с точки зрения

---

[1]) Опубликовано в сборнике: The Logic of Personal Knowledge. Essays in Honor of Michael Polanyi, London, 1961, ch. 19.

[2]) Поскольку вся книга Эльзассера посвящена этой теме, трудно найти определенные отрывки, в которых были бы собраны все сведения, подтверждающие полученные выводы. Тем не менее основное направление хода рассуждений автора особенно отчетливо видно на стр. 124—132.

[3]) Результаты этих размышлений упоминаются в статье автора «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» [2], помещенной в данной книге.

физика выглядит чудом: существование структур, способных производить новые, идентичные себе структуры [1]).

В книге Эльзассера не содержится четких указаний относительно того, в каком направлении следует искать решение поставленной ее автором проблемы. Эльзассер постулирует существование новых законов природы, не содержащихся в законах классической физики или квантовой механики. Он называет эти законы *биотоническими.* В то же время он утверждает, что новые законы природы не нарушают справедливости законов квантовой механики. Поскольку квантовая механика претендует на универсальную применимость в любой ситуации и, кроме того, на то, что все ее предсказания должны иметь смысл, позиция, занятая Эльзассером, явно противоречива. Единственный выход из этого противоречия, согласующийся с духом высказанных Эльзассером идей, состоит в признании за биологическими системами такой сложности, которая делает *в принципе* невозможным описание их поведения на основе законов квантовой механики. Эльзассер далее приходит к выводу о том, что вычислительная машина, которая могла бы хранить всю информацию, содержащуюся в клетках зародыша, должна быть невообразимо громоздкой. Справедливость такого заключения также сомнительна: вполне возможно, что с помощью абстрактных рассуждений из квантовомеханических уравнений удастся вывести такие следствия, которые будут либо воспроизводить важные свойства живых организмов, либо им противоречить. Именно в этом направлении и проводится исследование, которому посвящена данная статья. Кроме того, квантовая теория позволяет нам объяснить многие свойства твердых тел и жидкостей, а точное описание этих свойств содержит столько же информации, сколько может храниться в клетке зародыша. Можно привести еще один аргумент против вывода Эльзассера: ни откуда не следует, что кто-нибудь, опираясь на абстрактное мышление, не сможет вывести некие вспомогательные теоремы, которые значительно упростят задачу, стоящую перед вычислительными машинами. В силу всех этих причин мы считаем маловероятным, что упомянутое выше противоречие разрешимо. Более вероятно, что известные в настоящее время законы и понятия квантовой механики потребуют некоторой модификации, прежде чем их можно будет применять к проблемам жизни.

По не совсем ясным причинам на явление сознания в научных дискуссиях наложено табу. Тем не менее, как видно из проведенного фон Нейманом блестящего анализа квантомеханического измерения, даже сами законы квантовой механики со

[1]) Поляни [18] в своей рецензии на книгу Химмельфарб [3] выражает аналогичные сомнения в возможности объяснения явления жизни на механистической основе.

всеми их следствиями нельзя сформулировать без обращения к понятию сознания [1]). Вполне возможно, что те, кто отрицает реальность сознания, имеют в виду лишь одно: внешний мир можно полностью описать и без ссылок на сознание других людей, т. е. сознание не оказывает влияния на движение материи (понимаемой в самом широком смысле этого слова), хотя движение материи явно влияет на сознание. Согласно точке зрения, приписываемой в предыдущем абзаце Эльзассеру, такой взгляд не является ни правильным, ни ошибочным — он бессмыслен, потому что даже в принципе движение всей материи невозможно описать с помощью одних лишь законов физики. В частности, описание живой материи с помощью физических законов должно быть невозможным. Однако более правдоподобно иное заключение: точка зрения Эльзассера неверна и живая материя в действительности подвержена влиянию со стороны того, что на нее явно влияет, — влиянию сознания. Описание этого явления, очевидно, потребует включения в наши законы природы понятий, чуждых имеющимся в настоящее время законам физики. По-видимому, отношение сознания к материи во многом схоже с отношением света к материи в том виде, как его понимали в прошлом веке: материя заведомо влияла на распространение света, но такого явления, как эффект Комптона, который бы показал, что и свет может оказывать непосредственное воздействие на движение материи [2]), в то время еще не было известно. Тем не менее «реальность» света никогда не ставилась под сомнение.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ «САМОВОСПРОИЗВОДЯЩИХСЯ» СОСТОЯНИЙ

Предыдущие общие и чисто умозрительные рассуждения мы подкрепим теперь определенным аргументом. Как будет пока-

---

[1]) См. гл. 6 в работе фон Неймана [4]. Гейзенберг [5] формулирует выводы более точно и красочно: «Понятие объективной реальности... таким образом, испарилось, превратилось в прозрачную ясность математики, описывающей не столько поведение элементарных частиц, сколько уровень наших знаний об этом поведении».

С психолого-эпистемологической точки зрения любопытно отметить, что, хотя сознание — единственное явление, о котором мы знаем из непосредственного опыта, многие отрицают его реальность. Люди обычно пытаются уклониться от ответа на вопрос: если все, что существует, — всего лишь сложные химические процессы, протекающие в вашем мозгу, то почему вас так интересует, в чем состоят эти процессы? Невольно создается впечатление, что слово «реальность» не для всех из нас имеет одно и то же значение.

[2]) В данном случае аналогия между отношением сознания к материи и отношением света к материи исходит из неприемлемого с точки зрения диалектического материализма отождествления вещества и материи. Кроме того, она вряд ли вообще продуктивна, поскольку сознание трактуется в рамках давно изжившего себя субстанционального подхода. — *Прим. ред.*

зано в последнем разделе статьи, этот аргумент не совсем убедителен, но его, по крайней мере, можно рассматривать как некое косвенное подтверждение правильности наших соображений. Основная идея состоит в том, чтобы показать, что, согласно квантовомеханической теории, вероятность существования самовоспроизводящихся состояний равна нулю. Обсуждение этого результата и его следствий мы отложим до следующей, последней части нашей статьи, а сейчас займемся получением этого результата. Наш вывод нельзя назвать строгим: он исходит из допущения, аналогичного нашей уверенности в том, что ни в одной хоть сколько-нибудь сложной системе нет «случайного вырождения»[1]). Еще ближе наше допущение к предположению, на основании которого было выведено второе начало термодинамики[2]). Сущность принятого нами допущения сводится к следующему. Гамильтониан, определяющий поведение сложной системы, имеет вид произвольной симметричной матрицы со статистически независимыми элементами, не обладающей никакими особыми свойствами, кроме симметрии. Именно это свойство гамильтониана, записанного в системе координат, в которой наблюдаемые диагональны, позволило фон Нейману доказать, что второе начало термодинамики является следствием квантовой механики. Второе, по-видимому, менее важное допущение мы введем позднее.

Вычисления будут производиться в два этапа. Предположим прежде всего, что «живое состояние» полностью определено в квантовомеханическом смысле, т. е. ему отвечает один определенный вектор состояния с компонентами v_k. Ясно, что должно существовать, по крайней мере, одно состояние питательной среды, которое позволяет организму размножаться. Обозначим соответствующий вектор состояния через w. В действительности состояний питательной среды, в которых ее может поглощать организм, должно быть много, но для того, чтобы прийти к требуемому противоречию, достаточно предположить существование лишь одного такого состояния. До размножения вектор состояния системы «организм плюс питательная среда» имеет вид

$$\Phi = v \times w, \tag{1}$$

где $\times$ означает прямое (кронекеровское) произведение. После того как размножение произошло, вектор состояния должен иметь вид

$$\Psi = v \times v \times r, \tag{2}$$

---

[1]) По поводу понятия «случайное вырождение» см. гл. XII книги Вигнера [6].

[2]) См. в работе [4] гл. V.

т. е. должны появиться два организма, у каждого из которых вектор состояния равен v. Вектор r описывает ту часть системы, которая не вошла в два организма, т. е. еще не использованную питательную среду, а также положение (координаты) обоих организмов и т. д. Введя систему координат в гильбертовом пространстве, запишем размножение (2) в виде

$$\Psi_{\varkappa\lambda\mu} = v_\varkappa v_\lambda r_\mu. \tag{3}$$

Первый индекс ($\varkappa$) означает переменные, описывающие ту часть системы, которая содержится в «родителе»; второй индекс (λ) — переменные, описывающие часть системы, входящую в «дитя»; последний индекс (μ) — переменные, описывающие еще не использованную питательную среду. В той же системе координат вектор состояния (1) можно представить в виде

$$\Phi_{\varkappa\lambda\mu} = v_\varkappa w_{\lambda\mu}; \tag{4}$$

двойной индекс характеризует состояние питательной среды.

Введем теперь те два допущения, о которых упоминалось в начале раздела, и тем самым уточним терминологию. Второе (и менее важное) из этих допущений состоит в замене гильбертова пространства конечномерным пространством. В частности, пространство состояний организма будет N-мерным, пространство состояний неиспользованной питательной среды — R-мерным. Тогда каждый из индексов $\varkappa$ и λ сможет принимать N значений, а индекс μ будет пробегать R значений. Состояние организма будет описываться вектором в N-мерном (а не в бесконечномерном) пространстве. Поскольку никаких ограничений на величину N и R мы не налагаем, обе размерности следует считать очень большими (это предположение достаточно безобидно). Оно существенно облегчает проведение математического анализа и может быть обосновано, поскольку в силу конечности имеющихся запасов энергии число состояний обеих частей системы ограничено. Состояние питательной среды описывается вектором в NR-мерном пространстве, т. е. это состояние специализировано сильнее, чем состояние организма. На первый взгляд такое положение может показаться странным, но оно должно соответствовать действительности, поскольку жизнь и размножение организма связаны с возрастанием энтропии, т. е. конечное состояние должно быть менее специализировано, чем начальное.

Более существенное и более спорное допущение состоит в том, что «матрица столкновения», описывающая конечное состояние, которое возникает в результате взаимодействия организма и питательной среды, и обозначаемая нами буквой S, не имеет никаких особых свойств, кроме того, что она стохастична.

Поскольку матрица S переводит вектор Φ [см. разложение (4)] в вектор Ψ [см. разложение (3)], справедливо равенство

$$v_\varkappa v_\lambda r_\mu = \sum_{\varkappa', \lambda', \mu'} S_{\varkappa\lambda\mu;\,\varkappa'\lambda'\mu'} v_\varkappa w_{\lambda'\mu'}. \tag{5}$$

Матрица S, если можно так выразиться, служит воплощением законов взаимодействия между любым состоянием материала, из которого состоит организм, и любым состоянием материала, служащего питательной средой. Выражение «любое состояние», разумеется, следует понимать в свете предыдущего замечания: любое из заданного конечного числа состояний. Матрица S полностью определяется законами квантовой механики. С точки зрения Эльзассера, матрицу S реально вычислить невозможно. Спрашивается: если матрица S задана, можно ли в общем случае найти N чисел $v_\varkappa$, которые вместе с надлежащим образом подобранными R числами r_μ и NR числами $w_{\lambda\mu}$ удовлетворяли бы равенству (5)? Ответ на этот вопрос мы найдем, просто подсчитав число уравнений и число неизвестных. Как мы увидим, уравнений окажется больше, чем неизвестных.

Действительно, поскольку равенство (5) должно выполняться при любых $\varkappa$, λ и μ, мы имеем всего N^2R комплексных или $2N^2R$ вещественных уравнений. Среди них, поскольку число N^2 чрезвычайно велико, встречаются и тождества, но мы не будем обращать на это внимание. Подсчитаем теперь число неизвестных: N компонент вектора v, R компонент вектора r и NR компонент вектора w. Всего имеется $N + R + NR$ комплексных или вдвое большее число вещественных компонент. Это гораздо меньше числа уравнений, и «было бы чудом», если бы уравнения (5) оказались выполненными.

Предыдущие выкладки, очевидно, нельзя принимать всерьез, потому что организм в квантовомеханическом смысле определен неполностью: живому организму должно отвечать много состояний v. Обозначим число этих состояний через n. Ясно, что n много меньше числа N состояний материала, служащего питательной средой: ведь большинство состояний этого материала не являются «живыми». Итак, $n \ll N$. Обозначим n векторов, соответствующих живому организму, через v^k (индекс k пробегает значения от 1 до n). Тогда любая линейная комбинация векторов v^k также будет представлять «живое» состояние. Следовательно, необходимо рассматривать n начальных состояний

$$\Phi^{(j)} = v^{(j)} \times w \quad \text{или} \quad \Phi^{(j)}_{\varkappa\lambda\mu} = v^{(j)}_\varkappa w_{\lambda\mu}. \tag{6}$$

Конечное состояние, возникающее при взаимодействии состояния $v^{(j)}$ с питательной средой (которую мы по-прежнему будем предполагать имеющей одно состояние w), обозначим через $\Psi^{(j)}$. Зависимость $\Psi^{(j)}$ от двух первых индексов может иметь вид произвольной линейной комбинации n^2 векторов $v^{(\varkappa)} \times v^{(l)}$. Следовательно,

$$\Psi^{(j)}_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_{k,\,l} u^{jkl}_{\mu} v^{(k)}_{\varkappa} v^{(l)}_{\lambda}, \tag{7}$$

и вместо (5) мы получаем уравнение

$$\sum_{k,\,l} u^{jkl}_{\mu} v^{(k)}_{\varkappa} v^{(l)}_{\lambda} = \sum_{\varkappa',\,\lambda',\,\mu'} S_{\varkappa\lambda\mu;\,\varkappa'\lambda'\mu'} v^{(j)}_{\varkappa'} w_{\lambda'\mu'}. \tag{8}$$

Это уравнение должно выполняться при любом j и, как и прежде, при любых $\varkappa$, λ и μ. Всего получается nN^2R комплексных или $2nN^2R$ вещественных уравнений.

Неизвестными являются величины v, w и u. Нетрудно видеть, что имеется nN величин v и (как и прежде) NR величин w. Величин же u насчитывается n^3R, поскольку каждый из индексов i, k и l может принимать n значений, а индекс μ принимает R значений. Для простоты будем считать, что все неизвестные и переменные независимы. Тогда число неизвестных будет равно числу переменных, если справедливо равенство

$$nN^2R = nN + NR + n^3R. \tag{9}$$

В силу неравенства $n \ll N$ левая часть выражения во много раз больше правой части, поэтому равенство (9) выполняться не может. Даже если допустить, что *одно* из произведений произвольно [т. е. что $v^{(l)}$ в формуле (8) означает произвольное состояние, «живое» или «неживое»], то число неизвестных u возрастет лишь до n^2NR и правая часть (9) будет по-прежнему меньше левой части. Отсюда мы делаем вывод: если взаимодействие S «устроено» так, что оно не гарантирует самовоспроизведение организма, то вероятность того, что *любое* состояние питательной среды приведет к размножению любого набора состояний, мощность которого во много раз меньше мощности всех допустимых состояний организма, чрезвычайно мала.

Как уже говорилось ранее, при проведении подсчета мы не учитывали того, что не все уравнения (8) независимы и, следовательно, что неизвестные нельзя выбирать произвольно. И соотношения между уравнениями и соотношения между неизвестными являются следствиями унитарности матрицы S. Однако, как показывают более подробные вычисления, соотношений между уравнениями имеется ровно столько же, сколько соотношений между неизвестными, и, поскольку $n \ll N$, ни те, ни другие не влияют сколько-нибудь существенно на величину правой и левой частей формулы (9). Таким образом, выводы этого раздела статьи остаются в силе и в том случае, когда не все уравнения и не все неизвестные независимы.

НЕДОСТАТКИ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПРЕДЫДУЩИХ ВЫКЛАДОК [1])

Даже проведенные вычисления, исходящие из предположения о том, что жизнь описывается многими квантовомеханическими состояниями, далеко не реалистичны. Причиной затруднений является то, что мы молчаливо подразумевали: после взаимодействия с питательной средой по крайней мере один организм *заведомо* выживает. Ясно, что никаких видимых причин для такой уверенности у нас нет. Скорее наоборот, реалистичная модель должна была бы допускать любое конечное состояние, но требовать, чтобы сумма вероятностей состояний с двумя живыми организмами намного превышала $^1/_2$. Вместо равенства (8) такое требование привело бы к некоторым неравенствам, которые поддаются анализу с гораздо большим трудом, чем равенство (8). Поскольку их рассмотрение еще не закончено, мы не будем приводить здесь полученных нами результатов. Следует все же заметить, что шансы на существование набора «живых» состояний, для которого можно подобрать такую питательную среду, что любое взаимодействие с ней *всегда* приводит к размножению, по-прежнему остаются нулевыми.

Наш результат противоречит известной конструкции саморазмножающихся машин, предложенной фон Нейманом [2]). Пытаясь сопоставить данные предыдущего раздела нашей статьи с явной конструкцией Неймана, мы без труда обнаруживаем, что соответствие между ними невозможно по простой причине: модель, используемая Нейманом (основанная на универсальной машине Тьюринга), может принимать лишь дискретное множество состояний, в то время как все наши переменные (v, w) непрерывны. Именно дискретность множества допустимых состояний его модели позволяет Нейману постулировать идеальное поведение системы и найти такую замену уравнений движения, которая делает самовоспроизведение возможным. Для нас же первостепенную важность имеет вопрос о том, можно ли ожидать, что и реальные уравнения движения будут приводить к размножению описываемых ими систем. Различие между «жесткими» системами, для которых при желании можно предполагать любой закон движения, и «мягкими», действительно размножающимися системами подчеркивал еще Эльзассер [3]). Кроме того, фон Нейман в действительности знал о непригодности его модели для биологических рассмотрений.

---

[1]) Проф. Вигнер надеется, что читатели обратят особое внимание на эти недостатки. — *Прим. ред. американского издания.*

[2]) По-видимому, единственно доступной статьей на эту тему следует считать работу Неймана [7]. Шеннон в своем обзоре [8] трудов Неймана обращает внимание и на его другие, неопубликованные работы. В связи с обсуждаемой ниже проблемой надежности см. работу [9].

[3]) См. [1], стр. 129.

Наш результат противоречит и модели самовоспроизведения, предложенной Криком и Уотсоном (модель этих авторов включает в себя определенный механизм передачи свойств от предков потомству [10—16] [1])). Эта модель также основана на классических, а не на квантовых представлениях. При рассмотрении действительно остроумной и выглядящей вполне реалистично модели Крика и Уотсона создается впечатление, что ее авторам, несмотря на все трудности, связанные с отысканием системы, уравнения движения которой допускали бы ее самовоспроизведение, и несмотря на многие другие неприятности, удалось достичь поставленной цели. В наши намерения не входит решительное опровержение подобного мнения. Заметим лишь, что подробности функционирования модели Крика и Уотсона еще не разработаны до конца. Не была также оценена и сравнена с имеющимися данными надежность модели, т. е. вероятность ее неправильного «срабатывания». Мы склонны думать (неявно эта мысль содержится в идеях Эльзассера), что тот тип воспроизведения, к которому применима модель Крика и Уотсона, как и все аналогичные процессы, можно описать на основе известных законов природы, но лишь приближенно. Что же касается практически абсолютно надежного функционирования модели, то оно является следствием некоего биотонического закона.

В заключение статьи автор хотел бы особо подчеркнуть, что его твердая уверенность в существовании биотонических законов проистекает из доминирующей роли такого явления, как сознание. Что же касается приведенных им аргументов, то они носят лишь эвристический характер и не имеют доказательной силы. Не исключено, что мы просто не обратили внимания на влияние, оказываемое биотоническими явлениями, как мог не заметить влияние света на макроскопические тела физик, погруженный в исследование законов макроскопической механики. Это ни в коей мере не делает приведенные нами аргументы более доказательными, потому что в их нынешней форме *эти аргументы исходят из допущения об абсолютном характере законов воспроизведения.* Оно может быть столь же далеким от истины и в не меньшей степени оказаться заблуждением, чем заключение Лейбница об ошибочности атомистической теории, которое он вывел из невозможности найти две одинаковые травинки [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Elsasser W. M.*, The Physical Foundations of Biology, Pergamon Press, London, 1958.

[1]) Здесь указаны лишь некоторые из статей, написанных на эту тему (большинство из них любезно сообщил автору д-р Джель из Университета Джорджа Вашингтона).

2. *Wigner E.*, Comm. Pure and Appl. Math., **13, 1** (1960). (Статья 13 данной книги.)
3. *Himmelfarb G.*, Darwin and the darwinian Revolution, Chatto and Windus, 1959.
4. *von Neumann J.*, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag, Berlin, 1932. (Имеется перевод: *Иоганн фон Нейман*, Математические основы квантовой механики, изд-во «Наука», М., 1964.)
5. *Heisenberg W.*, Daedalus, **87**, 100 (1958).
6. *Wigner E.*, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931. (Имеется перевод: *Вигнер Е.*, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961.)
7. *von Neumann J.*, The General and Logical Theory of Automata, в сборнике: «The Hixon Symposium», L. A. Jeffress, ed., John Wiley and Sons, New York, 1951. (Имеется перевод: *Дж. фон Нейман*, Общая и логическая теория автоматов, в книге: *Тьюринг А.*, Может ли машина мыслить?, Физматгиз, М., 1960, стр. 59.)
8. *Shannon C. E.*, Bull. Amer. Math. Soc., **64**, 123 (1958).
9. *von Neumann J.*, Probabilistic Logics and Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components, в сборнике: «Automata Studies», C. E. Shannon and J. McCarthy, eds., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956, p. 43. (Имеется перевод: *Дж. фон Нейман*, Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент, в сборнике: «Автоматы», ИЛ, 1956, стр. 68.)
10. *Crick F. H. C.*, *Watson J. D.*, Nature, **171**, 737 (1953).
11. *Crick F. H. C.*, *Watson J. D.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A223**, 80 (1954).
12. *Gamow G.*, Biol. Medd. Danske Videnskab. Selskab., **22**, № 2 (1954).
13. *Gamow G.*, Biol. Medd. Danske Videnskab. Selskab, **22**, № 8 (1955).
14. *Crick F. H. C.*, *Griffith J. S.*, *Orgel L. E.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **43**, 416 (1957).
15. *Delbrück M.*, *Golomb S. W.*, *Welch L. R.*, Biol. Medd. Danske Videnskab. Selskab., **23**, № 9 (1958).
16. *Muller H. J.*, Proc. Roy. Soc. (London), **B134**, 1 (1947).
17. *Morrison P.*, Amer. Journ. Phys., **26**, 358 (1958).
18. *Polanyi M.*, The New Leader, **31**, 24 (1959).

IV. РАЗМЫШЛЕНИЯ

12

ПРЕДЕЛЫ НАУКИ[1])

Выступить на столь общую тему меня побудила не обычная гордость ученого, чувствующего себя в силах внести вклад, пусть даже небольшой, в решение проблемы, интересующей не только его самого, но и его коллег. К спекуляции подобного рода все мы испытываем большое внутреннее сопротивление: она имеет много общего с хладнокровным рассуждением о кончине очень близкого нам человека. Именно такое чувство вызывают у нас, ученых, рассуждения о будущем самой науки, о том, не постигнет ли ее когда-нибудь, в достаточно отдаленные времена, судьба, выраженная в изречении: «Все нарождающееся обречено на гибель». В рассуждениях на столь деликатную тему принято исходить из предположения об оптимальных условиях для развития интересующего нас предмета и не считаться с опасностью того, что может произойти какой-либо несчастный случай, сколь бы реальна ни была эта опасность.

РОСТ НАУКИ

Самое замечательное в Науке — ее молодость. Первые зачатки химии (в современном понимании этой науки) появились не ранее трактата Бойля «Скептический Химик», вышедшего в свет в 1661 г. Может быть, рождение химии с большим основанием следовало бы отнести к периоду деятельности Лавуазье, где-то между 1770 и 1790 гг., или отсчитывать возраст химии с открытия Дальтоном закона, носящего его имя (1808 г.). Физика несколько старше. Ньютоновские «Начала» — сочинение в высшей степени законченное — появились в 1687 г. Некоторые физические законы были открыты Архимедом еще в 250 г. до н. э., но его открытия вряд ли можно считать настоящим рожде-

[1]) Опубликовано в журнале: Proc. Amer. Phil. Soc., **94**, 422 (1950).

нием физики. В целом не будет ошибкой, если мы скажем, что возраст Науки насчитывает менее 300 лет. Это число следует сравнить с возрастом Человека, который заведомо больше 100 000 лет.

Заметно увеличивается число людей, посвящающих многие годы своей жизни приобретению знаний. Так, около 10% американской молодежи оканчивает колледжи, причем в последнее время каждые 20 лет эта цифра удваивается. Гарвардский колледж был основан в 1636 г. и в то время явно не был научным учреждением. Американской Ассоциации поощрения наук исполнилось 100 лет; первоначально она насчитывала лишь 461 члена. Ныне число ее членов превышает полмиллиона, и лишь за последнее полугодие оно увеличилось почти на 10 000 человек. В некоторых других странах увеличение численности студенческой аудитории менее заметно, но в России оно происходит еще более быстрыми темпами, чем в Америке.

Человек все больше осваивает Землю, и этот процесс непосредственно связан с расширением его знаний о законах природы. В течение 99 700 лет своей истории человек не оказывал сколько-нибудь заметного воздействия на поверхность Земли, но с появлением науки он успел вырубить леса на обширных территориях и истощить природные запасы некоторых минералов. Наблюдая в мощный телескоп Землю с Луны, вряд ли можно было бы заметить присутствие человека в течение первых 99 700 лет его истории, но игнорировать населенность Земли в течение последних 300 лет было бы трудно. В природе не существует явления, которое мы могли бы сравнить с внезапным развитием науки, не подчиняющимся каким-либо видимым закономерностям, за исключением, может быть, конденсации пересыщенного пара или детонации некоторых особо капризных взрывчатых веществ. Не будет ли и судьба науки в какой-то мере напоминать эти явления?

В самом деле, наблюдая за быстрым ростом науки и увеличением мощи человека, невольно начинаешь опасаться худшего. Человек явно не в силах соразмерить свой умственный кругозор с той ответственностью, которую возлагает на него его собственная, все возрастающая мощь. Именно это несоответствие и заставляет опасаться катастрофы. Высказанная только что мысль осознана ныне настолько глубоко (в особенности в связи с созданием и совершенствованием различных видов атомного оружия и последующими неудачными попытками разрешить возникшие с его развитием проблемы или хотя бы до конца разобраться в них), что стала почти банальной. Тем не менее, говоря о будущем науки, мы не будем принимать во внимание возможность катастрофы, а пределы роста науки будем рассматривать в предположении, что ее развитие не будет прервано каким-либо катаклизмом. Таким образом, последующие рассуждения применимы лишь в том случае, если нам удастся избежать угрожающей нам катастрофы и наука сможет развиваться в относительно мирной атмосфере. Цель проводимого нами анализа состоит в поиске внутренних ограничений, присущих самой науке, а не пределов, которые внешние воздействия ставят на пути ее развития (независимо от того, обусловлены ли эти воздействия прогрессом самой науки или нет).

ЧТО МЫ НАЗЫВАЕМ «НАШЕЙ НАУКОЙ»?

Что следует понимать под естественным пределом «нашей науки», вероятно, станет особенно ясным, если мы попытаемся определить смысл выражения «наша наука». Наша наука — это весь запас наших знаний о явлениях природы. Возникает вопрос: что же «нашего» есть в таком запасе? Ответ на поставленный вопрос мы будем искать методом последовательных приближений, вводя то слишком широкие, то слишком узкие определения до тех пор, пока не придем к приемлемому компромиссу. Ясно, что любой набор фолиантов, содержащих накопленные факты и теории, не становится хранилищем наших знаний лишь оттого, что принадлежит нам. Пример эпохи Возрождения и в еще большей степени предшествовавшего ей мрачного средневековья учит нас, что одного лишь владения правом собственности на книги недостаточно. Необходимо ли, чтобы кто-нибудь знал содержание всех томов, прежде чем мы сможем назвать их «нашей наукой»? Такая точка зрения обладает определенными удобствами, но, приняв ее, мы вынуждены были бы признать, что наука уже достигла своих пределов или могла достичь их некоторое время назад. Разве недостаточно было бы в этом случае, чтобы в нашем обществе для каждого тома нашелся человек, который знал бы все его содержание? Нет, потому что утверждения различных томов могли бы противоречить друг другу, и если бы избранным «хранителям знания» была известна лишь часть утверждений, то эти противоречия остались бы скрытыми. Наука — это здание, а не груда кирпичей, сколь бы ценной ни была эта груда.

Я считаю, что некий запас знаний разумно назвать «нашей наукой» в том случае, если найдутся люди, способные выучить и использовать любую часть их, люди, которые бы жаждали овладеть каждой частью, даже сознавая, что это выше их сил, при условии, если есть достаточная уверенность, что отдельные части свода знаний не противоречат друг другу, а образуют единое целое. Раздел наших знаний, изучающий упругость, должен исходить из тех же представлений о структуре железа, что и раздел, занимающийся изучением магнетизма.

ПРЕДЕЛЫ «НАШЕЙ НАУКИ»

Если предложенная выше формулировка приемлема в качестве более или менее точного описания того, что можно понимать под «нашей наукой», то ограничения нашей науки кроятся в человеческом интеллекте, в объеме его интересов, способности к обучению, памяти, общению с себе подобными. Ясно, что все эти ограничения связаны с конечной протяженностью человеческой жизни. Действительно, если принять приведенное выше определение «нашей науки», то ее содержание будет меняться не только в результате завоевания новых областей, но отчасти и вследствие перемещения из более старых областей в новые. Некоторые вещи мы забываем и концентрируем свое внимание на последних достижениях. Именно сейчас более старые области науки перестают быть областями «нашей науки» не столько потому, что у нас нет уверенности в их соответствии новой картине мира (наоборот, я убежден в том, что они отлично вписываются в новую картину), сколько потому, что ни у кого нет особо сильного желания знать их — по крайней мере ни у кого из тех, кто интересуется новыми областями науки.

Возможности такого типа роста еще далеко не исчерпаны. Сегодня мы не столь охотно занимаемся теорией твердого тела, в которой студент должен прочитать около 600 статей, прежде чем достигнет «переднего края» и сможет вести свое собственное исследование. Вместо этого мы сосредотачиваем усилия на квантовой электродинамике, где изучающий должен ознакомиться лишь с 6 работами. Завтра мы можем забросить целые науки, например химию, и заняться чем-то менее исследованным. Более того, изменения в интересах явно не произвольны и в большинстве случаев вполне обоснованы, поскольку новый предмет, как правило, глубже оставленного, основан на более фундаментальных идеях и включает в себя старый. Свойства твердых тел следуют из принципов квантовой электродинамики, но эта дисциплина позволяет, кроме того, рассматривать и многие другие явления помимо тех, которые важны для физики твердых тел.

Тем не менее следует отдавать себе отчет в том, что поглощение старого предмета новой дисциплиной до некоторой степени иллюзорно. Например, студент, изучающий квантовую электродинамику, по существу не касается теории твердого тела, так как человеческий разум слишком слаб, чтобы вывести важные свойства твердых тел из квантовой электродинамики, если мы не предпримем специальных, экспериментальных и теоретических, исследований и не разовьем идеализаций и приближений, пригодных именно для описания твердых тел. Только необычайно проницательный интеллект, опираясь на принципы обычной квантовой теории, мог бы заключить, что существуют твердые тела и что они состоят из атомов, расположенных в пространстве в виде правильных решеток. В то же время человеческий разум сразу же осознал бы все значение и роль дефектов кристаллических решеток. Уравнения квантовой теории можно уподобить прорицанию оракула, описывающего в удивительно сжатом виде явления кристаллофизики. Однако человеческий разум не в силах понять, о чем вещает оракул, если прорицания не снабжены комментариями. Объем комментариев находится в таком же отношении к сжатым изречениям оракула, как вся библия — к стиху из книги Левит. Очевидно, существует предел, выше которого сжатость изложения, сколь бы возвышенной она ни была, как самоцель перестает быть полезной для хранения информации. В наши дни эта степень конденсации сведений в физике уже достигла своего предела.

СДВИГ ВТОРОГО РОДА

Возникает вопрос: будет ли развитие науки (хотя бы потенциально) неограниченно долго происходить по типу сдвига, т. е. когда новая дисциплина оказывается глубже старой и включает последнюю в себя, по крайней мере, «виртуально»? Мне кажется, что на этот вопрос следует дать отрицательный ответ, потому что сдвиги, понимаемые в указанном только что смысле, всегда связаны с углублением еще на один слой в «тайны природы» и с еще большим удлинением цепочки понятий, опирающихся на более ранние понятия. Отсюда виден приближенный характер научных понятий. Так, в приведенном выше примере классической механике сначала пришлось уступить место квантовой механике (выяснилось, что классическая механика справедлива в определенном приближении и пригодна лишь для описания макроскопических явлений). Затем стало ясно, что классическая механика неадекватна и в другом отношении, и ее заменили полевыми теориями. Наконец, обнаружилось, что и «заменители» классической механики используют лишь приближенные понятия и пригодны лишь при небольших скоростях. Таким образом, релятивистская квантовая теория расположена по крайней мере в четвертом по глубине слое и оперирует понятиями всех трех предшествующих слоев, известных своей неадекватностью и замененных на четвертой ступени познания более глубокими понятиями. Разумеется, в этом и состоит очарование и прелесть релятивистской квантовой теории и вообще всякого фундаментального исследования по физике, но в этом же проявляется и ограниченность рассматриваемого нами типа развития науки. Признание неадекватности понятий десятого слоя и замена их более тонкими понятиями одиннадцатого слоя будет гораздо менее важным событием, чем открытие теории относительности, но для того, чтобы найти корень зла, нам придется провести более трудоемкие и продолжительные исследования, чем некогда понадобившиеся для оценки тех противоречий с опытом, которые исключала теория относительности. Нетрудно представить себе, что наступит и такое время, когда изучающий физику утратит интерес или будет попросту не в силах пробиваться сквозь уже накопившиеся слои к переднему фронту науки, к самостоятельному исследованию. Тогда число аспирантов-физиков резко упадет и прорыв науки в новые области станет заметнее, чем привычные нам сдвиги: новая дисциплина уже не будет включать в себя физику так, как, например, теория включает классическую физику. Этот тип сдвига я называю сдвигом второго рода.

В нарисованной мной картине предполагается, что для понимания все расширяющегося круга явлений в физику необходимо вводить все более и более глубокие понятия, и этот процесс не завершается открытием окончательных, абсолютных понятий. Я убежден, что такое допущение верно: у нас нет никаких оснований ожидать, что наш интеллект может сформулировать некие абсолютные понятия, пригодные для полного описания неодушевленной природы. Сдвиг второго рода будет происходить в любом случае: наука не жизнеспособна, если на границе неведомого не ведется исследование и интерес к законченному предмету быстро падает. Возможно также, что ни одна из альтернатив не соответствует действительности и что нам никогда не удастся решить, адекватны ли «в принципе» понятия десятого слоя, пригодны ли они для полного описания неодушевленного мира. Отсутствие интереса в сочетании со слабостью человеческого разума может легко привести к тому, что решение вопроса о полной адекватности понятий n-го слоя будет откладываться на неопределенный срок. В этом случае физика окажется за бортом исследования, как уже оказались некоторые явления, связанные со сверхпроводимостью, отчего физики не почувствовали себя особенно несчастными.

Сдвиг второго рода будет означать не только отказ от той или иной области знания. Многие сегодня начинают ощущать, что мы слишком долго пренебрегали биологическими науками и науками о разуме человека и животных. Наша картина мира, несомненно, была бы более полной, если бы мы располагали более подробными сведениями о разуме людей и животных, их нравах и привычках. Однако сдвиг второго рода может означать и признание того факта, что мы неспособны полностью понять даже неодушевленный мир (несколько веков назад человек пришел к аналогичному выводу о своей неспособности с достаточной уверенностью предсказывать то, что произойдет с его душой после смерти его тела). Ныне мы также испытываем некое разочарование, так как не можем предвидеть все перипетии в судьбе нашей души. Хотя об этом не принято говорить вслух, мы все знаем, что с общечеловеческой точки зрения цели нашей науки намного скромнее, чем цели, например, древнегреческой науки, и что наша наука с большим успехом увеличивает нашу мощь, чем наделяет нас знаниями, представляющими чисто человеческий интерес. Тем не менее последующее разочарование отнюдь не уменьшает той энергии, с которой происходит развитие естественных наук. Не менее интенсивной будет и работа в тех областях, в которые нас приведут сдвиги второго рода, хотя нам и приходится отказаться от полного осуществления наших мечтаний, связанных с прежним полем деятельности.

Все же нельзя умолчать и о том, что сдвиг второго рода будет означать некую новую утрату для науки и знаменовать поворотный момент в ее развитии (говоря о науке, мы понимаем ее в смысле данного нами определения). Когда число сдвигов второго рода станет значительным, наука утратит ту привлекательность для молодого ума, которой она обладает сейчас, и станет чем-то иным, менее увлекательным. Тот чудесный восторг, который мы, ученые, испытываем в настоящее время и который проистекает от неувядающего чувства мощи нашего разума, будет несколько приглушен сознанием ограниченности наших возможностей. Нам не остается ничего другого, как молча признать, что наше мышление не позволяет нам прийти к удовлетворительной картине мира, которую тщетно мечтали построить с помощью чистых рассуждений еще древние греки.

СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ СИЛЫ

Многие из нас склонны считать изложенные выше рассуждения не слишком вескими, надеясь, что наука в силу свойственной ей природной жизнеспособности сумеет преодолеть все преграды, которые, как ныне кажется нашему слабому и жалкому разуму, стоят на ее пути. Такое мнение, несомненно, содержит изрядную долю истины. Оно основано на некоторой гибкой картине развития науки, и мы вскоре займемся ее рассмотрением более подробно. Однако я считаю, что более мрачная картина в принципе верна, и наше инстинктивное нежелание верить в нее связано со способностью человеческого разума не думать о неприятных событиях, которые могут произойти в будущем, если дата их наступления заранее не предсказуема. Все же значительные и нередко весьма нежелательные перемены происходят, и гибкость природы лишь несколько задерживает их наступление: бизоны как источник пищи вымерли, роль отдельных воинов свелась к нулю, подробное толкование текстов священного писания, некогда считавшееся единственно достойным занятием для людей, перестало быть элементом нашей культуры. Предсказания всех этих событий некогда вызывали негодование у больших групп людей, так же как вызывает у нас негодование и сопротивление брошенное кем-нибудь замечание о неэффективности науки.

Можно ли уже сегодня усмотреть какие-либо признаки кризиса в науке? По-видимому, можно. Во-первых, о кризисе свидетельствует уже упоминавшаяся трудность доступа к переднему краю науки. Эта трудность уже сейчас настолько серьезна для среднего человеческого интеллекта, что лишь незначительная часть наших современников способна полностью ощутить силу аргументов квантовой и релятивистской теорий. Химия разрослась настолько, что лишь очень немногие люди могут получить хотя бы поверхностное представление о всех ее разделах. В названных науках непрестанно происходят сдвиги первого рода, и некоторые из этих сдвигов служат предметом нескончаемых насмешек.

Наиболее отчетливо все возрастающее понимание того, что ограниченная емкость нашего разума устанавливает пределы в сфере науки, проявляется в вопросах, которые нам приходится слышать ежедневно: «Стоит ли проводить то или иное исследование?» Почти во всех таких случаях поставленная задача интересна, предложенный метод ее решения не лишен остроумия, а ответ задачи, каким бы он ни был, стоит того, чтобы его запомнить. Однако тот, кто сомневается в целесообразности проведения исследования, отлично сознает, как велико число не менее важных задач и как ограничены время и память тех, кому будут интересны результаты, и он беспокоится, не затеряется ли намечаемая им работа в массе других публикаций и найдется ли у кого-нибудь время и энергия для того, чтобы полностью понять и оценить ее, — отсюда и вопрос. Аналогичные сомнения в целесообразности проведения исследований, по-видимому, возникали всегда, однако я не думаю, чтобы они были так глубоки, как в наше время, и относились к столь интересным задачам. Мне кажется, что число подобных вопросов и сомнений даже на протяжении моей собственной короткой научной жизни заметно возросло.

Недавно Фирц в весьма глубокой статье указал на одно обстоятельство, которое со временем вполне может стать причиной сдвига первого рода. Он обратил внимание на то, что и физика и психология претендуют на роль всеохватывающих, универсальных дисциплин: первая — потому, что она стремится описать всю природу, вторая — потому, что рассматривает все явления, связанные с духовной деятельностью, а природу считает существующей для нас лишь постольку, поскольку мы познаем ее. Фирц заметил, что картины мира, проектируемые в нашем сознании физикой и психологией, не обязательно должны быть противоречивыми. Однако чрезвычайно трудно, а может быть, даже и невозможно воспринимать эти две картины как различные аспекты одного и того же предмета. Более того, вряд ли будет преувеличением, если мы скажем, что ни один психолог не понимает философии современной физики. Верно и обратное утверждение: лишь редкий физик понимает язык психолога. Разумеется, философия психологии еще слишком туманна, чтобы мы могли прийти к каким-нибудь определенным выводам, однако вполне возможно, что мы сами или наши студенты станем свидетелями «раздела» науки именно здесь, в области, где физика и психология перекрываются.

Было бы глупо делать далеко идущие выводы из возникновения двух наук, каждая из которых претендует на универсальный охват действительности, тем более что в настоящее время мы не усматриваем ничего общего между используемыми в этих науках понятиями и утверждениями. Не переоценивая способности нашего разума к абстрагированию, мы все же можем объединить физику и психологию в одну более глубокую дисциплину. К тому же существует много благоприятствующих нам стабилизирующих эффектов, позволяющих надолго отложить раздел науки на обособленные области. Некоторые из этих эффектов имеют методологический характер: чем глубже мы понимаем открытия, тем лучше можем объяснить их. Не случайно, что у нас до недавнего времени было много превосходнейших книг по термодинамике и почти ни одной — по квантовой теории. Двадцать пять лет назад теорию относительности (по крайней мере так говорилось) понимали лишь два человека, сегодня ее основам мы обучаем студентов. Другие примеры усовершенствования методики преподавания как за счет небольших упрощений, так и введения наглядных «емких» понятий и обобщений слишком очевидны, чтобы нам стоило их перечислять.

Другой важный стабилизирующий эффект достигается уменьшением объема изучаемой дисциплины за счет исключения отдельных ее частей. Людей моего возраста, по-видимому, поразит пример с теорией эллиптических функций — теорией, столь же наглядной по своим методам и достигшей таких же успехов, как любой раздел современной математики, — ныне она предается забвению. Это сдвиг первого рода, по отношению к которому даже царица наук — математика — не обладает иммунитетом. Как таковой он способствует лучшей «усвояемости» математики.

Наконец, не исключено, что со временем нам удастся воспитать человека, чья память и способность к абстрагированию будут превосходить наши возможности, или, по крайней мере, мы научимся рационально выбирать молодых людей, наиболее пригодных к научной работе.

С другой стороны, не следует упускать из виду одно обстоятельство, которое, несомненно, будет оказывать противоположный эффект. Жажда знания, любопытство, потребность испробовать собственные умственные способности и здоровый дух соперничества в наши дни в значительной мере стимулируют деятельность молодого ученого и послужат побудительными мотивами в будущем. Однако эти мотивы не единственны: жажда облегчить участь человечества, умножить его силы — столь же традиционные черты ученых, но они (если говорить о естественных науках) ослабевают по мере того, как человек все более полно подчиняет себе стихии и сознает, что экономическое благосостояние определяется не столько производством, сколько организацией. Утрата учеными столь привлекательных качеств, несомненно, скажется, и масштаб ее невозможно предвидеть заранее.

