ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ

Студенттер мен жас ғалымдардың
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»
XVIII Халықаралық ғылыми конференциясының
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XVIII Международной научной конференции
студентов и молодых ученых
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»

PROCEEDINGS
of the XVIII International Scientific Conference
for students and young scholars
«ǴYLYM JÁNE BILIM - 2023»

2023
Астана

УДК 001+37
ББК 72+74
G99

«ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» студенттер мен жас ғалымдардың XVIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XVIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023» = The XVIII International Scientific Conference for students and young scholars «ǴYLYM JÁNE BILIM – 2023». – Астана: – 6865 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-601-337-871-8

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001+37
ББК 72+74

ISBN 978-601-337-871-8

ӘОЖ 517.5

МАТЕМАТИКАНЫ ТЕРЕҢДЕТІП ОҚЫТАТЫН СЫНЫПТАРДАҒЫ ТЕҢСІЗДІКТЕР ТУРАЛЫ

Рыспамбетов Әлихан
alixangalymyly2000@gmail.com
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, магистрант, Астана, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – А.Н. Копежанова

Математика ғылымының өзекті мәселелерінің бірі теңсіздіктерді шешу, қазіргі таңда теңсіздіктерді шешудің көптеген әдіс-тәсілдері бар екені баршамызға мәлім. Осы тақырыпта көптеген еңбектер жазылды. Бұл әдіс-тәсілдердің көптігіне қарамастан бізге тапсырмаларды шешуде қиындық тудыратын теңсіздіктер әлі де көптеп кездеседі. Оқушылармен қатар мұғалімдердің өздеріне ауырға соғатын тапсырмалар пәндік олимпиадаларда (республикалық және халықаралық) көптеп кездеседі. Олимпиадаға қатысушылардың көпшілігі бұндай тапсырмаларды шеше алмайды. Атап айтқанда олимпиадалық тапсырмалардағы теңсіздіктер – арифметикалық және геометриялық орталар арасындағы теңсіздік көмегімен шешу (Коши теңсіздігі), математикалық индукция әдісімен теңсіздіктерді шешу, дөңес және ойыс функциялар шешуде Йенсен теңсіздігін қолдану.

Орта мәндер.

Анықтама 1. [1]. «А – саны» $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ – сандарының арифметикалық ортасы деп аталады

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

Анықтама 2. [2]. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ – теріс емес сандарының көбейтіндісінің n-дәрежелі түбір астындағы мәніне тең «G-санын» осы сандардың геометриялық ортасы деп атаймыз

$$G = \sqrt[n]{a_1 * a_2 * a_3 * \dots * a_n}.$$

Анықтама 3. [3]. «Н-саны», $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ – сандарының гармоникалық ортасы деп аталады

$$H = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Арифметикалық және геометриялық орталар арасындағы теңсіздік немесе Коши теңсіздігі (1) орындалады, а және b теріс емес сандары үшін

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Егер a=b болғанда, сонда тек сонда ғана теңдік орындалады [4].

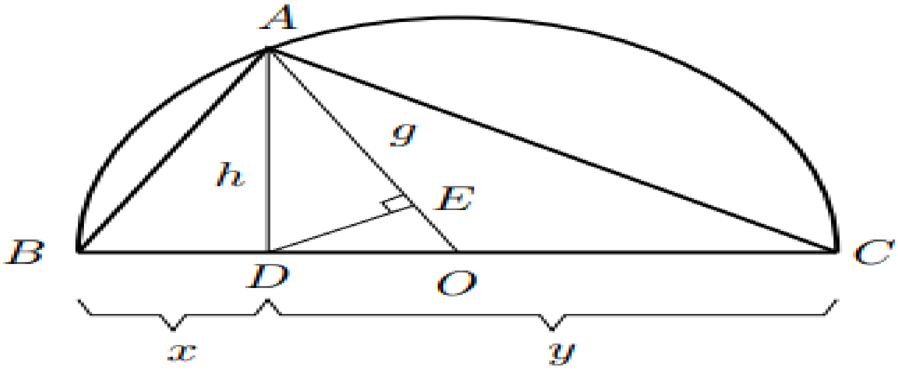
$\frac{a+b}{2}$ және $\sqrt{ab}$ сандарын біз a, b – теріс емес сандарының арифметикалық және геометриялық орталары ретінде білеміз. Ендігі кезекте геометриялық ортаны теріс таңбамен оң жаққа өткіземіз. Және ортақ бөлімге келтіретін болсақ мына теңсіздікті аламыз

