ПОЛЯРЛЫ, ЦИЛИНДРЛІК ЖӘНЕ СФЕРАЛЫҚ КООРДИНАТАДАҒЫ ЛАПЛАС ОПЕРАТОРЫ.

Есенбаева Гүлбану Рақымжанқызы

banuka_96.21@mail.ru

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ-нің Механика-математика факультеті студенті,

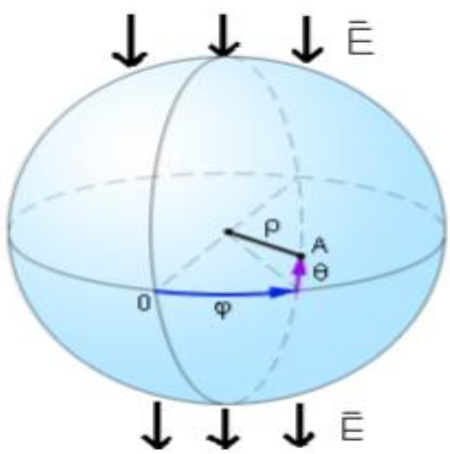
Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Ғылыми жетекші – Б.С.Шалабаева

Аңдатпа. Мен бұл статья жазуда электро өрістің эмульсиялық тамшыға жылулық және электродинамикалық әсері туралы және ортадағы температуралық өрістің таралу динамикасына электр өрісі индукциялаған тамшы ішіндегі қозғалыс әсері туралы есепті қарастырамын.

Кілттік сөздер: температуралық өріс, инлукцияланған тамшы, Лаплас операторы, сферралық координата,электромагниттік өріс.

Электрмагниттік өрістің эмульсиялық тамшыға жылулық және электрдинамикалық әсері туралы және ортадағы температуралық өрістің таралу динамикасына электр өрісі индукцииялаған тамшы ішінде және сыртында сұйық қозғалысының әсері туралы есеп қарастырылады. Су глобуласына және айналадағы сұйықтыққа ЭМ өріс жылулық әсерін зерттеу кезінде координаттардың сфералық жүйесінде (r, θ, φ) жылу өткізгіштік теңдеуінің жүйесі шешілді, мұнда r - координаттар басына дейінгі қашықтық, ал θ және φ – сәйкесінше зенит және азимут бұрышы



2.1 сурет.

Үшөлшемді Лаплас операторындағы ΔU - бұл өрнек:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (1.1)$$

Мұндағы $u = (x, y, z)$ үш айнымалы функциясы. Егер Лаплас операторы ΔU, $u = (x, y)$ функциясы тек екі айнымалысына тәуелді болса:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \qquad (1.2)$$

$$x = r\cos\varphi. \quad y = r\sin\varphi \tag{1.3}$$

U = (x, y) функциясын олардың өрнектерінің орнына ауыстырыңыз, содан кейін *r* және *φ* айнымалыларының функциясын және *(rcosφ, rsinφ*) аламыз. Функцияның екінші туындыларын білдіру *φ* және *r*-ге қатысты туынды арқылы *x*-қа содан кейін *y*-ке қатысты табылған өрнекті (1.2) формулаға апарып қоямыз;
Лаплас операторын полярлық координаттарда аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{1.4}$$

x пен *y*-ге қатысты *r* және *φ*-дің жартылай туындысын табу үшін (1.3)
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, -ден , демек

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi \tag{1.5}$$

Басынан $tg\varphi = \frac{y}{x}$, содан кейін $\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ және $\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$

x және *y*-ны (1.3) формулалармен алмастырамыз

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r} \quad \text{және} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r} \tag{1.6}$$

(1.5) және (1.6) теңдікке (1.4) ауыстыра отырып, *r* және *φ* айнымалылар және осы айнымалыларға қатысты туынды құралдар тұрғысынан ішінара туындылардың өрнектерін табамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r} \tag{1.7}$$

Екінші туындыларды табуға көшейік. Қатар функциясының қайтадан саралануының туындысына ауысу

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

Теңдіктерден (1.7)

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\varphi-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial\varphi}=\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}$$

Енді бірінші теңдікті көбейтеміз, екіншісін қосамыз. Ұқсас терминдер келтіре отырып, біз аламыз

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\cos^2\varphi-2\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+2\frac{\partial U}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r}+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r^2} \quad (1.8)$$

Қатынасты қолдана отырып, дәл солай

Осыны табыңыз

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\sin^2\varphi+2\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}-2\frac{\partial U}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r}+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r^2} \quad (1.9)$$

(1.8) және (1.9) қосу:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\cos^2\varphi-2\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+2\frac{\partial U}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r}+$$

$$+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\cdot\sin^2\varphi+2\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}-2\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+$$

$$+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r}+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{r^2}=\left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\sin^2\varphi\right]+\left[\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r}+\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r}\right]+$$

$$+\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\right]=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} \quad (2.0)$$

$$\Delta U=\frac{1\partial}{\gamma\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} \quad (2.1)$$

Біз үш өлшемді корпусқа өтіп, цилиндрлік координаттардан бастаймыз. R, φ және z цилиндрлік координаталары декаративтік қатынастармен байланысты.

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,\qquad z=z$$

$U = (x, y, z)$ функциясы $u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ функцияға айналады

Мұнда үшінші айнымалы өзгеріссіз қалады және полярлық координаттардағы екіөлшемді Лаплас операторының (2.0) өрнегіне z-ге қатысты екінші туынды ғана қосылады:

$$-\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (2.2)$$

Сфералық координаталар үшін r, және φ бізде формулалар бар:

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta$ ішінде $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ нүктенің қашықтықтан (x, y, z) проекциялар арасындағы нүкте векторы мен осінің радиусына қатынасы. *Oz, φ a* - радиус векторының *Oxy* жазықтығына және *Ox* осіне бағытталған проекцияларының арасындағы бұрыш.

Міне, $u(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ функцияның туындыларын тікелей түрлендіру

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \qquad (2.3)$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \qquad (2.4)$$

Тамшының осьтік симметриясы бар, яғни, физикалық шамалар сфералық φ координатадан тәуелсіз.

Қолданылған әдебиеттер:

1.Finite-difference Techniques for Vectorized Fluid Dynamics Calculations / Ed. by D.L. Book. – New York; Heidelberg; Berlin; Springer-Verlag, 1981. – 240 p.
2.Fortuny M., Oliveira C., MeloR.. Effect of salinity, temperature, water content, and ph on the microwave emulsification of crude oil emulsions // *Energy & Fuels* 2007, 21, 1358-1364
3.Griebel M., Dornseifer T., Neunhoeffer T. Numerical Simulation in Fluid Dynamics // SIAM monographs on mathematical modeling and computation. 1998. 217 p.
4.Kleot J.V. Some interfacial characteristics and other physical properties of bituminous froth emulsion systems/ PhD. Thesis, University of Calgary – 2000.
5.Martinez J-M., Chesneau X., ZeghmatiB..A new curvature technique calculation for surface tension contribution in PLIC-VOF method.ComputMech, 37, 2006, P. 182–193