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Если наука (и по ширине охвата предмета и по глубине) разрастется так сильно, что человеческий разум будет не в силах объять ее и человеческой жизни не хватит для того, чтобы добраться до границы известного, не могли бы несколько людей объединиться в группу и совместными усилиями добиться того, чего нельзя добиться в одиночку? Нельзя ли, вместо того чтобы, следуя Шоу, возвращаться к Мафусаилу, изыскать новый способ увеличения емкости человеческого разума — путем наложения нескольких индивидуальных разумов, а не «растяжения» одного отдельного разума? Эта возможность исследована настолько мало, что любые утверждения относительно нее носят чисто умозрительный характер (насколько я могу судить, более умозрительный, чем остальная часть этой статьи). Вместе с тем возможности совместных исследований следовало бы изучить намного шире, чем это делалось до сих пор, потому что в них мы видим единственную надежду продления жизни науки после того, как объем науки станет слишком большим для отдельного индивидуума.

Большинство из нас, ученых, слишком индивидуалистично для того, чтобы принимать всерьез коллективные исследования. Как заметил однажды основатель теории относительности, он не представляет себе, каким образом теорию относительности можно было бы создать коллективно. Действительно, если мы вспомним о современных исследовательских коллективах, работающих под руководством одного человека, передающего свои распоряжения через начальников отделов, то идея совместных исследований становится до смешного абсурдной. Ясно, что при таком подходе в нашем мышлении не может произойти глубоких перемен, и те исследовательские коллективы, о которых мы упомянули, также неспособны изменить наше мышление.

Доводы против коллективного исследования можно более рационально обосновать, если воспользоваться тонким анализом природы математического открытия, проведенным Пуанкаре. Именно наше интуитивное понимание фактов, столь удачно выраженных Пуанкаре и Адамаром, заставляет нас улыбаться при мысле о коллективном исследовании. Пуанкаре и Адамар выяснили, что в отличие от большинства процессов мышления, протекающих в высших слоях сознания, наиболее существенная часть математического мышления происходит без слов. Оно протекает где-то в подсознании, настолько глубоко, что даже сам мыслитель обычно не знает о том, что происходит внутри него.

Я считаю, что роль подсознательного мышления не менее важна и в других науках и имеет решающее значение даже при решении мелких технических проблем, кажущихся почти тривиальными. Один мой друг, физик-экспериментатор, рассказывал мне (это было лет двадцать назад), что когда он не мог найти течь в своей вакуумной системе, то обычно отправлялся погулять. Очень часто, вернувшись с прогулки, он точно знал, где следует искать течь. Следовательно, проблема коллективного исследования состоит в том, чтобы полностью освободить изобретательность подсознания индивидуума и в то же время предоставить в его распоряжение весь запас знаний, которым располагает коллектив.

Возможно ли сделать это и каким именно способом — в настоящее время неизвестно. Можно лишь с уверенностью утверждать, что коллективные исследования потребуют более тесного, чем до сих пор, симбиоза между отдельными участниками. Частью, но только частью, этого более тесного симбиоза будет возросшая по сравнению с достигнутым ныне уровнем легкость обмена идеями и информацией. Для полной эффективности коллективных исследований необходимо достичь более глубокого понимания деятельности человеческого мозга. Ни одно из названных условий не является невозможным. Более того, не исключено, что в действительности мы находимся ближе к их осуществлению, чем подозреваем.

Пока же мы не должны забывать о двух фактах. Во-первых, об уже упоминавшихся трудностях будущего развития науки, связанных прежде всего с ограниченной емкостью человеческого разума, а не с его ограниченной глубиной. Даже если нам не удастся увеличить глубину человеческого разума, в значительной мере зависящую от подсознательного мышления, для преодоления первого препятствия (ограниченной емкости мозга) может оказаться вполне достаточной коллективная работа. Во-вторых, не следует забывать и о том, что, хотя группа ученых не могла бы придумать теорию относительности, отдельная личность не могла бы придумать конструкцию моста Джорджа Вашингтона и, по-видимому, даже Хэнфордских ядерных реакторов. Проблема коллективного исследования состоит в том, чтобы избежать подавления подсознательного мышления индивидуума и сделать для него доступной информацию и даже незаконченные идеи его сотрудников. Успех такого подхода означал бы, что ограничения «нашей науки», о которых столько говорилось, являются ограничениями науки индивидуума.

Каждому ученому и каждому человеку тяжело сознавать, что главный побудительный мотив его деятельности или его эпохи обречен на гибель. Однако цели и идеалы человечества на протяжении известного нам периода истории неоднократно менялись. Кроме того, мы должны испытывать чувство гордости при мысли о том, что живем в героический век науки, в эпоху, когда абстрактные знания индивидуума о природе и (как мы надеемся) о себе самом возрастают быстрее и до более высокого уровня, чем когда-либо прежде и, по-видимому, в будущем. Не хочется думать, что наши идеалы могут оказаться столь же преходящими, как рассеявшиеся иллюзии. Ведь мы, как бы то ни было, живем в героический век этих идеалов.

13

НЕПОСТИЖИМАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ[1])

«...по-видимому, здесь есть какая-то тайна, которую нам еще предстоит раскрыть».

Ч. С. Пирс

Рассказывают такую историю. Встретились как-то раз два приятеля, знавшие друг друга еще со студенческой скамьи, и разговорились о том, кто чем занимается. Один из приятелей стал статистиком и работал в области прогнозирования изменения численности народонаселения. Оттиск одной из своих работ статистик показал бывшему соученику. Начиналась работа, как обычно, с гауссова распределения. Статистик растолковал своему приятелю смысл используемых в работе обозначений для истинных показателей народонаселения, для средних и т. д. Приятель был немного недоверчив и отнюдь не был уверен в том, что статистик его не разыгрывает.

— Откуда тебе известно, что все обстоит именно так, а не иначе? — спросил он. — А это что за символ?

— Ах, это, — ответил статистик. — Это число π.

— А что оно означает?

— Отношение длины окружности к ее диаметру.

— Ну, знаешь, говори, да не заговаривайся, — обиделся приятель статистика. — Какое отношение имеет численность народонаселения к длине окружности?

Наивность восприятия друга нашего статистика вызывает у нас улыбку. Тем не менее, когда я слушал эту историю, меня не покидало смутное беспокойство, ибо реакция приятеля была не чем иным, как проявлением здравого смысла. Еще большее замешательство я испытал через несколько дней, когда один из моих студентов выразил удивление по поводу того, что для проверки своих теорий мы отбираем лишь крайне незначительное число данных[2]).

«Представим себе, — сказал студент, — что мы хотим создать теорию, пригодную для описания явлений, которыми мы до сих пор пренебрегали, и непригодную для описания явлений, которые казались нам имеющими первостепенное значение. Можем ли мы заранее утверждать, что построить такую теорию, имеющую

---

[1]) Доклад прочитан 11 мая 1959 г. в Нью-Йоркском университете на Курантовских математических лекциях. Опубликован в журнале: Comm. Pure and Appl. Math., **13**, 1 (1960).

[2]) Речь идет о замечании Вернера, в то время студента Принстонского университета.

мало общего с существующей ныне, но тем не менее позволяющую объяснять столь же широкий круг явлений, нельзя?» Я вынужден был признать, что особенно убедительных доводов, исключающих возможность существования такой теории, нет.

Две рассказанные истории служат иллюстрациями двух главных тем моего доклада. Первой — о том, что между математическими понятиями подчас возникают совершенно неожиданные связи и что именно эти связи позволяют нам удивительно точно и адекватно описывать различные явления природы. Второй — о том, что в силу последнего обстоятельства (поскольку мы не понимаем причин, делающих математические понятия столь эффективными) мы не можем утверждать, является ли теория, сформулированная на языке этих понятий, единственно возможной. Мы находимся в положении, несколько аналогичном положению человека, держащего в руках связку ключей и пытающегося открыть одну за другой несколько дверей. Рано или поздно ему всегда удается подобрать ключ к очередной двери, но сомнения относительно взаимно однозначного соответствия между ключами и дверями у него остаются.

Бóльшая часть того, что будет здесь сказано, не отличается новизной; в той или иной форме аналогичные идеи, по-видимому, приходили в голову многим ученым. Моя основная цель заключается в том, чтобы рассмотреть эти идеи с нескольких сторон. Во-первых, обратить внимание на чрезвычайную эффективность математики в естественных науках как на нечто загадочное, не поддающееся рациональному объяснению. Во-вторых, показать, что именно эта сверхъестественная эффективность математических понятий поднимает вопрос о единственности физических теорий. Для обоснования тезиса о непостижимо важной роли, которую математика играет в физике, я постараюсь кратко ответить на вопросы: что такое математика и что такое физика? Затем мы рассмотрим, каким образом математика входит в физические теории и, наконец,— почему успехи математики в физике кажутся нам столь непостижимыми. Гораздо меньше будет сказано по второму тезису о единственности физических теорий. Обстоятельный ответ на этот вопрос потребовал бы огромной работы как в области теории, так и в области эксперимента; к этой работе мы по существу до сих пор еще и не приступали.

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

Кто-то сказал, что философия — это злоупотребление специально разработанной терминологией [1]). Следуя духу этого высказывания, я мог бы определить математику как науку о хи-

---

[1]) Приведенное замечание принадлежит Дубиславу [1].

троумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями. Особенно важная роль при этом, разумеется, отводится придумыванию новых понятий. Запас интересных теорем в математике быстро иссяк бы, если бы их приходилось формулировать лишь с помощью тех понятий, которые содержатся в формулировках аксиом. Но это еще не все. Понятия элементарной математики, и в частности элементарной геометрии, были, бесспорно, сформулированы для описания объектов, заимствованных непосредственно из реального мира. Аналогичное утверждение относительно более сложных математических понятий, в том числе понятий, играющих важную роль в физике, по-видимому, неверно. Например, правила действий над парами чисел были, очевидно, специально придуманы так, чтобы мы могли получать результаты, совпадающие с результатами действий над дробями. С правилами же этих действий мы знакомились, ничего не зная о «парах чисел». Правила действий, производимых над последовательностями, т. е. над иррациональными числами, также относятся к категории правил, которые были сформулированы так, что воспроизводили правила действий над уже известными нам величинами. Более тонкие математические понятия — комплексные числа, алгебры, линейные операторы, борелевские множества и т. д. (этот список можно было бы продолжать почти до бесконечности) — были задуманы как подходящие объекты, с помощью которых математик мог продемонстрировать гибкость своего ума, способность воспринимать формальную красоту. Действительно, определение этих понятий и ясное понимание того, в каких интересных и тонких рассуждениях их можно было бы использовать, служит первым свидетельством остроумия придумавшего их математика. О глубине идеи, заложенной в формулировке нового математического понятия, можно судить лишь впоследствии по тому, насколько искусно удается использовать это понятие. Великий математик полностью владеет всем арсеналом допустимых приемов мышления и, действуя подчас весьма рискованно, балансирует на самой грани допустимого. Уже одно то, что его безрассудство не завело его в пучину противоречий, само по себе чудо. Трудно поверить, что дарвиновский процесс естественного отбора довел наше мышление до такой степени совершенства, которой оно, судя по всему, обладает. Однако это не наша тема. Основная мысль, к которой нам еще предстоит вернуться, состоит в другом: не вводя других понятий, кроме содержащихся в аксиомах, математик смог бы сформулировать лишь весьма ограниченное число интересных теорем, и новые понятия он вводит именно так, чтобы над ними можно было производить хитроумные логические операции, которые импонируют нашему чувству прекрасного сами по себе и по получаемым с их помощью результатам, обладающим большой простотой и общностью [1]).

Особенно яркой иллюстрацией сказанного служат комплексные числа. Ничто в имеющемся у нас опыте, очевидно, не наводит на мысль о введении этих величин. Если же мы спросим у математика о причинах его интереса к комплексным числам, то он с негодованием укажет на многочисленные изящные теоремы в теории уравнений, степенных рядов и аналитических функций в целом, обязанных своим появлением на свет введению комплексных чисел. Математик отнюдь не склонен отказываться от наиболее прекрасных творений своего гения [2]).

ЧТО ТАКОЕ ФИЗИКА?

Физик видит свою задачу в открытии законов неодушевленной природы. Чтобы смысл этого утверждения стал ясным, необходимо проанализировать понятие «закон природы».

Окружающий нас мир поразительно сложен, и самая очевидная истина заключается в том, что мы не в состоянии предсказать его будущее. В известном анекдоте лишь оптимист считает будущее неопределенным, тем не менее в данном случае оптимист прав: будущее непредсказуемо. Как заметил однажды Шредингер, «чудо, что, несмотря на поразительную сложность мира, мы можем обнаруживать в его явлениях определенные закономерности» [3]).

Одна из таких закономерностей, открытая Галилеем, состоит в том, что два камня, брошенные в один и тот же момент времени с одной и той же высоты, упадут на землю одновременно. Именно о таких закономерностях и идет речь в законах природы. Галилеева закономерность стала прототипом широкого класса закономерностей. Удивительной же ее следует считать по двум причинам.

Во-первых, удивительно, что эта закономерность наблюдается не только в Пизе и не только во времена Галилея, но и в любом другом месте земного шара; она была и будет верной всегда. Это свойство закономерности есть не что иное, как известное свойство инвариантности. Некоторое время назад [7]

---

[1]) Поляни [2] (на стр. 188) говорит следующее: «Все упомянутые выше трудности проистекают единственно из нашего нежелания понять, что математику как науку нельзя определить, не признав ее наиболее очевидного свойства — того, что она интересна».

[2]) В этой связи читателю будет небезынтересно ознакомиться с весьма красочными замечаниями Гильберта об интуиционизме, который пытается «подорвать и обезобразить математику» (см. [3, 4]).

[3]) См. работу Шредингера [5], а также работу Дубислава [6].

я уже имел случай заметить, что без принципов инвариантности, аналогичных тем, которые вытекают из приведенного выше обобщения замеченного Галилеем опытного факта, физика не могла бы существовать.

Вторая удивительная особенность закономерности, открытой Галилеем, состоит в том, что она не зависит от многих условий, от которых в принципе могла бы зависеть. Закономерность наблюдается безотносительно к тому, идет ли дождь или нет, проводится ли эксперимент в закрытой комнате или камень бросают с Пизанской падающей башни и кто бросает камень — мужчина или женщина. Закономерность остается верной, если двое разных людей одновременно бросают с одинаковой высоты два камня. Существует, очевидно, бесчисленное множество других условий, не существенных для выполнимости открытой Галилеем закономерности. Несущественность столь многих обстоятельств, которые могли бы играть роль в наблюдаемом явлении, мы также называем инвариантностью [7]. Однако эта инвариантность носит несколько иной характер, чем предыдущая, поскольку ее нельзя сформулировать в качестве общего принципа. Исследование условий, влияющих и, наоборот, не влияющих на свободное падение тел, явилось частью первых экспериментальных исследований поля силы тяжести. Лишь искусство и изобретательность экспериментатора позволяют ему выбирать явления, зависящие от сравнительно узкого круга достаточно легко реализуемых и воспроизводимых условий[1]). В рассматриваемом нами примере наиболее важным шагом послужило то обстоятельство, что Галилей ограничил свои наблюдения сравнительно тяжелыми телами. И вновь мы должны признать, что, не будь явлений, зависящих лишь от небольшого, легко обозримого числа условий, физика не могла бы существовать.

Хотя обе названные выше особенности замеченной Галилеем закономерности и представляются весьма важными с точки зрения философа, они не были особенно удивительными для Галилея и не содержат в себе никакого закона природы. Закон природы содержится в утверждении: время, в течение которого тяжелое тело падает с заданной высоты, не зависит от размеров, материала и формы падающего тела. В рамках ньютоновского второго «закона» это утверждение эквивалентно утверждению о том, что сила тяжести, действующая на падающее тело, пропорциональна его массе, но не зависит от его размеров, материала и формы.

Проведенный выше анализ преследовал одну цель — напомнить, что существование «законов природы» не столь уж есте-

---

[1]) В этой связи см. также яркий очерк Дейча [8]. Шимони обратил мое внимание на аналогичную мысль у Пирса [9].

ственно и самоочевидно и что способность человека тем не менее открывать законы природы еще более удивительна [1]). Автор уже имел возможность некоторое время тому назад [11] [2]) обратить внимание читателей на иерархию «законов природы» — последовательность слоев, каждый из которых содержит более широкие и общие законы природы, чем предыдущий, а открытие его означает более глубокое по сравнению с уже известными слоями проникновение в строение Вселенной. Однако в интересующем нас случае наиболее важным является то, что все эти законы природы вместе со всеми, пусть даже самыми далекими следствиями из них, охватывают лишь незначительную часть наших знаний о неодушевленном мире. Все законы природы — это условные утверждения, позволяющие предсказывать какие-то события в будущем на основе того, что известно в данный момент, причем для предсказания будущего некоторые аспекты состояния мира в данный момент (практически подавляющее большинство условий, определяющих это состояние) несущественны. Несущественность здесь понимается в смысле второй особенности, упоминавшейся при анализе открытой Галилеем закономерности [3]).

Законы природы хранят молчание относительно всего, что касается состояния мира в данный момент, например существования Земли, на которой мы живем и на которой Галилей проводил свои эксперименты, существования Солнца и всего, что нас окружает. Отсюда следует, что законы природы можно использовать для предсказания будущего лишь в исключительных обстоятельствах, а именно лишь тогда, когда известны все существенные (для предсказания будущего) условия, определяющие состояние мира в данный момент. Отсюда же следует, что создание машин, функционирование которых физик может предвидеть заранее, является наиболее эффектным его достижением. В этих машинах физик создает ситуацию, при которой все существенные параметры известны и поведение машины предсказуемо. Примерами таких машин могут служить радары и ядерные реакторы.

Главная цель, которую мы преследовали до сих пор, — показать, что все законы природы представляют собой некие условные утверждения и охватывают лишь очень небольшую часть наших знаний об окружающем мире. Так, классическая механика — наиболее известный прототип физической теории —

---

[1]) Шредингер [10] говорит, что второе чудо также может выходить за рамки человеческого понимания.

[2]) См. также работу Маргенау [12].

[3]) Автор считает излишним напоминать о том, что приведенная выше формулировка закона Галилея не исчерпывает полностью содержания выполненных Галилеем наблюдений по выяснению законов свободного падения тел.

позволяет указывать по известным координатам и скоростям любых тел вторые производные от координат этих тел по времени, но ничего не говорит о существовании самих тел и значениях их координат и скоростей в данный момент времени. Истины ради следует упомянуть и о том, что, как стало известно лет тридцать назад, даже условные утверждения, в форме которых мы выражаем законы природы, не являются абсолютно точными, поскольку представляют собой лишь вероятностные законы. Опираясь на них и используя то, что нам известно о состоянии неодушевленного мира в данный момент, мы можем лишь заключать более или менее разумные пари о его будущих свойствах. Вероятностный характер законов природы не позволяет нам высказывать никаких категорических утверждений, даже если ограничиться категорическими утверждениями, содержание которых обусловлено состоянием мира в данный момент. Вероятностный характер «законов природы» проявляется и в случае машин, и его нетрудно обнаружить, по крайней мере в ядерных реакторах, работающих в режиме очень малой мощности. Тем не менее область знаний, охватываемая законами природы, подвержена дополнительным ограничениям, вытекающим из вероятностного характера этих законов[1]) (в дальнейшем эти ограничения не будут играть для нас никакой роли).

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ

Освежив в памяти наиболее существенные черты математики и физики, мы можем теперь лучше разобраться в той роли, которую математика играет в физических теориях.

В своей повседневной работе физик использует математику для получения результатов, вытекающих из законов природы, и для проверки применимости условных утверждений этих законов к наиболее часто встречающимся или интересующим его конкретным обстоятельствам. Чтобы это было возможным, законы природы должны формулироваться на математическом языке. Однако получение результатов на основе уже существующих теорий — отнюдь не самая важная роль математики в физике. Исполняя эту функцию, математика, или, точнее, прикладная математика, является не столько хозяином положения, сколько средством для достижения определенной цели.

Математике, однако, отводится в физике и другая, более «суверенная» роль. Суть ее содержится в утверждении, сделанном нами при обсуждении роли прикладной математики: чтобы стать объектом применения прикладной математики, законы

[1]) См., например, работу Шредингера [5].

природы должны формулироваться на языке математики. Утверждение о том, что природа выражает свои законы на языке математики, по существу было высказано 300 лет назад [1]. В наши дни оно верно более чем когда-либо. Чтобы продемонстрировать всю важность использования математических понятий при формулировке законов физики, достаточно вспомнить, например, аксиомы квантовой механики, сформулированные в явном виде великим математиком фон Нейманом [14] и в неявном виде великим физиком Дираком [13]. В основу квантовой механики положены два понятия: понятие состояний и понятие наблюдаемых. Состояния — это векторы в гильбертовом пространстве; наблюдаемые — самосопряженные операторы, действующие на векторы состояния. Возможные значения наблюдаемых определяются собственными значениями этих операторов и т. д., но мы предпочитаем остановиться на этом и не перечислять математических понятий, развитых в теории линейных операторов.

Разумеется, для формулировки законов природы физики отбирают лишь некоторые математические понятия, используя, таким образом, лишь небольшую долю всех имеющихся в математике понятий. Правда, понятия выбираются из длинного списка математических понятий не произвольно: во многих, если не в большинстве, случаях необходимые понятия были независимо развиты физиками, и лишь впоследствии было установлено их тождество с понятиями, уже известными математикам. Однако утверждать, как это нередко приходится слышать, будто так происходит потому, что математики используют лишь простейшие из возможных понятий, а последние встречаются в любом формализме, было бы неверно. Как мы уже видели, математические понятия вводятся не из-за их логической простоты (даже последовательности пар чисел — понятия далеко не простые), а потому, что они особенно легко поддаются тонким логическим операциям и облегчают проведение глубоких и блестящих рассуждений. Не следует забывать, что гильбертово пространство квантовой механики — это комплексное гильбертово пространство с эрмитовым скалярным произведением. Для неподготовленного ума понятие комплексного числа далеко не естественно, не просто и никак не следует из физических наблюдений. Тем не менее использование комплексных чисел в квантовой механике отнюдь не является вычислительным трюком прикладной математики, а становится почти необходимым при формулировке законов квантовой механики. Кроме того, по-видимому, не только комплексным числам, но и так называемым аналитическим функциям суждено сыграть решающую

[1] Его приписывают Галилею.

роль в формулировке квантовой теории. Я имею в виду быстро развивающуюся теорию дисперсных соотношений.

Невольно создается впечатление, что чудо, с которым мы сталкиваемся здесь, не менее удивительно, чем чудо, состоящее в способности человеческого разума нанизывать один за другим тысячи аргументов, не впадая при этом в противоречие, или два других чуда — существование законов природы и человеческого разума, способного раскрыть их. Из всего, что мне известно, больше всего похоже на объяснение плодотворности использования математических понятий в физике замечание Эйнштейна: «Мы с готовностью воспринимаем лишь те физические теории, которые обладают изяществом». Может показаться спорным, что понятия математики, постижение которых требует напряженной работы мысли, обладают изяществом. Замечание Эйнштейна в лучшем случае отражает определенные особенности теории, в которую мы готовы поверить, и не затрагивает внутренней непротиворечивости теории. Рассмотрению последней проблемы посвящается следующий раздел нашего доклада.

ТАК ЛИ УЖ УДИВИТЕЛЕН УСПЕХ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ?

Почему физик использует математику для формулировки своих законов природы? Это можно объяснить тем, что физик довольно безответственно относится к своим действиям. В результате, когда он обнаруживает связь между двумя величинами, напоминающую какую-нибудь связь, хорошо известную в математике, он тотчас же делает вывод, что обнаруженная им связь и *есть* именно та связь, поскольку никакие другие связи того же типа ему неизвестны. В своем докладе я вовсе не собираюсь опровергать выдвигаемое против физика обвинение в том, что он ведет себя несколько безответственно. В какой-то мере этот упрек справедлив. Важно заметить, однако, что математическая формулировка полученных физиком зачастую не слишком точных экспериментальных данных приводит в огромном числе случаев к удивительно точному описанию широкого класса явлений. Это свидетельствует о том, что математический язык служит не только средством общения, но и является единственным языком, на котором мы можем говорить. Правильно будет сказать, что математический язык отвечает существу дела. Рассмотрим несколько примеров.

Первый пример встречается особенно часто — это движение планет. Законы свободного падения были надежно установлены в результате экспериментов, проведенных главным образом в Италии. Эти эксперименты не могли быть очень точными в том смысле, как мы понимаем точность сегодня, отчасти из-за сопротивления воздуха, отчасти из-за того, что во времена Галилея еще не умели измерять короткие промежутки времени. Тем не менее не удивительно, что в результате этих исследований итальянские физики узнали о том, как движутся тела сквозь атмосферу. Затем Ньютон сопоставил закон свободного падения тел с движением Луны, заметив, что параболическая траектория падающего камня на Земле и круговая орбита Луны на небе являются частными случаями одного и того же математического объекта — эллипса. Ньютон постулировал свой закон всемирного тяготения, опираясь на единственное и в те времена весьма грубое численное совпадение. С философской точки зрения сформулированный Ньютоном закон тяготения противоречил и духу того времени и самому Ньютону. С точки зрения эксперимента закон всемирного тяготения был основан на весьма отрывочных наблюдениях. Математический язык, на котором этот закон был сформулирован, использует понятие второй производной, а те из нас, кто хоть раз пытался провести соприкасающуюся окружность к какой-нибудь кривой, знают, что понятие второй производной не слишком наглядно. Закон всемирного тяготения, который Ньютон, не желая того, установил и который он мог проверить лишь с точностью около 4%, при проверке оказался правильным с точностью до 0,0001% и настолько тесно ассоциировался с представлением об абсолютной точности, что физики лишь недавно осмелились вновь заняться исследованием пределов его точности [15]. На пример с законом Ньютона ссылались и ссылаются многие авторы. Мы не могли не привести его первым как фундаментальный пример закона, формулируемого с помощью простых с точки зрения математика понятий и обладающего точностью, лежащей далеко за пределами всякого разумного ожидания. Воспользуемся этим примером для того, чтобы еще раз сформулировать наш основной тезис: во-первых, закон всемирного тяготения (отчасти потому, что в его формулировку входит понятие второй производной) прост лишь для математика, но отнюдь не для обыкновенного здравомыслящего человека и даже не для первокурсника, если тот не обладает математическими способностями; во-вторых, закон всемирного тяготения — это условный закон с весьма ограниченной сферой применимости. Он ничего не говорит ни о Земле, притягивающей те камни, которые бросал Галилей, ни о круговой форме лунной орбиты, ни о планетах солнечной системы. Объяснение всех этих начальных условий остается на долю геолога и астронома, и задача, стоящая перед ними, отнюдь не легка.

Вторым примером служит обычная элементарная квантовая механика. Последняя берет свое начало с того момента, когда Макс Борн заметил, что некоторые правила вычислений, разработанные Гейзенбергом, формально совпадают с давно известными математикам правилами действий над матрицами. Борн, Иордан и Гейзенберг предложили заменить матрицами переменные, отвечающие координатам и скоростям в уравнениях классической механики [16, 17]. Они применили правила матричной механики к решению нескольких сильно идеализированных проблем и пришли к весьма удовлетворительным результатам, однако в те времена не было разумных оснований надеяться, что построенная ими матричная механика окажется верной и при более реальных условиях. Сами авторы надеялись, что предложенная ими «механика в основном окажется верной». Первым, кто несколькими месяцами позже применил матричную механику к решению реальной задачи — атому водорода, — был Паули. Полученные им результаты оказались в хорошем согласии с экспериментом. Такое положение дел вызывало удовлетворение, но было еще объяснимым, поскольку при выводе своих правил Гейзенберг исходил из проблем, в число которых входила старая теория атома водорода. Чудо произошло лишь тогда, когда матричную механику или математически эквивалентную ей теорию применили к задачам, для которых правила Гейзенберга не имели смысла. При выводе правил Гейзенберг предполагал, что классические уравнения движения допускают решения, обладающие определенными свойствами периодичности. Уравнения же движения двух электронов в атоме гелия (или еще большего числа электронов в более тяжелых атомах) не обладают этими свойствами, и правила Гейзенберга в этих случаях неприменимы. Тем не менее основное состояние гелия, вычисленное несколько месяцев спустя КиноШитой в Корнелльском университете и Бэзли в Бюро стандартов, в пределах точности наблюдений, составлявшей около 0,0000001, находилось в согласии с экспериментальными данными. В этом случае мы поистине извлекли из уравнений нечто такое, что в них не закладывали.

Аналогичная ситуация возникла и при изучении качественных особенностей «сложных спектров», т. е. спектров тяжелых атомов. Я вспоминаю один разговор с Иорданом, который сказал следующее: «Когда были получены качественные закономерности спектров, последняя возможность изменить основы матричной механики состояла в том, чтобы обнаружить противоречие между правилами, выведенными из квантовой механики, и правилами, установленными в результате экспериментальных исследований». Иначе говоря, Иордан понимал, насколько беспомощными мы оказались бы (по крайней мере временно), если бы в теории атома гелия неожиданно возникло противоречие. Теорию атома гелия в то время разрабатывали Келлнер и Хилераас. Используемый ими математический формализм был слишком ясен и незыблем, и, не произойди упомянутое выше чудо с гелием, кризис был бы неизбежен. Разумеется, физика сумела бы так или иначе преодолеть этот кризис. Верно и другое: физика в том виде, как мы знаем ее сегодня, не могла бы существовать, если бы постоянно не повторялись чудеса, подобные чуду с атомом гелия, которое, по-видимому, следует считать наиболее удивительным, но далеко не единственным событием во всей истории развития элементарной квантовой механики. Перечень таких чудес можно было бы неограниченно продолжать. Квантовая механика достигла многих почти столь же удивительных успехов, и это вселяет в нас уверенность в том, что она, как мы говорим, верна.

В качестве последнего примера рассмотрим квантовую электродинамику, или теорию лэмбовского сдвига. В то время как ньютоновская теория тяготения еще обладала наглядными связями с опытом, в формулировку матричной механики опыт входит лишь в утонченной и сублимированной форме правил Гейзенберга. Квантовая теория лэмбовского сдвига, основные идеи которой выдвинул Бете, была разработана Швингером. Это чисто математическая теория, и единственный вклад эксперимента в нее состоял в доказательстве существования предсказываемого ею измеримого эффекта. Согласие с вычислениями оказалось лучше 0,001.

Предыдущие три примера (число их можно было бы увеличить почти до бесконечности) призваны были продемонстрировать эффективность и точность математической формулировки законов природы с помощью специально отобранных «удобных в обращении» понятий; выяснилось, что «законы природы» обладают почти фантастической точностью, но строго ограниченной сферой применимости. Я предлагаю назвать закономерность, подмеченную на этих примерах, эмпирическим законом эпистемологии. Вместе с принципами инвариантности физических теорий эмпирический закон эпистемологии служит прочным основанием этих теорий. Не будь принципов инвариантности, физические теории нельзя было бы подкреплять экспериментом. Не будь эмпирического закона эпистемологии, нам не хватило бы мужества и уверенности — эмоциональных предпосылок, без которых нельзя было бы успешно исследовать «законы природы». Сакс, с которым я обсуждал эмипирический закон эпистемологии, назвал его догматом веры физика-теоретика и был, несомненно, прав. Однако то, что он назвал нашим догматом веры, подкрепляется примерами из практики, куда более многочисленными, чем три примера, приведенные в нашем докладе.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

Эмпирическая природа сделанных выше замечаний представляется мне самоочевидной. Они явно не принадлежат к числу «логически необходимых», и, чтобы доказать это, вовсе не нужно указывать на то, что они применимы лишь к очень незначительной части наших знаний о неодушевленном мире. Было бы нелепо считать, будто существование простых с точки зрения математика выражений для второй производной от координат по времени самоочевидно, в то время как аналогичных выражений для самой координаты или скорости не существует. Тем большее удивление вызывает та готовность, с которой чудесный дар, содержащийся в эмпирическом законе эпистемологии, был воспринят как нечто само собой разумеющееся. Способность человеческого разума нанизывать, оставаясь «правым» (т. е. не впадая в противоречие), цепочки из 1000 и более аргументов — дар, не менее удивительный.

Каждый эмпирический закон обладает тем неприятным свойством, что пределы его применимости неизвестны. Мы уже убедились в том, что закономерности в явлениях окружающего нас мира допускают формулировку с помощью математических понятий, обладающую сверхъестественной точностью. С другой стороны, в окружающем нас мире имеются и такие явления, рассматривая которые, мы не уверены, что между ними существуют какие-либо точные закономерности. Такие явления мы называем начальными условиями. Вопрос, который возникает в этой связи, состоит в следующем: не сольются ли различные закономерности, т. е. различные законы природы, которые будут открыты, в единое непротиворечивое целое или, по крайней мере, не обнаружат ли они асимптотическую тенденцию к такому слиянию? В противном случае мы всегда могли бы указать законы природы, не имеющие между собой ничего общего. Именно так, по крайней мере, обстоит дело с законами наследственности и законами физики. Может случиться даже так, что следствия из некоторых законов природы будут противоречить друг другу, но мы не захотим отказаться ни от одного из законов, поскольку каждый из них в своей области достаточно убедителен. Обнаружив противоречие между отдельными законами природы, мы можем покориться такой ситуации и потерять интерес к разрешению конфликта между различными теориями. Мы можем разочароваться в поисках «абсолютной истины», т. е. непротиворечивой картины, образующейся при слиянии в единое целое маленьких картинок, отражающих различные аспекты природы.

Обе альтернативы полезно проиллюстрировать на примере. В современной физике существуют две теории, обладающие огромной мощью и представляющие большой интерес: квантовая теория и теория относительности. Своими корнями названные теории уходят во взаимно исключающие группы явлений. Теория относительности применима к макроскопическим телам, например к звездам. Первичным в теории относительности считается явление совпадения, т. е. в конечном счете столкновения частиц. Сталкиваясь, частицы определяют или, по крайней мере, должны были бы определять (если бы они были бесконечно малыми) точку в пространстве-времени. Квантовая теория своими корнями уходит в мир микроскопических явлений, и с ее точки зрения явление совпадения или столкновения, даже если оно происходит между частицами, не обладающими пространственной протяженностью, нельзя считать первичным и четко локализованным в пространстве-времеви. Обе теории—квантовая теория и теория относительности — оперируют различными математическими понятиями: первая — понятием четырехмерного риманова пространства, вторая — понятием бесконечномерного гильбертова пространства. До сих пор все попытки объединить обе теории оканчивались неудачей, т. е. не удавалось найти математическую формулировку теории, по отношению к которой квантовая теория и теория относительности играли бы роль приближений. Все физики считают, что объединение обеих теорий принципиально возможно и нам удастся в конце концов достичь его. Однако нельзя исключать и другую возможность — что нам не удастся построить теорию, объединяющую квантовую механику и теорию относительности. Приведенный пример показывает, что ни одну из названных возможностей — объединение двух теорий и конфликт между ними — нельзя отбрасывать заранее.

Чтобы получить хотя бы намек, какую же из двух альтернатив нам следует, в конце концов, ожидать, притворимся чуточку более невежественными, чем мы являемся в действительности, и опустимся на более низкий уровень знания. Если, оставаясь на этом уровне знания, мы будем в состоянии обнаружить возможность слияния наших теорий, то можно с уверенностью сказать, что и на истинном уровне наших знаний такое слияние также окажется возможным. С другой стороны, обнаружив конфликт на более низком уровне знаний, мы не сможем исключить возможность существования непримиримо конфликтующих теорий и после возвращения на истинный уровень наших знаний. Уровень знания и степень нашего интеллектуального развития изменяются непрерывно, и маловероятно, чтобы сравнительно слабая вариация этой непрерывной функции изменяла имеющуюся в нашем распоряжении картину мира, внезапно превращая ее из несогласованной в последовательную[1]).

[1]) Эту мысль я написал после больших колебаний. Я убежден, что в эпистемологических дискуссиях полезно отказаться от представления об исключительно высоком положении уровня человеческого интеллекта на абсолютной шкале. В ряде случаев полезно рассматривать достижения, доступные и при уровне развития, свойственном отдельным видам животных. Я полностью отдаю себе отчет в том, что идеи, приведенные в тексте доклада, очерчены слишком бегло и не подвергались достаточно критическому обсуждению, чтобы их можно было считать надежными.

Высказанной только что точке зрения противоречит тот факт, что некоторые теории, ошибочность которых нам заведомо известна, позволяют получать удивительно точные результаты. Если бы мы знали немного меньше, то круг явлений, объясняемых этими «ложными» теориями, казался бы нам достаточно большим для того, чтобы уверовать в их «правильность». Однако эти теории мы считаем «ошибочными» именно потому, что, как показывает более тщательный анализ, они противоречат более широкой картине, и, если таких теорий обнаружено достаточно много, они непременно вступают в конфликт друг с другом. Не исключена и другая возможность: теории, которые мы, опираясь на достаточно большое, по нашему мнению, число подтверждающих фактов, считаем «верными», на самом деле являются «ошибочными» потому, что противоречат более широкой, вполне допустимой, но пока еще не открытой теории. Если бы дело обстояло именно так, мы должны были бы ожидать конфликта между нашими теориями, когда число их превысит определенный уровень и они будут охватывать достаточно широкий круг явлений. В отличие от уже упоминавшегося догмата веры физика-теоретика эту мысль следовало бы назвать «кошмаром» теоретика.

Рассмотрим несколько примеров «ошибочных» теорий, дающих, вопреки своей ошибочности, удивительно точное описание различных групп явлений. Если не быть чересчур придирчивым, то некоторые подробности, относящиеся к этим примерам, можно опустить. Успех первых основополагающих идей Бора в теории строения атома был весьма ограниченным, как, впрочем, и успех эпициклов Птолемея. Теперь мы находимся в более выгодном положении и можем точно указать все явления, которые допускают описание в рамках этих примитивных теорий. Мы не можем утверждать ничего подобного о так называемой теории свободных электронов, которая дает удивительно точную картину свойств большинства, если не всех, металлов, полупроводников и изоляторов. В частности, теория свободных электронов объясняет тот факт (который так и не удалось объяснить на основе «настоящей теории»), что удельное сопротивление изоляторов может в 10^{26} превосходить удельное сопротивление металлов. Более того, не существует экспериментальных данных, которые бы убедительно показали, что сопротивление конечно при условиях, когда, согласно теории свободных электронов, оно должно было бы обращаться в бесконечность. Тем не менее мы убеждены, что эта теория представляет собой лишь грубое приближение и при описании явлений, происходящих в твердых телах, ее должна была бы заменить более точная картина.

Достигнутые к настоящему времени успехи позволяют считать, что ситуация с теорией свободных электронов несколько тревожна, но отнюдь не свидетельствует о каких-то непреодолимых противоречиях. Теория свободных элементов заставляет нас сомневаться в другом: насколько мы можем доверять численному совпадению между теорией и экспериментом как показателю правильности теории. К такого рода сомнениям мы привыкли.

Гораздо больше трудностей и сомнений возникло бы, если бы в один прекрасный день нам удалось построить теорию сознания или разработать теоретическую биологию, столь же непротиворечивую и убедительную, как и существующие ныне теории неодушевленного мира. Если говорить о биологии, то законы наследственности Менделя и последующее развитие генетики вполне можно считать зачатками такой теории. Более того, не исключено, что кому-нибудь удастся обнаружить некий абстрактный аргумент, свидетельствующий о конфликте между такой теорией и общепринятыми основами физики. Аргумент этот может быть столь абстрактным, что упомянутый конфликт нельзя будет разрешить в пользу одной из теорий с помощью эксперимента. Такая ситуация сильно пошатнула бы нашу веру в существующие теории и в реальность создаваемых нами понятий. Мы испытали бы чувство глубокого разочарования в поисках того, что я назвал «абсолютной истиной». Причина, по которой подобную ситуацию нельзя считать заранее исключенной, состоит в том, что нам в принципе неизвестно, почему наши теории «работают» так хорошо. Их точность может еще не свидетельствовать об их правильности и непротиворечивости. Автор данного доклада убежден, что нечто подобное возникает при попытке сравнить современные законы наследственности с физическими законами.

Я хотел бы закончить более радостной нотой. Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что и в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы думаем, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) будет непрерывно возрастать, принося нам не только радость, но и новые головоломные проблемы.

Я хотел бы поблагодарить Поляни, который давно уже оказывает глубокое влияние на мою точку зрения в связи с проблемами эпистемологии, и Баргмана за дружескую критику, способствовавшую достижению ясности. Я очень признателен также Шимони, просмотревшему рукопись данного доклада и обратившему мое внимание на статьи Пирса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dubislav W.*, Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart, Junker und Dünnhaupt Verlag, Berlin, 1932.
2. *Polanyi M.*, Personal Knowledge, University of Chicago Press, Chicago, 1958, p. 188.
3. *Hilbert D.*, Abhandl. Math. Sem., Univ. Hamburg, **157** (1922).
4. *Hilbert D.*, Gesammelte Werke, Springer Verlag, Berlin, 1935.
5. *Schrödinger E.*, Über Indeterminismus in der Physik, J. A. Barth, Leipzig, 1932.
6. *Dubislav W.*, Naturphilosophie, Junker und Dünnhaupt, Verlag, Berlin, 1933, Kap. 4.
7. *Wigner E.*, Proc. Amer. Phil. Soc., **93**, 521 (1949). (Статья 1 данной книги.)
8. *Deutsch M.*, Daedalus, **87**, 86 (1958).
9. *Peirce C. S.*, Essays in Philosophy of Science, The Liberal Arts Press, New York, 1957, p. 237.
10. *Schrödinger E.*, What is Life?, Cambridge University Press, Cambridge, 1945, p. 31. (Имеется перевод: *Шредингер Э.*, Что такое жизнь с точки зрения физики?, ИЛ, 1947.)
11. *Wigner E.*, Proc. Amer. Phil. Soc., **94**, 422 (1950). (Статья 12 данной книги.)
12. *Margenau H.*, The Nature of Physical Reality, McGraw-Hill, New York, 1950, ch. 8.
13. *Dirac P. A. M.*, Quantum Mechanics, 3rd Ed., Clarendon Press, Oxford, 1947. (Имеется перевод: *Дирак П. А. М.*, Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960.)
14. *von Neumann J.*, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag, Berlin, 1932. (Имеется перевод: *Иоганн фон Нейман*, Математические основы квантовой механики, изд-во «Наука», М., 1964.)
15. *Dicke R. H*,, Amer. Sci., **25** (1959).
16. *Born M.*, *Jordan P.*, Zs. Phys., **34**, 858 (1925).
17. *Born M.*, *Heisenberg W.*, *Jordan P.*, Zs. Phys., **35**, 557 (1926).

14

ЭНРИКО ФЕРМИ[1]

Энрико Ферми родился 29 сентября 1901 г. в Риме, умер 29 ноября 1954 г. в Чикаго. Он был одним из величайших физиков нашего времени.

Родители Ферми были простые люди: отец — служащий Итальянской железнодорожной компании, мать — учительница в школе. Из трех детей в семье Энрико был самым младшим. Братья Джулио и Энрико (с разницей в возрасте лишь один год) очень любили друг друга. Они рано проявили интерес к технике. Врожденное умение Энрико Ферми обходиться подручными материалами обнаружилось еще в раннем возрасте: среди прочего братья построили электромоторчик, который действительно работал. Внезапная смерть Джулио, последовавшая, когда ему было всего лишь 14 лет, прервала их дружбу. Оставшись один, Энрико углубился в книги и занялся изучением математики и физики. Этот интерес усилился после его знакомства с Персико, который в то время был еще начинающим математиком.

Закончив высшую школу, Ферми получил аспирантскую стипендию в Нормальной школе города Пиза. После четырех лет занятий в этом почтенном учебном заведении он явно превзошел своих учителей, и его докторская диссертация, защищенная в возрасте 20 лет, потрясла ученую аудиторию: никто из присутствовавших почти ничего в ней не понял. Этот урок Ферми запомнил на всю жизнь: никогда в дальнейшем он не переоценивал возможностей тех, кто его слушал, и его доклады всегда были составлены так, чтобы по крайней мере небольшая группа наиболее развитых людей могла следить за ходом мысли докладчика.

После учебы в Геттингене и Лейдене и чтения лекций в Риме и Флоренции молодой Ферми по инициативе Корбино был приглашен в Рим заведовать кафедрой теоретической физики. В то время ему было 25 лет. К Ферми вскоре присоединились также по инициативе Корбино Разетти и Амальди, а немного позднее — Сегре и Майорана. Ныне все эти сотрудники Ферми,

[1]) Опубликовано в книге: «Yearbook of the American Philosophical Society», 1955, p. 435.

