УДК 517.958, 530.145.6

Сызықты емес Хирота-Максвелл-Блох теңдеулер жүйесінің дербес шешімдері

Бидәулет Қанзатгүл, Найзағарайова Ақгүл
91.karakoz.91@mail.ruakgul_1985@mail.ru
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан Республикасы
ғылыми жетекші – Қ.Р. Есмаханова

Соңғы төрт онжылдықта сызықтық емес ғылымдар: солитондар, кинктер, пикондар, дромдар, позитондар, қума толқындар, ұқсас заттар, суперконтинум генерациясы, толық интегралдану, фракталдар, хаос және басқалары сияқты бірнеше қызықты және жаңа ұғымдарды зерттеу айтарлықтай үлкен жылдамдықпен өсті [1-9]. Көптеген толық интегралданатын сызықты емес дербес дифференциалдық теңдеулер жүйелері сызықты емес құбылыстардың, яғни универсалды қасиетке ие және математикада үлкен қызығушылық тудыратын солитонның ерекше аспектісі болып саналады. Солитондар және олармен тығыз байланыстағы позитондарды зерттеу сызықты емес ғылымдар аумағындағы жүйелі түрде зерттелетін бағыттардың бірі.

Солитондар және қума толқындар тек су аумағында ғана қарқынды зерттеліп қана қоймай, сондай-ақ басқада облыстар, Боз-Эйнштейн конденсатындағы қума материя, жер бетіндегі, космостық плазмадағы қума толқындар, қаржы саласы және онымен тығыз байланыстағы облыстарда мүмкін болатын физикалық механизмдерді суреттейтін қаржы қума толқындары да толығымен зерттелді.

Жасанды толқындар физиканың әртүрлі салаларында тіркелген, бұл салаларда динамика жүйесі бір сызықты емес дербес дифференциалды теңдеумен реттеледі. Бірақ біздің ең негізгі сұрағымыз сызықты емес жүйелермен байланысты қума толқындардың мүмкіншіліктерін талдау болып табылады. Сызықты емес Хирота-Максвелл-Блох теңдеулер жүйесінің Лакс жұбын және солитон типті импульстердің таралуын қабылдайды. Сызықты емес теңдеулерді шешу үшін алдын-ала шешімі алынған Хирота теңдеуіне келтіру арқылы шешімін іздейміз [9]:

$$q_z = i\alpha\left(\frac{1}{2}q_{tt} + |q|^2 q\right) + \beta(q_{ttt} + 6|q|^2 q_t) + 2p, \tag{1а}$$

$$p_t = 2i\omega p + 2q\eta, \tag{1ә}$$

$$\eta_t = -\left(qp^* + q^* p\right), \tag{1б}$$

мұндағы $q, p -$комплекс мәнді функция, $\eta -$накты мәнді функция,(ω, α, β)- нақты мәнді тұрақтылар, * белгісі комплекс түйіндесті және төменгі индектер сол айнымалы бойынша дербес туындыны білдіреді. β - жоғары ретті сызықты және сызықты емес эффектілердің күшін білдіреді. Хирота-Максвелл-Блох теңдеулерінің интегралданатыны дәлелденген, біз Лакс жұбын пайдаланамыз. Өзіміз білетіндей, қазіргі таңда дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешудің көптеген аналитикалық әдістері белгілі, соның ішінде Дарбу түрлендіруі - тиімді әдістердің бірі болып табылады, интегралданатын жүйелер үшін солитон типтес әртүрлі шешімдерді таба аламыз.

Сызықты емес Хирота-Максвелл-Блох теңдеулер жүйесінің Лакс жұбы. Бұл бөлімде біз сызықты емес Хирота-Максвелл-Блох теңдеулер жүйесіне сәйкес сызықты теңдеулер жүйесіне тоқталамыз. Сызықты теңдеулер жүйесінің мәндері төмендегідей U және V түріндегі Лакс жұбы арқылы өрнектеледі:

$$\phi_t = U\phi, \tag{2a}$$

$$\phi_z = V\phi\ , \tag{2ә}$$

Мұндағы U және V 2×2 өлшемді матрицалар, (t,z) айнымалыларына тәуелді

$$U = \lambda\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q^* & 0 \end{pmatrix} = -i\lambda\sigma_3 + U_0,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3a}$$

