

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ**

**«Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ» КЕАҚ**

**Студенттер мен жас ғалымдардың  
«GYLYM JÁNE BILIM - 2023»  
XVIII Халықаралық ғылыми конференциясының  
БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ  
XVIII Международной научной конференции  
студентов и молодых ученых  
«GYLYM JÁNE BILIM - 2023»**

**PROCEEDINGS  
of the XVIII International Scientific Conference  
for students and young scholars  
«GYLYM JÁNE BILIM - 2023»**

**2023  
Астана**

**УДК 001+37**  
**ББК 72+74**  
**G99**

**«GYLYM JÁNE BILIM – 2023» студенттер мен жас ғалымдардың  
XVIII Халықаралық ғылыми конференциясы = XVIII  
Международная научная конференция студентов и молодых  
ученых «GYLYM JÁNE BILIM – 2023» = The XVIII International  
Scientific Conference for students and young scholars «GYLYM JÁNE  
BILIM – 2023». – Астана: – 6865 б. - қазақша, орысша, ағылшынша.**

**ISBN 978-601-337-871-8**

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

**УДК 001+37**  
**ББК 72+74**

**ISBN 978-601-337-871-8**

**©Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия  
ұлттық университеті, 2023**

## ТЕОРЕМА ХОДЖМАНА И ПОИСК КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Какимов Әділ Сабырбекұлы

adilkakimov@gmail.com

Студент 4 курса ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан,  
Научный руководитель- Цыба П.Ю.

В этой статье мы находим точные струнные космологические решения для космологии FRW, используя подход симметрии Ходжмана. Рассматриваемая космология струн включает скалярное поле  $\psi(t)$  с потенциалом  $W(\psi)$  и полностью антисимметричную напряженность поля  $H_{\mu\nu\rho}$ , которая конкретно определяется в терминах масштабного коэффициента  $a(t)$ . Мы показываем, что для этой струнной космологии существуют величины, сохраняемые Ходжманом, с использованием которых получены новые точные решения для масштабного коэффициента и скалярного поля для конкретных потенциалов  $W(\psi)$  с некоторыми свободными параметрами. Наличие этих параметров, наряду с параметрами, вытекающими из симметрии Ходжмана, является важным преимуществом, используя которое можно построить решения  $a(t)$  и  $\psi(t)$  с различным космологическим поведением.

Ниже мы ограничим наше рассмотрение пространственно плоским пространством-временем Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW) с линейным элементом

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь в качестве кандидата на темную энергию скалярное поле квинтэссенции с действием

$$S_\varphi = \int dx^4 \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right). \quad (2)$$

Следовательно, для модели со скалярным полем интеграл действия уравнений поля равен

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2} f(\varphi) - S_\varphi \right). \quad (3)$$

и для пространства-времени FRW, (1), уравнения поля составляют набор дифференциальных уравнений

$$L = -3f\dot{a}^2 a + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V, \quad (4)$$

$$2f' \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + f \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2f \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{\varphi} + 3\dot{\varphi} \frac{\dot{a}}{a} + 3f' \frac{\dot{a}^2}{a^2} + V' = 0, \quad (6)$$

с учетом ограничения на нулевую энергию

$$L = -3f\dot{a}^2 a + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V. \quad (7)$$

Объединение (5) и (6) с (7) приводит к

$$f\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + f'\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{-\ddot{\phi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - 3f'\frac{\dot{a}^2}{a^2}}{3f\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2}. \quad (9)$$

соответственно. Свойство, заключающееся в том, что  $\bar{a}(t)$  и  $\bar{\varphi}(t)$  являются обратимыми функциями времени  $t$ , помогает нам упростить динамику, сведя два приведенных выше динамических уравнения к одному динамическому уравнению. При этом мы определяем  $\bar{x} = \ln \bar{a}$ ,  $\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}(\bar{x}(t))$  и используем их в уравнениях (8) и (9) для получения следующих динамических уравнений (10) и (11)

$$f(\varphi)\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2(x)\dot{x}^2 + f'(\varphi)\dot{\phi}(x)\dot{x}^2 = 0, \quad (10)$$

$$\frac{v'}{v} = -\varphi' + \frac{2\varphi''\phi'^2\dot{x}^2}{(\phi'^2-6)} - \frac{3f'\phi'\dot{x}}{(\phi'^2-6)}. \quad (11)$$