кроме необычайно талантливого, но рано погибшего при несколько таинственных обстоятельствах Майораны, — известные физики. Все члены группы признавали неоспоримое первенство Ферми, получившего за непогрешность своих суждений прозвище «папа», и на протяжении всей его жизни поддерживали с ним дружеские отношения.

В 1929 г. Ферми женился на студентке университета Лауре Капон. Она много помогала ему в работе, они вместе написали учебник физики, а вскоре после его смерти она выпустила биографию Ферми. Это увлекательная книга о великом человеке, каким он предстает в глазах любящей и преданной жены.

В 1938 г. Ферми получил Нобелевскую премию за работы по поглощению нейтронов. Италия в то время уже находилась под сильным влиянием своего северного соседа, и жизнь в ней грозила стать невыносимой, в особенности для Лауры Ферми, по национальности еврейки. Поэтому после нобелевских торжеств семья Ферми решила не возвращаться в Италию, а эмигрировать в Америку. Ферми получил приглашение из Колумбийского университета и в 1939 г. стал членом его физического факультета.

Не прошло и нескольких месяцев, как Ферми начал собирать вокруг себя группу сотрудников вместо тех, кого он оставил в Риме. Наиболее преданными членами его группы стали Андерсон, Маршалл, Вейль и Цинн. Сначала работа Ферми была непосредственным продолжением его общей программы исследования свойств нейтронов, начатой еще в Риме. Однако после того, как стало известно о делении урана, внимание группы переключилось на это явление. Некоторые из основных, наиболее важных экспериментов были проведены в Колумбийском университете совместно со Сциллардом еще до того, как в 1942 г. вся группа присоединилась к лаборатории Комптона в Чикаго. Цель работы была чисто технической: установление самоподдерживающейся цепной реакции и производство нового элемента — плутония.

Если в Колумбийском университете на проведение работ отпускались довольно незначительные суммы, то в Чикаго металлургическая лаборатория субсидировалась весьма щедро. Самоподдерживающаяся цепная реакция была осуществлена менее чем через год после переезда Ферми в Чикаго и спустя 24 часа после того, как было получено достаточное количество урана. Ферми и его «банда» своими руками укладывали графитовые бруски. Он всегда предпочитал все делать сам, вместо того чтобы давать указания, что и как следует делать другим. В результате первый реактор Ферми был построен быстрее, чем все последующие реакторы. После того как возможность цепной реакции была доказана, реакторы стали интересовать Ферми лишь в более узком плане — как средство исследования и как источник нейтронов. Он с радостью предоставил другим решение технических и административных проблем, связанных со строительством крупных реакторов, однако остался надежным и авторитетным консультантом для всех, кто принимал участие в решении инженерных проблем реакторостроения, и всегда был готов прийти на помощь словом и делом. Автор этих строк вспоминает, что, когда, например, потребовалось срочно выяснить величину радиоактивности, индуцированной медленными нейтронами в кислороде, Ферми произвел необходимые измерения в течение одного дня.

К руководителю проекта Комптону Ферми относился с восхищением и искренней любовью. По совету и приглашению Комптона он начал работать в Чикагском университете и остался в Чикаго после того, как первоначально созданный «Урановый проект» в конце войны был распущен. Вместе с ним осталась большая часть коллектива, собранного им в Колумбийском университете. Интересы Ферми и его ближайших сотрудников вскоре привлекла физика высоких энергий, и до самой смерти Ферми оставался одним из ведущих авторитетов в этой области. Смерть его оставила чувство невосполнимой утраты в сердцах его друзей и сотрудников. Столь же невосполнимой была потеря для физического факультета Чикагского университета и Института ядерных исследований.

Наиболее поразительными чертами Ферми были его простота и реализм, готовность воспринимать факты и людей такими, какие они есть. Он не любил сложных теорий и по возможности избегал их. Хотя Ферми был одним из основоположников квантовой электродинамики, он упорно не желал пользоваться ее методами. Его статья о квантовой теории излучения, опубликованная в журнале Rev. Mod. Phys., **4**, 131 (1932), — типичный образец многих докладов и лекций Ферми: никто не мог бы написать ее, не зная всех тонкостей теории, и никто не мог бы лучше обойти эти тонкости. Но когда Ферми пришлось заняться проблемой, решение которой требовало явного использования столь нелюбимых им понятий квантовой теории поля, он принял этот факт как должное, и методы квантовой теории поля легли в основу одной из самых блестящих его статей.

Простота и реализм, которые свойственны научной деятельности Ферми, проявлялись и в его отношениях с людьми. Хотя он никогда не вдавался в тонкий анализ личных качеств людей, он знал, чтó можно ожидать от друзей и знакомых, и редко ошибался в своих оценках. Его отношение к смерти трудно расценить иначе, как героическое. Он трезво ждал ее приближения и был способен шутить на тему о смерти со своими ближайшими коллегами всего за 10 дней до своей кончины. Он был настолько спокоен, что казался сверхчеловеком. «Надеюсь, что это продлится недолго», — были его слова. Они оправдались.

Ферми был другом и наставником почти всех итальянских физиков и всех, кому выпало счастье работать с ним. Его отношения с сотрудниками всегда были просты, дружественны и не омрачались никакими осложнениями. «Он всегда был абсолютно честен со мной и никогда не относился ко мне ни пренебрежительно, ни с преувеличенной любезностью», — таков был отзыв о Ферми одного из его наиболее одаренных учеников. Эта почти полная предсказуемость поведения Ферми, его простота и доброжелательная, ненавязчивая честность суждений и поступков, несомненно, были краеугольными камнями, на которых зиждился успех Ферми в отношениях с другими людьми и бесспорно отводимое ему первенство.

Имя Ферми чаще всего упоминают в связи со статистикой Ферми, моделью атома Томаса — Ферми, его теорией β-распада, открытием роли и свойств медленных нейтронов и осуществлением первой ядерной цепной реакции. Как нередко случается, первое наиболее известное из этих достижений — статистика Ферми — не дает полного представления о его гении. Он написал ряд статей, еще более богатых новыми идеями, ряд статей, потребовавших от автора еще большей проницательности. Ярким примером тому могла бы служить его редко упоминаемая работа по квантовой электродинамике. С другой стороны, теория β-распада дает нам правильное представление о Ферми-ученом. В основу ее положены понятия квантовой теории поля, но простота изложения делает ее доступной даже для читателя, незнакомого с теориями поля. При чтении этой работы, проникнутой кажущейся наивностью, невольно хочется высказывать критические замечания, обобщения и возникает мысль о более строгом изложении теории. По мнению автора этих строк, кажущаяся наивность характерна для вкусов Ферми и не отражает уровня его знаний при написании статьи о теории β-распада. Еще тогда он, несомненно, мог бы добавить к ней много абстрактного материала, важность которого другие физики оценили бы очень высоко.

Уже в открытии Ферми искусственной радиоактивности, возникающей при облучении нейтронами, эффективности и основных свойств медленных нейтронов проявились все наиболее замечательные качества великого физика-экспериментатора. Это открытие явилось первым значительным экскурсом Ферми в экспериментальную физику, и выбор предмета и времени экскурса свидетельствуют о глубокой интуиции. Успешному и быстрому проведению экспериментов немало способствовали необыкновенное умение Ферми использовать любое подручное оборудование лаборатории, отнюдь не предназначенной для проведения подобных исследований, и тот энтузиазм, которым он заражал своих сотрудников. За свои исследования Ферми в 1938 г. был удостоен Нобелевской премии. В 1939 г. он был избран членом Американского философского общества. В апреле 1946 г. он был награжден премией Льюиса этого общества за участие в разработке и применении понятия цепной реакции.

Осуществленная Ферми первая цепная реакция служит неоспоримым свидетельством не только его глубоких познаний и силы его научного предвидения, но его качеств как руководителя. Членам руководимой им группы не приходилось задавать своему руководителю каких-либо вопросов. Ферми всегда подробно разъяснял следующий этап решения проблемы и, если было нужно, не колеблясь, повторял свои объяснения.

Во время своей последней, неизлечимой болезни Ферми полностью владел своими умственными и физическими силами и сохранил их почти до самой кончины. Его институт и коллеги потеряли великого руководителя. Наука потеряла в его лице одного из самых продуктивных физиков нашего века, а мир — простого и великого человека.

15

ДЖОН ФОН НЕЙМАН[1])

Прошлым летом в Эдмондтоне (провинция Альберта) состоялся Канадский математический конгресс. Профессор Диксмье из Парижа прочитал доклад об алгебрах фон Неймана, доктор Цассенхауз начал свои лекции по теории групп с неймановского определения инфинитезимальных операторов и их коммутаторов, доктор Таккер из Принстона сообщил о новых результатах в теории игр — еще одной области математики, которую фон Нейман отчасти заложил своими трудами и существенно обогатил своими идеями. Фон Нейман внес важный вклад во все области математики, за исключением теории чисел и топологии, и оставил заметный след в теоретической физике и экономике. Его работа во время войны имела жизненно важное значение для успеха нескольких проектов, а его вклад в национальное благосостояние и национальную безопасность с окончанием войны не только не прекратился, но даже усилился. Он умер, будучи членом Комиссии по атомной энергии США.

Джон фон Нейман родился 28 декабря 1903 г. в семье состоятельного банкира в Будапеште. Образование он получил в Высшей лютеранской школе в своем родном городе. В то время эта школа была, по-видимому, лучшим высшим учебным заведением Венгрии, а может быть, и всего мира. По крайней мере двое ее преподавателей вели, хотя и в скромных масштабах, самостоятельную исследовательскую работу, большинство же преподавателей занимались в основном чтением лекций и воспитанием молодых людей. Руководство школы вскоре заметило математические таланты фон Неймана, и преподаватель математики Ратц, которому автор этой заметки также многим обязан, взял Янчи (уменьшительное от Янош) под свое крыло, начал давать ему частные уроки и ввел его в университет. Между университетом и по крайней мере некоторыми высшими учебными заведениями тогда существовали очень тесные связи, и фон Нейман приобрел известность в процветающем кружке будапештских математиков еще до окончания высшей школы. Ду-

---

[1]) Опубликовано в книге: «Yearbook of the American Philosophical Society», 1957, p. 149.

ховному отцу многих венгерских математиков Фейеру принадлежит фраза: «Величайший Янчи нашей страны», — этот титул сохранился за Нейманом на всю жизнь.

В школе и среди коллег Янчи старался держаться незаметно. Он принимал участие во всех проделках своего класса, но если можно так выразиться, не от всей души, а лишь для того, чтобы не выделяться. У него было несколько близких друзей, и он пользовался всеобщим уважением. Все студенты признавали его умственные способности и не без зависти восхищались ими. Янчи любил беседовать о математике даже в том юном возрасте, и его друзьям после прогулок с фон Нейманом нередко случалось поздно возвращаться домой.

После окончания высшей школы Нейман в течение двух лет изучал химию в Берлинском университете, а затем также в течение двух лет — в Цюрихе. Занятия химией были своеобразной страховкой от превратностей карьеры математика. Математик в то время мог заниматься только преподаванием, а преподавательских мест в университете было очень мало. Жалованье, получаемое преподавателем, не соответствовало стандартам богатых родителей Неймана. Поэтому занятия химией были избраны как компромисс между научными наклонностями Янчи и суровой реальностью жизни, на которую не закрывали глаз не только его семья, но и он сам. Однако большую часть времени студент-химик проводил в обществе математиков Берлина и Цюриха, и привязанность юного студента к предмету его занятий никогда не была особенно сильной. Он успешно закончил свои занятия химией, но в том же году, в котором он получил в Цюрихе свой диплом химика, он получил степень доктора философии по математике в Будапеште. Очевидно, диссертация на эту степень и экзамены не потребовали от него сколько-нибудь значительных усилий.

После получения степени доктора философии фон Нейман продолжил свои занятия в Геттингене и Гамбурге и в 1927 г. стал приват-доцентом Берлинского университета. Химия постепенно отошла на задний план и была полностью оставлена, и его интересы сосредоточились на математике и теоретической физике. Именно в этот период фон Нейман опубликовал некоторые из своих наиболее значительных работ.

В 1929 г. фон Нейман получил приглашение провести один семестр в Принстоне. Америка понравилась ему с первого взгляда, и он почувствовал себя в общественной и научной атмосфере Принстона как рыба в воде. Приглашение на один семестр вскоре было расширено: фон Нейману предложили занять профессорскую должность сначала на полставки, а в 1931 г. — на полную ставку. Незадолго до своего первого визита в Принстон фон Нейман женился. Он и его жена, урожденная Мариэтта Кевеши, нашли в Принстоне многих друзей, любовь которых ни к мужу, ни к жене не уменьшилась и в последующие годы. Вечера, которые устраивала Мариэтта, и веселая атмосфера их дома вошли в Принстоне в поговорку и были излюбленной темой разговоров еще долго после их отъезда в 1937 г. У фон Нейманов была одна дочь Марина. Ныне она вышла замуж и живет в Принстоне.

В 1933 г., вскоре после основания Института высших исследований, фон Нейману предложили место в математическом отделе института. В то время институт был грандиозным экспериментом в области высшего образования и исследовательской работы в США, вдохновителями и организаторами которого выступили Флекснер и Веблен и их друзья-единомышленники, взявшие на себя финансирование всего предприятия. Приглашение в институт фон Неймана, тридцатилетнего математика, вместе с некоторыми самыми выдающимися и знаменитыми математиками США означало не только признание его таланта, но и свидетельствовало о полноте его слияния с жизнью Америки. Всю остальную часть своей научной карьеры фон Нейман провел в Институте высших исследований. Еще до войны он вступил во второй брак с Клари Дан (с которой познакомился еще в Венгрии и которая пережила его).

Деятельность фон Неймана во время войны была чрезвычайно многообразной. Особенно широкую известность получил взрывной метод инициирования атомного взрыва. Фон Нейман придумал этот метод независимо от других, но, несомненно, в результате прекрасного знания физики зарядов с искривленной поверхностью. Фон Нейман никогда не порывал своих связей с военными и с работами по использованию ядерной энергии и после окончания войны и отдавал много времени, энергии и сил укреплению военной мощи своей второй родины. Последние годы его жизни были полностью посвящены работе в правительственных учреждениях, и после нескольких лет службы он умер 8 февраля 1957 г., будучи членом Комиссии по атомной энергии США.

Описать сколько-нибудь подробно вклад фон Неймана в науку — математику, физику, экономику, решение технических проблем — менее чем на 10 страницах просто невозможно. Его работа в области математики, которая всегда была особенно близкой его сердцу и в которой его блестящий ум находил наиболее полное выражение, проходила под сильным влиянием гильбертовской аксиоматической школы. Это влияние прослеживается не только в работах фон Неймана по математической логике, но и в его подходе к другим проблемам, в решение которых он также внес фундаментальный вклад: теории гильбертова пространства, теории неограниченных операторов, квантовой механике, теории игр. Объекты, изучением которых занималась рассматриваемая им теория, фон Нейман описывал, перечисляя те их свойства, которые затем использовались при доказательствах того или иного утверждения. Таким образом, результаты теории были применимы ко всем объектам, обладавшим перечисленными свойствами, независимо от их природы. Помимо уже названных областей математики фон Нейман внес решающий вклад в теорию групп и алгебру операторов. Вершиной его работы в области теоретической физики явилась книга «Математические основы квантовой механики», вышедшая задолго перед войной, но лишь недавно переведенная на английский язык [1]). Его исследования в области экономики нашли свое окончательное выражение в классическом труде «Теория игр и экономическое поведение» [2]), написанном совместно с Моргенштерном, одним из ближайших друзей фон Неймана в последние годы. Главным итогом его работы по теории вычислительных машин, несомненно, следует считать создание Принстонской вычислительной машины и ее многочисленных «сестер». Фон Нейман опубликовал также много статей, посвященных анализу основных принципов работы вычислительных машин, и его результаты позволили достичь важных успехов на пути к аксиоматической теории автоматов.

Только выдающийся ум мог внести в науку столь значительный вклад, какой был сделан фон Нейманом. Безупречная логика была наиболее характерной чертой его мышления. Он производил впечатление идеальной логической машины с тщательно подогнанными шестеренками. «Слушая фон Неймана, начинаешь понимать, как должен работать человеческий мозг»,— таков был вывод одного впечатлительного коллеги фон Неймана. Еще более поразительным был свойственный ему блеск мышления. Эта черта отчетливо проявилась, когда фон Нейману было еще только 15 лет. Третьей отличительной чертой его ума была замечательная память, позволявшая ему помимо научной работы иметь десятки увлечений. Он был историком-любителем, осведомленность которого в событиях огромных периодов истории не уступала осведомленности профессионала, свободно говорил на пяти языках и умел читать по-латыни и по-гречески. Он прочитал и помнил содержание многих книг, как художественных, так и научно-популярных по другим областям науки. Из всех тем, на которые автору этих строк доводилось когда-либо беседовать с фон Нейманом, лишь описательные

---

[1]) Имеется перевод: *Иоганн фон Нейман*, Математические основы квантовой механики, М., изд-во «Наука», 1964. — *Прим. перев.*

[2]) Имеется перевод: *Нейман Дж., Моргенштерн О.*, Теория игр и экономическое поведение, М., изд-во «Наука», 1970. — *Прим. ред.*

естественные науки не вызывали у него интереса. Фон Нейман всегда был готов помочь любому, кто обращался к нему за советом, и искренне интересовался любой трудной проблемой. Фон Нейман научил меня математике больше, чем кто-нибудь другой. Что же касается сущности творческого мышления математика, то об этом я узнал от него больше, чем мог бы узнать без него за всю свою жизнь. «Если он анализировал проблему, необходимость в ее дальнейшем рассмотрении отпадала. Всем становилось ясно, что нужно делать», — заявил нынешний председатель Комиссии по атомной энергии США.

Глубокое чувство юмора и незаурядный дар рассказчика различных историй и анекдотов вызывали симпатию к фон Нейману даже у случайных знакомых. Если нужно, он мог быть резким, но никогда не был напыщенным и чванным. Фон Нейман с его безупречной логикой понимал и соглашался со многим из того, что большинство из нас не хотело принимать и даже понимать. Это ощущалось во многих высказываниях фон Неймана на темы морали. «Сетовать на эгоизм и вероломство людей так же глупо, как сетовать на то, что магнитное поле не может возрастать, если ротор электрического поля равен нулю: то и другое — законы природы». Лишь научная, интеллектуальная нечестность и присвоение чужих научных результатов вызывали его гнев и негодование независимо от того, кто был пострадавшим — он сам или кто-либо другой.

Когда фон Нейман понял, что он неизлечимо болен, логика заставила его прийти к выводу, что он перестанет существовать и, следовательно, мыслить. Такое заключение, весь смысл которого непостижим для человеческого рассудка, ужаснуло его. Тяжело было видеть, как ум его, по мере того как исчезали все надежды, терпел одно поражение за другим в борьбе с судьбой, казавшейся ему хотя и неизбежной, но тем не менее совершенно неприемлемой.

Доктор фон Нейман за свои научные достижения был удостоен многих наград и отличий. Он был избран членом Американского философского общества (1938 г.) и членом Национальной Академии наук в необычайно молодом возрасте. Он состоял членом-корреспондентом Королевской голландской академии, Ломбардского института, Академии деи Линчи, Перуанской Академии, членом Американской академии искусств и наук, получил Медаль за заслуги, награду за выдающиеся гражданские заслуги и премию Ферми Комиссии по атомной энергии США. Фон Нейман сделал очень многое. Он был великим умом, по-видимому, величайшим умом первой половины нашего века.

16

ВЫСТУПЛЕНИЕ В РАТУШЕ (СТОКГОЛЬМ, 1963 г.)

Прежде всего я хочу выразить благодарность от имени докторов Марии Гепперт-Майер и Иенсена, а также от себя лично за оказанную нам честь и великолепные торжества, за теплые приветствия, которые доставили всем нам большую радость. Мы очень признательны вам. Однако новое чувство благодарности никогда не должно стирать старое чувство, и поэтому я хочу сказать несколько слов о том, над чем мы редко задумываемся в молодости, но очень ценим впоследствии, когда начинаем размышлять о своем умственном развитии. Я имею в виду наши знания и все то, чем мы обязаны своим учителям.

Человеческое знание стало достоянием общества, а не отдельного индивидуума, потому что человек разработал специальные коды, в которых тем или иным предметам и действиям отвечают специальные звуковые сигналы, и развил в себе способности несколько загадочным образом выучивать один из этих кодов в первые же годы своей жизни. Таким образом, люди получили возможность передавать свои знания и обучать друг друга. Многое из того, что мы знаем, и большая часть известных научных сведений были сообщены нам именно таким способом. Этот процесс с полным основанием можно назвать явной передачей знаний от учителя к ученику. Многое можно сказать и говорилось на эту тему, но сегодня я хочу сказать о другом.

Я хочу обратить внимание на то, насколько наш интерес и отношение к науке зависят от наших учителей. Моя собственная история начинается в одной из высших школ Венгрии, где мой преподаватель математики Ратц начал давать мне книги для чтения и пробудил во мне ощущение красоты своего предмета. Я не могу назвать всех, кому я обязан, но хочу особо отметить то вдохновение, которое я черпал у Поляни. Среди прочих вещей, которым он научил меня, было и убеждение в том, что наука начинается с совокупности тех или иных явлений, между которыми наблюдаются известная согласованность и определенные закономерности, и что наука заключается в усвоении этих закономерностей и выработке понятий, позволяющих естественно выразить их. От него я усвоил и идею о том, что именно научный метод, а не сами понятия (например, понятие энергии) следует переносить на другие области обучения.

Нашими учителями являются не только те, кто старше нас. Мы учимся также и у своих сверстников и у более молодых коллег). Для меня таким сверстником, у которого я научился многому (в действительности очень многому, но главным образом математике) был фон Нейман. В молодости на меня сильное влияние оказал Рей Херб, мой воспитатель. На мое отношение к науке сильное влияние оказали и мои студенты. Взгляды некоторых из них на науку отличались большей зрелостью, чем мои собственные. Я не буду называть имен, чтобы не напрашиваться на своего рода «плату за обучение». Всем им я глубоко благодарен так же, как мы признательны вам за все, что испытали сегодня.

17

ПРИВЕТСТВЕННЫЙ АДРЕС[1])

Говорить с людьми, которые моложе тебя, всегда приятно, и это удовольствие в отличие от других выпадает тем чаще, чем старше ты становишься. Мне особенно приятно говорить с вами сегодня. Для меня это большая честь и высокая привилегия.

Мы живем в беспокойном мире, где все, что нам дорого, висит на тонкой и непрочной нити. Правда, в известной мере основная причина наших трудностей заключена в нас самих, но это обстоятельство не может служить нам утешением и отнюдь не облегчает решения стоящих перед нами проблем. Мы не испытываем недостатка в советах и даже приказаниях относительно того, как нам следовало бы себя вести, но наши проблемы настолько трудны, что уделяемое им внимание приходится считать скорее недостаточным, нежели излишним. Я надеюсь, что по крайней мере в течение сегодняшнего дня за мной благодаря любезности хозяев этого дома будет признано право выступать в качестве юриста и, следовательно, исполнять функции адвоката. Я хотел бы воспользоваться предоставившейся возможностью и, присоединив свой голос ко многим другим, рассказать вам о некоторых принципах, которым, по моему глубокому убеждению, мы можем следовать.

«Будущее неопределенно», — говорит оптимист. Вам, вероятно, приходилось слышать эту шутку. Она очень стара, и все же сегодня она как нельзя лучше отвечает истине. Разрушение, угрожающее нам сегодня, отличается такой полнотой и всеобщностью, какую до сих пор было трудно даже представить себе. Более того, угроза большей части мира, известная подавляющему большинству человечества, сотворена руками человека и находится в его власти.

И все же затруднительное положение, в котором мы находимся в настоящее время, не более ново, чем приведенная мной шутка. Человек всегда опасался за свое будущее и за будущее мира, за будущее всего, что ему дорого. Мир доисторического человека был ограничен его семьей, и он заботился лишь о своей семье. Еще несколько веков назад мир человека не выходил за

---

[1]) Речь произнесена по случаю получения почетной степени доктора права.

пределы его племени или его деревни, в этих узких рамках было сосредоточено все самое дорогое для него. Поэтому беспокойство за будущее своей семьи или своего племени для него имело такое же жизненно важное значение, какое имеют для нас опасения за судьбы всего мира. Технический прогресс и совершенствование средств связи приблизили к нашему порогу весь земной шар, и наше сердце как бы расширилось, приняв в себя все человечество, все опасения за его будущее. Однако наши тревоги были бы отнюдь не меньше, если бы мы заботились только о своей семье, об окружающих нас близких людях и опасность нависла бы только над ними. Впрочем, появление нового оружия всегда казалось угрозой всему живому. Еще в 1139 г. Латеранский совет запретил применение нового оружия — лука — по крайней мере против христиан.

Не ново и то, что нависшая над нами угроза есть дело рук человеческих. С давних времен мерой успеха человека как биологического вида служило то обстоятельство, что опасность, угрожавшая ему со стороны его же братьев, во много раз превосходила опасность, угрожавшую ему со стороны диких зверей и враждебных сил природы. Наши исторические книги полны рассказов о борьбе человека со своими соседями, а не о его борьбе с природой или зверями.

Наконец, я боюсь, что современная ситуация схожа с той, в которой оказались наши предки, и в том отношении, что угрожающие нам конфликты, по-видимому, вряд ли можно разрешить одними лишь рациональными средствами. Никакие доводы греков не убедили персов оставаться на родине и мирно возделывать свои поля, никакие доводы американских борцов за независимость не убедили Британию предоставить Америке самостоятельное правление и никакие доводы британцев не могли заставить патриотов мирно выплачивать налоги. Наш разум — не более чем слуга, наши желания — хозяева наших действий. Человек всегда удовлетворит свои желания, если это не связано с особыми трудностями.

То, о чем я говорил до сих пор, сводится к следующей главной мысли. Современное положение в мире, сколь бы ужасным и угрожающим для всего человечества оно ни было, как выразился бы математик, «в принципе не ново». Оно по существу совпадает с тем, в котором уже оказывались наши предки. Угрожающая нам опасность гипнотизирует нас так же, как нередко гипнотизировала наших праотцов, — мы впадаем в какое-то оцепенение, как мышь при виде змеи. И если мы хотим, чтобы мышь поборола свой страх, мы должны сначала преодолеть наши страхи.

Если наша ситуация схожа с той, в которой уже случалось бывать нашим предкам, то мы должны действовать так же, как должны были бы, по нашему мнению, действовать и действительно действовали в большинстве случаев наши предки. Мы должны думать и действовать так же, как думали и действовали люди, которыми мы восхищаемся за одержанные ими победы и которыми продолжаем восхищаться вопреки их поражениям. Много деятелей прошлого достойны нашего уважения. Их отличали любовь к миру, терпение, настойчивость и даже готовность пойти на жертвы во избежание конфликтов. Они обладали также и мужеством. Они имели мужество не закрывать глаз на то, что ожидало их сегодня и что неизбежно ждало их завтра. Они не избегали конфликта, если знали, что этим не ликвидируют, а лишь отдалят его наступление и что завтра он может разразиться при более неблагоприятных условиях, чем сегодня.

Другой отличительной чертой тех, кого мы вспоминаем особенно часто, была их преданность друзьям. Они высоко ценили дружбу, понимая, что можно выстоять или пасть вместе с друзьями, но нельзя предать друга и союзника, не изменив самому себе. Со своими друзьями они заключали союзы, в которых более сильный никогда не говорил слабому: «Я сильнее»,— и в которых слабый никогда не пытался вымолить у общего врага пощаду, лишив попавшего в беду друга своей поддержки. Стоя здесь, перед вами, как ваш друг и в то же время как незнакомый вам человек, я вдвойне сознаю все безумие иного отношения к друзьям. Будем же верны своим друзьям, как были верны наши предки.

Будем же сегодня трезво смотреть на то, что ожидает нас завтра. Обычно люди стараются не думать о смерти. Наша культура совершает грех, пытаясь закрыть нам глаза на ту непреложную истину, что никто из нас не будет жить вечно. В результате мы оказываемся неподготовленными к неизбежно наступающему последнему часу и не сознаем, что то, как мы умрем — борясь со злом, предав своих друзей или будучи преданными ими, — имеет решающее значение для дела всей нашей жизни.

Мне выпала сегодня необычная честь, и я не мог бы отблагодарить вас за нее более искренне, чем рассказав о том, что особенно волнует меня. Будем же надеяться, что и я и вы сможем жить в соответствии с теми принципами, которые мы провозглашаем, полные сил и в отсутствие непосредственной опасности.

V. ЕЩЕ О СИММЕТРИИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

18

ПРИНЦИПЫ СИММЕТРИИ В СТАРОЙ И НОВОЙ ФИЗИКЕ[2])

ВВЕДЕНИЕ И КРАТКИЙ ОБЗОР

Соображения симметрии и инвариантности давно уже играют в физике важную роль. Кристаллографические классы (их 32), т. е. группы вращений в трехмерном пространстве, все элементы которых имеют порядок 2, 3, 4 или 6, были определены 137 лет назад — в тот самый год, когда родилась теория групп. Вывод Федоровым и Шенфлисом 230 пространственных групп [3]) (так принято называть дискретные подгруппы евклидовой группы, содержащие три некопланарных сдвига) по праву считается шедевром анализа. Не меньшее восхищение вызывает и данная Гротом классификация возможных свойств кристаллов, обладающих симметрией пространственных групп.

В классической физике первостепенное значение придавалось подгруппам евклидовой группы, а перечисление таких подгрупп и вывод инвариантных относительно них свойств считались основной задачей. Гораздо более экзотическими выглядели с математической точки зрения группы симметрии релятивистских теорий, однако они не привели физиков ни к сколько-нибудь значительному вкладу в математическую теорию групп, ни к постановке новых интересных математических проблем. Когда же соображения симметрии были применены к другому великому достижению физической теории нашего времени — к квантовой механике, новые проблемы посыпались, как из рога изобилия, и было установлено несколько интересных математических теорем. Основная причина столь резкого различия меж-

---

[1]) К русскому изданию мы добавили часть V, в которую включили ряд статей Вигнера, посвященных проблемам симметрии, но не вошедших в американское издание.

[2]) Из журнала: Bull. Amer. Math. Soc., 74, № 5, 793 (1968). Лекция прочитана 23 января 1968 г. в Сан-Франциско на ежегодном съезде Американского математического общества. Посвящена памяти Джозайи Вилларда Гиббса.

[3]) В настоящее время их принято называть «федоровскими» группами. (Приоритет Е. С. Федорова подчеркнут А. Шенфлисом в его опубликованном письме знаменитому русскому кристаллографу.) — *Прим. перев.*

ду квантовой и классической теориями заключалась в способах описания состояния. В классической теории состояние характеризуется положением и скоростью частиц. Задание этих параметров эквивалентно заданию соответствующих точек в обычном трехмерном пространстве. В квантовой теории состояние определяется вектором в абстрактном гильбертовом пространстве. Преобразования симметрии в классической теории были весьма наглядными преобразованиями трехмерного пространства, в квантовой теории роль преобразований симметрии стали играть унитарные преобразования гильбертова пространства. Последние образуют различные подгруппы группы всех унитарных преобразований, существенно гомоморфные группе симметрии рассматриваемой задачи — *существенно* потому, что в квантовой механике всякое унитарное преобразование эквивалентно любому другому унитарному преобразованию, отличающемуся от него множителем, равным по модулю 1. В результате исследований, проведенных главным образом Баргманом [18], выяснилось, что столь сильную неоднозначность можно ослабить, а в большинстве случаев после надлежащего расширения унитарной подгруппы даже заменить гомоморфизм изоморфизмом. Такая расширенная группа носит название квантовомеханической группы симметрии. Операции квантовомеханической группы симметрии разбивают гильбертово пространство состояний на подпространства, каждое из которых инвариантно относительно преобразований группы. Следовательно, в каждом инвариантном подпространстве эти операции индуцируют представление квантовомеханической группы симметрии унитарными преобразованиями.

Физики предприняли намного более подробное изучение представлений групп симметрии, чем это было сделано до них математиками. В тех случаях, когда представления уже были в принципе известны, физики нашли канонические формы неприводимых представлений и инвариантные подпространства прямых (или тензорных) произведений инвариантных подпространств. Это позволило им построить теорию различных коэффициентов связи ($3j$-, $6j$- и других j-символов более высокого порядка), представляющих интерес и с точки зрения чистой математики. Для некоторых некомпактных групп Ли физики нашли ранее неизвестные унитарные представления. Во многих случаях все нетривиальные представления оказались бесконечномерными. Отыскание бесконечномерных представлений всех локально компактных групп превратилось в быстро развивающуюся область математики.

Вплоть до недавнего времени в центре внимания физика, занимающегося изучением следствий тех или иных принципов инвариантности, находилась теория представлений групп. Группой симметрии в большинстве случаев служила либо квантовомеханическая группа Пуанкаре, либо какая-то из ее подгрупп. В последние годы интерес переместился на группы, являющиеся лишь группами приближенной симметрии и образующие различные расширения группы Пуанкаре. Таким образом, мы присутствуем при обратном процессе, когда основным объектом изучения вновь становятся не представления известных групп, а проблемы построения самих групп, в частности таких, которые содержат в качестве подгруппы группу Пуанкаре. Относительно таких групп и их представлений получено много интересных результатов.

ЭВОЛЮЦИЯ ФИЗИКИ

Физика и естествознание за последние 100—150 лет претерпели значительные изменения. Изменился дух науки, ее предмет, способ действия.

Изменение духа науки произошло в направлении все более возрастающей изощренности. Если лет сто назад законы физики формулировались в терминах непосредственно наблюдаемых величин, то современная физика использует для тех же целей сложнейшие математические построения, и это не удивительно, поскольку проведенный современной физикой анализ понятия «непосредственно наблюдаемые величины» привел к выводу, что в микроскопической области такие величины не существуют. Мало кто помнит, что первый крупный шаг на пути к изощренной в математическом отношении теории — введение фазового пространства с его чудовищным числом измерений — был сделан Виллардом Гиббсом [1]). Следующие два шага на пути к математически изощренной теории хорошо известны — создание теории относительности и квантовой механики. По иронии судьбы последние два шага были предприняты именно для того, чтобы исключить из физической теории непосредственно ненаблюдаемые величины. Величины, принципиальную ненаблюдаемость которых создатели теории относительности и квантовой теории сознавали, действительно удалось исключить, но их место заняли также непосредственно ненаблюдаемые величины: вектор состояния и гравитационная метрика — понятия, отличающиеся от понятий классической физики намного большей математической и логической изощренностью.

---

[1]) Работа Гиббса [1], весьма законченная по форме, объемом почти 300 страниц была написана в 1901 г. и опубликована Йельским университетом в 1902 г. В 1928 г. вышло ее второе издание. Во втором томе работы [2] помещены интересные примечания Гааза к работам Гиббса (точнее, два комментария — короткий и длинный). Работа Гиббса [3], в которой он ввел понятие, справедливо носящее его имя, — понятие фазового пространства, имела объем всего лишь 1 страницу. Она была опубликована в 1884 г. Желающие могут найти ее на стр. 16 второго тома «Научных трудов Вилларда Гиббса» [4].

Предмет физики, да и других естественных наук также изменился. Это изменение особенно заметно на примере физики: если в конце прошлого века физика занималась изучением лишь макроскопических объектов, то теперь мы считаем работу по макроскопической физике (например, изящную новую теорию трения Боудена и Табора [5]) экзотической.

Изменился, наконец, и способ действия. Теперь у нас есть Большая Наука (в смысле Альвина Вейнберга) с ее сотнями ученых, вливающихся каждое утро в лаборатории, дабы сорвать завесы, за которыми природа пытается скрыть свои тайны. Это изменение уже неоднократно обсуждалось, и я не хочу останавливаться на нем сейчас.

И все же кое-что осталось неизменным. Как и во времена Галилея, если воспользоваться словами самого Галилея [1]), «природа формулирует свои законы на языке математики». Идеи симметрии и инвариантности неизменно (по крайней мере, если иметь в виду последние 150 лет) играют важную роль в физике, и значение их, по-видимому, все возрастает.

С другой стороны, существенно изменились представления о том, какие разделы математики особенно полезны физикам. Даже 50 лет назад математический аппарат физика ограничивался теорией обыкновенных дифференциальных уравнений с небольшой «примесью» уравнений с частными производными. Лет 35 назад уравнения с частными производными и теория гильбертова пространства уже занимали в математическом образовании физика доминирующее место. Сегодня нам чаще приходится слышать о теории аналитических функций одной или нескольких переменных, о теории обобщенных функций и, наконец, о теории групп и их представлений, чем о теории гильбертова пространства и преобразованиях к главным осям, хотя последние и по сей день, по-видимому, могут служить языком для формулировки законов природы.

СИММЕТРИЯ КРИСТАЛЛОВ

Вернемся к первой теме моей лекции и рассмотрим роль симметрии в старой (в действительности очень старой) физике. В те давние времена симметрия использовалась по существу лишь в кристаллографии. Я упоминаю об этом здесь не потому, что мне удалось получить какие-то новые математические результаты, представляющие интерес для кристаллографов, а совсем по иной причине. История кристаллографии служит примером того, как одни и те же идеи возникают и развиваются параллельно у математиков и у естествоиспытателей и как обе

[1]) «Egei e scritto in lingua matematica...». См. работу [6].

категории исследователей, имеющих вначале весьма отдаленное представление друг о друге, на более поздней стадии развития теории объединяют свои усилия. Роль естествоиспытателя сводится в основном к постановке новых проблем и нахождению некоторых их решений. Математик не только способствует более глубокому пониманию решения, найденного естествоиспытателем, но и существенно обобщает первоначальную постановку проблемы. На ранних стадиях своего развития каждое из этих направлений ничего не знает о результатах и методах своего соседа, но впоследствии между ними устанавливается тесное сотрудничество.

То, о чем я намереваюсь рассказать в своем докладе, относится в основном к естествоиспытателям, но я надеюсь, что и математики смогут почерпнуть из доклада кое-что новое для себя.

История применения идей симметрии в физике начинается с 1830 г., когда Гессель вывел 32 кристаллографических класса [1]). Так принято называть конечные группы собственных и несобственных поворотов в трехмерном пространстве, содержащие лишь элементы порядка 1, 2, 3, 4 и 6. Статья Гесселя появилась за два года до знаменитой дуэли [2]), происшедшей в Париже. В том же 1830 г. впервые прозвучал термин «группа», и само понятие было четко сформулировано.

Может возникнуть вопрос, почему Гессель ограничился рассмотрением групп, содержащих лишь элементы порядка 1, 2, 3, 4 и 6. Причина заключалась в том, что Гесселю было известно свойство кристаллов, открытое за 50 лет до того одним из основателей кристаллографии аббатом Гаюи [3]). Гаюи обнаружил удивительную особенность расположения кристаллографических плоскостей. Заключается она в следующем. Выберем за направления осей координат линии пересечения любых трех кристаллографических плоскостей. Тогда отношения длин отрезков, отсекаемых на этих осях любой другой кристаллографической плоскостью, будут выражаться рациональными числами. Это свойство кристаллов получило название закона рациональных индексов. Группа симметрии кристалла, содержа-

---

[1]) Статья Гесселя была первоначально опубликована в справочнике [7], а позднее напечатана в одной из книг серии «Освальдовские классики точного естествознания» (см. [8], стр. 91 и далее). Интересующихся историей кристаллографии мы отсылаем к книге [9]. Современный обзор истории кристаллографии, отличающийся необычайной широтой охвата материала, см. в книге [10].

[2]) Имеется в виду дуэль, на которой погиб основоположник теории групп Эварист Галуа. — *Прим. перев.*

[3]) Речь идет о статье Гаюи [11]. Подробная библиография приведена в книге Берка [10] (стр. 190). Берк выражает сомнение (см. стр. 83, 84 его книги) в том, что Гаюи ничего не знал о работах своих предшественников, и в частности о работах Бергмана.

щая повороты на любые углы, кроме 60, 90° и кратных им, противоречила бы закону рациональных индексов. С этим обстоятельством и связано условие Гесселя: все повороты, входящие в группу симметрии кристалла, должны быть элементами порядка 1, 2, 3, 4 и 6.

Закон рациональных индексов Гаюи был эмпирическим законом, и его вряд ли удалось бы открыть, если бы рациональные числа, которыми выражаются отношения длин отрезков, отсекаемых кристаллографическими плоскостями на координатных осях, не были очень простыми. При надлежащем выборе основных плоскостей числители и знаменатели этих рациональных чисел, как правило, меньше 6, а нередко и 4. Если бы рациональные числа, о которых говорится в законе Гаюи, были произвольными, закон рациональных индексов нельзя было бы проверить экспериментально. Более того, само открытие закона было бы невозможным, если бы Гаюи не исходил из наглядной картины строения кристаллов, описанной почти за 300 лет до него епископом Стено[1],— правильного расположения атомов в узлах пространственной решетки. Ныне мы располагаем доказательствами реальности такой картины. Именно она привела Гаюи к открытию закона рациональных индексов, который затем был проверен экспериментально и в свою очередь позволил указать, каким ограничениям должны удовлетворять повороты для того, чтобы они могли входить в группу симметрии кристалла (условия Гесселя). Когда в самом конце прошлого века Федоров [14] и Шенфлис [13] исследовали полную симметрию кристаллов, обнаружилось, что найденные Гесселем группы являются 32 различными факторгруппами всех возможных пространственных групп по инвариантным подгруппам, образованным сдвигами. Пространственными группами называются дискретные подгруппы евклидовой группы, содержащие три некопланарных сдвига. Всего, как показали Федоров и Шенфлис с помощью теоретико-групповых методов, уже известных в то время по крайней мере некоторым кристаллографам, существует 230 пространственных групп. Введенное Гесселем ограничение (элементы групп симметрии кристаллов могут иметь лишь порядок 1, 2, 3, 4 и 6) оказалось гораздо менее произвольным, чем могло показаться на первый взгляд.

Заключительная часть истории роли симметрии в очень старой физике представляет интерес лишь для физиков. Свойства симметрии кристаллов определенным образом проявляются в макроскопических свойствах кристаллов, что позволяет получать ценные сведения об их внутреннем строении. Информация

[1]) См. работу [12]. В действительности в этой работе содержится лишь зародыш идеи о кристаллической решетке.

такого рода с полным пониманием групповых свойств операций симметрии, хотя, как правило, и не на языке теории групп, была получена в основном Гротом [15][1]). Нам, физикам старшего поколения, по-прежнему доставляет удовольствие читать о свойствах кристаллов и узнавать о тех чрезвычайно редких исключениях, когда симметрия, присущая подавляющему большинству свойств кристаллов, слегда нарушается. К сожалению, симметрию кристаллов нельзя сформулировать на языке современной квантовой теории, поскольку эта симметрия носит лишь приближенный характер (приближенный в том смысле, что она верна, если движение ядер можно описывать с помощью классической, т. е. неквантовой, теории). Не меньшее сожаление вызывает и то обстоятельство, что никому из нас не удалось установить пределы применимости понятия симметрии кристалла и указать явления, в которых должен проявляться ее приближенный характер.

Прежде чем переходить к более современным вопросам, и в частности к квантовой теории, я должен заметить, что интуитивные представления о симметрии играли важную роль в мышлении великих физиков прошлого, хотя явное использование симметрии в старой физике ограничивалось в основном кристаллографией. Например, считалось, что между двумя материальными точками всегда действует центральная сила, т. е. сила, направленная вдоль соединяющей их прямой. Лишь такое направление силы совместимо с инвариантностью относительно вращений. Инвариантность законов физики относительно сдвигов (как в пространстве, так и во времени) была гипотезой, захватившей умы естествоиспытателей задолго до того, как был найден изощренный способ ее формулировки. В некоторых работах Ньютона ясно ощущается, что их автор был знаком с принципом, который мы теперь называем принципом инвариантности Галилея.