$$V = \lambda^3\begin{pmatrix} 4i\beta & 0 \\ 0 & -4i\beta \end{pmatrix} + \lambda^2\begin{pmatrix} -\alpha i & -4\beta q \\ 4\beta q^* & \alpha i \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -2\beta i|q|^2 & \alpha q - 2\beta i q_t \\ -\alpha q^* - 2\beta i q_t^* & 2\beta i|q|^2 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}i|q|^2 - \beta(qq_t^* - q_t q^*) & 2\beta|q|^2 q + \frac{\alpha}{2}iq_t + \beta q_{tt} \\ -2\beta|q|^2 q^* + \frac{\alpha}{2}iq_t^* - \beta q_{tt}^* & -\frac{\alpha}{2}i|q|^2 + \beta(qq_t^* - q_t q^*) \end{pmatrix} + i\frac{1}{\lambda+\omega}\begin{pmatrix} \eta & -p \\ -p^* & -\eta \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^3 V_3 + \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + V_0 + i\frac{1}{\lambda+\omega}V_{-1}, \tag{3ә}$$

$\phi = \phi(\lambda,t,z)$ – вектор келесі түрде беріледі

$$\phi = \phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1(\lambda,t,z) \\ \phi_2(\lambda,t,z) \end{pmatrix}. \tag{3б}$$

Біз (1) теңдеулер жүйесіндегі α, β коэффициенттердің мәндерін $\alpha = 2,\ \beta = -1$ осылай қарастырғанда классикалық сызықты емес Хирота-Максвелл-Блох теңдеулержүйесін аламыз. Оның АКНС жүйесінен өзгешелігі, бұл жүйеде V матрицасының тек бір бөлігі ғана q және оның t туындылары тұрғысынан көпмүшеліктер болып табылады.Жоғарыда айтылып кеткен сызықты жүйе(2) сызықты емес Хирота-Максвелл-Блох теңдеулер жүйесіне бірінші реттік Дарбу түрлендіруін келесі бөлімде қолданамыз.

Сызықты емес Хирота-Максвелл-Блох теңдеулер жүйесінің солитондық шешімдері. Сызықты теңдеулер жүйеміз (1) үшін Дарбу түрлендіруін пайдалана отырып,қолайлы шешімді құру арқылы Хирота-Максвелл-Блох теңдеулер жүйесінің солитон типтес шешімін құру негізгі мақсатымыз болып табылады. Бастапқы тривиалды шешімді

$$q = 0,\ p = 0,\ \eta = 1, \tag{4}$$

деп болжау арқылы келесі сызықты жүйе (2) қайта жазамыз:

$$\phi_t = U\phi,$$

$$\phi_z = V\phi,$$

Мұндағы функцияларымызды келесі түрде аламыз:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \tag{5a}$$

$$U = \begin{pmatrix} -i\lambda & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}, \tag{5ә}$$

$$V = \begin{pmatrix} 4i\beta\lambda^3 - \alpha i\lambda^2 & 0 \\ 0 & -4\beta i\lambda^3 + \alpha i\lambda^2 \end{pmatrix} + \frac{i}{\lambda+\omega}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5в}$$

Жоғарыда келтірілген жүйеден меншікті функцияларды ϕ_1 және ϕ_2 келесідей түрде қарастырамыз:

$$\phi_1 = e^{-i\lambda t + (4\beta i\lambda^3 - \alpha i\lambda^2 + \frac{i}{\lambda+\omega})z + \frac{x_0 + iy_0}{2}},$$

$$\phi_2 = e^{i\lambda t + (-4\beta i\lambda^3 + \alpha i\lambda^2 - \frac{i}{\lambda+\omega})z - \frac{x_0 + y_0}{2} + i\theta},$$