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 .$$

Біз білеміз кез келген санның квадраты нөлден кіші бола алмайды немесе ең кіші мәні нөл. Осы жерден екі ортаның айырмасы нөлден үлкен немесе нөлге тең екендігіне көз жеткіздік.

Енді кезекте арифметикалық және геометрикалық орталар арасындағы теңсіздікті дәлелдеудің геометриялық жолын көрсетеміз, x және y-оң сандары үшін

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$



Жарты шеңберге тікбұрышты ABC үшбұрышы салынсын. Жарты шеңберде BC диаметрі, мұндағы x=BD, y=DC және BC=x+y. A төбесінен BC-ға перпендикуляр жүргізіп D деп белгілейік. D нүктесінің перпендикуляр проекциясын AO-радиусына түсірейік және E әріпімен белгілейік. AD=h және AE=g белгілеулерін жүргізейік. Осы жерден ABD ~ CAD тікбұрышты үшбұрыштарының ұқсас екендігін көреміз, ұқсастық белгілерінен аламыз:

$$\frac{h}{y}=\frac{x}{h}, \quad \text{бұдан} \quad h=\sqrt{xy}.$$

Сонымен қатар AOD ~ ADE тікбұрышты үшбұрыштары ұқсас. Бұдан біз мына теңдікті аламыз:

$$\frac{g}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}}, \text{бұдан } g=\frac{2xy}{x+y}=\frac{2}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}.$$

Қорыта келе бізге геометрияның айтатыны тікбұрышты үшбұрышта – бір қабырғаның ұзындығы үнемі гипотенузаның ұзындығынан кіші болатыны. Сондықтан, $g \le h \le \frac{x+y}{2}$.

Мысал. Қосындысы 2-ге тең оң нақты x, y, z сандары үшін келесі теңсіздікті дәлелдеу керек

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{9}{4} \le \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}.$$

Шешуі: Коши теңсіздігі бойынша:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{9}{4} \ge \frac{3}{x}; \quad \frac{1}{y^2}+\frac{9}{4} \ge \frac{3}{y}; \quad \frac{1}{z^2}+\frac{9}{4} \ge \frac{3}{z}.$$

Алынған теңсіздіктерді қоссақ:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{27}{4} \ge 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Орталар теңсіздігінен

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+9$$

Сонда

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{27}{4}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+9$$

Бұдан $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+9-\frac{27}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{9}{4}$ дәлелдеу керек орындалды.

Теңсіздікті дәлелдеудің қолайлы математика лық индукция әдісін қарастырайық, оның негізін де келесі қағидалар жатады.
Бұл қағидалар p -дан кіші емес барлық n натурал мәндері үшін ақиқат, егер:
А) Ол $n=p$ жағдайы үшін ақиқат болса;
Б) Кез келген $n=k(k\geq p)$ үшін берілген тұжырымның ақиқаттығынан, оның $n=k+1$ үшін ақақаттығы шығады.
Мысал 1. Кез-келген n – натурал сан үшін мына теңсіздік орындалатынын дәлелде:

$$2^{n+2}>2n+5.$$

n=1 болған жағдайда дәлелдеу керек теңсіздік мына түрге келеді: $2^3>2+5$. Яғни $n=k$ болғанда теңсіздік ақиқат $2^{k+2}>2k+5$. Келесі $n=k+1$ болған жағдайды қарастырайық: $2^{(k+1)+2}=2^{k+3}>2(k+1)+5$. Сәйкесінше $2^{n+2}>2n+5$ теңсіздігі кез келген натурал сан үшін ақиқат.

