максималды оператордың тарылуы болмайтынын ескеру керек. B_k^* түйіндес операторы да вольтерлік болады:

$$L_k^* \upsilon = -\upsilon''(x) + \operatorname{sgn}(x - x_0)\frac{\upsilon'(0) - \upsilon(0)}{x_0^2 + 2x_0 - \frac{1}{2}} = f(x),$$

$$D(L_k^*) = \{\upsilon \in W_2^2(0,1) : \upsilon(1) = 0, \upsilon'(1) = 0\}$$

$$B_k^* \upsilon = L_k^*(I + L^* K^*)\upsilon = g(x).$$

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. Бияров Б.Н. О спектральных свойствах корректных сужений и расширений одного класса дифференциальных операторов.// Диссертация-Алматы, 1989.
2. Шыныбеков А.Н. О корректных сужениях и расширениях некоторых дифференциальных операторов.// Диссертация-Алматы, 1983.
3. Бияров Б.Н. О вольтерровых задачах// Хабаршы-Астана, 2010.
4. Вишик М.И. Линейные расширения операторов и краевые условия // Доклады АН СССР,1949.

УДК 52

О ВЗАИМОСВЯЗИ ПОТЕНЦИАЛА РИССА И ОПЕРАТОРА ХАРДИ В ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

Искакова Гульдинара Шамугутовна, Жулдасов Жанат Максутович

iskakova.guldinar@mail.ru

zhanzhan85@mail.ru

Магистрант, докторант механико-математического факультета ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Н.Бокаев

В данной работе приводится оценка нормы потенциала Рисса в глобальльных пространствах типа Морри через норму оператора Харди в весовом пространстве Лебега и приводится условие ограниченности потенциала Рисса в глобальныцх пространствах типа Морри.

Для $x \in R^n$ и $r > 0$, пусть $B(x,r)$обозначает открытый шар с центром в точке x радиуса r и $|B(x,r)|$ – объем шара.

Пусть $f \in L_1^{loc}(R^n)$. Потенциал Рисса I_α определяется следующим образом [1]:

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)dy}{|x - y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n,$$

где $|B(x,t)|$ является мерой Лебега шара $B(x,t)$.

Пусть $1 \le p \le \infty$, w -- измеримая неотрицательная функция на $(0,\infty)$ не эквивалентная нулю. Глобальные пространства типа Морри $GM_{p\theta}^{w(\cdot)} \equiv GM_{p\theta}^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{GM_{p\theta}^{w(\cdot)}} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| w(\cdot) \|f\|_{L_p(B(x,\cdot))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)},$$

где $B(x,r)$ - открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$.

Пространство $GM_{p\theta}^{w(\cdot)}$ совпадает с обобщенным пространством Морри $M_p^{w(\cdot)}$ при $\theta = \infty$ [2], [3] и совпадает с классическим пространством Морри M_p^λ при $w(r) = r^{-\lambda}$, где $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, которое, в свою очередь, при $\lambda = 0$ совпадает с пространством $L_p(\mathbb{R}^n)$, а при $\lambda = \frac{n}{p}$ с пространством $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $1 \le p$, $\theta < \infty$ и пусть w неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$. Через $LM_{p\theta,w}$ обозначим локальные пространства типа Морри,т.е. пространства всех функций $f \in L_p(B(0,r))$, для всех $r > 0$ с конечными квазинормами

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w}} \equiv \|f\|_{LM_{p\theta,w}(R^n)} = \left\| w(r) \|f\|_{L_p(B(0,r))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

Пусть $1 \le p$, $\theta < \infty$.через $\Omega_{p\theta}$ множество всех функций, которые являются неотрицательными, измеримыми на $(0,\infty)$, не эквивалентными 0 и такими, что для некоторого $t > 0$ (а, значит, и для любых $t > 0$)

$$\left\| w(r) r^{\frac{n}{p}} \right\|_{L_\theta(0,t)} < \infty, \quad \|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty.$$

Пространство $GM_{p\theta}^{w(\cdot)}$ нетривиально, то есть состоит не только из функций, эквивалентных 0 на $\mathbb{R}^n$, тогда и только тогда, когда $w \in \Omega_{p\theta}$

Через Ω_θ обозначим множество неотрицательных измеримых на $(0,\infty)$ функций w, неэквивалентных нулю, таких, что для некоторого $t > 0$ выполняется условие

$$\|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty.$$

Отметим, что если указанная величина равна бесконечности, то пространство $LM_{p\theta,w}$ состоит только из функции, эквивалентных нулю.

Для измеримого множества $\Omega \subset R^n$ и для неотрицательной и измеримой на Ω функций v, через $L_{p,v}(\Omega)$ обозначимвесовое пространство L_p всех функций f измеримых на Ω, для которой

$$\|f\|_{L_{p,v}(\Omega)} = \|vf\|_{L_p(\Omega)} < \infty .$$

Если $0 < p \le \theta < \infty$, то

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w}} \le \|f\|_{L_{p,W}},$$

и если $0 < \theta \le p < \infty$, то

$$\|f\|_{L_{p,W}} \le \|f\|_{LM_{p\theta,w}},$$

где для всех $x \in R^n$

$$W(x) = \|w\|_{L_\theta(|x|,\infty)}.$$

Пусть H – оператор Харди

$$(Hg)(r) = \int_0^r g(t)dt, \; 0 < r < \infty .$$

В следующей теореме приводится оценка L_p-нормы по шару $B(0,r)$ потенциала Рисса через L_p-норму по шару функций f.