В конце рассматриваемого нами периода истории физики Гамель, Клейн и Нетер предложили для законов сохранения, встречающихся в физике, весьма изящный и тонкий вывод на основе теоретико-групповых соображений. К тому времени законы сохранения уже были, разумеется, хорошо известны, и физики умели выводить их более элементарными способами. Поскольку использование принципа симметрии при выводе законов сохранения носит косвенный характер, а весь круг возникающих при этом проблем неоднократно обсуждался и математиками и физиками, мы не будем останавливаться на нем более подробно.

---

[1]) В более явном виде теоретико-групповой подход использовал в своем учебнике Фойгт [16].

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Нельзя не удивляться тому, что принципы симметрии играли явную и непосредственную роль лишь в весьма узкой области старой физики — кристаллографии. Действительно, инвариантность уравнений движения относительно групп Галилея или Пуанкаре[1]), включающих в себя всю евклидову группу, должна приводить к прямым следствиям для явлений, лежащих вне кристаллографии. Выясним, в чем состоят эти следствия.

Рассмотрим очень простую систему: атом водорода с электроном, движущимся по боровской орбите. К каким очевидным, «наивным» следствиям приводит инвариантность уравнений движения относительно группы Галилея или Пуанкаре? Во-первых, мы вправе утверждать, что атом водорода с успехом может находиться в любом другом месте, а не только там, где он действительно находится. Во-вторых, электрон может находиться в любой точке свой орбиты. В-третьих, атом водорода может находиться в состоянии равномерного прямолинейного движения, а не только в состоянии покоя. Наконец, боровская орбита может лежать в любой наклонной плоскости, а не только в горизонтальной. Все эти свойства атома водорода могут соответствовать истине, но ни одно из них ничего не говорит о свойствах боровской орбиты.

Проанализируем последнее утверждение. По-видимому, атом водорода действительно мог бы находиться в любой точке про-

---

[1]) Согласно классической, т. е. нерелятивистской, теории, уравнения движения останутся инвариантными, если три пространственные координаты x_i $(i = 1, 2, 3)$ подвергнуть преобразованию Галилея

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} O_{ik} x_k + v_i t + a_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где величины O_{ik} образуют ортогональную матрицу 3×3. Время t либо остается инвариантным $(t' = t)$, либо подвергается преобразованию сдвига начала отсчета

$$t' = t + a_0.$$

Вектор $\boldsymbol{v}$ указывает, какую скорость имеют две системы координат (старая и новая) относительно друг друга; вектор $\boldsymbol{a}$ определяет, насколько начало новой системы координат было смещено относительно начала исходной системы координат при $t = 0$. В соответствующем преобразовании симметрии, принятом в теории относительности (преобразование Пуанкаре), время обретает большее равноправие по сравнению с пространственными координатами: вместо времени t в теории относительности вводится переменная $x_0 = ct$ (c — скорость света), и преобразование записывается в виде

$$x'_i = \sum_{k=0}^{3} L_{ik} x_k + a_i \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

где L — преобразование Лоренца, т. е. какой-то элемент группы $O(1, 3)$. Преобразование Пуанкаре иногда также называют неоднородным преобразованием Лоренца.

странства и иметь любую скорость, однако его боровская орбита явно не могла бы иметь произвольную ориентацию. Действительно, если бы это было возможным, то атом водорода, расположенный в данной точке пространства и находящийся в состоянии покоя, мог бы (вопреки всей нашей интуиции, всему опыту и нулевой энтропии внутреннего движения) находиться в бесконечно многих различных состояниях. Нелепость подобного вывода ощущалась всеми задолго до создания квантовой механики.

Как разрешает это противоречие квантовая механика? Коль скоро состояние движения атома водорода известно, мы вообще полностью знаем его состояние. Отсюда следует, что атом водорода (по крайней мере, если отвлечься от спина) сферически симметричен. Возникает вопрос: все ли состояния атома водорода сферически симметричны? Очевидно, не все: комбинация протон — электрон должна обладать сферически несимметричными состояниями. Поскольку все такие состояния, так же как в классической теории, можно подвергнуть вращениям, мы получаем бесконечно много состояний, связанных с высоколежащими возбужденными состояниями атома водорода. Однако все такие состояния представимы (и это обстоятельство имеет решающее значение) в виде линейных суперпозиций конечного числа состояний. Существенно здесь то, что в квантовой механике физическое состояние — реальное состояние системы — определяется не положением и скоростями, а вектором в гильбертовом пространстве[1]). Эквивалентность всех направлений в квантовой теории, так же как и в классической, означает существование всех состояний, получающихся из любого заданного состояния при вращениях. Однако в отличие от классической в квантовой теории история на этом не заканчивается: в последней все состояния, получающиеся при вращении из какого-то одного состояния, можно представить в виде линейных комбинаций некоторых базисных состояний, в классической же теории линейной суперпозиции состояний не существует. Состояния в квантовой теории — это векторы в линейном пространстве. В классической теории такое утверждение было бы просто неверно. Мы не можем взять сумму двух состояний классической системы, но ничто не мешает нам сделать это для квантовых состояний. Более того, вектор состояния, равный сумме двух других векторов состояния, в действительности не определяет нового состояния: описываемое им состояние с вероятностью $^1/_2$ является первым и с вероятностью $^1/_2$ — вторым состоянием. Так обстоит дело по крайней мере в том случае,

---

[1]) Ныне этот факт общеизвестен, однако впервые он был точно сформулирован фон Нейманом [17].

если векторы состояния, для которых мы ищем сумму, ортогональны. Если же они не ортогональны, то их нельзя считать совершенно различными. Отсюда, в частности, следует, что при вычислении энтропии необходимо учитывать лишь состояния с ортогональными векторами состояния.

Прежде чем сформулировать математические проблемы, к которым приводит линейность векторов состояния, я хотел бы несколько дополнить нарисованную выше картину. До сих пор мы рассматривали лишь состояния, получающиеся из некоторого состояния при вращениях. Что произойдет, если мы будем переводить друг в друга состояния с различными скоростями? Пусть атом водорода находится сначала в состоянии покоя, а затем движется с различными скоростями. Из инвариантности относительно преобразований Галилея или Пуанкаре следует, что если система существует в состоянии покоя, то ее можно привести в состояние равномерного прямолинейного движения с любой скоростью и в любом направлении. Существование одного заданного состояния вновь вынуждает нас, так же как и в классической теории, постулировать существование бесконечно большого числа других состояний. Верно ли, что в квантовой механике это бесконечное множество состояний или, точнее, множество отвечающих им векторов состояний можно представить в виде линейных комбинаций меньшего числа состояний?

Ответ на этот раз должен быть отрицательным. Действительно, для любых двух состояний с различными скоростями векторы состояний ортогональны. С точки зрения физики такой результат естествен (экспериментально мы можем отличать состояния с различными скоростями, но не можем отличать состояния с различной ориентацией орбит). Тем не менее столь сильное различие между следствиями двух типов преобразований симметрии — вращений в пространстве и собственных преобразований Галилея или Лоренца — не может не вызывать удивления.

Рассмотрим наконец последний тип преобразований Галилея: сдвиги в пространстве и во времени. С этими преобразованиями ситуация очень проста: если скорость задана, то состояние инвариантно относительно сдвигов. Это прямое следствие соотношения неопределенности Гейзенберга. Если требуется получить состояние, локализованное в определенный момент времени в окрестности некоторой точки, нужно построить суперпозицию состояний с различными скоростями — состояний, которые, как мы только что узнали, ортогональны друг другу.

Сказанное ранее на языке, привычном для физика, полезно повторить, прибегнув к точной математической терминологии. В классической механике состояние системы определяется положением точки в фазовом пространстве. Если система состоит из одной частицы, то ее фазовое пространство шестимерно: три координаты отвечают пространственным координатам частицы и три — компонентам ее скорости. Размерность фазового пространства системы, состоящей из большего числа частиц, соответственно больше[1]). Преобразования Галилея и Пуанкаре — это линейные неоднородные преобразования в фазовом пространстве. В квантовой механике состояние любой системы определяется вектором в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Действующие в этом пространстве преобразования симметрии линейны, а фактически даже унитарны. Поскольку унитарное преобразование, отвечающее произведению двух преобразований симметрии (по крайней мере с точностью до несущественного множителя), совпадает с произведением унитарных преобразований, соответствующих каждому из сомножителей, унитарные преобразования, действующие в гильбертовом пространстве состояний, образуют (по крайней мере с точностью до множителя) унитарное представление группы симметрии. В нерелятивистских теориях группой симметрии служит группа Галилея, в релятивистских — группа Пуанкаре. Некоторые внешние воздействия иногда понижают полную группу симметрии пространства-времени до какой-нибудь из подгрупп названных групп. Так, при движении электронов в кристалле группа симметрии совпадает с одной из 230 пространственных групп.

Резкое различие между классическими и квантовыми преобразованиями симметрии объясняется отнюдь не различием между линейными неоднородными преобразованиями, с одной стороны, и унитарными преобразованиями — с другой. Столь сильное различие обусловлено прежде всего тем, что в классической теории преобразование симметрии всегда одно и то же или, точнее, зависит лишь от числа частиц, координаты и скорости которых мы преобразуем. В квантовой же теории преобразования симметрии (унитарные представления группы симметрии) для разных систем различны и определяют многие свойства системы. Кроме того, сложение двух состояний, не имеющее смысла в классической теории, обретает смысл в квантовой теории. Пространство состояний квантовой теории — ее гильбертово пространство — является линейным в подлинном смысле этого слова!

Первый из приведенных выше аргументов во многом объясняет интерес, проявляемый физиками к унитарным представлениям. Как показал Баргман [18], унитарные представления

[1]) «Фазовое пространство» как математическое понятие впервые ввел Гиббс [3].

группы Галилея в неявном виде использовались еще в теории Шредингера. Унитарные представления группы Пуанкаре были найдены в конце 30-х годов. За исключением тривиального представления, все они оказались бесконечномерными[1]). Физически такой результат эквивалентен утверждению о том, что система не может быть релятивистски инвариантной, если она не обладает бесконечным набором ортогональных состояний. Обратив внимание на свойства унитарных представлений некомпактных групп Ли, физики стимулировали интерес математиков к этой области. В настоящее время математики намного обогнали физиков в изучении унитарных представлений некомпактных групп Ли, и разобраться в результатах Гельфанда, Наймарка, Хариш-Чандры и многих других авторов отнюдь не легко[2]).

РОЛЬ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Обратимся теперь к вопросу, который мы уже задавали ранее: почему вращения и собственные преобразования Галилея или Лоренца оказывают столь различные действия на состояния? Можно сказать, что полная группа симметрии состоит из элементов трех типов: сдвигов, поворотов и собственных преобразований Галилея или Лоренца. Рассмотрев минимальные подпространства, инвариантные относительно сдвигов, т. е. подпространства в пространстве представления, образующие базис неприводимого представления подгруппы сдвигов, мы обнаружим, что одно из таких подпространств остается инвариантным при вращениях. У физика подобный результат не вызывает удивления: подпространство, о котором идет речь, содержит векторы состояния, соответствующие покоящейся системе. Действительно, перебрав неприводимые представления полной группы симметрии, мы убедимся, что вращения индуцируют в интересующем нас подпространстве некое неприводимое представление группы вращений. С другой стороны, собственное преобразование Галилея или Лоренца переводит каждое минимальное подпространство, инвариантное относительно сдвигов,

---

[1]) Впервые это было показано автором [19].

[2]) Гельфанд, Наймарк и их сотрудники опубликовали чрезвычайно много работ. С моей точки зрения, наибольшего внимания заслуживает книга Гельфанда и др. [20], работы Наймарка [21] и Гельфанда и Наймарка [22]. См. также статьи этих авторов, опубликованные в «Успехах матем. наук» и «Трудах Моск. матем. общества».

Статей Хариш-Чандры так много, что их трудно полностью перечислить. Книги, в которой бы излагались его результаты, до сих пор нет. См. ранние статьи Хариш-Чандры [23]. Среди его последних работ мне хотелось бы отметить статьи [24, 25].

в подпространство той же размерности, ортогональное исходному подпространству состояний. Таким образом, переход от состояний с одной скоростью к состояниям с другой скоростью оказывает на минимальные подпространства, инвариантные относительно сдвигов, такое же действие, как и любое другое преобразование в классической теории, а именно: создает совершенно новое состояние. Поэтому преобразования, переводящие состояния с одной скоростью в состояния с другой скоростью, в каком-то смысле тривиальны. Преобразования же, соответствующие вращениям, в высшей степени нетривиальны: в рассматриваемом нами подпространстве они порождают неприводимое представление группы вращений. Отсюда следует, что неприводимые представления полной группы симметрии характеризуются тем, как ведет себя под действием сдвигов и вращений некоторое выделенное минимальное подпространство. Мы подробно остановились на этом вопросе, чтобы объяснить, почему физики питают столь большой интерес к группе вращений в трехмерном пространстве. Интерес этот вполне понятен: в основе его лежит общий принцип инвариантности Пуанкаре или Галилея.

Рассмотрим теперь неприводимое представление группы вращений или какой-либо другой группы. Если мы захотим «пощупать его своими руками», то сделать это лучше всего с помощью какой-нибудь системы координат в пространстве представления. Естественнее всего определить последовательность подгрупп G, G_{n-1}, G_{n-2}, $\ldots$, G_1, обладающую следующим свойством: каждый член последовательности является максимальной подгруппой в предыдущем члене, а G_1 состоит лишь из единичного элемента. Введем некоторые предположения. Будем считать, что преобразования группы G, служащие одновременно элементами подгруппы G_{n-1} и образующие представление этой подгруппы, содержат неприводимые представления подгруппы G_{n-1} с кратностью, не превышающей 1. Кроме того, предположим, что аналогичное утверждение справедливо для ограничения любого неприводимого представления каждой из групп G_k на подгруппу G_{k-1}. Тогда в пространстве представления группы G можно однозначно задать направление, указав неприводимые представления групп G_2, G_3, $\ldots$, G_{n-1}, в пространстве представлений которых это направление содержится. Тем самым мы получаем возможность построить единичный вектор в указанном направлении. Совокупность таких единичных векторов образует базис в пространстве представлений: единичные векторы попарно ортогональны и образуют в исходном пространстве неприводимого представления группы G полную систему.

Поясним сказанное на примере. В качестве G выберем симметрическую группу S_n, образованную всеми перестановками из n символов. Пусть $S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots, S_1$ — цепочка подгрупп, обладающая указанными выше свойствами, причем S_{n-k} означает симметрическую группу, перестановки которой оставляют последние k символов на месте. Тогда из классических теорий Юнга [26, 27] и Фробениуса [28][1]) следует, что неприводимые представления подгруппы S_{n-k-1} входят в ограничение любого неприводимого представления S_{n-k} на подгруппу S_{n-k-1} с кратностью, не превышающей 1. Следовательно, мы можем задать вектор в пространстве представления $3+2$ группы S_5, указав, что он принадлежит пространству представления $3+1$ группы S_4, пространству представления $2+1$ группы S_3 и пространству представления 2 группы S_2. В случае группы вращений в трехмерном пространстве цепочка подгрупп помимо $O(3)$ содержит лишь группу $O(2)$ [и, конечно, $O(1)$]. Группа $O(2)$ состоит из вращений, оставляющих инвариантной ось z, т. е. из вращений вокруг оси z. Такой выбор «координат» приводит к обычной форме неприводимых представлений группы $O(3)$.

В заключение я хотел бы упомянуть о новом математическом результате, относящемся к затронутой нами теме[2]). Я имею в виду необходимое и достаточное условие, для того чтобы подгруппа обладала рассмотренным выше свойством: ограничение представления всей группы на эту подгруппу не содержало бы представлений этой подгруппы с кратностью, большей 1 (указанным свойством должны обладать все неприводимые представления полной группы). Чтобы сформулировать приведенное выше условие, полезно ввести понятие *подкласса*. Подклассом называется совокупность элементов группы, трансформируемых друг в друга элементами подгруппы. Ясно, что произведение двух подклассов содержит лишь полные подклассы и что обычные классы сопряженных элементов содержат один, два или большее число подклассов. Не столь очевидно, коммутируют ли подклассы (обычные классы сопряженных элементов коммутируют). Если подклассы коммутируют, то соответствующая подгруппа обладает интересующим нас свойством. В этом состоит необходимое условие. Нетрудно видеть, что подклассы коммутируют, если каждый из них совпадает с обратным себе. Легко показать, что подклассы группы S_n относительно подгруппы S_{n-1} этим свойством обладают. Таким образом, к результату, следующему из теорий Юнга и Фробениуса, можно прийти и другим путем.

При решении конкретных задач выбор той или иной формы неприводимых представлений трехмерной группы вращений

---

[1]) См. также работу [29] и более «физическую» статью Коулмена в сборнике [30].

[2]) См. статью автора в сборнике [31].

позволяет существенно упростить вычисления. Квадраты матричных элементов допускают простую, хотя и с трудом поддающуюся экспериментальной проверке интерпретацию: они указывают вероятность того, что частица с определенной компонентой углового момента в одном направлении будет иметь некое значение компоненты углового момента в другом направлении. Более широкую известность получили и подтверждены обширным экспериментальным материалом правила Хенля—Кронига, позволяющие вычислить отношение интенсивностей переходов между подуровнями, на которые расщепляются в магнитном поле два уровня [32—35]. В этом случае следует выбирать подгруппу $O(2)$ (направление магнитного поля должно оставаться инвариантным при вращениях).

РАЗЛОЖЕНИЕ КРОНЕКЕРОВСКОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Конкретный выбор формы неприводимых представлений во многом облегчает и решение той задачи, к которой мы сейчас перейдем: разложение кронекеровского произведения представлений на неприводимые представления. Эта задача встречается чрезвычайно часто, и перечислить все ее применения было бы трудно. Физической основой большинства приложений служит правило получения вектора состояния составной системы, включающей в себя две подсистемы: искомый вектор состояния определяется в гильбертовом пространстве, которое является прямым произведением (иногда его также называют кронекеровским произведением) гильбертовых пространств подсистем, а сам вектор состояния есть не что иное, как кронекеровское произведение векторов состояний подсистем [1]). Следовательно, если две системы образуют единое целое, причем каждая из них находится в состоянии, которому отвечает вектор базиса неприводимого представления (не обязательно одного и того же), то вектор состояния всей системы будет лежать в пространстве, являющемся кронекеровским произведением пространств двух неприводимых представлений. Аналогичное утверждение применимо и к случаю, когда составная система включает в себя три или большее число физических подсистем. Первый вопрос, который возникает здесь с точки зрения теории представлений, заключается в следующем: каким образом прямое произведение пространств можно разложить на подпространства, каждое из которых принадлежит неприводимому пред-

[1]) Понятие кронекеровского произведения было неявно использовано при описании физической системы, состоящей из двух подсистем, еще в работах Шредингера (см., например, [36]). В явном и точном виде это понятие сформулировал фон Нейман [17].

ставлению, и что за неприводимые представления при этом возникнут?

По-видимому, будет полезно наметить здесь общий ход рассуждений, позволивший дать ответ на эти вопросы. Наиболее важной группой, к которой можно применять излагаемые ниже соображения (и к которой они в действительности были применены), и на этот раз является группа $O(3)$. Кто-то сказал, что в отличие от математика физик живет в трехмерном пространстве не только физически, но и «мысленно». Группа $O(3)$ амбивалентна, т. е. все ее классы сопряженных элементов совпадают с обратными классами. В силу этого все ее характеры вещественны. В дальнейшем мы будем предполагать, что все встречающиеся нам характеры вещественны, поскольку введение комплексных характеров приводит лишь к незначительным усложнениям теории. Группа Пуанкаре также амбивалентна, но некоторые из упоминаемых далее групп неамбивалентны.

Если характеры представлений равны $\chi^{(a)}$, $\chi^{(b)}$, $\chi^{(c)}$, ..., то характер их прямого произведения равен

$$\Xi(r) = \chi^{(a)}(r)\,\chi^{(b)}(r)\,\chi^{(c)}(r)\ \ldots, \tag{1}$$

и кратность, с которой $\chi^{(\nu)}$ входит в представление с характером Ξ, равна

$$N_\nu = h^{-1} \int \Xi(r)\,\chi^{(\nu)}(r)\,dr = h^{-1} \int \chi^{(a)}(r)\,\chi^{(b)}(r)\ \ldots\ \chi^{(\nu)}(r)\,dr, \tag{1a}$$

где h — элемент объема группы, если последняя компактна. Если группа конечна, то h — порядок группы. Величина r означает элемент группы, а $\int dr$ — инвариантное интегрирование по группе для компактных групп и суммирование по всем элементам группы для конечных групп. Обобщение последней формулы на случай некомпактных групп представляет собой интересную проблему. В решении ее, насколько известно, достигнуты большие успехи, но считать ее полностью решенной пока еще нельзя.

Следует заметить, что в выражение для N_ν все сомножители входят симметрично. Обозначим их через $(a, b, \ldots, \nu)$. Для случая, когда имеется всего три сомножителя, т. е. рассматривается разложение кронекеровского произведения двух представлений, это означает, что произведение a и b содержит c с таким же коэффициентом, с каким b входит в кронекеровское произведение a и c или a — в кронекеровское произведение b и c.

В случае трех сомножителей вычисление N, как правило, не вызывает никаких затруднений. В принципе вычисления N достаточно для того, чтобы разложить кронекеровское произведение любого числа сомножителей. Справедливость этого утверждения следует из полноты системы характеров, позволяющей использовать соотношение

$$\chi^{(a)}(r)\,\chi^{(b)}(r)=\sum_{\nu}(ab\nu)\,\chi^{(\nu)}(r). \tag{2}$$

Подставив его в разложение прямого произведения трех сомножителей, получим

$$(abcd)=\sum_{\nu}(ab\nu)\int\chi^{(\nu)}(r)\,\chi^{(c)}(r)\,\chi^{(d)}(r)\,dr=\sum_{\nu}(ab\nu)(\nu cd). \tag{3}$$

Последняя формула наводит на мысль ввести матрицы $M^{\varkappa}$:

$$M^{\varkappa}_{\alpha\beta}=(\alpha\varkappa\beta). \tag{4}$$

Матрицы $M^{\varkappa}$ симметричны, а их элементами служат целые неотрицательные числа. Строки и столбцы матриц $M^{\varkappa}$ отвечают неприводимым представлениям. Все матрицы $M^{\varkappa}$, как видно из выражения для $(abcd)$, коммутируют друг с другом. Справедливо тождество

$$(abc\,\ldots\,\nu)=(M^{b}M^{c}\,\ldots)_{a\nu}. \tag{5}$$

Поскольку матрицы M в правой части можно переставлять, левую часть тождества (5) можно записать в нескольких формах. Ни одна из этих форм не позволяет получить полную симметрию окончательного выражения, поэтому найти [отличный от правой части формулы (1a)] общий вид левой части тождества (5), который был бы симметричен, — дело отнюдь не легкое.

Возможность разложения кронекеровского произведения двух представлений, например $D^{(a)}$ и $D^{(b)}$, на какие-то определенные сомножители не отвечает на главный вопрос, представляющий интерес для физика: как осуществить само разложение? Разложить кронекеровское произведение представлений на неприводимые представления — значит преобразовать произведение пространств представлений $D^{(a)}$ и $D^{(b)}$ в пространства представлений неприводимых компонент их кронекеровского произведения. Такое разложение неоднократно встречается в приложениях и особенно подробно исследовано для трехмерной группы вращений.

Первая проблема, с которой мы сталкиваемся при решении задачи о разложении, — это единственность искомого преобразования. Последняя в свою очередь зависит от единственности базисных векторов в двух пространствах, которые нам предстоит преобразовать друг в друга. Если базисные векторы в $D^{(a)}$ и $D^{(b)}$ определены однозначно, базис прямого произведения этих двух пространств также однозначно определен. Иначе обстоит дело в том случае, если какое-нибудь представление входит в кронекеровское произведение представлений $D^{(a)}$ и $D^{(b)}$ с кратностью, большей 1: тогда уже не всякий базисный вектор пространства произведения можно просто отождествить с каким-то вполне определенным базисным вектором неприводимого представления $D^{(c)}$. Если неприводимое представление $D^{(c)}$ входит в $D^{(a)} \times D^{(b)}$ с кратностью (abc), то унитарное преобразование в (abc)-мерном пространстве останется свободным, и, для того чтобы задать его полностью, нам понадобится вводить какие-то дополнительные условия на базисные векторы пространства произведения. Над этой проблемой много размышлял Биденхарн [1]). Он построил базис для случая n-мерной унитарной группы.

При рассмотрении наиболее интересной для физика группы — группы вращений $O(3)$ — указанная выше трудность не возникает: все кратности (abc) принимают в рассматриваемом случае значения 0 или 1. Группы, обладающие тем свойством, что их символы (abc) могут принимать только значения 0 или 1, называются просто приводимыми. Их рассмотрению уделили много внимания Макки и Вигнер [2]).

Если составная система содержит более двух подсистем, т. е. если интерес представляет кронекеровское произведение более двух представлений, то одно и то же неприводимое представление даже в случае просто приводимых групп может входить в разложение с кратностью, большей 1. Для однозначного определения искомого представления в этом случае, очевидно, необходимо действовать по индукции шаг за шагом так, как мы вычисляли кратность $(abc \ldots \nu)$.

Рассмотрим сначала разложение кронекеровского произведения двух неприводимых представлений a и b просто приводимой группы. Базисные векторы в пространстве представления a обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; число их определяется размерностью l_a представления a. Пусть α — любой из векторов базиса $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; суммирование по α означает суммирование по всем векторам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Аналогично следует понимать и суммирование по β, где β — любой из l_b базисных векторов β_1, $\beta_2, \ldots$ представления b. Чтобы выразить один из базисных векторов γ представления c, входящего в кронекеровское

---

[1]) См. статьи Биденхарна, [37, 38], а также его обзор в сборнике [31] (стр. 173) и работы Мошинского [39—41] (см. также работу [42]).

[2]) Результаты Вигнера содержатся в статье [43]. Эта статья и ее более подробный вариант опубликованы также в сборнике [44]. В этот же сборник включено несколько ранее изданных статей, сыгравших важную роль в формировании взглядов физиков на теорию представлений групп, в частности статьи Рака. Результаты Макки опубликованы в работах [45, 46], а также в его книге [47].

произведение представлений a и b, через базисные векторы (α, β) произведения пространств представлений a и b, необходимо выразить γ в виде суммы

$$\gamma = \sum_{\alpha, \beta} c_{\gamma\alpha\beta} (\alpha, \beta). \tag{6}$$

Все три представления a, b и c входят в коэффициенты $c_{\gamma\alpha\beta}$ симметрично [аналогично тому, как они входят в (abc)]. Коэффициенты $c_{\gamma\alpha\beta}$ можно записать в виде

$$c_{\gamma\alpha\beta} = l_c^{1/2} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \tag{6a}$$

где l_c — размерность представления c, а второй множитель в правой части называется (по пока не существенным для нас причинам) $3j$-символом. Если не считать возможного изменения знака, $3j$-символ инвариантен относительно перестановки столбцов. Эти $3j$-символы или эквивалентные им выражения называются коэффициентами Клебша — Гордана (хотя я никогда не мог понять почему) или коэффициентами векторной связи. Второе название, на мой взгляд, предпочтительнее. Они были подробно вычислены для группы $O(3)$, и имеющиеся таблицы $3j$-символов по своему объему соперничают с таблицами логарифмов [1]).

Если нам нужно связать воедино три подсистемы, то мы можем сначала связать две из них, а затем присоединить к ним третью. Во многих случаях такой подход имеет физический смысл, потому что связь между первыми двумя подсистемами может оказаться сильнее связи между любой из них и третьей подсистемой. Пусть a, b, c — три представления, кронекеровское произведение которых требуется найти. Связывая a и b, получаем разложение базисного вектора μ представления m в прямом произведении пространств представлений a и b:

$$\mu = \sum_{\alpha, \beta} l_m^{1/2} \begin{pmatrix} a & b & m \\ \alpha & \beta & \mu \end{pmatrix} (\alpha, \beta). \tag{7}$$

Затем мы образуем кронекеровское произведение представления m и оставшегося представления c. Базисный вектор δ представления d будет содержать вектор (μ, γ) с коэффициентом

$$l_d^{1/2} \begin{pmatrix} m & c & d \\ \mu & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

[1]) Насколько известно, впервые $3j$-символы былн вычислены в книге [48], гл. XVII. Более симметричное выражение для $3j$-символов приведено в статье из сборника [44], стр. 89—133. Численные значения $3j$-символов можно найти в работе [49].

в силу чего

$$\delta = \sum_{\mu, \alpha, \beta, \gamma} (l_d l_m)^{1/2} \begin{pmatrix} a & b & m \\ \alpha & \beta & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & c & d \\ \mu & \gamma & \delta \end{pmatrix} (\alpha, \beta, \gamma). \tag{8}$$

Продолжая этот процесс, мы будем связывать все большее и большее число подсистем, т. е. получать базисные векторы неприводимых компонент прямого произведения пространств нескольких неприводимых представлений.

Следует заметить, однако, что полученный выше вектор δ может не совпасть с вектором, который получился бы в том случае, если бы мы сначала разложили кронекеровское произведение представлений a и c, а затем связали одно из неприводимых пространств в этом кронекеровском произведении с пространством представления b. Причина несовпадения результатов обусловлена тем, что представление d могло бы возникнуть не только в результате связи пространства представления c с компонентой m прямого произведения пространств представлений a и b, но и в результате связи пространства представлечия c с другой компонентой m' того же прямого произведения. Поэтому вектор δ правильнее было бы обозначать δ^m, где индекс m указывает то промежуточное представление, которое затем было связано с представлением c. Аналогично вектор

$$\delta' = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \mu'} (l_d l_{m'})^{1/2} \begin{pmatrix} a & c & m' \\ \alpha & \gamma & \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m' & b & d \\ \mu' & \beta & \delta' \end{pmatrix} \tag{8a}$$

следовало бы обозначать $\delta'^{m'}$ — индекс m' указывает промежуточное представление, которое затем связывается с b. Взаимно однозначного соответствия между векторами δ^m и $\delta'^{m'}$ нет, но каждый из векторов $\delta'^{m'}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов δ^m (и наоборот). Для всех базисных векторов α, β, γ и δ коэффициенты одинаковы и равны (с точностью до знака и множителя l_m) «$6j$-символам», или коэффициентам Рака [1]):

$$\delta'^{m'} = \sum_m l_m \begin{Bmatrix} a & b & m \\ d & c & m' \end{Bmatrix} \delta^m. \tag{9}$$

Коэффициенты Рака играют важную роль и в ряде других физических проблем, атомная и ядерная спектроскопия — лишь

[1]) $6j$-символы были впервые введены в работах Рака независимо от более ранних исследований Вигнера (см., например, статью Вигнера в сборнике [44]). Работы Рака [50—53] были посвящены решению некоторых проблем теории атомных спектров. Они вошли в сборник [44]. Численные значения коэффициентов Рака, или $6j$-символов, см. в работе [49].

две из них. Имеются обширные таблицы коэффициентов Рака; обнаружен целый ряд их свойств симметрии. Так, любые столбцы в $6j$-символах можно переставлять местами:

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b & a & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & e & b \\ c & f & d \end{Bmatrix} = \ldots . \tag{10}$$

Любые два столбца можно перевернуть «вверх ногами»:

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c & d & e \\ a & b & f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & d & f \\ c & b & e \end{Bmatrix} = \ldots . \tag{10a}$$

Кроме того, имеется ряд соотношений ортогональности, которые, так же как и соотношения симметрии (10) и (10а), справедливы для коэффициентов Рака любой просто приводимой группы. Для коэффициентов Рака группы $O(3)$ Редже доказал несколько дополнительных соотношений симметрии; более глубокая причина существования их остается пока несколько загадочной:

$$\begin{Bmatrix} a & b & m \\ c & d & m' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(a+c+b-d) & \frac{1}{2}(a-c+b+d) & m \\ \frac{1}{2}(a+c-b+d) & \frac{1}{2}(-a+c+b+d) & m' \end{Bmatrix}, \tag{11}$$

если a, b, c, ... означают представления трехмерной группы вращений $O(3)$ размерности $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, ... Редже [54, 55] обнаружил аналогичные соотношения [1]) и между коэффициентами векторной связи группы $O(3)$.

Многие авторы рассматривали прямые произведения более трех представлений. Основным мотивом их деятельности (в частности, Биденхарна, Эдмондса, Понцано) была не разработка методов решения физических задач, а чисто математические исследования ряда захватывающе интересных связей [2]). Наиболее полным обзором работ этого направления, содержащим к тому же существенное обобщение ранее полученных результатов, следует, по-видимому, считать работу [60] [3]). Кроме того, Чакрабарти, Леви-Нахас, Леви-Леблон и австралийский физик, математик и философ Кумар предложили выражения для δ, в которые представления a, b и c трехмерной группы вращений $O(3)$ входят симметрично [62—64]. Кумар получил аналогичные выражения и для неприводимых компонент кронекеровских произведений более трех неприводимых представлений группы $O(3)$.

---

[1]) Обобщение соотношений Редже рассмотрел Шарп.

[2]) См. работы [56—59], а также статью Понцано и Редже в сборнике [31].

[3]) См. также работу Шарпа [61].

В заключение этой части моего доклада я могу с уверенностью сказать, что более внимательный и более тщательный анализ прямых произведений неприводимых представлений, по крайней мере некоторых групп, и в частности $O(3)$, позволил получить ряд интригующих соотношений. Может быть, эти соотношения недостаточно общи и слишком конкретны, чтобы прийтись по вкусу математикам, но многим из нас, физиков, исследование этих соотношений, бесспорно, доставило удовольствие.

Я отнюдь не уверен, что исследования разложений прямых произведений представлений групп исчерпали себя. В этой области получено много других, не упоминавшихся в моем докладе результатов[1]), и ряд вопросов, на которые я хотел бы знать ответ, все еще остается открытым. Тем не менее проблемы, имеющие для физики особо важное значение, очевидно, уже решены, как были решены ранее математические проблемы кристаллографии. Новое поле для приложений идей симметрии открыто (и, надо сказать, весьма кстати) в наиболее современной части теоретической физики — в теории элементарных частиц.

ПРОБЛЕМЫ СИММЕТРИИ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Обзор проблем симметрии в физике элементарных частиц — задача отнюдь не легкая, поскольку мы еще не в состоянии ясно сформулировать эти проблемы. В подтверждение высказанного я сошлюсь на существование отдельных групп частиц (например, группы из 8 барионов), принадлежащих одному и тому же представлению группы Пуанкаре и лишь незначительно отличающихся по массе. Упомянутый нами октет барионов — наиболее известный пример этого рода. Среди 8 входящих в него частиц есть протон и нейтрон. Остальные частицы получили название странных; все они были открыты сравнительно недавно.

По-видимому, разумно предположить, что члены этого октета связаны между собой какой-то приближенной симметрией;

---

[1]) Полное перечисление всех полученных здесь результатов вряд ли возможно, и я назову лишь некоторые. Помимо компактных групп Ли исследовались также и некоторые некомпактные группы Ли, в том числе группа Пуанкаре (см., например, [65—67]). Другие свойства представлений группы Пуанкаре были рассмотрены в работах [68—78]. Во многих статьях исследовались более сложные некомпактные группы Ли, имеющие фундаментальное значение в теории пространств де Ситтера [группы $O(4, 1)$ и $O(3, 2)$] или встречающиеся в физике высоких энергий [группы $O(4, 2)$ и $U(2, 2)$]. См. раннюю работу Томаса [79], а также поправки и обобщения к ней в работах [80, 81]. Другие результаты были получены в работах [82—88]. Весьма полный обзор работ до 1965 г. (с математической точки зрения) приведен в статье [89]; см. также работу [90].

вопрос лишь в том, в чем состоит эта симметрия. По нашему мнению, существует некая группа, обладающая 8-мерным представлением. Векторы состояния 8 частиц, входящих в октет, образуют базис в пространстве этого представления. С точки зрения физики проблема сводится к установлению смысла операций неизвестной группы (для примера укажем на физический смысл операций группы Пуанкаре: пространственные и временные сдвиги, собственные преобразования Лоренца как переход к инерциальным системам координат и т. д.). Пока такой смысл неизвестен. Сомнительно даже, что такой смысл вообще удастся найти, поскольку векторы состояния рассматриваемых частиц не образуют линейного пространства: сложение векторов состояния протона и нейтрона не имеет смысла. Разумеется, это обстоятельство еще не означает, что основные уравнения не будут инвариантными, по крайней мере приближенно, относительно неизвестной группы, но ее операции в силу сказанного лишены прямого физического смысла. Примером могут служить уравнения осциллятора: они остаются инвариантными при замене координат на скорости и наоборот, и эта инвариантность приводит к интересным следствиям, хотя лежащая в ее основе математическая операция сама по себе не имеет физического смысла.

То, о чем мы говорили, относится к проблеме физической интерпретации симметрии. Математическая проблема состоит в отыскании подходящей группы, обладающей 8-мерным представлением. Гелл-Манн и Нееман [91—93] предложили в качестве решения трехмерную специальную (унимодулярную) унитарную группу $SU(3)$. Первое нетривиальное вещественное неприводимое представление этой группы 8-мерно. Чем может быть полезна группа $SU(3)$?

Если бы ее операции были операциями точной симметрии, то массы 8 частиц были бы равными. Это следует из теоремы О'Райферти [94] [1]), согласно которой не существует группы Ли, содержащей в качестве собственной подгруппы группу Пуанкаре и обладающей таким неприводимым представлением, что его ограничение на группу Пуанкаре содержит конечное число неприводимых представлений последней, отвечающих различным массам. Следовательно, различия в массах должны быть связаны с какой-то неточностью унитарной $SU(3)$-симметрии, с какими-то ее нарушениями. Крупный успех теории $SU(3)$-симметрии состоял в получении простого оператора возмущения для матричных элементов, позволившего описать наблюдавшиеся расхождения в массах 8 частиц. Я имею в виду мас-

[1]) Более точную математическую формулировку теоремы О'Райферти дал Иост [95]. Обобщение теоремы см. в работах Сигала [96] и Галиндо [97].

совую формулу Гелл-Манна — Окубо, дающую результаты с точностью около 6% [98, 99].

Согласие между массовой формулой и экспериментальными значениями масс само по себе еще не было бы убедительным. Существует несколько простых операторов возмущения, и не удивительно, что один из них привел к хорошему согласию с экспериментом. Однако упоминавшийся нами октет не является единственным: установлено по крайней мере три других мультиплета. Маловероятно, чтобы все это было случайным совпадением.

Я отдаю себе отчет в том, что мое выступление было слишком расплывчатым, чтобы вызвать интерес у математика, предпочитающего исходить из четко сформулированных допущений и приходить к определенным выводам. Мы с пониманием относимся к такому пристрастию. Однако задача физика нередко бывает прямо противоположной: он знает конечные выводы — экспериментально обнаруженные явления — и хотел бы выяснить, из каких допущений эти выводы следуют. Решение такой «обратной» задачи сопряжено с необходимостью преодолеть многие неясности, но, несмотря на это, а может быть, и благодаря этому, оно особенно интересно. В развитии намеченного выше круга идей помимо уже названных авторов большой вклад внесли Мишель из Франции, Пайс и Роман из США, Гюрши из Турции, Радикати из Италии [1]), но я не хотел бы останавливаться здесь на их результатах более подробно. Главное из того, что я хотел подчеркнуть в своем докладе, состоит в другом: после длительного периода, в течение которого в центре внимания физиков и специалистов по теории симметрии находились подробные исследования представлений групп, ныне всеобщий интерес вновь вызывают поиски групп симметрии (или одной, универсальной группы симметрии), наиболее пригодных для описания наблюдаемых явлений.

В заключение я хочу выразить свою благодарность Баргману, Гиллиспи и Куну за то, что они обратили мое внимание на неизвестные мне ранее работы, и за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gibbs J. W.*, Elementary principles in statistical mechanics, Yale University Press, New Haven, 1902. (Имеется перевод: *Гиббс Дж. В.*, Основные принципы статистической механики, излагаемые со специальным применением к рациональному обоснованию термодинамики, Гостехиздат, М.—Л., 1946.)

---

[1]) Читатели, интересующиеся этими вопросами, могут получить представление о проблемах расширения группы Пуанкаре в книге [100]. Введение к этой книге облегчит им знакомство с предметом. Для читателя, интересы которого лежат в основном в области математики, укажем книгу [101]. См. также статью [102].

