ӘОЖ 511

ЕКІНШІ РЕТТІ ДИОФАНТТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЫҒАРУ ӘДІСТЕМЕСІ

Ергашев Дауренбек Сапар угли
Рахмонбердиева Гүлмарал Бахтияровна
Әуезова Нұргүл Тұңғышбайқызы
nurgul-auezova@mail.ru
Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қаласы, Л. Гумилев атындағы ЕҰУ –нің
7М01509 «Математика» мамандығының 1 курс магистранттары

Екінші ретті диофанттық теңдеулер мектеп оқулықтарында, мектеп бағдарламасында, жалпы мектеп курсында кеңінен қарастырылмайды. Бірақ та бұл диофанттық теңдеулер олимпиадалық жарыстарда келетін негізгі есептердің бірі болып саналады. Мойындау керек, олимпиадалық есептерге басын сұғатын оқушылар өте аз. Оқушы түгіл кей мектептердегі математика мұғалімдерінің өзі олимпиадалық есептерді шығара алмай жатқанын көреміз. Мұғалім бұл кемшілігін жою мақсатында олимпиадалық есептерді шешуді үйреніп, сол үйренгенін шәкірттеріне үйретейін десе, жүйелі түрде жазылған, есетердің қыр-сырын меңгеруге көмектесетін, есептің бүге-шүгесіне дейін қарастыратын, яғни көбінше елеусіз қалып қоятын, бірақ есептің шешілу үдерісінде маңызды рөл атқаратын кішкене элементтерге дейін қарастырып, талдап, түсіндіретін кітап таппайды. Қазақ тілінде жазылған олимпиадалық есептерді соның үшінде екінші ретті диофанттық теңдеулерді шешуді үйрететін кітап немесе әдіснама жоқ, бар болған күннің өзінде өте мардымсыз. Осы олқылықтың бір шетін жамау мақсатында екінші ретті диофанттық теңдеулерді шешудің әдіснамасын ұсынып тұрмыз. Бұйырса бұл әдіснаманы өте қарапайым тілмен оқытушыға да, оқушыға да түсінікті болатындай етіп жазамыз.

Екінші ретті диофанттық теңдеудің жалпы түрі келесідей болады:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{n-i} = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_1 x + a_2 y + a_{22}y^2 = c \quad (1)$$

Мұндағы $a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22}, c \in Z$ бүтін сандар, ал x, y айнымалылар.

Диофанттық теңдеулерді шешудің бірнеше әдістері бар. Қай әдісті қандай жағдайда қолданған ыңғайлы соны қарастырайық.

1 әдіс. (1) теңдеуде $a_{12} = a_{22} = 0$ болса, яғни теңдеу мынадай түрде берілсе:

$$a_{11}x^2 + a_1 x + a_2 y = c$$

$$y = \frac{c - a_{11}x^2 - a_1 x}{a_2} \quad (2)$$

онда біз (2) теңдеудегі x айнымалысының орнына a_2 санының қалдықтарын қойып y айнымалысын табамыз. Егер $a_2 = n$ болса, онда a_2 санының қалдықтары $0,1,2,\ldots n-1$ сандары болады. x айнымалысының орнына a_2 санының қалдықтарын қойғанда y айнымалысы бүтін сан болса, онда $x = a_2 \cdot t + i$ мынаған тең, ал $y = \dfrac{a_{11}(a_2 \cdot t + i)^2 + a_1(a_2 \cdot t + i) - c}{a_2}$. Мұндағы t айнымалы, ал $i = \overline{1, n-1}$

X	0	1	…	n-1

Y	$\frac{b}{d}$	A	…	$\frac{b_{n-1}}{d_{n-1}}$

Мысал 1. Теңдеудің барлық бүтін шешімдерін табыңыз.

$$6y = x^2 + 8x + 9$$

Шешімі: $6y = x^2 + 8x + 9 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 8x + 9}{6}$

6 –ның қалдықтары $0,1,2,3,4,5$ немесе $0,\pm 1,\pm 2,3$

X	0	1	2	3	4	5
Y	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{29}{6}$	7	$\frac{19}{2}$	$\frac{37}{3}$

Жауабы:

$$x = 6t + 1 \Rightarrow y = \frac{(6t+1)^2 + 8(6t+1) + 9}{6} = \frac{36t^2 + 60t + 18}{6} = 6t^2 + 10t + 3$$

$$x = 6t + 3 \Rightarrow y = \frac{(6t+3)^2 + 8(6t+3) + 9}{6} = \frac{36t^2 + 84t + 42}{6} = 6t^2 + 14t + 7$$

Ескерту. Егер $a_{11} = a_{12} = 0$ болса, онда $x = \frac{c - a_{22}y^2 - a_2 y}{a_1}$ теңдеуін шешеміз.