Теперь эти уравнения находятся в их наиболее подходящих формах для изучения в контексте подхода симметрии Ходжмана. Предполагая одномерный вектор  $X(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$ , не зависящий от явного времени  $t$ , уравнение вектора симметрии  $X$  получается в виде

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} + f'(\bar{x})X + f(\bar{x})\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}\right) + \dot{\bar{x}}^2 f^2(\bar{x})\frac{\partial^2 X}{\partial \dot{\bar{x}}^2} - \dot{\bar{x}}\left(2f(\bar{x})\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial \bar{x}} + f'(\bar{x})\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}\right) = 0, \quad (12)$$

где

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2}\bar{\varphi}'^2(\bar{x}). \quad (13)$$

Из уравнения (10) мы можем узнать, что  $F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = -f(\bar{x})\dot{\bar{x}} - f'(\varphi)\dot{\phi}(x)\dot{x}^2$ , таким образом

$$\gamma(\bar{x}) = \gamma_0 e^{2\int f(\bar{x})d\bar{x}}, \quad (14)$$

где  $\gamma_0$  - постоянная интегрирования.

В общем случае дифференциальное уравнение для вектора  $X$  трудно решить. Чтобы приступить к решению уравнения (12), мы ограничимся приведенным ниже некоторым частным анзацем для вектора  $X$ , предложенным в скалярно-тензорной структуре [5].

#### Краткий обзор метода консервирования Ходжмана.

Симметрия Ходжмана была предложена в 1992 году [3], краткий обзор которой приведен ниже. Рассмотрим набор дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{q}^i = F^i(q^j, \dot{q}^j, t), \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (15)$$

где  $q^i$  обозначает координаты,  $F^i$  обозначает силы, а точка обозначает производную по времени  $t$ . Если это уравнение имеет вектор симметрии  $X^i = X^i(q^j, \dot{q}^j, t)$ , то оно должно удовлетворять следующему уравнению ([5], [6])

$$\frac{d^2 X^i}{dt^2} - \frac{\partial F^i}{\partial q^j} X^j - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \frac{dX^j}{dt} = 0, \quad (16)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} . \quad (17)$$

Вектор симметрии  $X^i$  обладает тем свойством, что при бесконечно малом преобразовании

$$\hat{q}^i = q^i + \epsilon X^i(q^j, \dot{q}^j, t) ,$$

решения  $q^i$  уравнения (8) отображаются в решения  $\hat{q}^i$  тех же уравнений (с точностью до  $\epsilon^2$  членов) [7], [8]. Благодаря этому свойству вектора симметрии  $X^i$  сохраняемые величины Ходжмана определяются с помощью следующей теоремы [9]:

**Теорема:**

1. Если сила  $F^i$  удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^i} = 0 ,$$

тогда

$$Q = \frac{\partial X^i}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left( \frac{dX^i}{dt} \right) , \quad (18)$$

является сохраняемой величиной для уравнения (8), то есть  $\frac{dQ}{dt} = 0$ ,

2. и если  $F^i$  удовлетворяет

$$\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^i} = - \frac{d}{dt} \ln \gamma ,$$

$$Q = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial (\gamma X^i)}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left( \frac{dX^i}{dt} \right) , \quad (19)$$

является сохраняющейся величиной, где  $\gamma$  - просто функция  $q^i$ .