2. A commentary on the scientific writings of J. Willard Gibbs, Yale University Press, New Haven — London, 1936.
3. *Gibbs J. W.*, Proc. Amer. Assoc. Adv. Sci., **33**, 57 (1884).
4. The Scientific Papers of Willard Gibbs, vol. 2, New York and Bombay, Longmans, Green and Co., 1906, p. 16.
5. *Bowden F. P., Tabor D.*, Friction and lubrication, Wiley and Sons, New York, 1956.
6. Le opere di Galileo Galilei, Firenze, vol. 6, 1896, Sec. 6.
7. Gehler's Physikalische Wörterbuch, Leipzig, 1830.
8. Ostwald's Klassiker der exakten Naturwissenschaften, № 89, Leipzig, 1897.
9. *Groth P.*, Entwicklungsgeschichte der mineralogischen Wissenschaften, Berlin, 1926.
10. *Burke J. G.*, Origins of the science of crystals, University of California Press. Berkeley — Los Angeles, 1966.
11. *Haüy R. J.*, Journ. de Phys., **20**, 33 (1782).
12. *Steno N.*, De solido intra solidem naturaliter contento dissertationis prodromus, Florence, 1669.
13. *Schönflies A.*, Kristallsysteme und Kristallstruktur, Leipzig, 1891.
14. *Федоров Е. С.*, Зап. Минерал. общ., **28**, 1 (1891).
15. *Groth P.*, Physikalische Kristallographie, W. Engelman, Leipzig, 1905.
16. *Voigt W.*, Lehrbuch der Kristallphysik, B. G. Teubner, Leipzig, 1910.
17. *von Neumann J.*, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag, Berlin, 1932. (Имеется перевод: *Иоганн фон Нейман*, Математические основы квантовой механики, изд-во «Наука», М., 1964.)
18. *Bargmann V.*, Ann. of Math., **59**, 1 (1954).
19. *Wigner E.*, Ann. of Math., **40**, 149 (1939).
20. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.*, Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, Физматгиз, М., 1958.
21. *Наймарк М. А.*, Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.
22. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.*, Унитарные представления классических групп, Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 2 и 36, Изд-во АН СССР, М. — Л., 1950.
23. *Harish-Chandra*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **37—40** (1951—1954).
24. *Harish-Chandra*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., № 27, p. 5.
25. *Harish-Chandra*, Ann. of Math., **83**, 74 (1966).
26. *Young A.*, Proc. London Math. Soc., **33**, 97 (1900).
27. *Young A.*, Proc. London Math. Soc., **34**, 361 (1902).
28. *Frobenius G.*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1903, S. 328.
29. *Schur I.*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1908, S. 64.
30. Advances of quantum chemistry, Academic Press, New York, 1966.
31. Racah Memorial Volume, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 131.
32. *Kronig R.* de L., Zs. Phys., **31**, 885 (1925).
33. *Kronig R.* de L., Zs. Phys., **33**, 261 (1925),
34. *Russell H. N.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **11**, 314 (1925).
35. *Sommerfeld A., Hönl H.*, Sitzungsber. Preuss. Akad, Wiss., 1925, S. 141.
36. *Schrödinger E.*, Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig, 1927.
37. *Biedenharn L. C.*, Journ. Math. Phys., **4**, 436 (1963).
38. *Biedenharn L. C., Giovanni A., Louck J. D.*, Journ. Math. Phys., **8**, 691 (1967).
39. *Moshinsky M.*, Journ. Math. Phys., **7**, 691 (1966).
40. *Nagel J. G., Moshinsky M.*, Journ. Math. Phys., **6**, 682 (1965).
41. *Moshinsky M.*, Journ. Math. Phys., **7**, 691 (1966).
42. *Kushner M., Quintanilla J.*, Rev. Mex. de Fisica, **16**, 251 (1967).
43. *Wigner E.*, Amer. Journ. Math. Phys., **63**, 57 (1941).
44. Quantum Theory of Angular Momentum, L. C. Beidenharn and H. Van Dam, eds., Academic Press, New York, 1965,

45. *Mackey G. W.*, Amer. Journ. Math., **75**, 387 (1953).
46. *Mackey G. W.*, Pacific Journ. Math., 8, 503 (1958).
47. *Mackey G. W.*, Mathematical foundations of quantum mechanics, Benjamin, New York, 1963. (Имеется перевод: *Макки Дж.*, Лекции по математическим основам квантовой механики, изд-во «Мир», М., 1965.)
48. *Wigner E.*, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931. (Имеется перевод: *Вигнер Е.*, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961.)
49. *Rotenberg M.*, *Bivins R.*, *Metropolis N.*, *Wooten K.*, The 3-j and 6-j symbols, Technology Press, MIT, Cambridge, 1959.
50. *Racah G.*, Phys. Rev., **61**, 186 (1942).
51. *Racah G.*, Phys. Rev., **62**, 438 (1942).
52. *Racah G.*, Phys. Rev., **63**, 367 (1943).
53. *Racah G.*, Phys. Rev., **76**, 1352 (1949).
54. *Regge T.*, Nuovo Cim., **11**, 116 (1959).
55. *Regge T.*, Nuovo Cim., **10**, 544 (1958).
56. *Biedenharn L. C.*, *Blatt J. M.*, *Rose M. E.*, Rev. Mod. Phys., **24**, 249 (1952).
57. *Edmonds A. R.*, Angular momentum in quantum mechanics, Princeton University Press, Princeton, 1957.
58. *Ponzano G.*, Nuovo Cim., **35**, 1231 (1965).
59. *Ponzano G.*, Nuovo Cim., **36**, 385 (1965).
60. *Юцис А. П.*, *Левинсон И. Б.*, *Ванагас В. В.*, Математический аппарат теории момента количества движения, Вильнюс, Госполитиздат, 1960.
61. *Sharp W. T.*, Racah algebra and the contraction of groups, Atomic Energy of Canada Ltd. report 1098 (1960).
62. *Chakrabarti A.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **1**, 301 (1964).
63. *Kumar K.*, Austral. Journ. Phys., **19**, 719 (1966).
64. *Lévy-Leblond J. M.*, *Lévy-Nahas M.*, Journ. Math. Phys., **6**, 1372 (1965).
65. *Ginibre J.*, Journ. Math. Phys., **4**, 720 (1963).
66. *Derome J. R.*, *Sharp W. T.*, Journ. Math. Phys., **6**, 1584 (1965).
67. *Tompkins D. R.*, Journ. Math. Phys., **8**, 1502 (1967).
68. *Lomont J. L.*, *Moses M. E.*, Journ. Math. Phys., **5**, 294 (1964).
69. *Lomont J. L.*, *Moses M. E.*, Journ. Math. Phys., 8, 837 (1966).
70. *Raszillier I.*, Nuovo Cim., **38**, 1928 (1965).
71. *Lévy-Leblond J. M.*, Nuovo Cim., **40**, 748 (1965).
72. *George C.*, *Lévy-Nahas M.*, Journ. Math. Phys., **7**, 980 (1966).
73. *Guillot J. C.*, *Petit J. L.*, Helv. Phys. Acta, **39**, 281 (1966).
74. *Berzi V.*, *Goroni V.*, Nuovo Cim., **57**, 207 (1967).
75. *Ström S.*, Ark. Fys., **34**, 215 (1967).
76. *Nilsson J.*, *Beskow A.*, Ark. Fys., **34**, 307 (1967).
77. *Joos H.*, *Schrader R.*, Comm. Math. Phys., **7**, 21 (1968).
78. *Kihlberg A.*, Nuovo Cim., **53**, 592 (1968).
79. *Thomas L. H.*, Ann. of Math., **42**, 113 (1941).
80. *Newton T. D.*, Ann. of Math., **51**, 730 (1950).
81. *Dixmier J.*, Bull. Soc. Math. France, **89**, 9 (1960).
82. *Ehrman J. B.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **53**, 290 (1957).
83. *Kihlberg A.*, *Ström* S., Ark. Fys., **31**, 491 (1966).
84. *Rühl W.*, Nuovo Cim., **44**, 572 (1966).
85. *Chakrabarti A.*, Journ. Math. Phys., **7**, 949 (1966).
86. *Macfarlane A. J.*, *O'Raifeartaigh L.*, *Rao P. S.*, Journ. Math. Phys., **8**, 536 (1967).
87. *Nachtman O.*, Acta Physica Austriaca, **25**, 118 (1967).
88. *Bacry H.*, Comm. Math. Phys., **5**, 97 (1967).
89. *Pozzi G. A.*, Nuovo Cim. Suppl., **4**, 37 (1966).

90. *Baumgärtel H.*, Wiss. Zs. Humboldt Univ., Berlin, Math.-Naturwiss. Reihe, **13,** 881 (1964).
91. *Neeman Y.*, Nucl. Phys., **26,** 222 (1961).
92. *Gell-Mann M.*, Phys. Rev., **125,** 1067 (1962).
93. The eightfold way. A review with a collection of reprints, Comp. by Murray Gell-Mann and Yuval Ne'eman, Benjamin, New York — Amsterdam, 1964.
94. *O'Raifeartaigh L.*, Phys. Rev., **139B,** 1952 (1965).
95. *Jost R.*, Helv. Phys. Acta, **39,** 369 (1966).
96. *Segal I.*, Journ. Functional Anal., **1,** 1 (1967).
97. *Galindo A.*, Journ. Math. Phys., **8,** 768 (1967).
98. *Okubo S.*, Progr. Theor. Phys., **27,** 949 (1962).
99. *Gell-Mann M.*, Phys. Rev., **125,** 1067 (1962).
100. *Dyson F. J.*, Symmetry groups in nuclear and particle physics, Benjamin, New York, 1966.
101. *Gourdin M.*, Unitary symmetries and their applications to high energy physics, North-Holland, Amsterdam, 1967.
102. *Barut A. O.*, Proc. Seminar on High Energy Physics and Elementary Particles, Trieste, 1965 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965).

19

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ[1])

Как показано в статье Мюраи [1], существует несколько причин для изучения тех следствий, к которым приводит расширение неоднородной группы Лоренца — включение в нее переходов к равноускоренно движущимся системам координат. Единственной причиной изучения сужения неоднородной группы Лоренца является любопытство и желание напомнить о той фундаментальной роли, которую продолжают играть в физике ньютоновские уравнения движения.

Мы рассмотрим следствия простейшего из возможных законов движения: всякое тело остается в состоянии покоя, если на него не действует никакая сила. Уравнения движения, соответствующие этому модифицированному закону, имеют вид

$$m_\alpha \dot{x}_\alpha = -\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \quad m_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}, \quad m_\alpha \dot{z}_\alpha = -\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}. \tag{1}$$

Они применимы к любой частице α. Величина f играет роль своеобразного потенциала, градиент которого определяет не ускорение, а скорость. Результаты, которые мы получим исходя из уравнений (1), разумеется, не имеют физического смысла. Исследуя, однако, законы сохранения, вытекающие из уравнений (1), мы увидим, что в механике одна лишь симметрия пространства без специфической формы законов Ньютона еще не приводит, как можно было бы ожидать, ко всем законам сохранения. С другой стороны, в квантовой теории уравнения, эквивалентные (1), позволяют получить законы сохранения, хотя их интерпретация становится отнюдь не очевидной.

Если справедливы уравнения (1), то две системы координат, равномерно движущиеся относительно друг друга, перестают быть эквивалентными, и, отправляясь от уравнений (1), мы не сможем построить теорию относительности. Тем не менее свойства симметрии пространства сами по себе остались неизменными: сохранилась его однородность, изотропность. Сохранилась также и однородность времени. Следовательно, можно ожидать существования некоего закона сохранения

---

[1]) Из журнала: Progr. Theor. Phys., **11**, 437 (1954).

энергии (связанного с однородностью времени), а также законов сохранения импульса и углового момента. В нашей механике, основанной на уравнениях (1), эти ожидания выполняются лишь отчасти: если «потенциал» f инвариантен относительно сдвигов в пространстве, то из уравнений (1) следует закон сохранения импульса, который гласит: «центр масс изолированной системы находится в состоянии покоя», или

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n = \text{const}. \tag{2}$$

Аналогичные равенства выполняются и для y- и z-компонент. Что же касается законов сохранения энергии и углового момента, то их в нашей механике не существует. Этот вывод ничуть не противоречит результатам Гамеля [2] и Энгеля [3][1]). Связь между законами сохранения и симметрией в обычной механике основана на гамильтоновой формулировке последней, а уравнения движения (1) этому формализму не удовлетворяют.

Квантовый аналог уравнений (1) можно вывести с помощью принципа Эренфеста [5]. Согласно этому принципу, из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x_1, \ldots, z_n) = Q\Psi \tag{3}$$

следует, что движение центра масс

$$\bar{x}_\alpha = \int |\Psi|^2 x_\alpha \, d\tau$$

$\left(\int \ldots d\tau\right.$ означает интегрирование по всему конфигурационному пространству) подчиняется уравнениям (1), если заменить в них производные $\partial f/\partial x_\alpha$ средними значениями. Таким образом, квантовые уравнения движения центра масс в нашей теории будут иметь вид

$$m_\alpha \frac{d\bar{x}_\alpha}{dt} = m_\alpha \int x_\alpha [\Psi^* Q\Psi + \Psi (Q\Psi)^*] \, d\tau = -\int \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \Psi^* \Psi \, d\tau. \tag{3a}$$

Из условия независимости полной вероятности $\int |\Psi|^2 d\tau$ от времени, так же как и в обычной квантовой механике, вытекает, что оператор Q антиэрмитов. Следовательно, выражение, стоящее после первого знака равенства в (3а), можно преобразовать к виду

$$m_\alpha \int \Psi^* [x_\alpha Q\Psi - Q(x_\alpha \Psi)] \, d\tau.$$

[1]) См. также работу Бессель-Хагена [4].

Поскольку полученное выражение должно быть равно правой части (3а) при всех Ψ^*, должно выполняться равенство

$$x_\alpha Q\Psi - Qx_\alpha\Psi = -\frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\Psi. \tag{3б}$$

Последнее же справедливо при всех Ψ, если

$$[Q,\, x_\alpha] = \frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}. \tag{3в}$$

Наиболее общий антиэрмитов оператор Q, удовлетворяющий уравнению (3а) и аналогичным уравнениям для y- и z-компонент, имеет вид

$$Q = \sum \frac{1}{m_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial z_\alpha}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \frac{1}{2}\Delta_\alpha f\right) + ig. \tag{4}$$

Вещественная функция g должна быть инвариантной относительно переносов и поворотов, т. е. должна зависеть лишь от расстояний между частицами, а в остальном она совершенно произвольна.

Исходя из уравнения (3) и выражения (4) для оператора Q, нетрудно вывести квантовомеханические законы сохранения. Закон сохранения энергии можно записать в виде

$$E = i\hbar \int \Psi^* \left[\sum \frac{1}{m_\alpha}\left(\operatorname{grad}_\alpha f \cdot \operatorname{grad}_\alpha \Psi + \frac{1}{2}\Psi\,\Delta_\alpha f\right) + ig\Psi\right] d\tau, \tag{5}$$

а закон сохранения углового момента — в виде

$$M_\alpha = i\hbar \int \Psi^* \sum \left(x_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} - y_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)\Psi\, d\tau. \tag{6}$$

Последнее выражение совпадает с законом сохранения углового момента в обычной квантовой механике.

Связь между законами сохранения и симметрией в квантовой механике отнюдь не однозначна. В отличие от ситуации, с которой мы встретились в нашей классической (неквантовой) механике, в нашей квантовой механике мы сталкиваемся с «избытком» законов сохранения. Помимо сохранения квантового импульса

$$P_\alpha = -i\hbar \int \Psi^* \sum \frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha}\, d\tau, \tag{7}$$

в ней имеется аналог закона сохранения (2):

$$\int \left(\sum m_\alpha x_\alpha\right)\Psi^*\Psi\, d\tau. \tag{7а}$$

Модифицированный закон Ньютона (1), которым мы воспользовались для демонстрации существующей в квантовой теории непосредственной связи между законами сохранения и симметрией, является самым простейшим из возможных законов движения. Как уже говорилось, этот закон движения исключает любую попытку ввести принцип, аналогичный принципу относительности. Небезынтересно заметить, что в рассматриваемом нами случае классический закон движения строго выполняется и в квантовой теории. Из уравнений (3) и выражения (4) следует

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = \sum \frac{1}{m_\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}|\Psi|^2\right) + \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}|\Psi|^2\right) + \frac{\partial}{\partial z_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}|\Psi|^2\right)\right]. \tag{8}$$

Это — уравнение неразрывности для частиц с компонентами скорости $(\partial f/\partial x_\alpha)/m_\alpha$, находящихся в точке, координаты которой служат аргументами функции f. Уравнение (8) выражает тот факт, что скорость изменения во времени величины $|\Psi|^2$, т. е. плотности частиц, равна взятой со знаком минус дивергенции тока. Последняя же величина равна произведению плотности $|\Psi|^2$ и скорости. Хорошо известно, что не только уравнение (8) является следствием уравнений движения, но и, наоборот, уравнения движения (1) можно вывести из уравнения (8), выполняющегося для системы частиц с распределением плотности $|\Psi|^2$. Таким образом, замена классического уравнения (1) квантовым уравнением (3) [где Q определяется выражением (4)] в действительности не означает отказа от этого классического уравнения — вывод, к которому мы могли бы прийти, приняв во внимание отсутствие в выражении (4) множителя h. Уравнения (1) намного облегчили бы развитие физики в течение последних 50 лет: эти уравнения сделали бы невозможным создание теории относительности, а квантование этих уравнений не изменяло бы их физического содержания. Единственная новая черта, вводимая квантовой теорией, заключается в появлении комплексной фазы у нашей волновой функции Ψ. Сомнительно, чтобы эта величина имела хоть какой-нибудь физический смысл. Поскольку квантовые законы сохранения (5)—(7) связаны именно с комплексной фазой и утрачивают смысл при вещественной волновой функции Ψ, их физическая интерпретация остается открытой.

Приведенный нами пример должен послужить предостережением против легкомысленного отождествления симметрии и законов сохранения. Он напоминает о том, что для существования связи между симметрией и законами сохранения в обычной механике последнюю необходимо сформулировать в гамильтоновой форме, и несмотря на то, что в квантовой теории мы всегда можем вывести законы сохранения из условия симметрии, интерпретация этих законов сохранения и их физический смысл могут быть весьма проблематичными.

То обстоятельство, что квантование наших уравнений движения не приводит к квантовой теории в подлинном смысле этого слова, можно было бы предвидеть заранее, поскольку принцип неопределенности вряд ли совместим с уравнениями (1). Если все координаты имеют точные значения, то и силы $-\mathrm{grad}\, f$ определены точно. Такое положение вещей сохраняется и после квантования. Поскольку в развитой нами теории силы определяют скорости, а не ускорения, последние также оказываются точно заданными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Murai Y.*, Progr. Theor. Phys., **11**, № 4—5, 441 (1954).
2. *Hamel G.*, Zs. Math. Phys., **50**, 1 (1940).
3. *Engel F.*, Nachr. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen, 270 (1916).
4. *Bessel-Hagen E.*, Math. Ann., **84**, 258 (1921).
5. *Ehrenfest P.*, Zs. Phys., **45**, 455 (1927).

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ[1])

ВВЕДЕНИЕ

Теория относительности, пятидесятилетие которой мы празднуем, и насчитывающая почти столько же лет квантовая теория родились и развивались совершенно по-разному. Происхождение теории относительности связано с рядом экспериментальных фактов, смысл которых можно выразить кратко — скорость света не зависит от состояния движения излучателя и поглотителя. Путеводными звездами в развитии теории относительности были чисто теоретические проблемы — проблема измерения пространства и времени и проблема наблюдения. Экспериментальные же факты, по крайней мере в течение последних 25 лет, играли в развитии теории относительности более или менее второстепенную роль. Квантовая теория, наоборот, возникла в результате обсуждения теоретической проблемы — противоречий, возникающих при классическом описании излучения черного тела. Путеводными звездами в развитии квантовой теории были экспериментальные факты: фотоэлектрический эффект, опыт Штерна — Герлаха, эксперименты Боте — Гейгера — Комптона — Симона и прежде всего огромное количество информации о строении атомных спектров, накопленной перед второй мировой войной, и тот все возрастающий объем сведений о ядерных силах и «элементарных частицах», которым мы располагаем в настоящее время. Стимулом для получения большей части этой информации послужила квантовая теория. В свою очередь новые результаты оказали глубокое влияние на ее развитие.

Объекты, на которых сосредоточивают основное внимание теория относительности и квантовая теория, также различны. Теория относительности изучает главным образом макроскопические тела. Так, системы координат, эквивалентность которых постулируется в специальной теории относительности, являются макроскопическими, и на них не распространяются квантовомеханические соотношения неопределенности. Более того, все успехи теории относительности достигнуты в области макроско-

---

[1]) Из журнала: Helv. Phys. Acta, Suppl., IV, 210 (1956). Этот выпуск журнала посвящен пятидесятилетнему юбилею теории относительности.

пической физики. Основным объектом изучения в теории относительности служит явление, которое современный физик-экспериментатор заведомо проглядел бы, если бы не одно чисто внешнее обстоятельство: экспериментатор и его приборы постоянно «привязаны» к полу лаборатории. Объекты, представляющие основной интерес для квантовой теории, по своей природе макроскопические: частицы, изучаемые в квантовой механике, настолько легки, что их индивидуальный гравитационный эффект почти заведомо ненаблюдаем даже в принципе. Если иметь в виду столь сильные различия в развитии и в предмете теории относительности и квантовой теории, то серьезные трудности, с которыми физики столкнулись при попытке объединить обе эти теории, вряд ли вызовут удивление. Более того, было бы удивительно, если бы для осуществления полного синтеза теории относительности и квантовой теории нам не понадобилось бы изучить еще целый ряд новых явлений. Приятно отметить, что и попытки частичного объединения идей столь различных теорий увенчались огромным, хотя и несколько неожиданным, успехом. Говоря об успехах релятивистской квантовой теории, я имею в виду главным образом предложенное Дираком простейшее, релятивистски инвариантное уравнение для отдельной частицы (электрона), позволяющее учесть спин частицы [1, 2], кроме того, данное Паули доказательство, что простейший способ квантования уравнения для отдельной частицы естественно приводит к сформулированному Паули постулату эквивалентности для всех частиц и к принципу запрета для частиц с полуцелым спином [3—5], а также релятивистски инвариантные методы теории возмущений, разработанные Томонага, Швингером и Фейнманом и позволившие описать тончайшие детали строения электронных спектров водорода и других элементов [6]. Однако, несмотря на всю важность этих достижений, я не буду излагать подробно полученные результаты, а попытаюсь нарисовать общую картину современного состояния столь важной области физики. В частности, я постараюсь проследить переход от классической физики к теории относительности на примере квантовомеханических уравнений элементарных частиц и инвариантов этих уравнений. Сначала я рассмотрю классическую теорию, а затем подробно опишу переход к специальной теории относительности. Прежде чем приступать к обсуждению общей теории относительности, мы изучим квантовомеханические свойства пространств де Ситтера. Это позволит нам построить наиболее точную математическую модель общей теории относительности, не прибегая вместе с тем к полной переформулировке наших представлений о пространстве и времени. Однако следует подчеркнуть, что при рассмотрении пространств де Ситтера мы еще не сталкиваемся с теми весьма серьезными логическими проблемами, которые возникают при полном включении глубоких физических идей общей теории относительности в единую схему релятивистской квантовой теории. Эти проблемы будут слегка затронуты в конце доклада.

В основе большей части моего анализа лежит идея эквивалентности между квантовомеханическими уравнениями для одной частицы и простейшими — так называемыми неприводимыми — представлениями (с точностью до множителя) группы симметрии того мира, в котором эти уравнения применяются. Несколько недель тому назад [1]) я уже имел возможность изложить некоторые аспекты своих взглядов и поэтому постараюсь не повторяться. Наиболее важным моментом я считаю рассмотрение с одних и тех же позиций преобразования вектора состояния (или волновой функции) под действием всех элементов группы симметрии нашего «мира» (см. [9, 10]). Одним из таких преобразований служит «течение времени», т. е. сдвиг временно́й оси. Именно это преобразование представляет основной интерес в более привычном варианте теории, однако более глубокого понимания смысла релятивистской инвариантности можно достичь, лишь рассмотрев это преобразование не в отдельности, а в связи с другими релятивистскими преобразованиями.

Прежде чем приступать к основной части своего доклада, я хотел бы пояснить свою мысль на одном примере, основанном на специальной теории относительности. Начнем с оператора бесконечно малого сдвига во времени, играющего особо важную роль в более традиционной формулировке теории. Из общих принципов квантовой механики следует, что этот инфини-

[1]) Доклад был прочитан на конгрессе Международного союза чистой и прикладной физики, состоявшемся в Пизе с 13 по 17 июня 1955 г.; см. работу [7]. Следует отметить, что соображения, о которых пойдет речь в докладе, применимы не только к допустимым состояниям отдельной частицы, но и ко всем наборам состояний, в которых число элементов настолько мало, насколько это согласуется с принципом суперпозиции и с релятивистской инвариантностью. Так, например, они одинаково хорошо применимы ко всем состояниям движения атома кислорода (или почти любого другого атома), находящегося в основном состоянии. Требование о «возможно малом» наборе состояний исключает состояние движения атома кислорода, находящегося в двух или большем числе возбужденных состояний, потому что из них можно выбрать меньший набор состояний, для которых будет выполняться принцип суперпозиции и которые к тому же допускают релятивистски инвариантное описание: используя термин «основное состояние», мы даем именно такое релятивистски инвариантное описание набора. Этим и объясняется, почему выражение «отдельная частица» было сочтено недостаточно широким для описания систем, к которым применимы наши соображения, и мы предпочли назвать эти системы «элементарными». Отдельные частицы являются лишь наиболее важными физическими системами этого типа. Более подробно о понятии элементарной системы см. в работе [8].

тезимальный оператор имеет вид H/i, где H — некоторый самосопряженный оператор. Отсюда для вектора состояния Φ получаем известное уравнение

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t}=H\Phi. \tag{1}$$

Если ψ_k и ν_k — собственные функции и собственные значения оператора H, то общее решение уравнения (1) можно записать сразу же. Оно имеет вид

$$\Phi=\sum a_k e^{-i\nu_k t}\psi_k, \tag{1a}$$

где a_k — произвольные постоянные. Это — полное решение уравнений движения, однако его нельзя назвать полным решением физической проблемы, поскольку физические свойства состояний ψ_k неизвестны. Иными словами, уравнение (1а) говорит о том, *как* происходит движение, но умалчивает о том, *что* движется.

Здесь решающее значение приобретает связь между оператором сдвига во времени и другими релятивистскими операторами. Из нее мы, например, узнаем, что инфинитезимальные операторы сдвигов вдоль пространственных осей iP_x, iP_y, iP_z коммутируют с оператором H, ибо независимо от того, в каком порядке мы будем производить сдвиги в пространстве и во времени, результат получится один и тот же. Из этого замечания следует, что все ψ_k, которые переходят друг в друга под действием сдвигов, отвечают одинаковым собственным значениям ν_k. Сам по себе этот результат тривиален, но рассмотрение собственных преобразований Лоренца и вращений приводит к более значимым результатам и позволяет устанавливать физически важные свойства собственных функций ψ_k, если набор операторов, соответствующих всем релятивистским преобразованиям, неприводим [8]. В этом и заключается сущность той позиции, с которой я хочу сравнить классическую и релятивистскую квантовую теорию.

Обозначим через U_r и U_s унитарные операторы, соответствующие двум релятивистским преобразованиям r и s (ими, например, могут быть уже упоминавшиеся сдвиги). Тогда оператор U_{rs}, отвечающий произведению rs двух релятивистских преобразований, очевидно, будет удовлетворять соотношению

$$U_{rs}=U_rU_s.$$

Чрезвычайно важен тот факт, что это соотношение не является необходимым следствием основных постулатов квантовой теории и инвариантности уравнений. Наоборот, поскольку векторы состояния содержат неопределенный множитель, квантовая теория и соображения симметрии приводят лишь к соотношению

$$U_{rs} = \omega(r, s)\, U_r U_s, \tag{2}$$

где $\omega(r, s)$ — функция (c-число), зависящая от r и s. В математике об унитарных операторах, удовлетворяющих равенству (2), говорят, что они с точностью до множителя образуют (унитарное) представление группы симметрии. Поэтому весь последующий анализ будет основан на рассмотрении представлений (с точностью до множителя) группы классической механики (галилеевой группы), группы специальной теории относительности (неоднородной группы Лоренца или группы Пуанкаре), группы симметрии пространства де Ситтера и т. д. Начнем с классической теории.

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

В этом случае группа симметрии состоит из преобразований симметрии евклидова пространства, т. е. из вращений и сдвигов и преобразований Галилея, т. е. преобразований, описывающих переход к движущейся системе координат. В матричной записи все названные преобразования имеют вид

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & v_x & a_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & v_y & a_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & v_z & a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Будучи примененной к вектору с компонентами x, y, z, t, 1, такая матрица порождает вектор, последняя компонента которого снова равна 1. Эта компонента не имеет физического смысла и вводится исключительно из соображений математического удобства. Первые же четыре компоненты вектора x', y', z', t', 1, получающегося из вектора x, y, z, t, 1 при действии нашей матрицы, указывают значения преобразованных координат x', y', z', t'. Величины R называются компонентами матрицы вращения; они описывают поворот, содержащийся в обобщенном преобразовании Галилея; v_x, v_y, v_z — компоненты скорости второй системы координат относительно первой, а параметры a — сдвиг начала второй системы относительно начала первой во времени и в пространстве. Группа матриц вида (3) называется группой Галилея. Это и есть группа симметрии классической механики. Исследование представлений с точностью до множителя группы Галилея приводит к удивительному результату [11]: существует два и только два типа представлений. Первый тип — простейший из возможных: операторы такого представления удовлетворяют соотношению $U_r U_s = U_{rs}$, где r и s — любые два преобразования Галилея. В частности, если r — пространственный сдвиг, а s — переход к движущейся системе координат, то U_r и U_s коммутируют. В представлениях второго типа пространственные сдвиги и переходы к движущейся системе координат не коммутируют: произведения этих операторов, взятых в различном порядке, отличаются множителем

$$\frac{\omega(r, s)}{\omega(s, r)} = e^{im\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}, \qquad (4)$$

где m — произвольная вещественная постоянная. Уравнение Шредингера (для одной частицы) принадлежит ко второму типу, а величина m, входящая в формулу (4), имеет смысл массы частицы. Исследование представлений второго типа, в общих чертах намеченное во введении, приводит к обычным операторам для импульса, скорости, энергии и координат. Например, чтобы получить операторы координат, необходимо найти три коммутирующих между собой оператора, преобразующихся при поворотах как векторы. Сдвиг начала координат на вектор $\mathbf{a}$ должен изменять эти операторы на аддитивную постоянную $\mathbf{a}$. Кроме того, искомые операторы должны оставаться инвариантными при переходах к движущейся системе координат. Существует только один набор из трех операторов, удовлетворяющих всем требованиям. Эти операторы совпадают с обычными операторами координат. Аналогично можно определить и операторы импульса и скорости. Их отношение равно величине m, входящей в формулу (4).

Итак, ситуация с представлениями второго типа вполне удовлетворительна, но те же постулаты для представлений первого типа не выполняются. В гильбертовом пространстве представлений первого типа не существует троек операторов, удовлетворяющих, например, условиям, перечисленным для операторов импульса [12]. Инфинитезимальные операторы сдвигов p_x, p_y, p_z при переходе к движущейся системе координат преобразуются как

$$\mathbf{p} \to \mathbf{p}, \qquad \varepsilon \to \varepsilon + \mathbf{p}\cdot\mathbf{v},$$

т. е. операторы пространственных сдвигов при таких преобразованиях остаются неизменными. Отсюда с необходимостью следует вывод о том, что представления первого типа не имеют физического смысла и что не существует частиц, векторы состояния которых под действием преобразований Галилея преобразуются по представлению первого типа. Пока этот результат кажется нам обособленным, то он предстанет в новом свете, когда мы будем рассматривать классическую механику как предельный случай специальной теории относительности.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Группа симметрии в этом случае состоит из комбинаций пространственных и временны́х сдвигов с обычными (однородными) преобразованиями Лоренца. Последние в свою очередь имеют смысл комбинаций вращений и переходов к движущейся системе координат. Преобразования группы специальной теории относительности можно записать с помощью матриц вида

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Lambda_{10} & a_x \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Lambda_{20} & a_y \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & \Lambda_{30} & a_z \\ \Lambda_{01} & \Lambda_{02} & \Lambda_{03} & \Lambda_{00} & a_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Последняя координата, как и прежде, введена для большего математического удобства. Элементы Λ означают компоненты однородных преобразований Лоренца, т. е. преобразований, оставляющих инвариантной квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ (отражения, или инверсии, мы пока не рассматриваем). Известно, что галилеевы преобразования (3) можно считать предельными случаями преобразований (5). Интересно проследить, каким образом представления группы Галилея возникают из представлений (5) в результате предельного перехода, т. е. каким образом квантовая теория классической физики возникает как предельный случай квантовой механики специальной теории относительности.

Ни одно представление группы Пуанкаре (5) не имеет множителя, аналогичного множителю (4) группы Галилея. Наоборот, все представления неоднородной группы Лоренца (она же — группа Пуанкаре) можно нормировать так, что соотношение

$$U_r U_s = \pm U_{rs} \tag{6}$$

будет выполняться для любых двух преобразований r и s. С другой стороны, представления можно классифицировать по значениям, принимаемым лоренцевой суммой квадратов инфинитезимальных операторов сдвига

$$p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2. \tag{7}$$

Эта величина может быть положительной, равной нулю или отрицательной.

Только первые два случая были исследованы подробно. Оказалось, что они эквивалентны уравнениям для частиц с положительной и нулевой массами покоя. Если сумма (7) положительна, то операторы импульса, скорости и координат можно определить аналогично тому, как уже говорилось в случае галилеевой группы. Если же сумма (7) равна нулю, то определить операторы координат в некоторых случаях бывает невозможно, но удовлетворить всем постулатам для операторов импульса и скорости удается всегда, причем одним и только одним способом. При переходе от (5) к (3), т. е. при обращении скорости света в бесконечность, только что описанные представления переходят в представления галилеевой группы.

Соответствие между представлениями имеет следующий вид [13]:

$$p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 > 0, \qquad \omega = e^{im\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}};$$

$$p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = 0, \text{ конечный спин}, \qquad \omega = e^{iS\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}};$$

$$p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = 0, \text{ бесконечный спин}, \qquad \omega = 1;$$

$$p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 < 0, \qquad \omega = 1;$$

где ω — величина, входящая в формулу (4). Представления, отвечающие положительной и обычной, нулевой массе покоя, имеют разумный нерелятивистский предел. В остальных случаях предельный переход приводит к представлениям, в которых нельзя определить ни оператора импульса, ни оператора координат. Случай, когда сумма (7) отрицательна, т. е. когда инфинитезимальные операторы сдвигов образуют пространственно-подобный вектор, по общему мнению, противоречит условиям причинности Крамерса — Кронига. Нетрудно видеть, что в этом случае разумный нерелятивистский предел также не существует. Отсюда ясно, какой должна быть интерпретация истинных представлений группы Галилея (т. е. для которых при всех r и s справедливо соотношение $U_r U_s = \pm U_{rs}$): они служат нерелятивистским пределом релятивистских частиц с пространственно-подобным импульсом, для которых нарушается принцип причинности.

Чтобы полностью задать представление (или эквивалентное ему уравнение), необходимо помимо массы указать еще спин частицы S. Если масса покоя положительна, то частицу можно считать покоящейся, и тогда число ее состояний равно $2S+1$. Число состояний при любом заданном импульсе также равно $2S+1$. Если же масса покоя равна нулю, то при всех $S \geqslant 1/2$ существуют лишь два различных состояния частицы. Частицу с нулевой массой покоя, разумеется, нельзя рассматривать в системе покоя. Тем не менее столь сильное различие в поведении частиц с нулевой и конечной массами покоя следует объяснить несколько подробнее.

Если частица находится в состоянии покоя и спин ее в любом направлении имеет вполне определенное значение, то $2S+1$ состояний частицы можно получить, наблюдая ее из систем координат, получающихся из исходной системы координат после соответствующего поворота. Однако если частица движется очень быстро, т. е. если пространственная и временнáя компоненты ее импульса почти равны, а ее спин имеет вполне определенную проекцию на любое направление движения частицы, то ситуация становится инвариантной относительно вращений. Чтобы заметно изменить спин в направлении движения, частицу необходимо рассматривать в системе координат, относительно которой она находится почти в состоянии покоя, т. е. ее скорость существенно меньше скорости света. Если масса покоя частицы равна нулю, то этого сделать нельзя. Следовательно, спин частиц с нулевой массой покоя в направлении их движения является релятивистской характеристикой таких частиц. То обстоятельство, что частицы с нулевой массой покоя имеют вместо одного два направления поляризации, обусловлено симметрией относительно отражения. Отражение переводит спин S в направлении движения частицы в спин $-S$ в том же направлении. В случае конечной массы покоя состояние $-S$ (так же как и все остальные направления) можно также получить, применив вращение; четность есть отношение векторов состояния, полученных при вращении и отражении. Поскольку при нулевой массе покоя состояние $-S$ нельзя получить из состояния S вращением, частицы с нулевой массой покоя не имеют четности или, точнее, обладают состояниями, которые являются одновременно и четными и нечетными относительно отражения при одних и тех же энергиях и импульсах. Имеется лишь одно исключение: частица Клейна — Гордона ($S=0$). Для нее отражение не порождает нового вектора состояния, а воспроизводит со знаком плюс или минус исходный.

Поляризация быстро движущейся частицы под действием не слишком «сильного» преобразования Лоренца почти не меняется; это особенно легко видеть на примере электрона Дирака. Если состояние с положительной поляризацией в направлении движения разложить по собственным функциям оператора $\gamma = i\gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z$, то модули коэффициентов будут равны

$$\frac{p_t+m+p}{[4p_t(p_t+m)]^{1/2}}, \quad \frac{p_t+m-p}{[4p_t(p_t+m)]^{1/2}}. \tag{8}$$

Вектор состояния, для которого $\gamma=1$, останется вектором с $\gamma=1$ и после выполнения преобразования Лоренца. То же верно и для вектора состояния с $\gamma=-1$. Если коэффициент при первом векторе практически равен 1, то и после преобразования Лоренца, не изменяющего длину вектора с $\gamma = 1$, этот коэффициент останется близким к 1. Отсюда следует, что при таких преобразованиях Лоренца поляризация существенно не изменится.

Это можно выразить и иначе, показав, что интересующее нас свойство является свойством группы Лоренца и не зависит от выбора ее представления, т. е. выполняется при всех значениях спина. Рассмотрим частицу, находящуюся в состоянии покоя и поляризованную в направлении оси z. Подвергнув частицу преобразованию Лоренца с гиперболическим углом α, сообщим ей скорость в направлении оси z. Позднее мы будем считать, что этот угол очень велик и что частица «сильно» релятивистская, пока же мы получили частицу, поляризованную в направлении движения, которое совпадает с осью z. Чтобы получить частицу, поляризованную в направлении своего движения, но уже движущуюся в каком-то другом направлении, необходимо сначала произвести поворот и добиться желаемого направления поляризации, а затем сообщить частице скорость в нужном направлении. Релятивистскую инвариантность утверждения о том, что частица поляризована в направлении своего движения, можно проверить следующим образом. Частице, движущейся в направлении оси z и поляризованной в том же направлении, сообщим скорость в направлении оси x, подвергнув ее преобразованию Лоренца с гиперболическим углом ε. Сначала мы будем считать угол ε произвольным, но затем предположим, что он много меньше угла α. Частица могла бы находиться в том же состоянии движения, если бы ей сначала сообщили скорость в направлении, составляющем угол ϑ с осью z (подвергнув ее преобразованию с гиперболическим углом α'), где

$$\operatorname{ch}\alpha' = \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\varepsilon, \qquad \sin\vartheta = \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\varepsilon / \operatorname{sh}\alpha'. \tag{8а}$$

Однако направление поляризации во втором случае отличалось бы от направления поляризации в первом. Чтобы оба направления совпали, систему, прежде чем придавать ей скорость в направлении ϑ, необходимо повернуть на угол $\vartheta - \delta$, где δ определяется из условия

$$\sin\delta = \operatorname{sh}\varepsilon / \operatorname{sh}\alpha' = \operatorname{sh}\varepsilon\,(\operatorname{ch}^2\alpha \operatorname{ch}^2\varepsilon - 1)^{-1/2}. \tag{8б}$$

Последнее следует просто из тождества для преобразований Лоренца

$$A\left(\frac{\pi}{2},\ \varepsilon\right) A(0,\alpha) = A(\vartheta,\ \alpha')\, R\,(\vartheta-\delta),$$

где углы α и ε произвольны, а углы α', ϑ и δ определяются из соотношений (8а) и (8б); $A(\vartheta, \alpha)$ означает преобразование

Лоренца с гиперболическим углом α (в дальнейшем — просто «преобразование α») в направлении, лежащем в плоскости xz и составляющем угол ϑ с осью z; $R(\varphi)$ — поворот на угол φ в плоскости xz. Если бы угол δ был равен нулю, то частица, поляризованная в направлении своего движения, после того как над ней произвели преобразование α, осталась бы поляризованной в направлении своего нового движения (в направлении ϑ) после второго преобразования ε. Если же угол δ отличен от нуля, то «согласованность» направлений движения и поляризации нарушается. Однако угол δ очень мал, если $\varepsilon \ll \alpha$, т. е. когда гиперболический угол второго преобразования намного меньше гиперболического угла первого, и если $\alpha \gg 1$.

ПРОСТРАНСТВА ДЕ СИТТЕРА

Группа симметрии обычного пространства де Ситтера состоит из преобразований, оставляющих инвариантным мир де Ситтера:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - t^2 = R^2.$$

Группу специальной теории относительности можно считать предельным случаем группы симметрии пространства де Ситтера в точно таком же смысле, в каком группу Галилея можно считать предельным случаем неоднородной группы Лоренца. Эти группы оставляют инвариантными следующие квадратичные формы:

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 - t^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - t^2.$$

Уравнения, инвариантные в пространстве де Ситтера, или представления группы симметрии пространства де Ситтера [1]) обладают многими интересными свойствами. Различие между частицами с ненулевой и нулевой массами покоя перестает быть резким: частицы с отличной от нуля массой покоя в пространстве де Ситтера характеризуются тем, что их комптоновская длина волны очень мала по сравнению с размерами Вселенной. Еще более замечательны свойства частиц относительно дискретных операций группы симметрии: пространственной инверсии и обращения времени. В частности, в пространстве де Ситтера трудно сохранить требование положительной определенности энергии или заменяющей ее величины. Последнее обстоятельство вряд ли вызовет удивление, если учесть, что одно и то же преобразование, ускоряющее ход времени в одной части пространства, замедляет ход времени в другой. Физический смысл этого явления станет яснее на следующем этапе развития теории — при рассмотрении общей теории относительности.

---

[1]) Представления группы симметрии пространства де Ситтера впервые нашел Томас [14]. См. также работы [15, 16].

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

К этой теме я приступаю с большими колебаниями, поскольку в настоящее время неясны даже общие контуры квантовой механики, согласующейся с идеями общей теории относительности. Многое из того, что было сказано и написано на эту тему, правильнее было бы назвать релятивистской теорией частиц со спином 2 (релятивизм понимается в смысле специальной теории относительности), а не переносить на квантовую теорию весь круг идей и методов, выдвинутых Эйнштейном.

Большинство из нас считают, что общая теория относительности основывается на двух аксиомах. Согласно первой аксиоме Эйнштейна, координаты сами по себе не имеют смысла; непосредственно наблюдать можно только совпадения в пространстве-времени и только такие совпадения и должны быть предметом физической теории. Эта аксиома налагает столь слабые ограничения, что, если говорить строго, с ней согласуется всякая физическая теория, в том числе (как мы увидим ниже) и современная квантовая механика. При доказательстве этого утверждения мы обнаружим, что оно выполняется при некоторых весьма специальных условиях. Хотя в обычных лабораторных экспериментах эти условия, как правило, соблюдаются, они тем не менее остаются специальными условиями. Необходимость выполнения этих условий делает обычную квантовую механику весьма искусственной с точки зрения первой аксиомы Эйнштейна.

Вторая аксиома Эйнштейна — это принцип эквивалентности, отдающий гравитации предпочтение перед всеми остальными типами взаимодействия. Обоснованием для такого предпочтения служит особая простота гравитационного взаимодействия и равенство гравитационной и инертной масс. Справедливость этого принципа в области микроскопической физики не столь очевидна, как справедливость первой аксиомы. Известно много правил, выполняющихся с большой точностью для электромагнитного и других типов взаимодействий; вполне возможно, что особая роль, отводимая гравитационному взаимодействию, исчезнет, уступив место еще неизвестной высшей гармонии. По этой причине я буду уделять основное внимание первой аксиоме Эйнштейна: непосредственный физический смысл имеют лишь совпадения, а не значения координат.

В этой связи прежде всего следует заметить, что если рассматривать лишь конечное число частиц, то первую аксиому Эйнштейна нельзя распространить даже на классическую теорию. Основной вопрос, на который теория должна была бы дать ответ, можно сформулировать примерно так: имеется 10 частиц; известно, что произошли столкновения между частицами 1—2, 5—6, 3—6; произойдет ли столкновение между частицами 1—5? Ни одна из существующих теорий не пыталась дать ответа на подобные вопросы даже в тех случаях, когда условия задачи допускают некоторое уточнение, например когда известна временна́я последовательность столкновений для каждой частицы. Переход от счетной последовательности совпадений к непрерывному риманову пространству подразумевает существование бесконечно многих мелких частиц, непрестанно «витающих» вокруг «центральных» частиц и сталкивающихся с последними. Эти бесконечные столкновения и порождают метрику. Предположение о бесконечном субстрате, состоящем из очень малых частиц, не так уже далеко от действительности; примером такого субстрата может служить свет, испускаемый звездами. Мы узнаем о существовании звезд потому, что свет, «совпадавший» с ними, дошел до нас и «совпал» с нами. Гипотеза о бесконечном субстрате не встречает возражений и со стороны классической теории, поскольку в ней не существует ограничений на размеры частиц с заданной энергией.

Совершенно иная ситуация складывается в квантовой теории. Начать с того, что такое событие, как столкновение частиц, не является абсолютным, а подвергается наблюдению. Наиболее естественным критерием, позволяющим судить о том, что столкновение произошло, служит изменение импульса сталкивающихся частиц. Однако измерение импульса требует конечного объема, и поэтому вряд ли кто-нибудь станет утверждать, будто столкновение должно стать основным, первичным понятием физики, в терминах которого следует описывать все остальное.

Кроме того, принятие гипотезы о существовании бесконечного субстрата, состоящего из чрезвычайно малых частиц, также сопряжено с определенными трудностями. Чтобы мы могли фиксировать положение центральной частицы, например звезды, с большей точностью, субстрат должен состоять из частиц с очень короткой длиной волны. Малая же длина волны устанавливает нижний предел энергии и, следовательно, гравитационной массы субстрата. Эта трудность была бы вполне реальной и весьма «осязаемой», не будь гравитационная постоянная так мала. Малость этой константы играет чрезвычайно важную роль в формулировке современной квантовой теории, если считать, что физический смысл имеют только совпадения. При таком подходе квантовомеханический эксперимент, производимый над изолированной системой, и использование лоренцевой метрики следовало бы описывать так. Изолированная система окружена в пространстве чем-то вроде сети, в узлах которой расположены часы. Пользуясь этой сетью, мы можем, во-первых, установить, что на поверхности, окружающей изолированную систему, пространство-время в разумном приближении допустимо считать плоским и, во-вторых, задав систему координат с лоренцевой метрикой, передавать системе импульсы и регистрировать ее отдачу. С помощью такой сети с часами можно было бы, например, измерить сечения столкновений и даже построить всю S-матрицу.

