$$B_\gamma f(x) \coloneqq v(x)\int_0^x u(s)W^\gamma(s)ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}f(s)ds \qquad (1)$$

B_γ операторының L_p кеңістігінен L_q кеңістігіне шенелгендігін қарастырамыз. (1) формулада W(x) = x , болған кезде осы оператордың шенелгендігі мен компактылығы [1] жұмыста алынған.

Теорема 1. $\gamma > \frac{1}{p'}$ және $u(x)$ өспейтін функция болсын.

1) $1 < p < q < \infty$ болғанда B_γ операторы L_p кеңістігінен L_q кеңістігіне шенелген болады сонда, текcонда ғана, егер

$$A = \sup_{x \in R}\left(\int_0^x u^{p'}(s)W^{(\gamma+1)p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_x^\infty \frac{v^q(t)}{W^q(t)}dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,\text{ мұндағы } \|B_\gamma\| \approx A.$$

2) $1 < q < p < \infty$, B_γ операторы L_p кеңістігінен L_q кеңістігіне шенелген болады сонда, тек сонда ғана, егер

$$B = \left(\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x u^{p'}(s)W^{\gamma p'}(s)ds\right)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\int_x^\infty \frac{v^q(t)}{W^q(t)}dt\right)^{\frac{p}{p-q}} * u^{p'}(x)W^{\gamma p'}(x)dx\right) < \infty,$$

Мұндағы $\|B_\gamma\| \approx$ B.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

A.M.Abylayeva. L.-E. Persson. Hardy type inequalities and compactness of a class of integral operators with logarithmic singularities. // Math. Inequal. Appl. (MIA), V.21, № 1, 2018, P.201-215.

УДК 517.5

ЖАЛПЫ ТҮРДЕГІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ИНТЕГРАЛДАРЫН ЕСЕПТЕУ

Танирбергенова Г. Б.

магистрант, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұрсұлтан қ.

Жетекші: Акишев Г. А.,ф.-м.ғ.д., профессор,

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-сұлтан қ.

Тригонометрия элеметтерін адамзат ежелгі замандардан бастап, бұрыштарды өлшеу мұқтаждықтары барысында қолдана бастаған. Мәселен, біздің заманымызға дейінгі екі мыңыншы жылдары ежелгі вавилондықтар дөңгелек хордасы ұзындығы, дөңгелек диаметрі мен сәйкес сегмент биіктіктері арқылы есептей білгендіктері жөнінде осы күнге дейінгі сақталған қыш кестелері растайды.Тригонометрияның шығу тарихында әл-Фараби еңбектері елеулі орын алады.Осы күнгі қолданылып жүрген sin*x* және cos*x* белгілеулері 1739 жылы И.Бернуллидің Л. Эйлерге жазған хатында алғаш рет ұсынылған. Бұл белгілеулерді соңынан Л. Эйлер және өзгелер кеңінен қолдана бастады[1].

Қазіргі заманда математика теориясында және оның қолдануларында классикалық тригонометриялық функциялардың алатын орны ерекше. Олар дифференциалдық теңдеулерді шешуде, радиотолқындарды өрнектеуге және функцияларды Фурье қатарына жіктеу теориясында, функцияны жуықтау теориясында кеңінен қолданылады.

P.Lindqvist [2] келесі жиектік есептің

$$(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' + \lambda |u(t)|^{p-2}u(t) = 0$$
$$u(0) = 0,\ u'(0) = 1$$

шешімі ретінде синус функциясының жалпы түрін анықтады. Оның анықтамасы бойынша жалпы түрдегі синус функциясы

$$F_p(t) = \int_0^t \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}},\ 0 \le t \le 1$$

функциясына кері функция ретінде анықталады. Сонымен жалпы синус функциясы $\sin_p t = F^{-1}{}_p(t)$. Осы синус функциясы арқылы косинус, тангенс, котангенс функцияларының жалпы түрлері анықталған[2].

Edmunds D.E,Jan Lang [3] мақаласында жалпы түрдегі тригонометриялық функциялардың кейбір формулалары және туындыларын есептеу формулалары келтірілген және [4] мақаланы қараңыз.

Осы ғылыми зерттеу *жұмысының мақсаты*–кейбір тригонометриялық функциялардың жалпы түрлерінің интегралдарын есептеу.

[3]мақалалада жалпы түрдегі синус функциясын анықтау үшін келесі интегралды қарастырған

$$F_{p,q}(x) = \int_0^x \left(1-t^q\right)^{-1/p} dt\ .$$

мұндағы $x \in [0,1]$, $1 < p$, $q < \infty$. Бұл функция қатаң өспелі болғандықтан, оның кері функциясы $(F_{p,q}(x))^{-1}$ бар. Осы функцияның керісін жалпы түрдегі синус деп атайды және келесі түрде белгілейді: $\sin_{p,q} x$. Сонымен

$$\left(F_{p,q}(x)\right)^{-1} = \sin_{p,q} x\ .$$

$\sin_{p,q} x$ функциясы $[0, \pi_{p,q}/2]$ аралығында анықталған, мұндағы $\pi_{p,q} = 2\int_0^1 \left(1-t^q\right)^{-1/p} dt$. Бұл аралықта функция қатаң өспелі, ендеше $\sin_{p,q} 0 = 0$ және $\sin_{p,q}(\pi_{p,q}/2) = 1$ болады. $\sin_{p,q}$ x функциясын $[0, \pi_{p,q}]$ аралығына дейін келесі теңдікті пайдаланып

$$\sin_{p,q} x = \sin_{p,q}(\pi_{p,q} - x),\ x \in [\pi_{p,q}/2, \pi_{p,q}]$$

ұластырамыз.Енді $\sin_{p,q} x$ функциясын $\lfloor -\pi_{p,q}, \pi_{p,q} \rfloor$ аралығына тақ түрде ұластырамыз. Яғни егер $x \in (-\pi_{p,q}, 0)$ болса, онда $\sin_{p,q} x = -\sin_{p,q}(-x)$. Себебі $-x \in (0, \pi_{p,q})$. Функцияның ең кіші периоды $2\pi_{p,q}$ - ға тең.