Рассматривая  $X \sim X(\dot{\bar{x}})$ , соответствующее дифференциальное уравнение для вектора симметрии  $X$  согласно (12) принимает вид

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} + f'(\bar{x})X + f(\bar{x}) \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} = 0 , \quad (20)$$

или

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left( f(\bar{x})X + \frac{dX}{d\bar{x}} \right) = 0 , \quad (21)$$

что является не чем иным, как  $\frac{dQ}{d\bar{x}} = 0$ , согласно уравнению (19), поэтому мы не будем рассматривать этот выбор. Для выбора  $X = X(\dot{\bar{x}})$  уравнение вектора симметрии  $X$  читается как уравнение Эйлера

$$f'(\bar{x})X + \dot{\bar{x}}^2 f^2(\bar{x}) \frac{d^2 X}{d\bar{x}^2} - \dot{\bar{x}} f'(\bar{x}) \frac{dX}{d\bar{x}} = 0 , \quad (22)$$

из которого  $X$  и  $f(\bar{x})$  получаются соответственно следующим образом

$$X = A_1 \dot{\bar{x}} + A_2 \dot{\bar{x}}^n , \quad (23)$$

$$f(\bar{x}) = - \frac{1}{n\bar{x} + f_0} , \quad (24)$$

где  $A_1, A_2, f_0$  и  $n$  - постоянные параметры, а сохраненная по Ходжману величина читается как

$$Q = 2f(\bar{x})\dot{\bar{x}}^n - f(\bar{x})n(n+1)\dot{\bar{x}}^n. \quad (25)$$

Мы можем легко убедиться, что векторы симметрии  $X \sim \dot{\bar{x}}$  и  $X \sim \dot{\bar{x}}^{-2}$  приводят к обращающемуся в нуль сохраняемому заряду, а именно  $Q = 0$ . Следовательно, мы можем отбросить  $n = 1, -2$  случая.

Если мы определим новую переменную как  $\bar{y} = -(n\bar{x} + f_0) > 0$ , то, используя (13) и (11), мы получим

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_c \pm \frac{2\sqrt{2}}{n} \sqrt{\bar{y}}, \quad (26)$$

$$\bar{V}(\bar{\varphi}) = \lambda(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_c)^{\frac{4}{n}} - \frac{8}{3n^2} \lambda(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_c)^{\frac{4}{n}-2}, \quad (27)$$

где  $\lambda = (\varphi'(\frac{y}{n} + \frac{f_0}{n}))^2 - 6$ ,  $\bar{\varphi}_c$  - константа, а  $V_0$  - константа интегрирования. С другой стороны, используя уравнения (12) и (40), для сохраняемой величины мы имеем

$$Q_0 = \frac{\dot{\bar{x}}^n}{n\bar{x} + f_0}. \quad (28)$$

Как упоминалось в [25], для  $\dot{\bar{x}}^n > 0$  и  $\dot{\bar{x}}^n < 0$  получаем  $Q_0 < 0$  и  $Q_0 > 0$  соответственно. С другой стороны, поскольку  $\dot{\bar{x}}$  может быть отрицательным или положительным, мы можем предположить, что  $n$  - целое число. Используя  $\bar{y} = -(n\bar{x} + f_0)$ , мы имеем

$$\dot{\bar{y}}^n = (-n)^n \bar{y} |Q_0|. \quad (29)$$

Решение этого уравнения получается в виде

$$\bar{y}(\bar{t}) = \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\bar{y}_0 - n|Q_0| \frac{1}{n\bar{t}}\right) \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad (30)$$

где  $\bar{y}_0$  - константа интегрирования. Рассматривая (30), (26), (27), и, поместив их в (6), мы находим  $V_0 = |Q_0|^{\frac{2}{n}}$ , для которых решения удовлетворяют уравнениям поля.