Предложенную схему нетрудно упростить, но прежде следует заметить, что необходимость использования сети с часами заставляет усомниться в целесообразности рассмотрения случая, когда простая система, например частица, находится одна во всей Вселенной, а ее параметры удовлетворяют тем или иным уравнениям. Чтобы мы могли высказывать какие-то утверждения относительно поведения нашей частицы, ее необходимо окружить сетью с часами, но окружить сетью всю Вселенную мы, очевидно, не в состоянии. Именно по этой причине я сомневаюсь в том, что уравнения для частиц в пространстве де Ситтера имеют глубокий смысл, и, в частности, в том, имеют ли смысл те свойства уравнений, которые следуют из симметрии пространства де Ситтера в целом (под последним я понимаю плоскости и центры симметрии пространства).

Если проанализировать, как интерпретируются измерения, производимые над так называемыми изолированными системами, то станет ясно, что в действительности физики неявно используют описанную нами сеть с часами, окружая ею исследуемую систему. Движение звезд и других объектов обеспечивает допустимость гипотезы о приближенно плоском пространстве и позволяет снабдить систему координат лоренцевой метрикой. Прибор, используемый для измерения, создает и регистрирует частицы, свойства которых подлежат измерению. Несложное рассуждение показывает, что гравитационные силы, исходящие от «изолированной системы», не влияют на возможность сколь угодно точного измерения сечений, если объем части пространства, заключенной внутри сети с часами, не ограничен сверху.

Описанную только что ситуацию все же нельзя назвать удовлетворительной с точки зрения общей теории относительности, поскольку та физическая величина, которая порождает метрику, отличается от исследуемой физической величины. Идеализированная сеть с часами, позволяющая установить метрику, но не вносящая своим гравитационным полем никаких возмущений в «изолированную систему», может существовать лишь потому, что гравитационная постоянная очень мала. В теории, полностью удовлетворяющей первой аксиоме Эйнштейна, физическую систему не нужно было бы делить на две части: одну — создающую метрику, другую — подлежащую измерению.

Простейший способ построения такой теории состоял бы в полном отказе от использования координат. Вопросы, на которые могла бы давать ответ физическая теория, звучали бы примерно так: «У меня есть система, в которой имеется некоторое трехмерное многообразие, обладающее следующим свойством: вероятность найти на этом многообразии частицу 5 равна произведению вероятностей найти на нем частицы 1, 2, 3 и 4. Существует ли другое трехмерное многообразие, для которого вероятность обнаружения на нем частицы 5 определяется какой-то другой известной функцией вероятностей обнаружения на нем же частиц 1, 2, 3 и 4?» В такую теорию входили бы не производные полевых величин по координатам, а производные одних амплитуд вероятности по другим.

В отсутствие взаимодействия уравнения такой теории можно было бы получать, исключая координаты из уравнений обычной квантовой механики. Эта программа вполне осуществима, хотя я сам получил в этом направлении лишь предварительные и весьма неполные результаты. Уравнения, возникающие в результате исключения переменных, отличаются от обычных уравнений меньше, чем можно было бы ожидать. В них, в частности, вновь возникают величины, аналогичные g_{ik}. Физический смысл новых уравнений тождествен физическому смыслу исходных уравнений, и я приведу сейчас пример таких уравнений лишь для того, чтобы проиллюстрировать свою мысль, хотя я и уверен, что эти уравнения не решают никаких проблем.

Рассмотрим для простоты мир, обладающий лишь одним пространственным измерением, и поля, удовлетворяющие уравнению Клейна—Гордона. Воспользуемся двумя такими полями φ_1 и φ_2 для того, чтобы исключить координаты. Остальные поля обозначим ψ_α. Вычислим вторую производную от ψ по x в переменных φ:

$$\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\varkappa} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\varphi_i},$$

$$\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial x_\varkappa^2} = \sum_{i,\,j=1}^{2} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial\varphi_i\,\partial\varphi_j} + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\varkappa^2}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\varphi_i}. \tag{9}$$

Левая часть уравнения (9), просуммированная по $\varkappa$, даст $m_\alpha^2\psi_\alpha$. Суммируя по $\varkappa$ правую часть, получаем из (9) уравнения

$$m_\alpha^2\psi_\alpha = \sum_{i,j} g_{ij}\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial\varphi_i\,\partial\varphi_j} + \sum_i m_i^2\varphi_i\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\varphi_i}, \tag{10}$$

где

$$g_{ij} = \sum_{\varkappa} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\varkappa}. \tag{10a}$$

Уравнения (10) можно рассматривать как уравнения, определяющие g_{ij}. Условие совместности сводится к обращению в нуль детерминанта 4-го порядка ($\alpha = 1, 2, 3, 4$)

$$\left| m_\alpha^2 \psi_\alpha - \sum_i m_i^2 \varphi_i \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \varphi_i} \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial \varphi_1^2} \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial \varphi_2^2} \right| = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) не содержит координат. Как я уже говорил, оно приводится здесь лишь в качестве иллюстрации, а не потому, что имеет какой-то особый смысл.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc., **117**, 610 (1928).
2. *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc., **118**, 351 (1928).
3. *Pauli W.*, Phys. Rev., **58**, 116 (1940).
4. *Pauli W.*, Progr. Theor. Phys., **5**, 526 (1950).
5. *Schwinger J.*, Phys. Rev., **82**, 914 (1951).
6. *Jauch J.*, *Rohrlich F.*, Quantum Field Theory, Addison-Wesley Press, New York, 1955.
7. *Wigner E.*, Nuovo Cim., **X3**, 517 (1956).
8. *Newton T. D.*, *Wigner E.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 400 (1949). (Статья 22 данной книги.)
9. *Wigner E.*, Ann. of Math., **40**, 149 (1939).
10. *Bargmann V.*, *Wigner E.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **34**, 211 (1948).
11. *Bargmann V.*, Ann. of Math., **59**, 1 (1954).
12. *Inönü E.*, *Wigner E.*, Nuovo Cim., **9**, 705 (1952).
13. *Inönü E.*, *Wigner E.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**, 510 (1953).
14. *Thomas L. H.*, Ann. of Math., **42**, 119 (1941).
15. *Newton T. D.*, Ann. of Math., **51**, 730 (1950).
16. *Dirac P. A. M.*, Ann. of Math., **36**, 657 (1935).

ОБ ОПЕРАЦИИ ОБРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ [1])

1. При исследовании вращения плоскости поляризации в магнитном поле Крамерс [1] установил важные общие свойства решений квантовомеханической задачи на собственные значения [2]). В частности, он показал, что в системе с нечетным числом частиц, находящейся под действием сил чисто электрической природы, всегда должно происходить по крайней мере двукратное вырождение уровней энергии. Свои результаты Крамерс получил, исходя из решения задачи на собственные значения для выведенного Брейтом [3] уравнения, которое остается релятивистски инвариантным и во втором порядке теории возмущений. С помощью прямых выкладок он показал, что, когда число электронов нечетно, из одного решения уравнения Брейта можно получить другое, отличное от первого.

В настоящей работе предпринимается попытка дать несколько более общее обоснование результатов Крамерса, в частности показать, что используемая им операция представляет собой не что иное, как операцию обращения времени. Эту операцию мы включим в обычную теоретико-групповую схему уровней энергии, что, как мы увидим, не совсем тривиально вследствие ее нелинейности.

Известно, что многие важные общие свойства квантово-механических систем, в особенности те, которые представляют интерес для спектроскопии, тесно связаны с симметрией систем. Чтобы мы могли воспользоваться соображениями симметрии, рассматриваемый уровень энергии должен обладать лишь конечным вырождением. Для системы, свободно перемещающейся в пространстве (например, для атомов), это условие заведомо не выполняется вследствие непрерывного спектра, обусловленного движением системы как целого. К решению возникшей проблемы существует два подхода: во-первых, можно считать, что ядра не принадлежат интересующей нас системе и связаны с фиксированными точками пространства; во-вторых, можно

---

[1]) Из журнала: Nachr. Gesell. der Wissen., Mathematisch-Physikalische Klasse, Heft 5, 546 (1932).

[2]) В последнее время результаты Крамерса с большим успехом применил Ван-Флек [2] к проблеме парамагнетизма.

ввести дополнительное условие, запрещающее системе свободно перемещаться в пространстве,— потребовать, чтобы система обладала не только строго заданной энергией, но и нулевым полным импульсом[1]. При рассмотрении атомов оба подхода приводят к одинаковым результатам. При изучении молекул первый подход используют в тех случаях, когда основной интерес представляют электронные уровни, а второй — когда желательно учесть движение ядер. Поскольку в действительности ядра не связаны с фиксированными точками пространства, первый подход позволяет получать лишь приближенные результаты[2].

В своей работе мы покажем, что установленные Крамерсом свойства связаны с разновидностью симметрии, не рассматривавшейся ранее. Наши результаты применимы в обоих только что названных подходах, которые мы для удобства будем называть просто первым (фиксированные ядра) и вторым (нулевой полный импульс).

2. Рассмотрим систему, свободно перемещающуюся в пространстве. Если внешних полей нет, то ее группой симметрии будет неоднородная группа Лоренца, а в нерелятивистском случае — неоднородная группа Галилея, которые помимо обычных преобразований Лоренца или Галилея содержат еще сдвиги в пространстве и времени ($x'_i = x_i + a_i$). При рассмотрении системы, не обладающей способностью свободно перемещаться в пространстве, симметрия задачи, естественно, уменьшается.

При первом подходе неподвижные центры притяжения прежде всего определяют состояние абсолютного покоя. Тем самым исключаются преобразования, при которых исходная и конечная системы координат движутся относительно друг друга. По аналогичным причинам отпадает и большинство чисто пространственных преобразований. Остаются лишь те преобразования, которые входят в группу симметрии решетки, образуемой центрами притяжения (раньше их также всегда включали в рассмотрение). Кроме того, существуют еще и чисто временные преобразования $t' = t + t_0$ и $t' = -t$. Если рассматриваются одни лишь сдвиги во времени, то задание энергии однозначно определяет представление $e^{-iEt_0/h}$, которому принадлежит состояние. Из свойств этой симметрии, в частности, следует, что состояния с точно заданной энергией не меняются со временем. Таким образом, преобразования $t' = t + t_0$ не позволяют прийти к каким-либо новым заключениям, и нам не остается ничего

[1]) Как известно, в отсутствие внешних полей требование, чтобы энергия и полный импульс системы имели фиксированные («точные», неразмазанные) значения, вполне допустимо.

[2]) Обоснование этого подхода см. в работе Борна и Оппенгеймера [4].

другого, как заняться изучением преобразования $t'=-t$, выражающего обратимость времени. Как мы увидим далее, именно это преобразование приводит к правилам Крамерса. Разумеется, об обратимости времени можно говорить лишь тогда, когда внутреннее движение центров притяжения не влияет на направление времени и, в частности, когда они не создают магнитное поле[1]). Что же касается полей, обусловленных спином ядер, то они очень слабы, и в первом приближении ими вполне можно пренебречь (наши рассмотрения и без того носят лишь приближенный характер).

Аналогичная ситуация возникает и при втором подходе. Действительно, если в некоторой системе координат полный импульс системы равен нулю, то эта система координат выделена, и ее можно считать покоящейся. Это означает, что из чисто пространственных преобразований мы должны вычеркнуть сдвиги, поскольку система с нулевым полным импульсом принадлежит к тривиальному представлению группы сдвигов, т. е. вообще не изменяется при сдвигах. С остальными чисто пространственными и чисто временны́ми преобразованиями все обстоит так же, как и в уже рассмотренном нами первом случае. Единственное отличие заключается лишь в том, что теперь чисто пространственные преобразования обычно (в отсутствие внешних полей) порождают всю группу трехмерных вращений.

Итак, мы видим, что как первый, так и второй подход к квантовомеханической задаче, помимо рассматривавшихся ранее элементов симметрии (чисто пространственных преобразований), содержит еще один элемент симметрии — обращение времени. Исследованием этого элемента симметрии (только в нерелятивистском случае!) мы и займемся в дальнейшем.

3. Прежде всего необходимо выяснить, какая операция K переводит волновую функцию φ в волновую функцию $K\varphi$ такого состояния, которое отличается от состояния, описываемого функцией φ, направлением времени: прошлое $K\varphi$ совпадает с будущим φ, а будущее $K\varphi$ тождественно прошлому φ. Предположим сначала, что мы действуем в рамках упрощенной теории Шредингера, не учитывающей спина частиц. Тогда функция $\varphi=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зависит лишь от декартовых координат частиц.

В используемом нами упрощенном варианте теории Шредингера операция K, как известно, совпадает с операцией комплексного сопряжения: $K\varphi=\varphi^*$. Однако мы сохраним за

---

[1]) Условия, при которых время «обратимо», можно найти в работе Онзагера [5]. Предположение относительно обратимости времени играет существенную роль в наших рассуждениях.

операцией обращения времени обозначение K и будем использовать лишь следующие три ее свойства:

$$K^2\varphi = \varphi, \qquad K^2 = 1, \tag{I}$$

$$K(a\varphi + b\psi) = a^*K\varphi + b^*K\psi, \tag{II}$$

$$(\varphi,\ \psi) = (\psi,\ \varphi)^* = (K\psi,\ K\varphi), \tag{III}$$

или

$$(K\varphi,\ \psi) = (\varphi,\ K\psi)^* = (K\psi,\ \varphi). \tag{IIIa}$$

[Здесь $(u,\ v)$ означает эрмитово скалярное произведение функций u и v, т. е. интеграл от u^*v по всему конфигурационному пространству.] Оказывается, что при четном числе электронов результаты, полученные нами, полностью справедливы и для теории, учитывающей спин. Единственное различие состоит лишь в том, что K будет означать не обычный переход к комплексно сопряженному выражению, а некоторую другую операцию, также обладающую свойствами (I) — (III). Из равенства (II) следует (и это существенно для дальнейшего), что оператор K нелинеен. Все остальные операторы линейны, и мы не всегда будем особо подчеркивать последнее обстоятельство.

Функция вещественна, если $K\varphi = \varphi$, и мнима, если $K\varphi = -\varphi$. Линейный эрмитов оператор A называется вещественным, если он переводит вещественную функцию в вещественную. Вещественный оператор, очевидно, переводит комплексную величину в комплексно сопряженную, вследствие чего

$$AK\varphi = KA\varphi, \qquad AK = KA, \qquad A = KAK. \tag{1}$$

Мнимый оператор B переводит вещественную функцию в чисто мнимую и, таким образом, удовлетворяет соотношению

$$B = -KBK. \tag{2}$$

Из соотношения (1) в силу обратимости времени следует, что если φ — собственная функция оператора A, то $K\varphi$ — также собственная функция. Функции φ и $K\varphi$ можно заменить вещественными функциями $\varphi + K\varphi$ и $i(\varphi - K\varphi)$. Отсюда ясно, что все собственные функции, не ограничивая общности, можно считать вещественными. Следовательно, оператор энергии должен быть вещественным (к такому же заключению мы приходим, рассматривая оператор Шредингера).

Аналогичные утверждения справедливы для всех чисто пространственных преобразований симметрии. Произведем ли мы сначала поворот Q, а затем операцию обращения времени или, наоборот, сначала обратим время и лишь затем произведем поворот,— результат (состояние) будет один и тот же. Следовательно, для всех φ

$$KQ\varphi = c_\varphi QK\varphi, \tag{3}$$

где c_φ — константа, равная по модулю 1; для различных волновых функций она могла бы быть разной. Покажем, что коэффициент c_φ одинаков для всех волновых функций. Если бы коэффициент c_φ отличался от c_ψ, то в силу линейности Q следовало бы, что

$$KQ(\varphi+\psi) = KQ\varphi + KQ\psi = c_\varphi QK\varphi + c_\psi QK\psi = \\ = c_{\varphi+\psi}QK(\varphi+\psi) = c_{\varphi+\psi}QK\varphi + c_{\varphi+\psi}QK\psi,$$

откуда

$$c_\varphi = c_{\varphi+\psi} = c_\psi.$$

Заменим далее оператор Q оператором $O=\sqrt{c_\varphi}Q$; тогда

$$KO\varphi = OK\varphi. \tag{3a}$$

Следовательно, оператор O вещественен. В упрощенном варианте теории Шредингера это также естественно, поскольку операциями симметрии в ней служат вещественные преобразования аргументов волновых функций.

Вещественный характер волновых функций и операторов имеет решающее значение при рассмотрении элемента симметрии $t'=-t$. Вещественны вообще все операторы, которые либо не содержат времени, либо содержат лишь четные степени t (ибо для таких операторов их средние значения для φ и $K\varphi$ равны). Следовательно, операторы координат и функций координат, квадрата скорости, кинетической и полной энергии и т. д. вещественны. Наоборот, все операторы, содержащие нечетные степени t (например, операторы скорости, углового момента и т. д.) мнимы, ибо их средние значения для φ и $K\varphi$ равны по величине и противоположны по знаку. В самом деле, в первом случае

$$(A\varphi,\ \varphi) = (\varphi,\ A\varphi) = (K\varphi,\ AK\varphi) = (KAK\varphi,\ \varphi),$$

откуда мы заключаем, что

$$A = KAK.$$

Во втором случае

$$(\varphi,\ B\varphi) = -(K\varphi,\ BK\varphi)$$

мы получаем соотношение

$$B = -KBK.$$

4. Мы видим, что все собственные функции можно считать вещественными. Отсюда сразу же следует, что среднее значе-

ние мнимого эрмитова оператора для всех состояний с одной и той же энергией должно быть равно нулю:

$$(\psi_1,\ B\psi_1)+(\psi_2,\ B\psi_2)+(\psi_3,\ B\psi_3)+\ \dots\ =0, \tag{4}$$

ибо каждое слагаемое в левой части равно нулю, если собственные функции вещественны:

$$(\psi_i,\ B\psi_i)=(B\psi_i,\ \psi_i)=(K\psi_i,\ KB\psi_i)= \\ =-(\psi_i,\ BK\psi_i)=-(\psi_i,\ B\psi_i).$$

При отсутствии вырождения (например, в случае когда система не обладает пространственной симметрией) аналогичное утверждение справедливо и для отдельных собственных функций. Так, например, среднее значение скорости для любого стационарного состояния равно нулю. То же можно сказать о кубе и вообще любой нечетной степени компонент скорости, поэтому любая скорость имеет ту же вероятность, что и скорость, равная ей по величине, но противоположная по направлению. Аналогичные утверждения справедливы и для углового момента.

5. Перейдем теперь к случаю, когда система помимо инвариантности относительно обращения времени обладает еще и пространственной симметрией. Рассмотрим собственные функции $\psi_1, \dots, \psi_l$, принадлежащие неприводимому представлению D группы пространственной симметрии:

$$O_R\psi_\varkappa=\sum_{\lambda=1}^{l} D(R)_{\lambda\varkappa}\psi_\lambda. \tag{5}$$

Операция обращения времени коммутирует со всеми пространственными элементами симметрии, в силу чего с чисто математической точки зрения полную группу симметрии системы можно представить в виде прямого произведения группы пространственной симметрии и операции обращения времени. Однако применять теорию представлений в ее обычной форме к такой полной группе нельзя, поскольку операция обращения времени нелинейна. При более детальном рассмотрении выясняется, что необходимо различать три случая (см. работы [6, 7]):

а) представление D можно преобразовать к вещественному виду;

б) представления D и D^* неэквивалентны;

в) представления D и D^* эквивалентны, но их нельзя привести к вещественному виду.

Случай «а». Рассматривая, например, все однозначные представления трехмерной группы вращений и вращений с отражениями, двумерной группы вращений с отражениями, а также представлений симметрической группы, можно считать, что представление D заранее приведено к вещественному виду. Из (5) при переходе к комплексно сопряженным величинам находим

$$KO_R\psi_\varkappa = O_R K\psi_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{l} D(R)_{\lambda\varkappa} K\psi_\lambda. \tag{6}$$

То же соотношение справедливо и для вещественных функций

$$\psi_\varkappa + K\psi_\varkappa = u_\varkappa, \qquad i(\psi_\varkappa - K\psi_\varkappa) = v_\varkappa,$$

в силу чего функции $u_1, \ldots, u_l$ под действием как пространственных преобразований, так и обращения времени преобразуются только через функции u. Функции $v_1, \ldots, v_l$ также преобразуются только через v. Поэтому если функции u и v линейно независимы, то нет никаких оснований считать, что функции v должны принадлежать тому же собственному значению, которому принадлежат функции u (даже в том случае, когда имеет место случайное вырождение).

Таким образом, в случае «а» обращение времени не приводит к дополнительному вырождению и проявляется лишь в том, что все собственные функции, принадлежащие вещественной форме представления, путем умножения на некоторую константу также приводятся к вещественному виду.

Если A — вещественный эрмитов оператор и функции ψ_i и ψ_j принадлежат собственным значениям типа «а», то связывающий их матричный элемент оператора A оказывается вещественным:

$$(\psi_i,\ A\psi_j)^* = (K\psi_i,\ KA\psi_j) = (\psi_i,\ A\psi_j). \tag{7}$$

Если оператор A обладает еще и пространственной симметрией задачи, то, комбинируя элементы этой симметрии с равенством (7), можно получить дополнительные сведения о свойствах матричного элемента оператора A. Хотя в дальнейшем это нам нигде не понадобится, упомянем в качестве примера, что среднее значение мнимого эрмитова оператора, обладающего пространственной симметрией задачи (такими операторами могут быть

$$\sum_n x_n p_{nx} + p_{nx} x_n + y_n p_{ny} + p_{ny} y_n + z_n p_{nz} + p_{nz} z_n$$

или

$$xM_x + yM_y + zM_z),$$

для *любого* стационарного состояния $a_1\psi_1 + \ldots + a_l\psi_l$ равно нулю, если нет случайного вырождения

$$\left(\sum_\varkappa a_\varkappa\psi_\varkappa,\ B\sum_\lambda a_\lambda\psi_\lambda\right) = \sum_{\varkappa,\lambda} a_\varkappa^* a_\lambda (\psi_\varkappa,\ B\psi_\lambda),$$

где скалярное произведение $(\psi_\varkappa, B\psi_\lambda)$ обращается в нуль при $\varkappa = \lambda$ потому, что функция $\psi_\varkappa$ вещественна, а при $\varkappa \neq \lambda$ потому, что функции $\psi_\varkappa$ и ψ_λ принадлежат различным строкам представления D.

Случаи «б» и «в». Если все собственные функции вещественны, то соответствующее представление также вещественно. Справедливость этого утверждения следует из (5):

$$(\psi_\lambda, O_R\psi_\varkappa) = D(R)_{\lambda\varkappa};$$

здесь обе функции ψ_λ и $O_R\psi_\varkappa$ в левой части равенства вещественны. Следовательно, если представление нельзя привести к вещественной форме, то соответствующие собственные функции невещественны. Функции $K\psi_1, \ldots, K\psi_l$ принадлежат тому же собственному значению, что и функции $\psi_1, \ldots, \psi_l$, однако в отличие от ранее рассмотренного случая их нельзя представить в виде линейных комбинаций функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$. Из равенства (5) и соотношения (3а) находим

$$KO_R\psi_\varkappa = O_R K\psi_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{l} D^*(R)_{\lambda\varkappa} K\psi_\lambda. \tag{8}$$

В случае «б» представления D и D^* неэквивалентны и, следовательно, функции $K\psi_\varkappa$, принадлежащие представлению D^*, ортогональны функциям $\psi_\varkappa$. Существование элемента симметрии K удваивает вырождение: одному и тому же собственному значению принадлежат два уровня, отвечающие различным (комплексно сопряженным) представлениям. Вместо равенства (7) в рассматриваемом случае справедливо равенство

$$(\psi_i, A\psi_j)^* = (K\psi_i, KA\psi_j) = (K\psi_i, AK\psi_j). \tag{9}$$

Таким образом, если оператор веществен и эрмитов, то при замене собственных функций комплексно сопряженными функциями матричный элемент переходит в комплексно сопряженную величину. Если в случае «б» вещественный или мнимый оператор обладает симметрией задачи, то это (как и в случае «а») позволяет выявить некоторые дополнительные его свойства.

В случае «в» новый элемент симметрии — операция обращения времени — приводит к дополнительному вырождению: два собственных значения, принадлежащих одному и тому же представлению, совпадают. Мы не будем рассматривать здесь случай «в» более подробно еще и потому, что трехмерная группа вращений не обладает подгруппой, у которой было бы лишь одно однозначное представление описываемого типа. Результаты, к которым мы бы пришли, аналогичны результатам, полученным в случае «а» с учетом спина при нечетном числе электронов.

6. Рассмотрим теперь теорию, учитывающую спин электрона [8]. Прежде всего мы должны снова определить операцию K — «обращение времени». Операция K не должна изменять статистику расположения частиц в пространстве, ибо противоположно направленные (но равные по величине) скорости и спины для φ и $K\varphi$ должны иметь одинаковую вероятность.

Оператор K может быть либо унитарным оператором, либо произведением унитарного оператора и оператора перехода к комплексно сопряженной величине. В действительности осуществляется лишь вторая возможность [1]).

Итак, $K = UK_0$, где U — линейный унитарный оператор, а K_0 означает переход к комплексно сопряженной величине. В силу сказанного выше, операторы x, y, z коммутируют с K:

$$x\varphi = KxK\varphi = UK_0xK_0U^{-1}\varphi = UxU^{-1}\varphi;$$

$$y\varphi = UyU^{-1}\varphi; \qquad z\varphi = UzU^{-1}\varphi,$$

а операторы p_x, p_y, p_z и s_x, s_y, s_z антикоммутируют с K:

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\varphi = -UK_0\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}K_0U^{-1}\varphi = U\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}U^{-1}\varphi;$$

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\varphi = U\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}U^{-1}\varphi; \quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\varphi = U\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}U^{-1}\varphi;$$

$$s_x\varphi = -UK_0s_xK_0U^{-1}\varphi = -Us_x^*U^{-1}\varphi;$$

$$s_y\varphi = -Us_y^*U^{-1}\varphi; \qquad s_z\varphi = -Us_z^*U^{-1}\varphi.$$

Из выписанных соотношений видно, что линейный унитарный оператор U коммутирует с x, y, z и p_x, p_y, p_z (и, таким образом, не влияет на декартовы координаты). Что же касается спиновых матриц Паули, то оператор U антикоммутирует с вещественными матрицами s_y и s_z и коммутирует с мнимой матрицей s_x. Отсюда следует, что оператор U с точностью до константы, которую можно отбросить, совпадает с s_x. Если число электронов больше одного, оператор U совпадает с произведением операторов s_x всех электронов:

$$\begin{aligned} K\varphi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; \sigma_1, \ldots, \sigma_n) &= \\ = s_{1x}s_{2x}\ldots s_{nx}\varphi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; \sigma_1, \ldots, \sigma_n) &= \\ = (-i)^n\sigma_1\ldots\sigma_n\varphi^*(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n; -\sigma_1, \ldots, -\sigma_n). \end{aligned} \tag{10}$$

Это и есть в точности преобразование Крамерса.

---

[1]) См. книгу [9]. Та же аргументация, которая приводится в этой книге для обоснования перехода к комплексно сопряженной величине, применима и в рассматриваемом нами случае, поскольку и в книге, и у нас речь идет об изменении направления времени.

Пользуясь им, запишем основные свойства (I)—(III) для оператора K в виде

$$K^2\varphi = UK_0UK_0\varphi = UU^*\varphi = s_{1x} \ldots s_{nx}s^*_{1x} \ldots s^*_{nx}\varphi = (-1)^n\varphi, \quad \text{(Ia)}$$

$$K(a\varphi + b\psi) = UK_0(a\varphi + b\psi) = a^*UK_0\varphi + b^*UK_0\psi, \quad \text{(IIa)}$$

$$(\varphi,\ \psi) = (K_0\psi,\ K_0\varphi) = (UK_0\psi,\ UK_0\varphi) = (K\psi,\ K\varphi). \quad \text{(IIIa)}$$

При четном числе электронов n эти свойства совпадают с теми, которые были положены в основу проводимого нами анализа. Таким образом, при четном n указанные свойства полностью выполняются и в теории Паули. Однако при нечетном числе электронов вместо равенства (I) справедливо равенство

$$K^2\varphi = -\varphi;\ K^2 = -1. \quad \text{(Iб)}$$

Этот случай мы рассмотрим в следующем пункте нашей работы.

Если система содержит не только электроны, но и другие частицы, то для нее в зависимости от того, четно или нечетно полное число частиц, будет выполняться либо равенство (I), либо равенство (Iб). При этом частицу, спин которой в s раз больше спина электрона, следует считать за s частиц.

7. Уже в случае четного числа электронов функция $K\varphi$, которую мы называем комплексно сопряженной с функцией φ, не является комплексно сопряженной с φ в обычном смысле: $K\varphi$ и φ связаны между собой соотношением $UK_0\varphi = U\varphi^*$. При нечетном числе электронов мы вообще не можем говорить о вещественных функциях, поскольку функция $K\varphi$ не равна функции φ, а, наоборот, ортогональна ей:

$$(K\varphi,\ \varphi) = (K\varphi,\ KK\varphi) = -(K\varphi,\ \varphi) = 0. \quad (11)$$

Функцию $K\varphi$ назовем сопряженной с функцией φ, функцию $-\varphi$ — сопряженной с функцией $K\varphi$ и т. д.

Вещественные и мнимые операторы также определяются несколько иначе, чем прежде, а именно: вещественным называется оператор A, удовлетворяющий соотношению

$$A = K^{-1}AK = KAK$$

(вместо прежнего соотношения $A = K^{-1}AK = -KAK$), а мнимым — оператор B, удовлетворяющий соотношению

$$B = -K^{-1}BK = KBK.$$

Помимо названных в п. 3 важными примерами вещественных операторов служат операторы преобразований одних лишь декартовых координат P_R и операторы преобразований спиновых переменных Q_R. Важными примерами мнимых операторов служат спиновые величины s_{kx}, s_{ky}, s_{kz}.

Матричные элементы вещественных эрмитовых операторов, связывающие сопряженные функции, равны нулю:

$$(K\varphi,\ A\varphi)=(KA\varphi,\ K^2\varphi)=-(AK\varphi,\ \varphi)=-(K\varphi,\ A\varphi). \qquad (12)$$

Средние значения вещественного эрмитова оператора A для двух сопряженных функций равны, средние значения мнимого оператора B для двух сопряженных функций равны по модулю, но отличаются по знаку:

$$(\varphi,\ B\varphi)=(KB\varphi,\ K\varphi)=-(BK\varphi,\ K\varphi)=-(K\varphi,\ BK\varphi). \qquad (13)$$

Поскольку собственные функции можно выбрать ортогональными так, что они будут образовывать пары сопряженных функций, среднее значение мнимого оператора для совокупности всех состояний, отвечающих одной и той же энергии, будет равно нулю в силу соотношения (13).

8. Равенство $K^2=-1$ обусловливает существенное различие вырождения в случаях нечетного и четного числа электронов. Нетрудно видеть, что у системы, не обладающей пространственной симметрией, всегда наблюдается двукратное вырождение: две ортогональные функции φ и $K\varphi$ принадлежат одному и тому же собственному значению. Матричные элементы вещественных операторов для сопряженных функций комплексно сопряжены:

$$(\psi_i,\ A\psi_j)=(KA\psi_j,\ K\psi_i)=(K\psi_i,\ AK\psi_j)^*. \qquad (14)$$

Что же касается свойств систем, обладающих пространственной симметрией, то они также сильно различаются для систем с нечетным и четным числом электронов. Так же как и в п. 5, необходимо различать следующие три случая:

Случай «а». Если рассматриваемый уровень принадлежит вещественному представлению $D=D^*$, то из формулы (5), имеющей теперь вид

$$KO_R\psi_\varkappa=O_RK\psi_\varkappa=\sum_{\lambda=1}^{l}D(R)_{\lambda\varkappa}K\psi_\lambda, \qquad (15)$$

следует, что функция $K\psi_\lambda$ принадлежит λ-й строке представления D. Таким образом, элемент симметрии K обусловливает двукратное вырождение, т. е. кратность вещественных представлений всегда равна 2.

Для операторов, обладающих пространственной симметрией задачи, обычные формулы теории представлений для матричных элементов и соотношения (13)—(15) позволяют получить некоторые новые сведения. В частности, оказывается, что для «симметричного» вещественного эрмитова оператора все матричные элементы, связывающие различные собственные функции с одной и той же энергией, обращаются в нуль, а средние значения, вычисленные для отдельных собственных функций, равны. Таким образом, в пространстве функций, отвечающих одному собственному значению, приводимое представление ведет себя так, как если бы оно было неприводимым.

Случай «б». Свойства системы особенно просты для собственных значений, отвечающих представлениям, не эквивалентным комплексно сопряженным с ними. Все рассуждения, приведенные в п. 5, остаются в силе и для рассматриваемого случая.

Случай «в». Если представления D и D^* эквивалентны, то их можно трансформировать друг в друга с помощью некоторого унитарного преобразования S. Пусть

$$SD(R)S^{-1} = D^*(R), \qquad S^*D^*(R)S^{*-1} = D(R). \tag{16}$$

Тогда

$$S^*SD(R)S^{-1}S^{*-1} = S^*D^*(R)S^{*-1} = D(R). \tag{17}$$

Таким образом, преобразование S^*S коммутирует со всеми $D(R)$, и, следовательно, его матрица кратна единичной: $S = cE$. Отсюда следует и обратное равенство $E = cS$, в силу которого $c = \pm 1$. В нашем случае $c = -1$, поскольку при $c = +1$ представления приводятся к вещественной форме. Итак,

$$E = -S. \tag{18}$$

Это означает, что все представления типа «в» имеют лишь четные размерности. При трансформации представления $D(R)$ унитарной матрицей U матрица S, переводящая D в D^*, переходит в матрицу $U'SU$. С помощью подходящего выбора базиса представления $D(R)$ матрицу S в формуле (18) всегда можно представить [7] в виде

$$S = \begin{vmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & i & \dots \\ \dots & 0 & 0 & -i & 0 & \dots \\ \dots & 0 & i & 0 & 0 & \dots \\ \dots & -i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}. \tag{18a}$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что полуцелые представления трехмерной группы вращений (принадлежащие к рассматриваемой категории) выбраны в таком виде, при котором матрица S имеет форму (18а). В этом случае строки и столбцы матриц D и S (а следовательно, и собственные функции) удобнее нумеровать не 1, 2, ..., а числами $-j$, $-j+1, \ldots, j-1, j$, где j — полуцелое число, тогда $2j+1$ — размерность представления.

При такой нумерации из соотношений (16) следует [1])

$$D^*(R)_{\mu\nu} = i^{2\mu-2\nu} D(R)_{(-\mu)\,(-\nu)} = (-1)^{\mu-\nu} D(R)_{(-\mu)\,(-\nu)}. \quad (16a)$$

Действуя оператором K на правую и левую части формулы преобразования (5) для ψ_μ, получаем [матрица S считается приведенной к виду (18а)]

$$Q_R\psi_\mu = \sum_\nu D(R)_{\nu\mu}\psi_\nu, \qquad O_R i^{2\mu} K\psi_\mu = \sum_\nu D(R)_{(-\nu)\,(-\mu)}\, i^{2\nu} K\psi_\nu. \quad (19)$$

Формулы (19) означают, что функция $i^{2\mu}K\psi_\mu$ принадлежит $(-\mu)$-й строке представления $D(R)$. Введем функции u и v:

$$u_\mu = \psi_\mu + i^{-2\mu} K\psi_{-\mu};\;\; v_\mu = i\left(\psi_\mu - i^{-2\mu} K\psi_{-\mu}\right). \quad (20)$$

Ясно, что под действием пространственных преобразований R и обращения времени K функции u преобразуются только через u, а функции v — только через v. Следовательно, при нечетном числе электронов для собственных значений, отвечающих представлениям типа «в», никакого дополнительного вырождения не происходит. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что собственные функции удовлетворяют соотношению

$$K\psi_\mu + i^{2\mu}\psi_{-\mu} = 0, \quad (21)$$

справедливому также для функций u и v.

Чтобы продемонстрировать, как следует пользоваться этим соотношением, рассмотрим матричные элементы мнимого эрмитова оператора, связывающие собственные функции, отвечающие собственному значению типа «в»:

$$(\psi_\mu,\; B\psi_\nu) = -(BK\psi_\nu,\; K\psi_\mu) = -(-1)^{\mu-\nu}(\psi_{-\mu},\; B\psi_{-\nu})^*. \quad (22)$$

Если оператор B обладает полной симметрией задачи, то все матричные элементы (22) обращаются в нуль. При $\mu \neq \nu$ это происходит потому, что функции ψ_μ и ψ_ν принадлежат различным строкам представления D; при $\mu = \nu$ — по иной причине. При $\mu = \nu$ все матричные элементы должны быть равными и, как видно из формулы (22), мнимыми. В то же время в силу эрмитовости оператора B они должны быть вещественными.

[1]) Хотя целочисленные представления трехмерной группы вращений и относятся к представлениям типа «а», обычно их принято выбирать в форме, для которой справедливы соотношения (16а).

Полученное противоречие доказывает, что при $\mu = \nu$ все матричные элементы равны нулю. Следовательно, среднее значение мнимого эрмитова оператора, обладающего полной симметрией задачи, для всех стационарных состояний равно нулю.

Следует обратить внимание на то, что при четном числе электронов случай «а» эквивалентен случаю «в» при нечетном числе электронов и наоборот. Это связано с тем, что представления группы преобразований Q_R при четном числе электронов принадлежат к типу «а», а при нечетном — к типу «в». Если система содержит не только электроны, но еще и другие частицы, то справедливо аналогичное утверждение, в котором вместо «четного числа электронов» должно стоять «четное число частиц с полуцелым спином».

9. Подчеркнем еще раз различие в интерпретации «обращения времени» и обычных пространственных симметрий. Оно связано с нелинейностью операции, обращающей время, входящее в волновую функцию. Основной предпосылкой настоящей работы послужило замечание об инвариантности всей задачи относительно преобразования $t' = -t$.

Если же задача не инвариантна относительно преобразования $t' = -t$, то преобразования, содержащие обращение времени, тем не менее существуют. Например, однородное магнитное поле обладает элементом симметрии: отражение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, с одновременным изменением знака t. В силу этой симметрии собственные функции (если отбросить множитель $e^{im\varphi}$) вещественны.

В тех двух подходах к применению теоретико-групповых соображений, о которых мы упоминали в п. 1, обращение времени проявляется по-разному. Так, при втором подходе (т. е. при нулевом полном импульсе системы) обращение времени обусловливает существование невырожденных уровней с особенно простыми свойствами (имеется в виду, что число частиц с полуцелым спином четно). Например, средний магнитный момент такой системы в любом направлении равен нулю. Это свойство, разумеется, не следует из того, что полный угловой момент равен нулю, поскольку в систему входят частицы не только одного сорта. Наоборот, при нечетном числе частиц не существует невырожденных состояний.

При первом подходе (т. е. при фиксированных ядрах) симметрия также позволяет получать различные результаты, например установить, что средний угловой момент электронов равен нулю при совершенно несимметричной конфигурации ядра (и четном числе электронов). Этот результат, по мнению Ван-Флека, играет особенно важную роль в теории диамагнетизма большинства веществ, поскольку магнитный момент, обусловленный движением ядер, очень мал.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kramers H. A.*, Proc. Kon. Nederl. Akad. Weten., Amsterdam, **33**, 959 (1930),
2. *van Vleck J. H.*, Electric and magnetic susceptibilities, Oxford, 1932.
3. *Breit G.*, Phys. Rev., **34**, 553 (1929).
4. *Born M.*, *Oppenheimer I. R.*, Ann. Phys., **84**, 457 (1927).
5. *Onsager L.*, Phys. Rev., **38**, 2265 (1931).
6. *Frobenius G.*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 186 (1906),
7. *Schur I.*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 196 (1906).
8. *Pauli W.*, Zs. Phys., **43**, 601 (1927).
9. *Wigner E.*, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931. (Имеется перевод: *Вигнер Е.*, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961.)

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СИСТЕМ [1])

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что соображений симметрии достаточно для перечисления релятивистских уравнений элементарных систем [1] [2]). Понятие «элементарная система», однако, не совсем эквивалентно интуитивному представлению об элементарной частице. Интуитивно мы считаем частицу «элементарной», если у нас не возникает необходимости наделять ее внутренней структурой. Понятие «элементарная система», для которой можно осуществить упомянутое выше перечисление релятивистских уравнений, носит несколько более явный характер: все состояния такой системы должны быть представимы в виде суперпозиции образов *любого* состояния, полученных в результате релятивистских преобразований. Иначе говоря, между различными состояниями системы, допускающими принцип суперпозиции, не должно быть релятивистски инвариантного различия. Это условие нередко называют условием неприводимости. Под релятивистскими преобразованиями подразумеваются не только обычные преобразования Лоренца, но также повороты и сдвиги во времени и в пространстве.

Роль элементарных систем как начальных и конечных состояний в процессах столкновений и их связь с теорией матрицы столкновений мы рассмотрим в конце статьи, а теперь обратимся к изучению связи между элементарными системами и элементарными частицами.

В понятии элементарной частицы наиболее важную роль играют, по-видимому, два условия. Первое состоит в том, что состояния элементарной частицы образуют элементарную систему в указанном выше смысле. Это условие совершенно однозначно. Второе условие формулируется не столь четко: представление об элементарной частице как о частице, наделенной структурой, т. е. состоящей из других частиц, должно быть

---

[1]) Из журнала: Rev. Mod. Phys., 21, 400 (1949). Статья написана совместно с Т. Ньютоном.

[2]) Понятие «элементарная система», смысл которого будет объяснен ниже, позволяет описывать совокупность состояний, образующих, как говорят математики, пространство неприводимого представления неоднородной группы Лоренца.

нецелесообразным. В случае электрона или протона оба условия выполняются, и относительно элементарного характера этих частиц никаких вопросов не возникает. Для атома водорода, находящегося в основном состоянии, выполняется лишь первое условие, и мы не считаем атом водорода элементарной частицей.

В случае π-мезона ситуация менее ясна. Качественно π-мезон ничем не отличается от очень резкого резонансного состояния, образующегося при столкновении μ-мезона и нейтрино. Строго говоря, состояния π-мезона не образуют элементарной системы, поскольку после достаточно большого промежутка времени π-мезон может претерпеть распад, а различие между состояниями до и после распада, очевидно, релятивистски инвариантно. Тем не менее время жизни π-мезона очень велико по сравнению с любым характерным интервалом времени (например, по сравнению с h/mc^2), а в пределах этого времени жизни состояния π-мезона образуют элементарную систему. С другой стороны, свойства π-мезона сильно отличаются от тех, которые можно было бы ожидать от системы, состоящей из μ-мезона и нейтрино. Следовательно, второе условие, предъявляемое к элементарной частице, в случае π-мезона выполнено. Именно это условие не имеет аналога в определении элементарной системы. Таким образом, понятие элементарной системы гораздо шире понятия элементарной частицы: как уже говорилось выше, находящийся в нормальном состоянии атом водорода можно считать элементарной системой.

Всякую систему, даже если она состоит из произвольного числа частиц, можно разложить на элементарные системы. Эти элементарные системы можно определить релятивистски инвариантным образом как системы, содержащие лишь некоторые, вполне определенные состояния. Так, сужение множества состояний атомов водорода до основного состояния позволяет выбрать элементарную систему из всех состояний (которые в совокупности не образуют элементарной системы). Целесообразность разложения на элементарные системы зависит от того, как часто приходится иметь дело с линейными комбинациями, содержащими несколько таких систем.