2 әдіс. (1) **теңдеу берірсін және** $a_{22} = 0$ **болсын. Онда** (1) **теңдеу келесідей болады:**

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_1 x + a_2 y + = c \Rightarrow y(a_{12}x + a_2) = c - a_{11}x^2 - a_1 x \Rightarrow y = \frac{c - a_{11}x^2 - a_1 x}{a_{12}x + a_2} \quad (3)$$

(3) теңдеудің оң жағындағы бөліндіні бөлгішке бөлейік. (4) **теңдеу.** Пайда болған өрнектегі b_3 санын $a_{12}x + a_2$ өрнегіне бөлгенде бүтін сан шығатын болса, онда біз есептің шешімін таба аламыз. Ол үшін b_3 санына қалдықсыз бөлінетін сандарды $a_{12}x + a_2$ өрнегіне теңестіріп x айнымалысын табамыз. Сосын y айнымалысын таба аламыз.

$$y = b_1 x + b_2 + \frac{b_3}{a_{12}x + a_2} \quad (4)$$

Мысал 2. Теңдеудің бүкіл бүтін шешімдерін табыңыз:

$$4x^2 - 2xy + 6x + 3y = 3$$

Шешімі: $y(3 - 2x) = 3 - 4x^2 - 6x \Rightarrow y = \frac{4x^2 + 6x - 3}{2x - 3} = 2x + 6 + \frac{21}{2x - 3}$

Бұл жерде 21саны қалдықсыз бөлінетін сандар: $\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21$. Осы сандарды кезек-кезек $2x - 4$ өрнегіне теңестіріп, x айнымалысын табайық, сосын y айнымалысын табамыз.

1. $2x - 3 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 31$
2. $2x - 3 = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -13$
3. $2x - 3 = 3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 19$
4. $2x - 3 = -3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$
5. $2x - 3 = 7 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 19$

6. $2x-3=-7 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=-1$
7. $2x-3=21 \Rightarrow x=12 \Rightarrow y=31$
8. $2x-3=-21 \Rightarrow x=-9 \Rightarrow y=-13$

Жауаптары: $(-9;-13),(-2;-1),(0;-1),(1;-13),(2;31),(3;19),(5;19),(12;31)$

3 әдіс. Көбейткіштерге жіктеу әдісі.

(1) теңдеу берілсін және теңдеудің сол жақ бөлігі көбейткіштерге жіктелетін болса, онда төмендегі теңдеулер жүйесін шешеміз.

$$a_{11}x^2+a_{12}xy+a_1x+a_2y+a_{22}y^2=c$$

$$(b_1x+b_2y+b_3)(b_4x+b_5y+b_6)=d_1\cdot d_2$$

$$\begin{cases}(b_1x+b_2y+b_3)=d_1\\(b_4x+b_5y+b_6)=d_2\end{cases} \text{ және } \begin{cases}(b_1x+b_2y+b_3)=d_2\\(b_4x+b_5y+b_6)=d_1\end{cases}$$

Мұндағы $a_{11},a_{12},a_1,a_2,a_{22},b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,d_1,d_2,c\in Z$ бүтін сандар

Мысал 3. Барлық бүтін шешімдерді табыңыз:

$$x^2+4x=y^2+6y+10$$

Шешімі: $x^2+4x=y^2+6y+10 \Rightarrow x^2+4x+4-4=y^2+6y+9-9+10$

$(x+2)^2-(y+3)^2=5 \Rightarrow (x+2+y+3)\cdot(x+2-y-3)=1\cdot 5$

Бес санын екі санның көбейтіндісі түрінде жазайық: $5=1\cdot 5$ және $5=(-1)\cdot(-5)$. Осы сандарды 5-тың орнына алып барып қоямыз және төмендегі теңдеулер жүйесін шешеміз.