Мысал 2. Екі n-ші дәрежелі оң санның арифметикалық ортасы осы екі санның арифметикалық ортасының n-ші дәрежесінен кем емес екендігін дәлелдеу қажет, бұл дегеніміз

$$\frac{a_1^n+a_2^n}{2}\geq\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^n. \tag{1}$$

Еске сала кетейік егер $a_1=a_2$ болса, теңдік орындалатыны баршамызға мәлім. Сол себепті $a_1\neq a_2$ деп аламыз.

Егер $n=1$ болған жағдайда (1) – де теңдік орындалады.

Егер $n=2$ болса, (1) теңсіздік $\frac{a_1^2+a_2^2}{2}\geq\frac{(a_1+a_2)^2}{4}$ немесе $(a_1-a_2)^2\geq 0$ түрінде жаза аламыз, алайда $a_1\neq a_2$ болғандықтан қатаң теңсіздік мағынаға ие. Қандай да бір $n=k$ $(k\geq 2)$ деп болжам жасап көрелік

$$\frac{a_1^k+a_2^k}{2}\geq\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^k. \tag{2}$$

(2) теңсіздігінің екі жағын $a_1+a_2>0$ көбейтіп, келесіні аламыз

$$\frac{a_1^k+a_2^k}{2}(a_1+a_2)>\frac{(a_1+a_2)^{k+1}}{2^k},$$

немесе

$$\frac{a_1^{k+1}+a_1^k a_2+a_1 a_2^k+a_2^{k+1}}{2}>\frac{(a_1+a_2)^{k+1}}{2^k}. \tag{3}$$

Дәлелдейміз

$$a_1^{k+1} + a_2^{k+1} > a_1^k a_2 + a_1 a_2^k. \quad (4)$$

$$\left(a_1^{k+1} + a_2^{k+1}\right) - \left(a_1^k a_2 + a_1 a_2^k\right) = a_1^{k+1} - a_1^k a_2 - a_1 a_2^k + a_2^{k+1} = a_1^k(a_1 - a_2) -$$

$$a_2^k(a_1 - a_2) = (a_1 - a_2)\left(a_1^k - a_2^k\right) > 0\,,$$

болғандықтан (4) теңсіздік ақиқат. (3) және (4) теңсіздіктер сәйкесінше

$$\frac{\left(a_1^{k+1} + a_2^{k+1}\right) + \left(a_1^{k+1} + a_2^{k+1}\right)}{2} > \frac{(a_1 + a_2)^{k+1}}{2^k},$$

немесе

$$\frac{a_1^{k+1} + a_2^{k+1}}{2} > \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^{k+1}.$$

Математикалық индукция принципі негізінде (2) теңсіздік кез келген натурал сан үшін ақиқат.
Йенсен теңсіздігі

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

Халықаралық олимпиадаларда теңсіздіктерді шешуде көптеген әдіс тәсілдер қолданылады, солардың бірі дөңес функцияларға және дөңес емес функцияларға қатысты тапсырмаларды шешуде қолданылатын Йенсен теңсіздігіне байланысты сұрақтар пайда болады. x_0 нүктесі үшін қандай жағдайда Йенсен теңсіздігі орындалады?

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq nf(x_0).$$

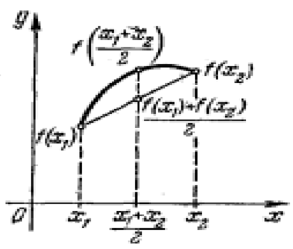
Функцияларды дөңестік пен ойыстыққа зерттеу.