Огромным недостатком использования элементарных систем как основы теории служит то обстоятельство, что их существование выводится из принципов квантовой механики с помощью весьма тонких и абстрактных рассуждений. В результате выражения для некоторых наиболее важных операторов оказываются «утерянными по дороге». Единственными физическими величинами, для которых теория элементарных систем позволяет получить явные выражения, являются компоненты вектора энергии — импульса и шесть компонент тензора релятивистского углового момента. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы попытаться найти общие, основанные на свойствах симметрии принципы, которые позволили бы получить явные выражения для операторов координат.

В случае, когда мы ограничиваемся рассмотрением элементарной системы, физическая интерпретация искомых операторов однозначна: если речь идет об одной элементарной частице, то эти операторы отвечают ее координатам; если же имеется несколько частиц, то операторы соответствуют координатам центра масс. При рассмотрении же неэлементарной системы интерпретация искомых операторов неединственна, и принятые нами постулаты не приводят к однозначно определенному набору операторов.

Прежде чем приступать к изложению наших результатов, упомянем о других исследованиях, проводившихся с аналогичными целями. Проблему центра масс в теории относительности рассматривали на основе классической механики Эддингтон [2] и Фоккер [3]; их работа была оценена по достоинству, Прайс [4] дал квантовомеханическое обобщение полученных ими результатов; в дальнейшем нам еще неоднократно придется ссылаться на работу Прайса. Идеи, близкие к высказанным в работе Прайса, впервые выдвинул Шредингер [5, 6], а позднее — Финкельштейн [7] и Меллер [8] [1]).

Настоящая статья возникла как результат повторного исследования неприводимых представлений пространства де Ситтера [10], предпринятого одним из авторов [11]. Эти представления находятся во взаимно однозначном соответствии с релятивистски инвариантными волновыми уравнениями для элементарных систем в пространстве де Ситтера. В итоге исследования удалось выяснить, что физический смысл полученных уравнений был бы намного прозрачнее, если бы операторы координат можно было найти на основе теоретико-групповых соображений. Первоначально эту программу решено было осуществить для плоского пространства. Полученные результаты излагаются ниже.

ПОСТУЛАТЫ ДЛЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ И ОПЕРАТОРЫ КООРДИНАТ

Записать оператор координат было бы совсем нетрудно, если бы была известна волновая функция состояния (или состояний), у которого при $t = 0$ все три пространственные координаты обращаются в нуль. Если ψ — такая функция и $T(a)$ — оператор сдвига на a_x, a_y, a_z, a_t вдоль соответствующих координатных осей, то волновая функция $T(a)\psi$ отвечает состоянию,

[1]) См. также работу [9].

для которого в момент времени a_t пространственные координаты принимают значения a_x, a_y, a_z. Таким образом, зная волновые функции, соответствующие состоянию $x = y = z = 0$ при $t = 0$ (и операторы сдвига), мы тем самым знаем все локализованные состояния, т. е. все собственные функции операторов координат. Отсюда уже нетрудно получить операторы координат. Учитывая все сказанное, мы сосредоточим свое внимание на получении волновых функций тех состояний, которые в момент времени $t = 0$ локализованы в начале координат.

Будем считать, что состояния, представляющие систему, локализованную при $t = 0$ в точке $x = y = z = 0$, удовлетворяют следующим постулатам:

а) они образуют линейное векторное пространство S_0, т. е. суперпозиция двух таких локализованных состояний локализована так же, как состояния-слагаемые;

б) пространство состояний S_0 инвариантно относительно поворотов вокруг начала координат и отражений (инверсий) как пространственных координат, так и времени;

в) если состояние ψ принадлежит к числу состояний, локализованных при $t = 0$ в начале координат, то в результате пространственного сдвига состояние ψ переходит в состояние, ортогональное всем состояниям, входящим в S_0;

г) позднее будут еще введены некоторые условия регулярности, смысл которых сводится в основном к тому, что к рассматриваемым состояниям должны быть применимы все инфинитезимальные операторы группы Лоренца.

Следует ожидать, что состояния, локализованные в определенных точках пространства, по своим свойствам аналогичны функциям непрерывного спектра, т. е. сами не принадлежат классу квадратично интегрируемых функций, но являются пределами таких функций. Нам кажется, что сформулированные выше постулаты служат достаточно разумным выражением понятия локализации системы, и всякую систему, не удовлетворяющую содержащимся в этих постулатах требованиям, естественно назвать нелокализуемой.

Наши вычисления будут производиться для реализации элементарных систем, описанной Баргманом и Вигнером [13]. Итак, приступаем к выкладкам.

БЕССПИНОВАЯ ЧАСТИЦА (ЧАСТИЦА КЛЕЙНА — ГОРДОНА)

Отыскание локализованного состояния в случае бесспиновых частиц происходит особенно просто. Мы приводим выкладки с некоторыми подробностями лишь потому, что по существу те же этапы вычислений встречаются и при рассмотрении частиц со спином.

В данном случае волновые функции определены на положительном поле гиперболоида

$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2,$$

и в качестве независимых переменных мы выбираем p_1, p_2, p_3. В любой формуле p_0 означает $(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2)^{1/2}$. Инвариантное скалярное произведение имеет вид

$$(\psi, \varphi) = \int\int\int \frac{\psi^*(p_1, p_2, p_3)\,\varphi(p_1, p_2, p_3)\,dp_1\,dp_2\,dp_3}{p_0}. \tag{1}$$

Волновая функция Φ в координатном пространстве записывается следующим образом:

$$\Phi(x^1, x^2, x^3, x^0) = (2\pi)^{-3/2} \int \varphi(p_1, p_2, p_3) \times$$
$$\times \exp(-i\{x, p\}) \frac{dp_1\,dp_2\,dp_3}{p_0}, \tag{2}$$

где

$$\{x, p\} = x^0p^0 - x^1p^1 - x^2p^2 - x^3p^3 =$$
$$= x_0p_0 - x_1p_1 - x_2p_2 - x_3p_3 \tag{3}$$

— лоренц-инвариантное скалярное произведение. На протяжении всей работы ковариантные и контравариантные компоненты равны для временно́й (индекс 0) координаты и равны по величине, но противоположны по знаку для пространственных координат (индексы 1, 2, 3). Это правило неизменно соблюдается при поднятии и опускании всех индексов. Кроме того, для скалярного произведения двух пространственно-подобных векторов мы используем обозначение (x, p), в силу чего, например,

$$\{x, p\} = x^0p^0 - (x, p).$$

При любом целом j функции

$$P_m^j(\vartheta, \varphi) f(p) \qquad (m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j) \tag{4}$$

(их всего $2j+1$; p, ϑ и φ — сферические координаты в пространстве p_1, p_2, p_3; f — произвольная функция) образуют линейные наборы, инвариантные относительно поворотов вокруг точки $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Функции P_m^j — это не что иное, как хорошо известные сферические гармоники. Линейные наборы (4) инвариантны также и относительно инверсии, т. е. замены p_1, p_2, p_3 на $-p_1$, $-p_2$, $-p_3$. Разумеется, свойствами инвариантности относительно поворотов и инверсии обладает не только каждый набор (4) в отдельности, но и сумма произвольного числа таких наборов, если наряду с каждой функцией (4) мы будем брать все $2j+1$ функций и их линейные комбинации. Множитель $f(p)$ при разных j может быть различным.

При обращении времени функция $\psi(p_1, p_2, p_3)$ переходит [13] в функцию

$$\Theta\psi(p_1, p_2, p_3) = \psi^*(-p_1, -p_2, -p_3). \tag{5}$$

Под обращением времени мы понимаем операцию, которая волновую функцию ψ переводит в волновую функцию $\vartheta(\psi)$, обладающую следующим свойством: любой эксперимент, проводимый над $\vartheta\psi$ в момент времени $-t$, приводит в точности к такому же результату, к которому он привел бы, если бы его производили над функцией ψ в момент времени t. Из соотношения (5) и постулата «б» следует, что если функции $P_m^j(\vartheta, \varphi) f(p)$ локализованы в начале координат, то и наборы $P_{-m}^j(\vartheta, \varphi) f^*(p)$, т. е. $P_{+m}^j(\vartheta, \varphi) f^*(p)$, также локализованы. То же верно для суммы и разности соответствующих пар функций. Отсюда ясно, что множитель $f(p)$, не ограничивая общности, можно считать вещественным.

Действие оператора сдвига в импульсном пространстве сводится просто к умножению на $\exp(-i\{a, p\})$:

$$T(a)\psi = \exp(-i\{a, p\})\psi. \tag{6}$$

Нам понадобятся лишь чисто пространственно-подобные сдвиги, т. е. мы предполагаем, что $a^0 = 0$. Из принятого нами постулата «в» для таких сдвигов следует, что «сдвинутая» функция $\exp(i(a, p))\psi$ ортогональна ψ, если функция ψ локализована, или что

$$\int\int\int |\psi(p_1, p_2, p_3)|^2 \exp[i(a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3)] \frac{dp_1dp_2dp_3}{p_0} = 0 \tag{6a}$$

для любого ненулевого вектора a. Это означает, что в разложение функции $|\psi|^2/p_0$ в интеграл Фурье входит лишь та ее часть, которая отвечает нулевому волновому числу. Следовательно, $|\psi|^2/p_0$ есть константа, и модуль $|\psi|$ пропорционален $p_0^{1/2}$. Сравнивая полученный результат с функциями (4), мы видим, что допустимым является лишь значение $j = 0$. Поскольку ранее было показано, что множитель $f(p)$ можно считать вещественным, мы получаем

$$\psi^2 = (2\pi)^{-3} p_0. \tag{7}$$

Как и ожидалось, скалярный квадрат (ψ, ψ) бесконечен, и локализованная функция ψ принадлежит непрерывному спектру.

Если ограничиться одними лишь постулатами «а» — «в», то функция ψ могла бы быть разрывной, и при некотором p выполнялось бы соотношение

$$+p_0^{1/2} = (p^2 + \mu^2)^{1/4},$$

а при всех остальных p — соотношение

$$p_0^{1/2} = -(p^2 + \mu^2)^{1/4}.$$

Однако независимо от выбора ψ при сохранении равенства (7) в рассматриваемом нами случае существует лишь одно состояние, локализованное в начале координат. Действительно, если бы нашлось два таких состояния ψ_1 и ψ_2, то ψ_1 должно было бы быть ортогональным не только $\psi_1 \exp(-i\{a, p\})$, но и $\psi_2 \exp(-i\{a, p\})$, откуда следует, что помимо соотношения $|\psi|^2 \sim p_0$ выполняется также и соотношение $\psi_1^* \psi_2 \sim p_0$, и, таким образом, функция ψ_1 пропорциональна функции ψ_2.

Чтобы исключить из рассмотрения разрывные функции ψ, мы вводим дополнительное условие регулярности: отношение

$$\frac{(M^{0k}\psi_n,\ M^{0k}\psi_n)}{(\psi_n,\ \psi_n)} \tag{8}$$

остается конечным, когда нормированные волновые функции ψ_n стремятся к ψ; M_{0k} здесь означает инфинитезимальный оператор собственного преобразования Лоренца в плоскости $x^0 x^k$ [12]:

$$M^{0k} = ip^0 \frac{\partial}{\partial p_k}. \tag{8a}$$

Новый постулат позволяет исключить все разрывные функции ψ, и для волновой функции единственного состояния, локализованного в начале координат, мы получаем выражение

$$\psi = (2\pi)^{-3/2} p_0^{1/2}. \tag{9}$$

Требование регулярности «г» в действительности сводится к требованию ограниченности отношения (8) для всех M^{kl}. Однако если вместо M^{0k} в выражение (8) подставить операторы M^{23}, M^{31} или M^{12}, то вновь полученные выражения автоматически окажутся ограниченными: их сумма равна $j(j+1)$. Следовательно, требование, чтобы операторы M^{23}, M^{31} и M^{12} были применимы к функции ψ, не приводит к новому условию.

В координатном пространстве локализованная волновая функция определяется выражением (2). С точностью до постоянной она имеет вид [14]

$$\Psi(r) = \left(\frac{\mu}{r}\right)^{5/4} H^{(1)}_{5/4}(i\mu r) \tag{9a}$$

При $r \to \infty$ функция $\Psi(r)$ стремится к нулю как $e^{-\mu r}$; при $r \to 0$ она стремится к бесконечности как $r^{-5/2}$. Волновая функция

(9а) квадратично не интегрируема, поскольку принадлежит непрерывному спектру.

Действуя оператором сдвига на функцию (9), получаем для волновой функции состояния, локализованного в момент времени $t = 0$ в точке x^1, x^2, x^3, выражение

$$T(-x)\psi = (2\pi)^{-3/2} p_0^{1/2} \exp[-i(p^1x^1 + p^2x^2 + p^3x^3)] = \\ = (2\pi)^{-3/2} p_0^{1/2} e^{-i(px)}.$$

Последнее должно быть собственной функцией оператора q^k координаты k, отвечающей собственному значению x^k. Оператор q^k определяется, следовательно, так:

$$q^k\varphi(p) = (2\pi)^{-3} \int p_0^{1/2} e^{-i(px)} x^k (p_0')^{1/2} \times \\ \times e^{i(p'x)} \varphi(p') \frac{dx\, dp'}{p_0'}, \tag{10}$$

где dx и dp' означают соответственно $dx^1dx^2dx^3$ и $dp_1'dp_2'dp_3'$. Известно, что оператор (10) можно представить в виде

$$q^k\varphi(p) = \left(i\frac{\partial}{\partial p^k} - \frac{i}{2}\frac{p^k}{p_0^2}\right)(2\pi)^{-3} \times \\ \times i\int p_0^{1/2} e^{i(p'-p)x} (p_0')^{-1/2} \varphi(p')\, dx\, dp' = -i\left(\frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{p^k}{2p_0^2}\right)\varphi(p). \tag{11}$$

Эти выражения справедливы как для ненулевой, так и для нулевой массы покоя. Интересно, что оператор q^k после перехода из импульсного в координатное пространство приобретает сравнительно простой вид

$$q^k\Phi(x) = x^k\Phi(x) + \frac{1}{8\pi}\int \frac{e^{-\mu|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_k}\, dy. \tag{12}$$

Здесь x и y означают пространственные части 4-векторов x^μ и y^μ, а dy — интегрирование по y^1, y^2, y^3. Обычный оператор q^k содержит лишь первый из указанных в (11) членов.

Следует заметить, во-первых, что операторы координат, к которым с необходимостью приводят наши постулаты, коммутируют друг с другом, вследствие чего для сравнения можно пользоваться только случаем «е», указанным в работе Прайса (наши операторы q^k тождественны его операторам $\tilde{q}_k$). Во-вторых, состояние, локализованное в начале координат в одной координатной системе, не локализовано в движущейся системе координат, даже если в момент времени $t = 0$ начала обеих систем совпадают. Отсюда следует, что наши операторы q^k не имеют простого ковариантного смысла при релятивистских преобразованиях. Лишены простого ковариантного смысла и обычные операторы q^k. Более того, хотя на первый взгляд кажется, что волновая функция $\Phi(x) = \delta(x)$ инвариантна относительно релятивистских преобразований, оставляющих неподвижным начало координат, в действительности это не более чем «математический мираж». Убедиться в «призрачности» инвариантности δ-образной волновой функции лучше всего, записав δ-функцию в импульсном пространстве путем обращения формулы (2). Результат такого преобразования p_0, действительно, имеет простой ковариантный смысл, но не является квадратично интегрируемой функцией. Если же мы попытаемся аппроксимировать его квадратично интегрируемой функцией, например $\psi_a = p_0 \exp(-\alpha^2 p_0^2)$, то образ ψ_α при преобразовании Лоренца не будет стремиться к ψ_α с ростом α. В самом деле, если $\alpha\mu \ll 1$, то скалярное произведение функции ψ_a и ее образа при преобразовании Лоренца не будет зависеть от α и превышать норму ψ_a.

ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ И НЕНУЛЕВОЙ МАССОЙ ПОКОЯ

Воспользуемся еще раз описанием, предложенным в работе [12], т. е. определим волновые функции на положительной поле гиперболоида $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \mu^2$ и дополним переменные p_1, p_2, p_3 спиновыми $2s$ переменными $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2s}$, каждая из которых содержит 4 компоненты. Волновые функции, отвечающие различным состояниям системы, будут симметричными функциями спиновых переменных ξ и будут удовлетворять $2s$ уравнениям

$$\sum_{\varkappa} \gamma_\alpha^\varkappa p_\varkappa \psi = \mu\psi, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, 2s. \tag{13}$$

Непротиворечивость этой системы уравнений была доказана в работе [12]. Действующие на ξ_α матрицы γ устроены так, что две матрицы γ_α с различными первыми индексами коммутируют, а с одинаковыми первыми индексами удовлетворяют известным соотношениям

$$\gamma_\alpha^\varkappa \gamma_\alpha^\lambda + \gamma_\alpha^\lambda \gamma_\alpha^\varkappa = 2g^{\varkappa\lambda}. \tag{13a}$$

Существенное различие между рассматриваемым случаем и бесспиновыми частицами состоит в том, что допустимые волновые функции должны не только быть заданы на положительной поле гиперболоида, но и удовлетворять уравнениям (13). Первому требованию мы удовлетворим, выбрав в качестве независимых переменных p_1, p_2, p_3. Выполнить же второе требование не столь просто. Построить волновые функции, обладающие всеми упомянутыми свойствами, нам поможет один прием, особенно успешно применявшийся Шредингером [5]. Определим операторы

$$E_\alpha = \frac{1}{2}(p_0)^{-1}\left(\sum_\varkappa \gamma_\alpha^\varkappa p_\varkappa + \mu\right)\gamma_\alpha^0. \tag{14}$$

Каждый из них является проекционным оператором:

$$E_\alpha^2 = E_\alpha,$$

и функция $E_\alpha\psi$ автоматически удовлетворяет соответствующему уравнению (13). Обозначим произведение всех операторов E_α через E:

$$E = E_1E_2 \ldots E_{2s}, \tag{14a}$$

тогда $E\psi$ — допустимая функция, удовлетворяющая всем уравнениям (13).

Скалярное произведение выберем в виде

$$(\psi, \varphi) = \int p_0^{-2s-1} \sum_\xi \psi^*\varphi\, dp. \tag{15}$$

При таком определении скалярного произведения из постулата «в» и того обстоятельства, что формула (6) остается в силе и в рассматриваемом случае, сразу же следует, что всякая волновая функция, локализованная в начале координат, удовлетворяет аналогу формулы (7):

$$\sum_\xi |\psi|^2 = (2\pi)^{-3}\, p_0^{2s+1}. \tag{16}$$

Оператор обращения времени имеет вид

$$\Theta\psi(p_1, p_2, p_3) = C\psi^*(-p_1, -p_2, -p_3), \tag{17}$$

где C — матрица, действующая на переменные ξ и удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} &C\gamma_\alpha^{0*} = \gamma_\alpha^0 C \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2s);\\ &C\gamma_\alpha^{k*} = -\gamma_\alpha^k C \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2s;\ k = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{17a}$$

Если матрицы γ^0, γ^2, γ^3 вещественны, то матрица γ^1 — мнимая.

$$C = \prod_{\alpha=1}^{2s} \gamma_\alpha^2\gamma_\alpha^3; \quad C^2 = (-1)^{2s}. \tag{17б}$$

Поскольку матрица C, как следует из определяющих ее соотношений, вещественна, мы получаем также, что $\Theta^2 = (-1)^{2s}$. Последнее соотношение справедливо независимо от выбора

γ-матриц. Оператор инверсии пространственных координат I имеет вид

$$I\psi(p_1, p_2, p_3) = \gamma_1^0\gamma_2^0 \ldots \gamma_{2s}^0\psi(-p_1, -p_2, -p_3) \qquad (18)$$

и коммутирует с оператором E_α, определяемым по формуле (14).

Чтобы построить систему волновых функций, инвариантных относительно вращений, прежде всего определим аналог чисто спиновой функции для релятивистских уравнений (13). Для этого определим вспомогательные функции v_m, не зависящие от p_1, p_2, p_3 и содержащие одни лишь спиновые переменные ξ. Функции v_m удовлетворяют уравнениям

$$\gamma_\alpha^0 v_m = v_m \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2s) \qquad (19)$$

и

$$\frac{1}{2} i \sum_\alpha \gamma_\alpha^1\gamma_\alpha^2 v_m = m v_m \quad (m = -s, -s+1, \ldots, s-1, s). \qquad (19\text{a})$$

Поскольку матрицы γ^0 и $i\gamma^1\gamma^2$ коммутируют, их временно можно считать диагональными. Из уравнения (19) следует, что функции v_m отвечают собственному значению $+1$ матрицы γ^0. Таких функций 2^{2s}, однако нас интересуют лишь симметричные функции переменных ξ, а их всего лишь $2s+1$. Друг от друга эти функции отличаются значением индекса m: функция v_m имеет отличные от нуля компоненты лишь при таких ξ, для которых $s+m$ матриц $i\gamma^1\gamma^2$ равны $+1$, а остальные $s-m$ матриц равны -1. При таких ξ значение v_m равно

$$\left(\frac{(s+m)!\,(s-m)!}{(2s!)}\right)^{1/2} 2^{-s},$$

следовательно, функция v_m нормирована в том смысле, что

$$\sum_\xi |v_m|^2 = \sum_\xi v_m^2 = 1. \qquad (19\text{б})$$

Физически индекс m соответствует спиновому угловому моменту относительно оси x^3. Четность функции v_m в силу соотношений (19) и (19а) положительна.

Функции v_m не являются допустимыми, поскольку не удовлетворяют волновым уравнениям (13), поэтому мы определим спиновые функции следующим образом:

$$V_m(p_1, p_2, p_3; \xi_1, \ldots, \xi_{2s}) = E v_m \quad (m = -s, \ldots, s). \qquad (20)$$

Функции V_m — допустимые волновые функции с положительной четностью и отвечают состоянию с угловым моментом $m\hbar$

относительно третьей оси координат. Их нормировка отличается от (19б):

$$\sum_{\xi} |V_m|^2 = \left(\frac{p_0 + \mu}{2p_0}\right)^{2s}. \tag{20a}$$

Наиболее общее решение уравнений (13) представимо в виде линейной комбинации функций V_m с произвольными коэффициентами, зависящими от p_1, p_2, p_3. Систему волновых функций, инвариантных относительно вращений и отражений, образуют волновые функции

$$\psi_{jm} = \sum_{l,\, m'} S(l, s)_{j,\, m-m',\, m'} P^l_{m-m'}(\vartheta, \varphi) f_l(p) V_{m'}. \tag{21}$$

Здесь p, ϑ, φ вновь означают сферические координаты в пространстве p^1, p^2, p^3, f_l — произвольные неизвестные функции модуля p. Если системе функций, обладающей перечисленными выше свойствами инвариантности, принадлежит какая-то одна функция вида (21), то ей принадлежат и все остальные функции того же вида с различными m, но одним и тем же множителем f_l. Суммирование по l проводится по всем четным значениям от $|j - s|$ до $j + s$, если ψ_j должна обладать положительной четностью, и по нечетным l — в противном случае. Величины $S(l, s)$ — обычные коэффициенты [1]), позволяющие получать полный момент j из волновых функций с заданным «орбитальным моментом» l и «спиновым моментом» s.

Поскольку полярные углы ϑ, φ при $p = 0$ неопределены, множитель $f_l(p)$ при $p = 0$ должен обращаться в нуль (исключение составляет случай $l = 0$), иначе функция ψ_{jm} имела бы при $p = 0$ особенность, и к ней нельзя было бы применять оператор M^{0k} [напомним, что отношение (8) должно быть ограниченным; в действительности, ограниченность этого отношения необходимо постулировать не только для оператора M^{0k}, но и для его квадрата]. Итак, если ряд (21) не содержит члена с $l = 0$, то функция ψ_{jm} при $p = 0$ обращается в нуль. Однако из равенства (16) следует, что ψ_{jm} не может обращаться в нуль при $p = 0$, если масса покоя отлична от нуля. Следовательно, разложение всякой локализуемой волновой функции должно содержать член с $l = 0$. Это, в свою очередь, происходит, если $j = s$ и волновая функция обладает положительной четностью.

[1]) См., например, книгу Вигнера [15]. Построение функций ψ_j из функций V_n и сферических гармоник P^l_m по существу ничем не отличается от построения функций с определенным значением J, зависящих от пространственных переменных и спина, из спиновых функций с определенным S и из функций, зависящих лишь от пространственных переменных и обладающих определенным L. Способ построения разъяснен в гл. XXII. Коэффициенты связи, обозначенные у нас $S(l, s)$, в книге обозначены $s^{(LS)}$.

Если же функция ψ_{jm} имеет отрицательную четность, то в разложение (21) входят лишь $f_1, f_3, \ldots$, а эти множители при $p = 0$ обращаются в нуль. Итак, все волновые функции, локализованные в начале координат, имеют угловой момент $j = s$ и представимы в виде

$$\psi_m = \sum_{l=0}^{2s} \sum_{m'} S(l, s)_{s,\, m-m',\, m'} P^l_{m-m'}(\vartheta, \varphi) f_l V_{m'}. \qquad (21а)$$

Окончательный результат (мы опускаем ту часть вычислений, которая относится к определению f_l) можно сформулировать так: имеется всего $2s+1$ волновых функций, локализованных в начале координат, их явный вид определяется выражением

$$\psi_m = (2\pi)^{-3/2} 2^s p_0^{2s+1/2} (p_0 + \mu)^{-s} V_m (p_1, p_2, p_3; \xi_1, \ldots, \xi_{2s}). \qquad (21б)$$

[Иначе говоря, из всего разложения (21а) остается лишь член с $l = 0$.] Этот результат вряд ли можно назвать удивительным [1]).

Оператор координат вычисляется точно так же, как и в случае нулевого спина, и имеет вид

$$q^k = E \prod_{\alpha=1}^{2s} (1 + \gamma^0_\alpha) \frac{p_0^{2s+1/2}}{(p_0+\mu)^s} \left(-i \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \frac{p_0^{-1/2}}{(p_0+\mu)^s} E. \qquad (22)$$

При $s = 1/2$ эта формула согласуется с результатом Прайса [4] [см. оператор $\tilde{q}$ в его работе, случай «е»].

Роль проекционного оператора E в выражении (22) сводится лишь к подавлению той части волновой функции, которая отвечает отрицательной энергии, и выделению той ее части, которая соответствует только положительной энергии. Поскольку оператор q^k действует лишь на волновые функции,

---

[1]) Доказательство равенства (21б) проводится следующим образом. Сначала рассматривают выражение $\psi_m \pm \Theta\psi_{-m}$ и показывают, что функцию f_l, входящую в разложение (21а), можно считать вещественной. Затем функцию ψ_m делят на две части: ψ^0, содержащую ту часть суммы (21а), которая отвечает $l = 0$, и ψ^r, включающую в себя все остальное. Как было показано выше, функция ψ^0 при $p = 0$ отлична от нуля, в то время как ψ^r при $p = 0$ обращается в нуль. Далее доказывают, что не существует области, в которой функция ψ^r была бы отлична от нуля и много меньше ψ^0. Из непрерывности функций ψ^0 и ψ^r следовало бы, что функция ψ^r тождественно равна нулю. Подставляя затем $\psi^0 + \psi^r$ вместо ψ в (16), доказывают, что в любой области квадратом ψ^r можно пренебречь по сравнению с остальными членами. Правая часть равенства (16), а также квадрат ψ^0 не зависят от ϑ и φ. Следовательно, член, содержащий произведение $\psi^0\psi^r$, также не должен зависеть от ϑ и φ. Но этот член имеет вид суммы выражений $P^l_m(\vartheta, \varphi) f_0 f_l$ и не зависит от ϑ и φ лишь в том случае, если все f_l при $l \geq 0$ равны нулю (величина f_0 отлична от нуля по предположению). Итак, f_l всюду равны нулю, и в разложении (21а) остается лишь один член с $l = 0$. Его можно вычислить, взяв квадратный корень из обеих частей равенства (16).

определенные на положительной поле гиперболоида, второй оператор E (стоящий после множителя $p_0^{-1/2}/(p_0+\mu)^s$), строго говоря, можно было бы опустить. При вычислении матричного элемента между двумя волновыми функциями, с чисто положительными значениями энергии можно было бы опустить оба проекционных оператора E [5]. Множители, содержащие p_0, необходимы для эрмитовости оператора $i\partial/\partial p_j$: из-за множителя p_0^{-2s-1} в элементе объема (15) оператор будет обладать нужными свойствами, если после умножения на $p_0^{s+1/2}$ справа и деления на тот же множитель слева он приобретет вид эрмитова оператора. Оператор $\prod\limits_{\alpha=1}^{2s}\frac{1}{2}(1+\gamma_\alpha^0)$ — проекционный, т. е. совпадает со своим квадратом. Пользуясь этим свойством, его можно было бы ввести еще раз перед вторым оператором E, от чего все выражение (22) приобрело бы несколько бо́льшую симметрию. Оператор координаты (11) для частицы Клейна — Гордона является частным случаем более общего выражения (22) и получается из него при $s=0$.

Произведя над каким-нибудь состоянием сдвиг на a и измерив затем координату x^k, мы получаем результат, на a^k превышающий результат измерения той же координаты x^k до сдвига. Отсюда при $a^0=0$ находим соотношение

$$T(-a)\,q^kT(a)=q^k+a^k. \tag{23}$$

Подставляя вместо $T(a)$ выражение (6) и переходя к пределу при очень малых a^k, имеем

$$(q^kp^l-p^lq^k)\,\varphi=-\,i\delta_{kl}\varphi, \tag{23a}$$

где φ — любая допустимая волновая функция. В действительности, с помощью прямых вычислений, используя тождество

$$E_\alpha\left(1+\gamma_\alpha^0\right)E_\alpha=p_0^{-1}\left(p_0+\mu\right)E_\alpha, \tag{24}$$

мы получаем коммутационное соотношение

$$q^kp^l-p^lq^k=-\,i\delta_{kl}E. \tag{25}$$

Коммутационные соотношения операторов q^k и p_0 имеют обычный вид, поскольку p_0 зависит лишь от p^k. Операторы q^k служат компонентами векторного оператора в трехмерном пространстве, поэтому их коммутационные соотношения с пространственными компонентами M^{kl} также не отличаются от обычных.

В заключение мы хотели бы заметить, что аналогичное рассмотрение было проведено и для уравнений с нулевой массой покоя. В случае спина 0 и $^1/_2$ мы снова получили выражения для локализованных систем, совпадающие с формулами (9) и (21б). Однако для более высоких, но конечных значений спина s, начиная с $s = 1$ (уравнения Максвелла), оказалось, что локализованные состояния в указанном выше смысле не существуют. Это обстоятельство мы считаем неудовлетворительным, хотя и не особенно неожиданным. Не вполне удовлетворительна также и ситуация с бесконечным спином.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Первое, что следовало бы выяснить, — это причина, по которой наши локализованные состояния вопреки общепринятым представлениям не являются δ-функциями в координатном пространстве. Происходит это, разумеется, потому, что все наши волновые функции отвечают состояниям со строго положительной энергией, чего нельзя сказать о δ-функциях. Оператор (22) также преобразует волновые функции, отвечающие положительной энергии, в функции, обладающие тем же свойством.

Нередко говорят, что измерение координат частицы (например, электрона) с точностью, превышающей комптоновскую длину волны, привело бы к рождению пары. Отсюда делается вывод о том, что операторы координат не должны сохранять положительной определенности энергии, отвечающей волновой функции. Поскольку в результате измерения координат мы получаем частицу, находящуюся в определенной точке пространства, а не частицу и несколько пар, приведенные только что рассуждения в действительности означают отрицание возможности измерения координат частицы. Даже встав на подобную точку зрения, нельзя не признать странным, что рождение пары в равной мере исключает возможность измерения координат для столь сильно отличающихся систем, как электрон, нейтрон и даже нейтрино. Приведенные выше вычисления показывают, что в предположении об измеримости координат и существовании локализованных состояний элементарных систем с ненулевой массой покоя нет ничего абсурдного. Более того, постулаты «а» — «г», основанные на соображениях симметрии, однозначно определяют локализованные состояния и операторы координат для всех элементарных систем с ненулевыми массами покоя.

Для сложных (неэлементарных) систем единого определения локализованных состояний не существует. И хотя легко показать, что локализованным состояниям можно по-прежнему приписать определенный полный угловой момент j, при попытке перенести остальные рассуждения на случай сложных систем возникают трудности. В частности, суммирование в формуле (16) следует производить не только по спиновым переменным ξ, но также и по всем состояниям с различной полной массой покоя и спином. В результате состояния, способные сосуществовать как локализованные состояния в смысле наших постулатов, могут появиться даже при различных значениях j. Обычные рассуждения показывают, что такой ситуации следует ожидать, поскольку если система содержит несколько частиц, то состояния, в которых любая из них локализована в начале координат, удовлетворяет нашим постулатам. То же верно для состояний, в которых в начале координат локализована другая частица, или для состояний, в которых произвольная линейная комбинация координат равна нулю. В результате не только значительно возрастает число локализованных состояний, но и появляется возможность существования многочисленных обширных наборов локализованных состояний, удовлетворяющих принятым нами постулатам, хотя никакие два набора нельзя считать локализованными одновременно. Иначе говоря, каждый набор локализованных состояний для сложных систем не только гораздо шире множества локализованных состояний элементарной системы: среди многих наборов, удовлетворяющих нашим постулатам, необходимо еще произвести выбор. По-видимому, дальнейшее продвижение в определении локализованных состояний сложных систем невозможно без допущений, учитывающих конкретную структуру системы. Локализованные состояния естественно определить как такие, сужение которых на любую элементарную часть сложной системы локализуемо. Есть основания полагать, что такое определение соответствует центру масс всей системы.

Даже в случае элементарных частиц возникает вопрос о том, имеет ли особый смысл определение локализованных состояний и операторов координат. Такие сомнения с особой силой могут возникать у тех, кто склонен видеть в матрице столкновений будущую форму теории. Однако не следует забывать, что обычно излагаемый вариант теории затрагивает лишь вопросы, связанные с вычислением сечений. Существует другая, не менее интересная серия вопросов, относящихся к местоположению рассеянных частиц: насколько ближе к центру рассеяния частицы находятся в действительности по сравнению с тем случаем, когда они долетали бы до центра рассеяния, а затем, мгновенно повернув, продолжали бы лететь в новом направлении [16]? Для ответа на подобные вопросы в релятивистской области необходимо иметь хоть какое-то определение локализованных состояний для элементарных систем. С этой точки зрения не может не вызывать удовлетворения тот факт, что нам удалось однозначно определить локализованные состояния именно для таких систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wigner E.*, Ann. of Math., **40**, 149 (1939).
2. *Eddington A. S.*, Fundamental Theory, Cambridge University Press, London, 1946.
3. *Fokker A. D.*, Relativitatstheorie, Groningen, Noordhoff, 1929.
4. *Pryce M. H. L.*, Proc. Roy. Soc., **195A**, 62 (1948).
5. *Schrödinger E.*, Sitzungsber. Berl. Akad. Wiss., 418 (1930).
6. *Schrödinger E.*, Sitzungsber. Berl. Akad. Wiss., 63 (1931).
7. *Finkelstein R. J.*, Phys. Rev., **74**, 1563A (1948).
8. *Møller Chr.*, Comm. Dublin Inst. for Adv. Studies A, № 5 (1949).
9. *Papapetrou A.*, Acad. Athens, **14**, 540 (1939).
10. *Thomas L. H.*, Ann. of Math., **42**, 113 (1941).
11. *Newton T. D.*, Princeton Dissertation, 1949.
12. *Wigner E.*, Nachr. Gesell. der Wissen., Mathematisch-Physikalische Klasse, Heft 5, 546 (1932). (Статья 21 данной книги.)
13. *Bargmann V.*, *Wigner E.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **34**, 211 (1948).
14. *Campbell G. A.*, *Foster R. M.*, Fourier Integrals for Practical Applications, American Telephone and Telegraph Company, 1931.
15. *Wigner E.*, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931. (Имеется перевод: *Вигнер Е.*, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961.)
16. *Eisenbud L.*, Princeton Dissertation, 1948.

23

О СКРЫТЫХ ПАРАМЕТРАХ И КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ ВЕРОЯТНОСТЯХ [1]

ВВЕДЕНИЕ

Мысль о том, что вероятностный характер квантовомеханического процесса измерения отнюдь не свидетельствует о несостоятельности детерминизма, высказывалась неоднократно. Сторонники этой точки зрения считают, что наша неспособность предсказать исход квантовомеханического измерения обусловлена незнанием значений, принимаемых некоторыми «скрытыми параметрами». Значения этих скрытых параметров (истинная природа последних остается неопределенной) однозначно определяют поведение описываемой ими системы и даже позволяют предсказывать результаты производимых над ней измерений. Тем не менее получить непосредственно значения скрытых параметров невозможно. Дело в том, что квантовомеханические векторы состояний соответствуют не точным значениям этих параметров, а лишь их статистическим распределениям, вследствие чего знания вектора состояния еще недостаточно для однозначного предсказания исхода квантовомеханического измерения. Разумеется, результат произведенного над системой измерения позволяет сузить диапазон значений, которые скрытые параметры могли принимать до измерения, и тем самым сделать распределение значений более узким, однако и после измерения распределение значений скрытых параметров остается достаточно «размазанным», и поэтому исходы некоторых (в действительности — подавляющего большинства) последующих измерений будут по-прежнему непредсказуемыми.

Такова в общих чертах теория скрытых параметров. Многие теоретики выступили с возражениями против этой теории. В частности, фон Нейман [2]) заметил, что лишь неразумно боль-

---

[1]) Из журнала: Amer. Journ. Phys., 38, 1005 (1968).

[2]) Возражения фон Неймана обычно принято цитировать по его книге [1] (разделы IV. 1 и IV. 2). На правах старого друга фон Неймана и во имя сохранения исторической правды автор настоящей статьи хотел бы подчеркнуть, что убежденность фон Неймана в неадекватности теорий скрытых параметров опирается в основном не на те соображения, которые изложены в его книге. Возражая против введения скрытых параметров, фон Нейман часто приводил в качестве примера измерение компонент спина в различных направлениях частицы со спином 1/2. Ясно, что с помощью скрытых параметров не-

щим числом скрытых параметров можно объяснить постулат (неявно принятый в квантовой механике), согласно которому распределение скрытых параметров остается «размазанным» независимо от числа измерений, последовательно производимых над системой, а результаты измерений — столь же непредсказуемыми, как и до проведения измерений. Аргументы фон Неймана были во многом уточнены другими авторами [1]). В основу настоящей статьи положено одно замечание Белла, которое, хотя и отличается от возражения фон Неймана, тем не менее приводит к одинаковому выводу. Цель статьи и состоит в том, чтобы придать замечанию Белла более простую или, по крайней мере, более конкретную форму.

трудно предсказать вероятности двух возможных исходов каждого такого измерения (об этом еще будет говориться в данном разделе нашей статьи; более подробное обсуждение см. в работе [2]). Однако, по мнению фон Неймана, этого нельзя сделать, если речь идет о большом числе последовательных измерений компонент спина в различных направлениях. Результат первого из таких измерений ограничивает интервал значений, которые могли принимать скрытые параметры до того, как оно было проведено. Вследствие этого ограничения распределение вероятности значений скрытых параметров, характеризующих спин, для частиц с положительным результатом измерения будет отличаться от аналогичного распределения значений для частиц с отрицательным результатом измерения. Для тех частиц, для которых второе измерение компоненты спина по некоторому (отличному от первого) направлению также приводит к положительному результату, интервал допустимых значений уменьшается еще сильнее. Большое число последовательных измерений позволит отобрать частицы со столь близкими значениями скрытых параметров, что компонента спина в любом направлении с большой вероятностью будет отлична от нуля и иметь определенный знак. Согласно квантовой теории, такое состояние невозможно, и мы приходим к противоречию. Шредингер возразил против приведенного только что рассуждения, заметив, что измерение компоненты спина в одном направлении, хотя и может налагать определенные ограничения на область допустимых значений какой-то части скрытых параметров, одновременно вполне может восстанавливать случайное распределенне значений остальных скрытых параметров. У автора настоящей статьи сложилось впечатление, что фон Нейман не считал возражение Шредингера убедительным. По мнению фон Неймана, в возражении Шредингера неявно содержится предположение о скрытых параметрах измерительного прибора. В качестве контрпримера, наглядно демонстрирующего всю несостоятельность точки зрения Шредингера, фон Нейман предложил рассмотреть два прибора с взаимно перпендикулярнымн магнитными полями и последовательность измерений, производимых то одним, то другим прибором. В конце концов, в результате многочисленных последовательных измерений компонент спина в направлениях, задаваемых магнитными полями приборов, мы сможем фиксировать даже скрытые параметры обоих приборов и, следовательно, всей системы. Это наглядное опровержение фон Нейманом возражения Шредингера так и не было опубликовано.

[1]) См. работы [3, 4], а также статью Д. Уоррингтона (в печати). Автор последней статьи, хотя она и основана на замечании Белла [5], разделяет мнение фон Неймана о необходимости рассматривать последовательность многих наблюдений. Весьма полный и критический обзор более ранней литературы по этой проблеме дан в работе [2]. Ряд возражений против идей, высказанных в этих работах, приведен также в статье [6].

Ясно, что для любого квантовомеханического измерения, обозначенного оператором Q, найдется «скрытый параметр» q, такой, что статистическое распределение его значений будет давать вероятности возможных исходов λ_1, λ_2, ... измерения Q. Для этого необходимо лишь сопоставить области значений D_1, D_2, ..., пробегаемых параметром q, возможным исходам измерений λ_1, λ_2, ... и постулировать, что функция распределения $P_\psi(q)$, отвечающая состоянию ψ, сопоставляет области D_ν именно ту вероятность, с которой измерение Q, производимое над состоянием ψ, дает значение λ_ν.

Если с помощью скрытых параметров требуется воспроизвести вероятности исходов нескольких квантовомеханических измерений, обозначенных операторами Q_1, Q_2, ..., то скрытый параметр q_n необходимо ввести для каждого измерения. После этого мы должны постулировать, что исход измерения Q_n зависит лишь от значения параметра q_n: для этого каждому из возможных исходов λ_ν^n измерения Q_n мы должны сопоставить некоторую область D_ν^n значений параметра q_n, потребовав, чтобы измерение Q_n давало исход λ_ν^n всякий раз, когда q_n принадлежит области D_ν^n. Исход λ_ν^n должен получаться независимо от того, какие значения принимают остальные параметры q. Функция распределения P_ψ, которая затем ставится в соответствие вектору состояния ψ, имеет вид

$$P_\psi(q_1, q_2, \ldots) = P_\psi^1(q_1)\, P_\psi^2(q_2)\, P_\psi^3(q_3) \ldots, \tag{1}$$

где $P_\psi^n(q_n)$ — функция распределения, сопоставляемая, как было сказано выше, вектору состояния ψ; она воспроизводит вероятности возможных исходов измерения Q_n. Ясно, что определение (1) функции распределения P_ψ далеко не однозначно. Выбор областей D^n произволен и мог бы в действительности зависеть от всех параметров q_m, где $m \neq n$. Кроме того (по крайней мере в том случае, когда спектры операторов Q дискретны), число скрытых параметров q_1, q_2, ... можно было бы значительно понизить и по существу свести к одному параметру.

Приведенные только что соображения относятся лишь к отдельным измерениям и не затрагивают случай, когда над системой производится серия последовательных измерений. Однако, как показал фон Нейман [1], результаты серий последовательных измерений также можно получить с помощью скрытых параметров. Для этого необходимо лишь для каждой серии измерений ввести скрытые параметры, число которых совпадает с числом измерений в этой серии. Заметим также, что вероятности различных значений скрытых параметров не будут более независимыми: между ними появятся статистические корреляции. Естественно, что при этом число скрытых параметров резко возрастает. Выписывать здесь в явном виде формулы, аналогичные формуле (1), вряд ли необходимо: читатель без труда сможет вывести их самостоятельно.