a) $\begin{cases}x+y+5=1\\x-y-1=5\end{cases}$, b) $\begin{cases}x+y+5=5\\x-y-1=1\end{cases}$, c) $\begin{cases}x+y+5=-1\\x-y-1=-5\end{cases}$ және d) $\begin{cases}x+y+5=-5\\x-y-1=-1\end{cases}$

a) $\begin{cases}x+y+5=1\\x-y-1=5\end{cases} \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=-5\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+y+5=5\\x-y-1=1\end{cases} \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

c) $\begin{cases}x+y+5=-1\\x-y-1=-5\end{cases} \Rightarrow 2x=-10 \Rightarrow \begin{cases}x=-5\\y=-1\end{cases}$

d) $\begin{cases}x+y+5=-5\\x-y-1=-1\end{cases} \Rightarrow 2x=-10 \Rightarrow \begin{cases}x=-5\\y=-5\end{cases}$

Жауабы: $(-5;-5),(-5;-1),(1;-1),(1;-5)$

4 әдіс. Дискриминант әдісі.

(1) теңдеу берілсін. Бұл теңдеуді x айнымалысы бойынша немесе y айнымалысы бойынша шешумізге болады. Біз x айнымалысы бойынша дискриминант арқылы шешіп көрсетейік.

$$a_{11}x^2+a_{12}xy+a_1x+a_2y+a_{22}y^2=c$$

$$a_{11}x^2+(a_{12}y+a_1)x+a_2y+a_{22}y^2-c=0$$

$$D_x=(a_{12}y+a_1)^2-4a_{11}(a_2y+a_{22}y^2-c)=(a_{12}^2-4a_{11}a_{22})y^2+(2a_{12}a_{11}-4a_{11}a_2)y+a_1^2+4a_{11}c$$

Енді дискриминантты нөлге теңестіріп y айнымалысы бойынша дискриминант арқылы шешіп, y айнымалысы бойынша алынған дискриминантты нөлден кіші не тең деп алып,сол аралықта y айнымалысының түбірлерін тауып алғашқы теңдеуге алып барып x айнымалысының түбірлерін тауып, есептің шешімін табамыз.

$D_x = (a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22})y^2 + (2a_{12}a_{11} - 4a_{11}a_2)y + a_1^2 + 4a_{11}c = b_1y^2 + b_2y + b_3 = 0$

$D_y = b_2^2 - 4b_1b_3 \le 0 \Rightarrow y_{1,2} = \dfrac{-b_2 \pm \sqrt{D_y}}{2b_1}$

Мысал 4. Теңдеудің барлық бүтін шешімдерін табыңыздар.

$$x^2 - xy + y^2 = x + y$$

Шешімі: есепті x айнымалысы бойынша дискриминант арқылы шешейік.

$x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0$

$D_x = (y+1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1$

$3y^2 - 6y - 1 \le 0 \Rightarrow 3(y^2 - 2y + 1) \le 4$

$(y-1)^2 \le \dfrac{4}{3} \Rightarrow y - 1 \le \dfrac{16}{9} \Rightarrow y \le \dfrac{25}{9} = 2 + \dfrac{7}{9}$

Яғни y айнымалысы 0, 1, 2 сандарын қабылдай алады. Басқа сандар теңдеуді қанағаттандырмайды. Осы түбірлерін y айнымалысының орнына қойып, x айнымалысының міндерін табайық.

$$y = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \Rightarrow x = 1, x = 2$$

$$y = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

Жауабы: $(0;0),(0;1),(1;0),(1;2),(2;1),(2;2)$.

Қорытындылай келе, бұл жұмыста Диофант әдістеріне шолу және екінші ретті белгісіз теңдеулерді шешудің қазіргі заманғы әдістеріне шолу жүргізілді. Әдістер жеке қарастырылды, атап айтсақ көбейткіштерге жіктеу әдісі, дискриминант әдісі және тағы басқа. Олимпияда есептерінде, логика есептерінде де қолданылады. Қазіргі уақытта мектеп бітірушіге қойылатын заманауи талаптарға байланысты белгісіз теңдеулерді зерделеудің ерекше қажеттілігі туындайды.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Бардушкин В.В., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П. основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс. – Москва: МГИЭТ (ТУ), 2003 г.

2. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – Москва: «Наука», 1972 г.

3. Гринько Е.П., Головач А.Г. Методы решения диофантовых уравнений при подготовке школьников к олимпиадам. – Брест: БрГУ, 2013 г.