Используя уравнения (26) и (30), мы можем записать решения  $\bar{a}(\bar{t})$  и  $\bar{\varphi}(\bar{t})$  для потенциала (27) следующим образом

$$\bar{a}(\bar{t}) = e^{-\frac{f_0}{n}} e^{-\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\bar{y}_0 - n|Q_0| \frac{1}{n\bar{t}}\right)^{\frac{n}{n-1}}}, \quad (31)$$

$$\bar{\varphi}(\bar{t}) = \bar{\varphi}_c \pm \frac{2\sqrt{2}}{n} \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\bar{y}_0 - n|Q_0| \frac{1}{n\bar{t}}\right) \right]^{\frac{n}{2(n-1)}}, \quad (32)$$

который может быть преобразован, используя преобразования  $\bar{a} = \sqrt{2\mathcal{F}} a$ ,  $d\bar{t} = \sqrt{2\mathcal{F}} dt$ ,

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{t}} = \sqrt{\frac{3\mathcal{F}'^2 - 2\mathcal{F}}{2\mathcal{F}^2}} \frac{d\varphi}{dt},$$

$$a(\tau) = \sqrt{2} e^{\frac{f_0}{n}} e^{\pm \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tau^{\frac{n}{2(n-1)}}} e^{-\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tau^{\frac{n}{(n-1)}}}, \quad (33)$$

$$\phi(\tau) = e^{\mp \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tau^{\frac{n}{n-1}}}, \quad (34)$$

где  $\tau = y_0 - n|Q_0| \frac{1}{n} t$ . Наконец, используя преобразования

$$\varphi(\psi) = 2e^{\frac{1}{2}\psi}, \quad F(\varphi) = \frac{1}{4}(\varphi)^2, \quad V(\varphi) = e^\psi W(\psi),$$

получаем

$$\psi(\tau) = 2 \ln \frac{1}{2} \mp \frac{4}{n} \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \tau \right]^{\frac{n}{2(n-1)}}, \quad (35)$$

$$W(\psi) = 4\lambda e^\psi \left[ \left( \sqrt{2} \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \psi \right)^{\frac{4}{n}} - \frac{8}{3n^2} \left( \sqrt{2} \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \psi \right)^{\frac{4}{n}-2} \right] + \frac{1}{2}. \quad (36)$$

Построим график найденного решения с помощью программы “wolfram mathematica”

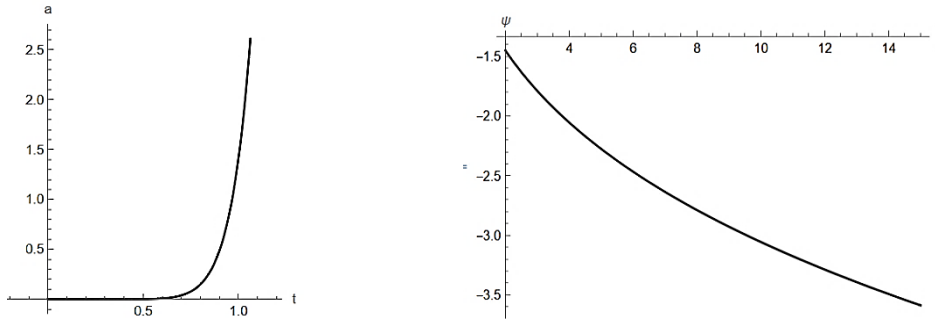


Рисунок. График  $a(t)$ ,  $\psi(t)$  для решений (35) и (33) с меньшими знаками. Значения параметров равны  $Q_0 = -11$ ,  $f_0 = -11$ ,  $y_0 = 0$  и  $n = -5/4$ .

В этой статье мы изучили космологическую модель струн с фоновой метрикой FRW, сопровождаемой полностью антисимметричной напряженностью поля, неминимально связанной со скалярным полем, имеющим потенциальный член. Используя подход симметрии Ходжмана, мы зафиксировали потенциалы скалярного поля и получили соответствующие новые точные решения для масштабного коэффициента и скалярного поля. Наличие этих свободных параметров, наряду с параметрами, вытекающими из симметрии Ходжмана, является важным преимуществом, используя которое можно построить некоторые космологические решения  $a(t)$  и  $\psi(t)$  с различным космологическим поведением. Чтобы оценить космологическую жизнеспособность решений, мы изобразили диаграммы  $a(t)$ ,  $\psi(t)$  и обсудили их космическое поведение.

*Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант №. AP14869238).*

### Список использованной литературы

1. K. Myrzakulov, P. Tsyba, R. Myrzakulov, Noether symmetry in F(T) gravity with f-essence, arXiv:[1601.07357].
2. A. Aslam, M. Jamil, R. Myrzakulov, Noether gauge symmetry for the Bianchi type I model in f(T) gravity, Phys. Scr., 88, (2013) 025003.
3. S. A. Hojman, A new conservation law constructed without using either Lagrangians or Hamiltonians, J. Phys. A: Math. Gen 25, (1992) L291.

4. A. Myrzakul and R. Myrzakulov, On the Hojman conservation quantities in FRW Cosmology, arXiv:gr-qc/1603.01611v2.
5. S. Capozziello and M. Roshan, Exact cosmological solutions from Hojman conservation quantities, Phys. Lett. B, 726, (2013) 471.
6. M. Paolella and S. Capozziello, Hojman symmetry approach for scalar-tensor cosmology, Phys. Lett. A, 379, (2015) 1304.
7. A. Paliathanasis, P. G. L. Leach and S. Capozziello, On the Hojman conservation quantities in Cosmology, Phys. Lett. B, 755, (2016) 8.
8. Hao Wei, Ya-Nan Zhou, Hong-Yu Li, Xiao-Bo Zou, Hojman Symmetry in  $f(T)$  Theory, Astrophys. Space Sci., 360, (2015) 6; I. A. Bizyaev, A. V. Borisov, I. S. Mamaev, The Hojman Construction and Hamiltonization of Nonholonomic Systems, SIGMA, 12, (2016) 012.
9. Hao Wei, Hong-Yu Li, Xiao-Bo Zou, Exact cosmological solutions of  $f(R)$  theories via Hojman symmetry, Nucl. Phys. B, 903, (2016) 132.

УДК 834

## ИНФЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ В ВИДЕ ГИБРИДНОЙ ФУНКЦИИ

**Коптлеулов Едыль Алматович**

[Bring0THEwall@gmail.com](mailto:Bring0THEwall@gmail.com)

Магистрант 2 курса специальности 7М05304-Физика, кафедра общей и теоретической физики, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – П.Ю. Цыба

Модифицированные теории гравитации кажутся привлекательными для объяснения феномена темной энергии и позднего ускорения времени. В настоящее время ожидается, что вопросы космического ускорения и квинтэссенции могут решать с помощью теорий гравитации более высокого порядка.

$f(R)$ -теория гравитации, привлекла внимание исследователей в последние годы. Теория  $f(R)$  на самом деле является расширением стандартного действия Эйнштейна Гильберта, включающего функцию скаляра Риччи  $R$ . Космическое ускорение может быть оправдано включением члена  $1/R$ , необходимого при малых кривизнах. Теория  $f(R)$  кажется наиболее подходящей из-за важных моделей  $f(R)$  в космологическом контексте.

Рассмотрим действие для модели  $f(R)$  гравитации со скалярным полем

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f(R) + 2L_m^{(\varphi)} \right], \quad (1)$$

где  $f(R)$  есть некоторая функция скалярной кривизны,  $L_m^{(\varphi)}$  – лагранжиан скалярного поля.

Рассмотрим Вселенную с плоской геометрией, когда  $k = 0$ . Если мы нормализуем масштабный фактор так, что для времени  $t_0$ , выполняется условие  $a(t_0) = 1$  и  $r$  радиальная координата,  $t$  космическое время, метрика известная как метрика Фридмана – Робертсона – Уокера примет вид

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \times (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2)$$

Для данной метрики находим скалярную кривизну