ЗАМЕЧАНИЕ БЕЛЛА[1])

Белл обратил внимание на то, что введение даже очень слабого (по крайней мере, на первый взгляд) и весьма естественного ограничения на природу скрытых параметров уже не позволяет определить такую функцию распределения P_ψ для некоторых измерений (в действительности речь идет о девяти вполне конкретных измерениях), которая давала бы те же значения вероятности, что и квантовая механика. Это обстоятельство особенно удивительно потому, что соответствие между функцией распределения P_ψ и состоянием ψ достаточно произвольно.

Рассмотренная Беллом система состоит из двух частиц, каждая из которых имеет спин $^1/_2$. Измеряются компоненты этих спинов по определенным направлениям. Таких направлений 3: ω_1, ω_2, ω_3. 9 рассмотренных им измерений состоят из одновременного измерения двух спинов: компонента одного спина измеряется в направлении ω_i, компонента другого — в направлении ω_k. Поскольку компонента спина частицы с $S = {}^1/_2$ в любом направлении может принимать только два значения: $+^1/_2$ и $-^1/_2$ (в дальнейшем для краткости мы будем обозначать их просто $+$ и $-$), каждое из 9 измерений может привести к четырем результатам: обе компоненты могут иметь значение $+$, обе компоненты $-$, первая $+$, вторая $-$ и наоборот. Каждый из введенных в предыдущем разделе нашей статьи параметров λ может принимать лишь четыре значения в соответствии с четырьмя исходами измерений. Если ввести 9 параметров q_1, q_2, ... q_9, то функция распределения P, определяемая по формуле (1), будет давать квантовомеханические вероятности четырех возможных исходов каждого из названных выше 9 измерений (в действительности она будет воспроизводить любые такие вероятности независимо от того, согласуются они с квантовой механикой или нет). Интервалы, введенные в предыдущем разделе, разбивают девятимерное пространство скрытых параметров q на 4^9 областей, а интеграл от функции распределения

[1]) См. работу [5]. Более строгую (количественную) оценку результата Белла вместе со схемой экспериментальной проверки дали Клаузер, Хорн, Шимони и Хольт [7]. Автор выражает признательность всем названным лицам за то, что они привлекли его внимание к статье Белла. См. также статью Уоррингтона (в печати).

P по одной из этих областей дает вероятность одного из четырех исходов какого-то одного из 9 измерений. Если не вводить новых постулатов, то никаких противоречий не возникает.

Однако Белл вводит дополнительный постулат о том, что скрытые параметры определяют компоненты спина первой частицы в любом из направлений ω и что эта компонента не зависит от направления, в котором *измеряется* компонента спина второй частицы, и, наоборот, компонента спина второй частицы в любом из трех направлений ω_1, ω_2, ω_3 определяется значениями скрытых параметров и не зависит от направления, в котором *измеряется* компонента спина первой частицы. Оба предположения весьма естественны, поскольку две рассматриваемые частицы разделены большим пространственным интервалом, и прибор, измеряющий спин одной из них, не оказывает никакого воздействия на измерение, производимое над второй частицей. Свой постулат Белл называет поэтому постулатом локальности. Смысл постулата заключается в том, что, хотя между состояниями двух частиц могут быть любые статистические соотношения, ориентация *прибора*, используемого для измерения компоненты спина одной частицы, не влияет на спин другой. Из постулата локальности следует, что вместо 4^9 существенно различных областей в пространстве скрытых параметров мы имеем лишь 2^6 существенно различных областей. Каждую из таких областей можно обозначить символом $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Все σ и τ принимают два значения: $+$ или $-$; σ относятся к первой, а τ — ко второй частице. Например, если скрытые параметры принадлежат области $(+--;-+-)$, то измерение компоненты спина первой частицы в направлении ω_1 даст значение $+$ (т. е. $+{}^1/_2$) независимо от того, в каком направлении измеряется спин второй частицы. Измерение компоненты спина первой частицы в направлениях ω_2 и ω_3 даст результат $-$. Точно так же измерение компоненты спина второй частицы в направлении ω_1 даст результат $-$ независимо от того, в каком направлении была измерена компонента спина первой частицы. Измерение компоненты спина второй частицы в направлении ω_2 даст $+$, а в направлении ω_3 даст $-$.

Состояние, для которого нам не удастся воспроизвести квантовомеханические вероятности результатов 9 возможных измерений компонент спина, какие бы положительные вероятности мы ни приписывали 2^6 областям $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$, есть синглетное состояние двух спинов. Условимся впредь обозначать через $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ вероятность того, что скрытые параметры синглетного состояния двух спинов принимают значение, лежащее в области $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Для вычисления квантовомеханических вероятностей различных исходов 9 возможных измерений обозначим через ϑ_{12}, ϑ_{23}, ϑ_{31} углы между направлениями ω_1, ω_2, ω_3 (каждый из углов заключен между 0 и π). Вероятность того, что измерение компоненты спина первой частицы в направлении ω_i и измерение компоненты спина второй частицы в направлении ω_k дадут одновременно положительный (или одновременно отрицательный) результат, равна $^1/_2 \sin^2 {}^1/_2\vartheta_{ik}$. Вероятность того, что первое измерение даст положительный, а второе — отрицательный результат (или наоборот) равна $^1/_2 \cos^2 {}^1/_2\vartheta_{ik}$. Оба эти выражения получаются прямыми выкладками. Их можно также вывести, заметив, что синглетное состояние обладает сферической симметрией, вследствие чего полная вероятность того, что спин первой частицы имеет именно направление ω_i (а не противоположное), равна $^1/_2$. Если измерение компоненты спина первой частицы в направлении ω_1 даст положительный результат, то измерение компоненты спина второй частицы обязательно даст отрицательный результат. Следовательно, измерение спина второй частицы в направлении ω_2 даст положительный результат с вероятностью $\cos^2 {}^1/_2\vartheta$, где ϑ — угол между направлениями $-\omega_1$ и ω_2. Полная вероятность получить положительный результат для обоих измерений, как указывалось выше, равна

$$\frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{12}.$$

Аналогично можно вычислить и вероятности других комбинаций знаков. Однако, поскольку направления ω_i удовлетворяют определенным условиям, найденные значения вероятности нельзя воспроизвести с помощью скрытых параметров.

Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что значение такого символа, как $(+, \sigma_2, \sigma_3; +, \tau_2, \tau_3)$, равно нулю, поскольку соответствующая область отвечает состояниям, для которых измерение компонент спина обеих частиц в направлении ω_1 даст положительный результат. Для интересующего нас синглетного состояния вероятность такого события равна нулю. Следовательно, скрытые параметры не могут принимать значений, которые приводили бы к положительным компонентам спинов обеих частиц в направлении ω_1. То же верно и для направлений ω_2 и ω_3, вследствие чего символы $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ равны нулю (исключение составляет лишь случай $\tau_1 = -\sigma_1$, $\tau_2 = -\sigma_2$, $\tau_3 = -\sigma_3$). Таким образом, отличными от нуля остаются лишь 8 символов.

Вычислим теперь вероятность того, что измерение компоненты спина первой частицы в направлении ω_1 и второй частицы в направлении ω_3 даст положительный результат. Искомая вероятность равна сумме 16 слагаемых, из которых лишь два отличны от нуля:

$$\sum_{\sigma_2,\sigma_3}\sum_{\tau_1,\tau_2}(+,\sigma_2,\sigma_3;\ \tau_1,\tau_2,\ +)=$$
$$=(++-;\ --+)+(+--;\ -++)=$$
$$=\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{31}. \qquad (2)$$

Последнее выражение дает квантовомеханическое значение интересующей нас величины. Однако первое слагаемое во второй строке относится к состояниям, дающим положительную компоненту спина первой частицы в направлении ω_2 и положительную компоненту спина второй частицы в направлении ω_3. Следовательно, это слагаемое на величину $(-+-;\ +-+)$ меньше чем $^1/_2\sin^2\vartheta_{23}$. Точно так же второе слагаемое во второй строке на величину $(+-+;\ -+-)$ меньше вероятности одновременного получения положительных результатов при измерениях компоненты спина первой частицы в направлении ω_1 и второй частицы в направлении ω_2. Следовательно, второе слагаемое меньше чем $^1/_2\sin^2{}^1/_2\vartheta_{12}$. Таким образом, из формулы (1) следует, что теория скрытых параметров позволяет получать квантовомеханические вероятности лишь в тех случаях, когда углы между тремя направлениями ω_1, ω_2, ω_3, в которых измеряются компоненты спинов, удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{23}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{12}\geqslant\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{31}. \qquad (3)$$

Это неравенство[1]) принимает особенно простой вид, если три направления ω расположены в одной плоскости и, кроме того, вектор ω_2 лежит на биссектрисе угла между ω_1 и ω_3. В этом случае $\vartheta_{12}=\vartheta_{23}={}^1/_2\vartheta_{31}$, и неравенство (3) переходит в неравенство

$$\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{12}\geqslant\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{31}=\frac{1}{2}4\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{12}\cos^2\frac{1}{2}\vartheta_{12}, \qquad (4)$$

откуда

$$\cos^2\frac{1}{2}\vartheta_{12}\leqslant\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\vartheta_{12}\geqslant\frac{1}{4}\pi \quad \text{или} \quad \vartheta_{31}\leqslant\pi.$$

К этому же результату мы придем и в том случае, когда вектор ω_2 не лежит на биссектрисе угла между векторами ω_1 и ω_3. Таким образом, условие (3) нарушается всякий раз, когда три направления копланарны. Разумеется, неравенство (3) может нарушаться и при некомпланарных направлениях ω_1, ω_2, ω_3.

[1]) Как обратил внимание Шимони, неравенство Белла легко следует из неравенства (3).

Как мы увидим позднее, существуют еще и другие условия, которым должны удовлетворять направления ω для того, чтобы измерение проекций двух спинов (каждый из которых равен $^1/_2$), образующих синглет, можно было воспроизвести с помощью скрытых параметров.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

С математической точки зрения выводы Белла не могут не вызывать удивления. Начать с того, что пространство скрытых параметров было разделено на 64 области, каждая из которых имела определенный «вес»—вероятность. С помощью этих 64 вероятностей (точнее, с помощью 63 вероятностей, так как полная вероятность равна 1) требовалось воспроизвести результаты лишь 9 существенно различных экспериментов. Однако то обстоятельство, что вероятность получения положительного результата при измерении компонент спинов обеих частиц в направлении, например, ω_1 равна нулю, означает обращение в нуль суммы

$$\sum_{\sigma_2,\,\sigma_3}\ \sum_{\tau_2,\,\tau_3}(+,\,\sigma_2,\,\sigma_3;\ +,\,\tau_2,\,\tau_3), \qquad (5)$$

а поскольку все 16 слагаемых неотрицательны, то и каждое из них в отдельности также должно быть равно нулю. Уравнение (2) и аналогичные ему другие уравнения (для вероятностей одновременного определения компонент спина в направлениях $\pm\omega_i$, $\pm\omega_k$) можно разрешить относительно 8 величин (σ_1, σ_2, σ_3; $-\sigma_1$, $-\sigma_2$, $-\sigma_3$). В самом деле, рассматриваемые совместно, все эти уравнения оставляют неопределенным один параметр. Но поскольку

$$(+\,+\,+;\ -\,-\,-)+(-\,-\,-;\ +\,+\,+)= \\ =1-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{12}+\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{23}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{31}\right), \qquad (6)$$

то наши уравнения, разрешенные относительно величин (σ_1, σ_2, σ_3; $-\sigma_1$, $-\sigma_2$, $-\sigma_3$), будут содержать по крайней мере одну отрицательную вероятность, если правая часть уравнения (6) отрицательна. Кроме того, мы получим уравнение

$$(+\,-\,+;\ -\,+\,-)+(-\,+\,-;\ +\,-\,+)= \\ =\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{12}+\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{23}-\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_{31}\right) \qquad (7)$$

и два других уравнения, отличающихся от (7) лишь циклической перестановкой направлений ω_i. Условие, в силу которого правая часть уравнения (7) положительна, приводит к неравенству (3), а два других неравенства получаются из (3) при циклической перестановке индексов 1, 2, 3. Заметим, хотя это и не очень важно, что если правые части уравнений (6) и (7) и выражений, получающихся из последнего уравнения при циклической перестановке индексов, положительны, то все вероятности (σ_1, σ_2, σ_3; $-\sigma_1$, $-\sigma_2$, $-\sigma_3$) также можно выбрать положительными, приравняв друг другу слагаемые в левых частях уравнений (6) и (7). Таким образом, измерения в направлениях $\boldsymbol{\omega}_i$ компонент спинов, образующих синглет, можно интерпретировать в терминах скрытых параметров тогда и только тогда, когда эти четыре выражения положительны.

Неравенства (3) и неравенства, получающиеся из них при циклической перестановке индексов, имеют вид неравенств треугольника со сторонами $\sin^2 {}^1/_2\vartheta_{ik}$. Условие, выведенное из равенства (6), устанавливает верхний предел радиуса окружности, описанной вокруг этого треугольника. Если бы длины сторон треугольника были равны не $\sin^2 {}^1/_2\vartheta_{ik}$, а $\sin {}^1/_2\vartheta_{ik}$, то неравенства треугольника выполнялись бы для всех направлений $\boldsymbol{\omega}_i$. Важность квадратичной зависимости вероятностей от углов между направлениями, в которых производится измерение спина, отмечал еще Белл [5].

В заключение следует сказать и о роли того конкретного состояния — синглета, образованного двумя спинами $^1/_2$, — которое было использовано в нашем рассуждении. Пусть ψ_1, ψ_2, ... и φ_1, φ_2, ... — ортогональные наборы состояний двух систем. Аргументация Белла в том виде, как она изложена в нашей статье, применима ко всем состояниям $\sum a_n\psi_n\varphi_n$ объединенной системы, у которых по крайней мере два коэффициента a_n отличны от нуля. Применима она и к состояниям системы «объект плюс измерительный прибор», возникающим в идеальных квантовомеханических измерениях. Пример синглетного состояния двух спинов $^1/_2$ был использован нами потому, что реализация этого состояния и измерения, существенные для проводимого нами анализа, не вызывают никаких сомнений.

Автор выражает свою признательность Беллу и Шимони за обсуждение первоначального варианта статьи. В частности, многое из того, о чем говорится во введении, было включено в окончательный текст по их советам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *von Neumann J.*, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag, Berlin, 1932. (Имеется перевод: *Иоганн фон Нейман*, Математические основы квантовой механики, изд-во «Наука», М., 1964.)
2. *Bell J. S.*, Rev. Mod. Phys., **38**, 447 (1966).
3. *Jauch J. M.*, *Piron C.*, Helv. Phys. Acta, 36, 827 (1963).
4. *Kochen S. B.*, *Specker E.*, Journ. Math. Mech., **17**, 59 (1967).
5. *Bell J. S.*, Physics, **1**, 195 (1965).
6. *Bohm D.*, *Bub J.*, Rev. Mod. Phys., **38**, 453 (1966).
7. *Clauser J. F.*, *Horne M. A.*, *Shimony A.*, *Holt R. A.*, Phys. Rev. Lett., **23**, 880 (1969).

ВНУТРЕННЯЯ ЧЕТНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ[1]

ВОЗМОЖНОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ЧЕТНОСТИ

Принятая в современной квантовой теории поля схема описания элементарных частиц с математической точки зрения далека от завершенности. Вместе с тем ей присущи определенные черты, связанные главным образом со свойствами инвариантности и имеющими, по-видимому, непреходящее значение. Важность этих черт теории вряд ли можно переоценить, поскольку именно они дают нам наиболее надежные принципы классификации и позволяют интерпретировать быстро разрастающуюся и уже ставшую чрезвычайно сложной экспериментальную картину.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы обратить внимание физиков на существование возможных (а в некоторых случаях и необходимых) ограничений одного из наиболее общих понятий — понятия «внутренней четности» элементарной частицы. Хотя при этом наше мышление не подвергается радикальной перестройке, мы все же считаем, что известная осторожность в указанных вопросах полезна, ибо она не позволит называть гипотезы «теоремами» или отвергать как «неприемлемые» такие варианты теории, которые при более гибкой схеме оказываются лишенными каких бы то ни было противоречий. Другим преимуществом приводимых нами соображений следует считать то, что они позволяют внести некоторую ясность в область, где до сих пор имеется еще много спорного[2].

Согласно более или менее общепринятым представлениям, каждая элементарная частица должна обладать определенной «внутренней четностью», которая (по крайней мере, в принципе) однозначно определяется из эксперимента[3].

---

[1]) Из журнала: Phys. Rev., 88, 101 (1952). Написана совместно с Виком и Вайтманом. (Обычно эту статью называют «три W». — *Прим. перев.*)

[2]) Настоящая статья представляет собой доклад, прочитанный Вигнером на Международной конференции по ядерной физике и физике элементарных частиц в сентябре 1951 г. в Чикаго. В основу его положена обзорная статья Вайтмана и Вигнера, написанная совместно с Баргманом. Авторы данной статьи считают предварительную публикацию некоторых основных положений доклада вполне обоснованной. Более полное и подробное изложение их взглядов будет опубликовано позднее.

[3]) Такое утверждение представляет собой сильно упрощенный вариант даже «наиболее современных» представлений, в особенности если речь идет о частицах со спином $1/2$. Последний случай будет рассмотрен нами более подробно.

Чтобы ясно представить себе слабые стороны подобных воззрений, полезно предварительно вспомнить некоторые простые факты, относящиеся к формализму квантовой теории поля.

Трансформационные свойства (в нашем случае — четность) для того или иного класса частиц можно описать двумя способами, и оба эти способа следует иметь в виду. Во-первых, можно указать закон преобразования квантованного поля. Например, сказать, что некоторые из бесспиновых частиц являются квантами «псевдоскалярного» поля, т. е. такого поля φ, закон преобразования которого при инверсии относительно начала координат задается формулой

$$\varphi'(x, y, z) = -\varphi(-x, -y, -z). \tag{1}$$

Во-вторых, можно указать закон преобразования вектора состояния или шредингеровской функции F, дающей квантовомеханическое описание состояния поля [1]), т. е. найти такой унитарный оператор I, что функция

$$F' = IF \tag{2}$$

будет описывать состояние, зеркально симметричное состоянию, описываемому функцией F.

Разумеется, между двумя возможными способами описания трансформационных свойств существует весьма простая связь, ибо в квантовой механике «наблюдаемые», или операторные, величины, так же как и поле $\varphi(x, y, z)$ в приведенном выше примере, преобразуются по закону

$$\varphi' = I\varphi I^{-1}, \tag{3}$$

в то время как вектор состояния преобразуется по закону (2).

Таким образом, унитарный оператор I полностью определяет закон преобразования полевых величин, и, наоборот, зная закон преобразования последних, вполне можно отыскать оператор I. Например, если φ — псевдоскалярное поле, то это означает, что

$$I\varphi(x, y, z) I^{-1} = -\varphi(-x, -y, -z), \tag{4}$$

а отсюда можно заключить, что оператор I имеет вид

$$IF = \omega(-1)^{N_0+N_2+N_4+\cdots} F, \tag{5}$$

где N_l — число частиц (описываемых псевдоскалярным полем φ) с угловым моментом l, а ω — произвольный множитель, рав-

[1]) Мы намеренно избегаем хамелеоноподобного термина «волновая функция» и строго различаем вектор состояния в одном случае от полевой функции в другом.

ный по модулю единице и остающийся неопределенным при любом квантовомеханическом преобразовании. Если произвольно положить $\omega = 1$, то вакуумный вектор F_0 будет удовлетворять соотношению

$$IF_0 = F_0, \tag{6}$$

т. е. вакуум будет состоянием с положительной четностью. Одночастичное s-состояние будет обладать отрицательной четностью и т. д. Разумеется, «псевдоскалярные» частицы в большей мере характеризуются четными угловыми моментами в показателе степени отрицательной единицы [см. формулу (5)], чем произвольным выбором четных и нечетных состояний, условно определяемым соотношением (6). Обычно из соображений удобства оператор I выбирают с $\omega = 1$.

Аналогично для частиц скалярного поля

$$IF = (-1)^{N_1' + N_3' + N_5' + \cdots} F, \tag{5а}$$

где все величины N' имеют для скалярных частиц тот же смысл, какой имели величины N для псевдоскалярных частиц. Если F описывает набор псевдоскалярных и скалярных частиц, то естественно

$$IF = (-1)^{N_0 + N_2 + \cdots + N_1' + N_3' + \cdots} F. \tag{5б}$$

Теперь мы уже можем подвести итоги обсуждения главного вопроса. Обычно предполагается, что полевые величины должны обладать однозначно определенными трансформационными свойствами или (как в квантовомеханическом случае) унитарный оператор I должен быть определенным с точностью до тривиального множителя ω. Приняв такие допущения, мы с необходимостью заключаем, что скалярное поле должно быть либо «истинно» скалярным, либо «псевдоскалярным». Более того, некоторые полагают, будто эти допущения логически необходимы для того, чтобы такие операции симметрии, как инверсия, вообще имели смысл.

Тем не менее все знают, что закон преобразования спинорных величин, например дираковского поля ψ, отнюдь не однозначен. Янг и Тиомно в своей интересной статье [1] [1]) о трансформационных свойствах полей со спином $^1/_2$ при инверсии, послужившей началом обдумывания широкого круга родственных проблем, по существу исходили из предположения о неоднозначности в выборе знака $I\psi I^{-1}$. Хотя частицы со спином $^1/_2$, по-видимому, служат наилучшим подтверждением обоснованности

---

[1]) См. также работы [2—4].

наших сомнений, мы все же считаем необходимым начать с совершенно общей формулировки своей позиции.

Как мы думаем, весь вопрос определяется тем, что можно сказать относительно измеримости полевых операторов. Действительно, если поле измеримо, то математическое ожидание любого его состояния должно иметь вполне определенное значение. Ситуация в этом случае эквивалентна классической, когда мы вправе утверждать существование определенного закона преобразования лишь потому, что поля считаются вполне определенными физическими величинами. Однако если какая-нибудь полевая величина неизмерима (а, как мы увидим ниже на примере дираковского поля, такие величины встречаются), то отпадает логическая необходимость в существовании закона преобразования, не содержащего ни одного неопределенного элемента.

Допущение о том, что «все эрмитовы операторы соответствуют измеримым величинам», нередко с полным основанием называют неотъемлемой частью общей схемы квантовой механики. Верно и то, что в случае обыкновенной (нерелятивистской) квантовой механики частиц это допущение, как бы неправдоподобно оно ни звучало для всех операторов, кроме наиболее простых, не встречает сколько-нибудь серьезных возражений. Однако вряд ли необходимо подчеркивать, что перенесение целиком постулата об измеримости на физические абстракции, которыми оперирует современная полевая теория «элементарных» частиц, является чудовищной и ничем не оправданной экстраполяцией, в особенности если учесть чрезвычайно низкий уровень наших знаний истинных законов взаимодействия частиц.

Изложенная только что позиция внутренне непротиворечива. Это станет ясным, если принять во внимание возможность построения логических схем, не содержащих постулата об измеримости величин, отвечающих всем без исключения эрмитовым операторам. То обстоятельство, что природа таких схем до сих пор широко не обсуждалась, особенно удивительно, если вспомнить об общеизвестной неизмеримости дираковского поля.

Более точно нашу мысль можно сформулировать так. Согласно обычному допущению квантовой механики, можно произвести «полный» набор измерений, результат которых (с точностью до тривиального фазового множителя) полностью определяет вектор состояния F. Предположим теперь вместо этого, что гильбертово пространство можно разбить на ряд ортогональных подпространств A, B, C, ..., обладающих следующим свойством: относительные фазы проекций вектора F на A, B, C, ... физически несущественны. Иначе говоря, предполагается, что если эти проекции (которые сами являются векторами) обозначить F_a, F_b, F_c, ..., то никакое физическое измерение не сможет отличить вектор состояния

$$F_a + F_b + F_c + \ \dots \tag{7}$$

от вектора состояния

$$e^{i\alpha}F_a + e^{i\beta}F_b + e^{i\gamma}F_c + \ \dots, \tag{7a}$$

где α, β, γ, ... — произвольные фазы. Отсюда ясно, что среднее значение любого оператора, матричные элементы которого связывают подпространства A и B или A и C и т. д., вообще говоря, полностью неопределенно. Следовательно, такому оператору никакая измеримая величина не отвечает. Такое допущение не противоречит другим правилам квантовой механики, и в частности принципу суперпозиции: линейное соотношение между векторами сохраняется, если все векторы одновременно подвергаются преобразованию (7а). Последнее преобразование можно рассматривать как обобщение обычного умножения вектора на один фазовый множитель.

Другой, более знакомый способ описания этой ситуации состоит в следующем. Говорят, что состояние (7а) является не чистым состоянием, а статистической смесью, которую лучше всего описывать матрицей плотности[1]). Согласно принятому выше допущению, матрица плотности содержит максимально возможное количество информации. Разумеется, рассматриваемая нами система может находиться в чистом состоянии, понимаемом в обычном смысле, но только в том случае, если лишь одна из компонент (например, F_a) отлична от нуля. При этом унитарный оператор I, выражающий одну из допускаемых системой операций симметрии, будет определен с известным произволом. Обычно же оператор I не имеет матричных элементов, связывающих подпространства A, B, C, ..., и оставляет инвариантным каждое из названных подпространств. Следовательно, матрицы оператора I в каждом из подпространств A, B, ... содержат произвольный множитель ω_a, ω_b, ... аналогично тому, как содержит произвольный множитель оператор I, действующий во всем пространстве. Поскольку волновые функции (7) и (7а) эквивалентны, определить отношения множителей ω_a, ω_b, ... невозможно, и вместо одного неопределенного фазового множителя нам приходится вводить столько таких множителей, сколько имеется подпространств A, B, ... Это означает, что мы не можем сравнивать четность состояний, принадлежащих различным подпространствам.

Если векторы состояния каждого подпространства ортогональны ко всем векторам состояний других подпространств (система изолирована), то обычно говорят, что между

[1]) По поводу этого понятия см. гл. IV в книге [5].

подпространствами всего гильбертова пространства действует правило отбора. Существует, например, правило отбора, запрещающее изменение полного импульса любого состояния изолированной системы. Векторы состояния подпространства, содержащего все состояния с полным угловым моментом J, в замкнутой системе остаются ортогональными ко всем состояниям с любым другим значением полного углового момента. Будем говорить, что между подпространствами действует правило сверхотбора, если между принадлежащими этим подпространствам векторами состояния не существует спонтанных переходов (т. е. если между подпространствами действует правило отбора) и если, кроме того, нет измеримых величин с конечными матричными элементами, связывающими векторы состояния из этих подпространств. Именно эту ситуацию мы описали выше. Отсюда следует, что все фазовые множители ω_a, ω_b, ... ненаблюдаемы. Мы хотим показать, что правила сверхотбора указанного выше типа уже существуют в современном формализме релятивистских полевых теорий. Мы докажем свое утверждение для одного случая и укажем другой случай, на который оно, по-видимому, переносится без особых изменений.

Существование правил сверхотбора предоставляет нам бóльшую свободу, чем это, по-видимому, вызывается необходимостью. Мы не будем специально рассматривать вопрос о том, каким образом, максимально используя эту свободу, можно было бы создавать «монстров» с самыми неожиданными свойствами[1]). Гораздо больший интерес представляют для нас простейшие примеры, в которых особенно отчетливо проявляется описанная выше ситуация. Например, было бы совершенно неверным предполагать, что правила сверхотбора действуют между подпространствами с различными полными импульсами. Разность фаз между такими состояниями измерима, и в действительности каждое измерение координат включает в себя измерение разности фаз между состояниями с различными импульсами.

СПИНОРЫ

Правила сверхотбора между двумя подпространствами всего гильбертова пространства необходимо вводить по крайней

[1]) Строго говоря, даже предположив вполне определенный закон преобразования, мы не можем из общих соображений исключить более сложные преобразования, например

$$\varphi'(x, y, z) = \omega(N)\,\varphi(-x, -y, -z)\,\omega^{-1}(N),$$

где множитель $\omega(N) = \pm 1$, а его значение при любом N выбирается произвольно независимо от правила произведения. Преобразования такого рода легко исключаются лишь при условии, если φ — локально измеримая величина.

мере в одном случае — когда желательно сохранить релятивистскую инвариантность всего пространства. Пусть первое из подпространств A содержит состояния с полным угловым моментом системы, равным целому кратному $\hbar$; второе подпространство B содержит состояния с полуцелыми угловыми моментами. Обозначим векторы состояния первого подпространства через f_A, g_A, ..., а векторы состояния второго подпространства через f_B, g_B, ... Рассмотрим состояния $2^{-1/2}(f_A + f_B)$, для которых измерение приводит с вероятностью $1/2$ к целому угловому моменту и с точно такой же вероятностью к полуцелому угловому моменту. Предположим, кроме того, что с помощью какого-то измерения мы можем отличить состояние $2^{-1/2}(f_A + f_B)$ от состояния $2^{-1/2}(f_A - f_B)$. Именно это мы имели в виду, говоря о том, что разность фаз между подпространствами A и B измерима. Как будет ясно из дальнейшего, такое допущение противоречит требованию релятивистской инвариантности.

Наше доказательство этого утверждения основано на использовании преобразования обращения времени. Обращение времени переводит f_A в $U_A K f_A$ и f_B в $U_B K f_B$, где U — унитарные операторы, а K означает операцию комплексного сопряжения над стоящей за ним величиной. Наиболее важный момент доказательства содержится в равенствах [6]

$$U_A K U_A K = 1, \quad U_B K U_B K = -1. \tag{8}$$

Разумеется, операторы $U_A K$ и $U_B K$, не меняя содержания теории, можно заменить операторами $\omega U_A K$ и $\omega' U_B K$, если $|\omega| = |\omega'| = 1$. Такая подстановка не нарушает равенств (8). Именно это обстоятельство и делает доказательство, основанное на использовании преобразования обращения времени, особенно простым.

Применив операцию обращения времени к состоянию $f_A + f_B$, получим

$$\omega U_A K f_A + \omega' U_B K f_B.$$

Коэффициенты ω, разумеется, неопределенны, но отношение ω'/ω, хотя величина его неизвестна, не зависит от векторов состояния f_A и f_B[1]. Применив операцию обращения времени еще раз, мы должны получить состояние, неотличимое от исходного состояния $f_A + f_B$. Результат двукратного применения обращения времени имеет вид

$$\omega'' U_A K (\omega U_A K f_A) + \omega''' U_B K (\omega' U_B K f_B), \tag{9}$$

[1]) Это обстоятельство, имеющее решающее значение для нашего доказательства, неоднократно обсуждалось в литературе. См. приложение к гл. XX книги Вигнера [7].

причем

$$\frac{\omega'''}{\omega''} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Используя это равенство и равенства (8), состояние (9) можно преобразовать к виду

$$\omega''\bar{\omega}U_AKU_AKf_A + \omega'''\bar{\omega}'U_BKU_BKf_B = \\ = \frac{\omega''}{\omega}f_A - \frac{\omega'''}{\omega'}f_B = \text{const}\cdot(f_A - f_B). \qquad (9a)$$

Этот результат нетрудно предвидеть заранее, поскольку знаки в равенствах (8) противоположны. Он означает, что состояния $f_A + f_B$ и $f_A - f_B$ неотличимы, коль скоро существует оператор обращения времени, удовлетворяющий равенствам (8). К такому же результату можно было бы прийти, рассматривая вместо обращения времени обычные пространственные повороты. Однако анализ при этом стал бы несколько более сложным, поскольку для поворотов не существует равенства, которое было бы аналогично равенствам (8), и оставалось бы неизменным при замене простого преобразования кратным.

Отсюда следует, что измеримость любого эрмитова оператора ξ с ненулевыми матричными элементами $(f_A, \xi f_B)$ между подпространствами A и B (т. е. между состояниями с целым и полуцелым угловыми моментами) приводила бы к противоречию. Действительно, за исключением того случая, когда матричный элемент $(f_A, \xi f_B)$ имеет чисто мнимое значение, средние оператора ξ для состояний $f_A + f_B$ и $f_A - f_B$ были бы различны, в то время как известно, что эти состояния неотличимы. Если же матричный элемент $(f_A, \xi f_B)$ чисто мнимый, то аналогичное утверждение справедливо для состояний $f_A + if_B$, $f_A - if_B$ (можно показать, что они также неотличимы).

Поскольку каждое спинорное поле ψ обладает тем свойством, что и $\psi + \psi^*$ и $i(\psi - \psi^*)$ связывают подпространства A и B, ни одна из этих двух величин не может быть измеримой (само поле ψ не является эрмитовым, поэтому его измеримость не имеет смысла).

ЗАРЯЖЕННЫЕ ПОЛЯ

В существующей ныне форме теории поля заряженным частицам отвечают комплексные поля. Если рассматривается только одно такое поле $\varphi(x, y, z, t)$, то функции Лагранжа и Гамильтона, в которые в случае необходимости может быть включено и взаимодействие с внешними полями, содержат φ лишь в виде билинейной комбинации $\varphi^*\varphi$ и, следовательно, инвариантны относительно умножения φ на фазовый множитель

$e^{i\alpha}$. Создается впечатление, что такой множитель является существенно ненаблюдаемой модификацией поля. Если заряженных полей несколько, например φ_1, φ_2, ..., то гамильтониан может содержать члены вида $\varphi_1^*\varphi_2$, $\varphi_1^*\varphi_2^*\varphi_3^2$ и т. д., но во всех случаях остается инвариантным относительно одновременного умножения всех полей на один и тот же фазовый множитель $e^{i\alpha}$.

Известно, что указанное свойство связано с законом сохранения полного электрического заряда и может рассматриваться как сильно ограниченная разновидность калибровочной инвариантности. Если Q — полный заряд (за единицу принят заряд электрона e), то умножение φ_1, φ_2, ... на $e^{i\alpha}$ эквивалентно унитарному преобразованию

$$\varphi_s \to e^{-i\alpha Q}\varphi_s e^{i\alpha Q}. \qquad (10)$$

Итак, мы приходим к постулату: действие на вектор состояния F оператора $e^{i\alpha Q}$ не порождает физически наблюдаемую модификацию состояния системы (взаимодействующих) заряженных полей.

Мы не можем привести убедительных доводов, подтверждающих правильность нашего утверждения. Более того, такие доводы предполагают более глубокое понимание природы электрического заряда, отсутствующее у нас и поныне. Предположив, что постулат верен, мы сразу же придем к заключению о невозможности сравнивать между собой четности состояний с различными зарядами.

Отсюда, в частности, следует, что если какие-то экспериментальные данные можно интерпретировать на основе допущения о псевдоскалярном характере заряженного π-мезонного поля и соответствующих трансформационных свойствах других взаимодействующих с ним заряженных полей (протонного, μ-мезонного и т. д.), то эти данные можно интерпретировать и на основе допущения о скалярном характере заряженного π-мезонного поля, надлежащим образом видоизменив трансформационные свойства других полей [1—4].

ПРИМЕНЕНИЯ

До сих пор мы подчеркивали одни лишь отрицательные аспекты современной теории поля. Выясним теперь, что можно утверждать в положительном смысле.

Прежде всего ясно, что электромагнитное поле изучено несравненно лучше других полей. Установив, что электрическое поле описывается полярным вектором[1]), мы сразу же найдем свойства любого состояния, содержащего одни лишь фотоны.

Отсюда нетрудно (по крайней мере, в принципе) найти четность такой частицы, как нейтральный π^0-мезон, который может распадаться в чисто фотонные состояния. Другой способ отыскания четности заключается в экспериментальном установлении правил отбора на примере реакции типа

$$p + p \to \pi^0 + p + p,$$

где никакие другие частицы не рождаются и не распадаются.

Обратившись к заряженным частицам, мы обнаружим, что их четности содержат известный произвол. Как это часто бывает, такая ситуация свидетельствует о необходимости введения некоторой системы отсчета, определяемой условно, но оттого не менее полезной. Можно было бы, например, условиться считать, что $\pi^{\pm}$-мезоны обладают отрицательной четностью. Такое соглашение позволило бы уменьшить произвол в преобразовании инверсии для других частиц. Так, хорошо известные эксперименты по захвату в дейтерии дают некоторые данные о четности; в приведенной выше системе отсчета их можно интерпретировать, приписав протонному и нейтронному полям ψ_p и ψ_n такие трансформационные свойства, при которых величина $\psi_p^* \beta \psi_n$ будет вести себя как скаляр.

Оставляя в стороне частные примеры, мы хотели бы сформулировать в общих чертах имеющиеся возможности. Это позволит наиболее отчетливо выявить как различие, так и то общее, что имеется во взглядах, излагаемых в нашей работе и в статье Янга и Тиомно [1].

Из предыдущих замечаний уже должно быть ясно, что возможность определения или сравнения внутренних четностей тес-

---

[1]) Если помимо инверсии I, трактуемой в обычном смысле (знак заряда сохраняется, электрический вектор E — полярный вектор), операцию зарядового сопряжения C также причисляют к точным свойствам симметрии природы, то преобразованием инверсии в равной степени можно считать и I и CI. Выбрав в качестве преобразования инверсии CI, мы убедимся в том, что ни одно из обычно рассматриваемых состояний атомов или ядер не будет обладать определенной четностью (состояния с определенной четностью в этом случае будут включать суперпозиции состояний, содержащих протоны и антипротоны и т. д.). Таким образом, преобразование инверсии, определяемое как CI, таит в себе неудобства. Кроме того, отнюдь не доказано, что зарядовое сопряжение C является точным свойством симметрии природы. Вполне возможно (и эту возможность нельзя упускать из виду), что и C и I в природе встречаются как приближенные свойства симметрии, и лишь инвариантность относительно CI выполняется точно. В этом случае электрическое поле следовало бы считать аксиальным вектором. Справедливости ради заметим, что такая возможность в настоящее время представляется не слишком реалистичной.

но связана с возможностью проведения квантовомеханических экспериментов по измерению разности фаз между различными частями функции состояния. Если бы не существовало правил сверхотбора, т. е. если бы все разности фаз принципиально были измеримы, ничто не мешало бы нам сравнивать четности любых частиц. Сделать это можно было бы, построив, например, систему, которая состоит с вероятностью $1/2$ из частицы A с угловыми моментами J и J_z относительно точки и прямой z и с вероятностью $1/2$ из другой частицы B с теми же характеристиками. Если эта система не меняется при отражении в зеркале, параллельном прямой z, и при повороте на угол π вокруг оси, перпендикулярной прямой z, то четности частиц A и B одинаковы. В противном случае четности противоположны[1]. Более физический (менее абстрактный) способ сравнения четностей заключался бы в попытке превратить частицу A в частицу B и проследить за четностями частиц, испускаемыми и поглощаемыми в реакции.

Правило сверхотбора, не позволяющее сравнивать фазы состояний с полуцелыми и целыми угловыми моментами, препятствует и непосредственному сравнению четностей спинорных частиц и частиц с целым спином. Если это единственное правило сверхотбора, то мы все же могли бы сравнить «совместную» четность двух тождественных частиц с четностью частицы с целым спином. Если последняя оказалась бы положительной, то каждой спинорной частице можно было бы попытаться приписать вещественную четность. Если же частица с целым спином обладает отрицательной четностью, то каждой спинорной частице в отдельности можно было бы приписать мнимую четность. Необходимо заметить, что в рамках принятого допущения о единственности спинорного правила сверхотбора и измеримости всех фаз, отыскание которых не запрещается указанным правилом сверхотбора, четности любых двух спинорных частиц можно сравнивать. Как и любое сравнение четностей, такое сравнение позволяет утверждать, что четности спинорных частиц либо одинаковы, либо противоположны. Следовательно, если одна спинорная частица обладает вещественной четностью в указанном выше смысле, то и все остальные спинорные частицы также должны обладать вещественной четностью. Аналогично если какая-то одна спинорная частица имеет мнимую четность, то и все остальные спинорные частицы также имеют мнимые четности. Менее абстрактно тот же вывод можно сфор-

[1]) Вряд ли нужно подчеркивать, что внутри подпространства A или B, ... оператор J^2 должен быть кратным единице (в силу известных причин; см., например, работу [6]). Следовательно, четности двух состояний, коль скоро их можно сравнивать, могут быть либо одинаковыми, либо противоположными.

мулировать следующим образом: некоторые пары спинорных частиц распадаются так, что произведение их четностей положительно, другие — так, что произведение их четностей отрицательно. В силу принятых в этом разделе предположений произведение четностей спинорных частиц не может быть мнимым, поскольку каждая пара спинорных частиц способна распадаться на частицы с целыми спинами (может быть, после поглощения нескольких таких частиц). В частности, гипотеза, принятая в этом разделе, исключает случай, когда одна пара тождественных спинорных частиц s_1 обладает положительной, а другая пара спинорных частиц s_2 — отрицательной четностью. Действительно, в этом случае «сумма» пары s_1 и пары s_2 обладала бы отрицательной четностью. Это означало бы, что четность пары, состоящей из одной частицы, взятой из s_1, и одной частицы, взятой из s_2, была бы неопределенной вопреки принятому допущению.

Предположив, что фазы состояний с различными зарядами также не допускают сравнения, т. е. предположив, что имеет место правило сверхотбора для зарядов, мы лишимся прямого способа сравнения четностей частиц с различными зарядами. Однако ничто не мешает сравнивать (не нарушая, разумеется, спинорного правила сверхотбора) произведение четностей двух противоположно заряженных частиц с четностью какой-нибудь одной незаряженной частицы. И в этом случае сравниваемые четности могут оказаться либо одинаковыми, либо противоположными. Поскольку пара тождественных заряженных частиц не может быть нейтральной, принятое нами допущение не позволяет однозначно определить квадрат четности заряженной частицы. Четность частицы с единичным зарядом есть ω, причем ω — любое число, равное по модулю 1. Всякая другая частица с единичным зарядом (спином того же типа, что и у первой) в силу того же допущения будет иметь четность ω или $-\omega$, а всякая частица с противоположным зарядом — четность ω^{-1} или $-\omega^{-1}$. Ясно, что величина ω не имеет непосредственного физического смысла, и ее вполне можно считать единицей. Однако введение комплексной четности ω обладает и некоторыми преимуществами, поскольку она напоминает о законе сохранения электрического заряда. Оператор взаимодействия, нарушающий этот закон, по-видимому, нарушает и симметрию относительно инверсии. Предположив существование закона сохранения для тяжелых частиц и приняв соответствующее правило сверхотбора, запрещающее измерение разности фаз между состояниями с различным числом тяжелых частиц, мы введем в четность тяжелых частиц новый неопределенный множитель ω', также не имеющий непосредственного физического смысла. По поводу множителя ω' можно сделать те же замечания, что и по поводу множителя ω. Этот неопределенный фазовый множитель иногда бывает удобно сохранять как полезное напоминание о новом законе сохранения.

Несколько менее общий прием был использован Янгом и Тиомно, которые с помощью подходящего выбора множителей $\omega' = \pm 1$, $\pm i$ для различных частиц исключили многие типы взаимодействий, противоречащих закону сохранения тяжелых частиц. При ином подходе все эти взаимодействия пришлось бы включать в рассмотрение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yang C. N.*, *Tiomno J.*, Phys. Rev., **79**, 495 (1950).
2. *Caianiello E. R.*, Nuovo Cim., **7**, 534 (1951).
3. *Caianiello E. R.*, Nuovo Cim., **8**, 749 (1951).
4. *Caianiello E. R.*, Nuovo Cim., **9**, 336 (1952).
5. *von Neumann J.*, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag, Berlin, 1932. (Имеется перевод: *Иоганн фон Нейман*, Математические основы квантовой механики, изд-во «Наука», М., 1964.)
6. *Wigner E.*, Nachr. Gesell. der Wissen., Mathematisch-Physikalische Klasse, Heft 5, 546 (1932). (Статья 21 данной книги.)
7. *Wigner E.*, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931. (Имеется перевод: *Вигнер Е.*, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961.)

СОДЕРЖАНИЕ

II

Ядерная энергия

III

Квантовая механика

IV

Размышления

Дополнение

Еще о симметрии в квантовой механике