Анықтама. Кез келген $x \in R$ үшін $\frac{d}{dx}\sin_{p,q} x$ туындысын жалпы түрдегі косинус деп атайды және келесі түрде белгілейді

$$\cos_{p,q} x = \frac{d}{dx}\sin_{p,q} x .$$

$\sin_{p,q} x$, $\cos_{p,q} x$ функцияларының периоды $2\pi_{p,q}$.

Жалпы түрдегі тангенс функциясы төмандегідей анықталады:

$$tg_{p,q}(x) = \frac{\sin_{p,q} x}{\cos_{p,q} x} ,$$

мұндағы $\cos_{p,q} x \neq 0$ $\{x \in R; x \neq (k + 1/2)\pi_{p,q}, k \in Z\}$.

Мақаланың негізгі нәтижелері келесі тұжырымдар.

Теорема 1. Айталық $p, q \in (1, +\infty)$, онда

$$\int \tan_{p,q}^{p} x_1 (\sin_{p,q} x)^{q-p} dx = \frac{q}{p}\left(\tan_{p,q} x - x\right).$$

Дәлелдеме. $\tan_{p,q} x$ функциясының туындысы жайлы келесі формула белгілі [3].

$$\frac{d \tan_{p,q} x}{dx} = 1 + \frac{p(\sin_{p,q} x)^q}{q(\cos_{p,q} x)^p} .$$

Яғни

$$\frac{(\sin_{p,q} x)^q}{(\cos_{p,q} x)^p} = \frac{q}{p}\left(-1 + \frac{d \tan_{p,q} x}{dx}\right).$$

Сондықтан интегралдың қасиеттері бойынша

$$\int \tan_{p,q}^{p} x \cdot (\sin_{p,q} x)^{q-p} dx = \int \frac{(\sin_{p,q} x)^q}{(\cos_{p,q} x)^p} dx = \int \frac{q}{p}\left(-1 + \frac{d \tan_{p,q} x}{dx}\right) dx =$$

$$= \frac{q}{p}\left(\int \frac{d \tan_{p,q} x}{dx} dx - \int dx\right) = \frac{q}{p}\left(\tan_{p,q} x - x\right)$$

Теорема дәлелденді.

Теорема 2. Айталық $\mathrm{p,q} \in (1,+\infty)$, $\alpha \in (-\infty,+\infty)$.

Егер $\alpha = 1-q$, онда

$$\int \cos_{p,q}^{1-q} x \cdot \sin_{p,q}^{p-1} x\; dx = -\frac{q}{p}\ln\left|\cos_{p,q} x\right|,$$

Егер $\alpha \neq 1-q$, онда

$$\int \cos_{p,q}^{\alpha} x \cdot \sin_{p,q}^{p-1} x\; dx = -\frac{q(\cos_{p,q} x)^{\alpha+q-1}}{p(\alpha+q-1)}.$$

Дәлелдеме. Айнымалыны салыстырамыз $z = \cos_{p,q} x$. Онда $\cos_{p,q} x$ функциясының туындысының формуласы бойынша ([3] әдебиетті қараңыз).

$$dz = -\frac{p}{q}\cos_{p,q}^{2-q} x \cdot \sin_{p,q}^{p-1} x\; dx = -\frac{p}{q} z^{2-q} \cdot \sin_{p,q}^{p-1} x\; dx,$$

осы формуладан

$$\sin_{p,q}^{p-1} x\; dx = -\frac{q}{p}\frac{dz}{z^{2-q}}.$$

Сондықтан

$$\int \cos_{p,q}^{\alpha} x \cdot \sin_{p,q}^{p-1} x\; dx = -\frac{q}{p}\int z^{\alpha+q-2} dz,$$

Егер $\alpha = 1-q$, онда

$$\int \cos_{p,q}^{1-q} x \cdot \sin_{p,q}^{p-1} x dx = -\frac{q}{p}\int \frac{dz}{z} = -\frac{q}{p}\ln|z| = -\frac{q}{p}\ln\left|\cos_{p,q} x\right|.$$

Егер $\alpha \neq 1-q$, онда

$$\int \cos_{p,q}^{1-q} x \cdot \sin_{p,q}^{p-1} x dx = -\frac{q}{p}\int z^{\alpha+q-2} dz = $$
$$= -\frac{q}{p}\frac{z^{\alpha+q-1}}{\alpha+q-1} = -\frac{q}{p}\cdot\frac{(\cos_{p,q} x)^{\alpha+q-1}}{\alpha+q-1}.$$

Теорема дәлелденді.

Ескертпе, $\alpha = 2$ және $q = p$ жағдайында 1-теорема және 2-теорема [5] мақалада дәлелденген.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Көбесов. Математика тарихы. Алматы. 1993. 91-95, 145-150.
2. Бекежанова А.К. Тригонометриялық функциялардың жалпы түрі. Материялы IX международной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование-2014». Астана., ЕНУ. 2014
3. P. Lindqvist, Some remarkable sine and cosine functions, Ricerch Mat, 44(2), 1995 –P.269-290
4. J. Lang, D.E. Edmunds, Eigenvalues, embeddings and generalized trigonometric function, in: Lecture Notes in Mathematics 2016, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.
5. Vasinova M. Properties of generalized trigonometric functions. Bachelor thesis. Pilsen – 2016 – 29 p.