Мұндағы x_0, y_0 және $\theta-$ нақты мәнді тұрақтылар. Осы екі меншікті функцияларды ϕ_1 және ϕ_2 Дарбу түрлендірулеріне қою арқылы және $\lambda = \alpha_1 + i\beta_1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\theta = 0$, осы шарттарды пайдалану арқылы келесі түрдегі солитондық шешімдерді аламыз:

$$E = -2i\beta_1 I e^{-2i\frac{C}{B}} \sec h(2\beta_1 \frac{A}{B}),$$

$$p = \frac{i\beta_1((\alpha_1 - i\beta_1 + \omega)e^{-2\frac{D}{B}} + (\alpha_1 + \beta_1 i + \omega)e^{-2\frac{F}{B}}}{B} \sec h^2(2\beta_1 \frac{A}{B}),$$

$$\eta = 1 - \frac{2\beta_1^2}{B} \sec h^2(2\beta_1 \frac{A}{B}),$$

мұндағы A, B, C, D, F келесі түрде беріледі

$$A = 24iI\beta z\alpha_1^3\omega - 4iI\alpha z\alpha_1^2\omega - 8iI^3\beta z\alpha_1^2\beta_1^2 + 2iI^3\alpha z\alpha_1\beta_1^2 + 4iI^3\beta_1^2\beta z\omega^2 - 2iI\alpha z\alpha_1\omega^2 + 12iI\beta z\alpha_1^2\omega^2 - iIz$$
$$+ 8iI^3 z\beta\beta_1^2\omega\alpha_1 - iIt\alpha_1^2 + iI^3\beta_1^2 t - iIt\omega^2 - iI2t\alpha_1\omega + 12iI\beta z\alpha_1^4 - 2iI\alpha z\alpha_1^3 - 4iI^5\beta z\beta_1^4,$$
$$B = \alpha_1 - I^2\beta_1^2 + 2\omega\alpha_1 + \omega^2,$$

$$C = 2\alpha_1^2 t\omega + \alpha_1 t\omega^2 - \alpha_1 t\beta_1^2 - 4z\beta\alpha_1^5 + z\alpha\alpha_1^4 - \alpha z\beta_1^4 - z\alpha_1 + t\alpha_1^3 - 24z\beta\alpha_1^2\beta_1^2\omega - 12z\beta\alpha_1\beta_1^2\omega^2 + 2z\alpha\alpha_1\beta_1^2\omega$$
$$- 8z\beta\alpha_1^4\omega - 4z\beta\alpha_1^3\omega^2 - 8z\beta\alpha_1^3\beta_1^2 - 12z\beta\beta_1^4\alpha_1 + 2z\alpha\alpha_1^3\omega + \alpha\alpha_1^2\omega^2 + \alpha z\beta_1^2\omega^2 - z\omega,$$
$$D = 24\beta_1 z\beta\alpha_1^3\omega - 4\beta_1 z\alpha\alpha_1^2\omega - 2\beta_1 z\alpha\alpha_1\omega^2 + 12\beta_1 z\beta\alpha_1^2\omega^2 + 8\beta_1^3 z\beta\alpha_1\omega - \beta_1 z + \beta_1^3 t - 4\beta_1^5 z\beta - \beta_1 t\omega^2 - \beta_1 t\alpha_1^2$$
$$- 8\beta_1^3 z\beta\alpha_1^2 + 2\beta_1^3 z\alpha\alpha_1 + 4\beta_1^3 z\beta\omega^2 - 2\beta_1 t\alpha_1\omega + 12\beta_1 z\beta\alpha_1^4 - 2\beta_1 z\alpha\alpha_1^3 + i(-t\beta_1^2\alpha_1 + z\alpha\alpha_1^4 - z\alpha_1 + t\alpha_1^3 + t\alpha_1\omega^2$$
$$+ 2t\alpha_1^2\omega + z\alpha\beta_1^2\omega^2 - 4z\beta\alpha_1^3\omega^2 - 8z\beta\alpha_1^4\omega - 4z\beta\alpha_1^5 - \alpha z\beta_1^4 + 2z\alpha\alpha_1\beta_1^2\omega - 8z\beta\alpha_1^3\beta_1^2 - 12z\beta\beta_1^4\alpha_1 + 2z\alpha\alpha_1^3\omega$$
$$- 24z\beta\alpha_1^2\beta_1^2\omega - 12z\beta\alpha_1\beta_1^2\omega^2 + z\alpha\alpha_1^2\omega^2),$$
$$F = -24\beta_1 z\beta\alpha_1^3\omega + 4\beta_1 z\alpha\alpha_1^2\omega + 2\beta_1 z\alpha\alpha_1\omega^2 - 12\beta_1 z\beta\alpha_1^2\omega^2 - 8\beta_1^3 z\beta\alpha_1\omega + \beta_1 z - \beta_1^3 t + 4\beta_1^5 z\beta + \beta_1 t\omega^2$$
$$+ \beta_1 t\alpha_1^2 + 8\beta_1^3 z\beta\alpha_1^2 - 2\beta_1^3 z\alpha\alpha_1 - 4\beta_1^3 z\beta\omega^2 + 2\beta_1 t\alpha_1\omega - 12\beta_1 z\beta\alpha_1^4 + 2\beta_1 z\alpha\alpha_1^3 + i(-t\beta_1^2\alpha_1 + z\alpha\alpha_1^4 - z\alpha_1$$
$$- z\omega + t\alpha_1^3 + \alpha_1 t\omega^2 + 2t\alpha_1^2\omega + z\alpha\beta_1^2\omega^2 - 4z\beta\alpha_1^3\omega^2 - 8z\beta\alpha_1^4\omega - 4z\beta\alpha_1^5 - z\alpha\beta_1^4 + 2z\alpha\alpha_1\beta_1^2\omega - 8z\beta\alpha_1^3\beta_1^2$$
$$- 12z\beta\beta_1^4\alpha_1 + 2z\alpha\alpha_1^3\omega - 24z\beta\alpha_1^2\beta_1^2\omega - 12z\beta\alpha_1\beta_1^2\omega^2 + z\alpha\alpha_1^2\omega^2).$$