$y = f(x)$ функциясы белгілі бір аралықта дөңес деп аталады, егер $x_1\,, x_2$ жұптарының осы аралықтағы әртүрлі аргументтері үшін мына теңсіздік орындалса

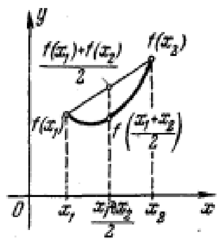
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

$y = f(x)$ функциясы белгілі бір аралықта ойыс деп аталады, егер $x_1\,, x_2$ жұптарының осы аралықтағы әртүрлі аргументтері үшін мына теңсіздік орындалса

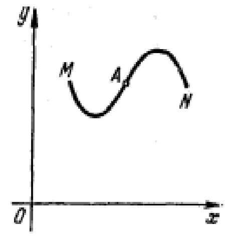
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$



Сурет 1



Сурет 2



Сурет 3

Бұл анықтамалар функцияның графигіне қатысты болғандықтан көбінесе «дөңес, ойыс қисықтар» деп қате аталып жатады. Келесідей геометрикалық мағынаға ие. Дөңес функцияның кез келген хордасының ортасы сәйкес нүкте орналасқан доғадан төмен орналасады (1-сурет), ал ойыс функцияның графигінде кез келген хорданың ортасы сәйкес нүкте орналасқан доғадан жоғары орналасады (2-сурет). $y = f(x)$ функциясында белгілі бір аралықта дөңес те,ойыс та орналасқан жағдайлар да кездеседі. Дөңес бөліктен ойыс бөлік аралығында орналасқан нүкте иілу нүктесі деп аталады. 3-суретте A нүктесі қисықтың иілу нүктесі болып табылады.

Мысалы: Функцияны дөңестік пен ойыстыққа зерттеу: $y = x^3 + 2x$.

x_1, x_2 – аргументтің тәуелсіз мәндері болсын, таңбалары да бірдей деп қарастырайық. Олай болса

$$f(x_1) = x_1^3 + 2x_1,\ f(x_2) = x_2^3 + 2x_2,$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{(x_1 + x_2)^3 + 8(x_1 + x_2)}{8}.$$

Айырымын қарастырайық

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{x_1^3 + 2x_1 + x_2^3 + 2x_2}{2} - \frac{(x_1 + x_2)^3 + 8(x_1 + x_2)}{8}$$

$$= \frac{4(x_1^3 + x_2^3) - (x_1 + x_2)^3}{8} = \frac{(x_1 + x_2)(3x_1^3 + 3x_2^3 - 6x_1x_2)}{8} = \frac{3}{8}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2$$

Егер $x > 0$, $x_1 + x_2 > 0$ және айырымның мәні оң. Ал егер $x < 0$, $x_1 + x_2 < 0$ қарастырып отырған айырым теріс. Сонымен $x > 0$ болғанда ойыс, $x > 0$ болғанда дөңес.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967, 304 с.
2. Ибатулин И.Ж., Лепес А.Н. Альтернативные доказательства 100 неравенств: метод отделяющих касательных. – М.: Реноме, 2014, 168 с.
3. Қазақстан пән олимпиадаларында [Электрондық ресурс] доступ режимі: http://www.matol.kz/
4. Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства. – М.: Физматлит, 2002, 256 с.
5. Manfiro R.B., Gomes Ortega J.A., Delgado R.V. Inequalities. A mathematical Olympiad Approach. – Basel. Boston. Berlin: Birkäuser, 2009.

ӘОЖ 371

МАТЕМАТИКА САБАҒЫНДАҒЫ ФУНКЦИЯНЫҢ КЕЙБІР ҚАСИЕТТЕРІНЕ АРНАЛҒАН ПРОПЕДЕВТИКАНЫҢ МАҢЫЗДЫЛЫҒЫ

Серикбаева Анилия Ерлановна

s.aniliya18@gmail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 1-курс магистранты, Астана, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – Н.Д. Мархабатов

Қазіргі заманда ақпараттың көптігінен адамдар артық мәліметтерді қажеттіден ажырата алмай жатыр. Ол өз кезегінде санада шиеленістердің орын алуына әкеледі. Сол себепті қажетті мәліметтерді анықтап, оны керек емесінен бөлектеу және қажетсізін алып тастау арқасында жүзеге асатын базалық білімді беру арқылы стардартты-стереотипті