Сонымен, қорыта келгенде біз сызықты емес Хирота-Максвелл-Блох теңдеулер жүйесіне бір өлшемді солитон типтес шешімдерді дербес жағдайын құрдық. Әрі қарай бұл теңдеулер жүйесіне көп өлшемді шешімдерін құрамыз, оның ішінде преиодты шешімдерін, кинк, пикон шешімдерін құруды зерттеп жатырмыз.

ҚОЛДАНЫЛҒАНӘДЕБИЕТТЕР

1. Yesmakhanova K. and et. all. Darboux transformation and solution of the modified Korteweg-de Vries equation \\ BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY MATHEMATICS. – 2015. –V. 80, №4. –P. 98-102.
2. C. Kharif, E. Pelinovsky. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. Eur. Jour. Mech. B (Fluids). -2003. -V.22, - P. 603-634.
3. **V. B. Matveev. Positon-positon and soliton-positon collisions: KdV case //** Physics Letters A. - 1992. - V. 166, - P. 209-212.
4. Yesmakhanova K. and et. all. Darboux transformation and exact solutions of the integrable Heisenberg ferromagnetic equation with self-consistent potentials \\ INTERNATIONAL JOURNAL OF GEOMETRIC METHODS IN MODERN PHYSICS. –2016. –V.13, №1. –P. 1550134.
5. V.B. Matveev. Generalized Wronskian formula for solutionsof the KdV system: _rstapplications // Physics Letters A. - 1992. - V. 166, - P. 205-208.
6. Yesmakhanova K. and et all. Soliton solutions of the Hirota's system \\ AIP Conference Proceedings. –2016. –V. 1759. –P. 020147.
7. C.Z. Li, J. S.He. Darboux transformation and positonsof the inhomogeneous Hirota and the Maxwell-Bloch equation// arXiv:1210.2501, to appear in SCIENCE CHINA Physics, Mechanics & Astronomy.
8. Myrzakul Sh.R., Syzdyk A.M., Yesmakhanova K.R. The nonlocal nonlinear Schrödinger – Maxwell – Bloch equation \\ International Journal of Mathematics and Physics. - 2017. -№ 2.
9. V.B. Matveev, Positons: Slowly decreasing analogues of solitons, Theoretical and Mathematical Physics. – 2002. - V.131:1, - P. 483-497.