Теорема 1. Пусть p_1, p_2 и α удовлетворяют условиям:

$$1 < p_1 < p_2 < \infty \text{ и } \alpha = n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) \tag{1}$$

Если $0 < \delta < \frac{n}{p_1} - \alpha$, тогдасуществуетпостоянная $c > 0$ такое, что

$$\|I_\alpha f\|_{L_{p_2}(B(0,r))} \le c r^{n/p_2 - \delta} \left(\int_r^\infty \left(\int_{B(0,t)} |f(x)|^{p_1} dx \right) \frac{dt}{t^{n-(\alpha+\delta)p_1+1}} \right)^{1/p_1}$$

для всех $r > 0$ и для всех $f \in L_1^{loc}(R^n)$.

В следующей теореме приводится оценка нормы потенциала Рисса в глобальных пространствах пространствах типа Морри через норму оператора Харди в весовом пространстве Лебега.

Теорема 2. Пусть выполнены условиятеоремы 1. Кроме того, пусть $0 < \delta < \frac{n}{p_1} - \alpha$, $0 < \theta < \infty$ и $w \in \Omega_\theta$.

Тогда существует $c > 0$ такая, что имеет место неравенство:

$$\|I_\alpha f\|_{GM_{p_2\theta,w}} \le c \|Hg_\delta\|_{L_{\frac{\theta}{p_1},v_\delta}(0,\infty)}^{\frac{1}{p_1}}$$

для всех $f \in L_{p_1}^{loc}(R^n)$, где

$$g_\delta(t) = \int_{B\left(0,t^{-\frac{1}{\sigma}}\right)} |f(y)|^{p_1} dy, \; \sigma = n - (\alpha+\delta)p_1$$

и

$$v_\delta(r)=\left[w\left(r^{-\frac{1}{\sigma}}\right)r^{-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{n}{p_2}-\delta+\frac{1}{\theta}\right)-\frac{1}{\theta}}\right]^{p_1}.$$

Теорема 3.Пусть выполнены условиятеоремы 1.И пусть $0<\theta_1,\theta_2<\infty$, $0<\delta<\frac{n}{p_1}-\alpha$ и $w_1\in\Omega_{\theta_1}$, $w_2\in\Omega_{\theta_2}$.

Предположим, что оператор H ограничен из $L_{\frac{\theta_1}{p_1},v_{1,\delta}}(0,\infty)$ в $L_{\frac{\theta_2}{p_1},v_{2,\delta}}(0,\infty)$ на конусе всех неотрицательных невозрастающих на $(0,\infty)$ функций φ, где

$$v_{1,\delta}(r)=\left[w_1\left(r^{-\frac{1}{\sigma}}\right)r^{-\frac{1}{\sigma\theta_1}-\frac{1}{\theta_1}}\right]^{p_1},$$

$$v_{2,\delta}(r)=\left[w_2\left(r^{-\frac{1}{\sigma}}\right)r^{-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{n}{p_2}-\delta+\frac{1}{\theta_2}\right)-\frac{1}{\theta_2}}\right]^{p_1}$$

Тогда оператор I_α - ограничениз $GM_{p_1\theta_1,w_1}$ в $GM_{p_2\theta_2,w_2}$.

Теорема 4. Пусть выполнены условиятеоремы 1.И пусть $0<\theta_1\le\theta_2<\infty$, $w_1\in\Omega_{\theta_1}$, $w_2\in\Omega_{\theta_2}$.

Предположим, что для некоторого $0<\delta<\frac{n}{p_1}-\alpha$

$$\left\|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}-\delta}\left\|w_1^{-1}(t)t^{\alpha+\delta-\frac{n}{p_1}-\frac{1}{\min\{p_1,\theta_1\}}}\right\|_{L_s(r,\infty)}\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}<\infty,$$

где $s=\frac{p_1\theta_1}{(\theta_1-p_1)_+}$.

Тогда I_α - ограничен из $GM_{p_1\theta_1,w_1}$ в $GM_{p_2\theta_2,w_2}$.

Если $p_1=1$, тогда это утверждение также верно, если в (58) формуле $\delta=0$.

Теорема 5. Пусть выполнены условиятеоремы 1, и кроме того, $0<\theta_1\le\theta_2<\infty$, $\theta_1\le 1$, $w_1\in\Omega_{\theta_1}$ и $w_2\in\Omega_{\theta_2}$, тогда условие

$$\left\|w_2(r)\left(\frac{r}{t+r}\right)^{\frac{n}{p_2}}\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}\le c\|w_1\|_{L_{\theta_1}(t,\infty)},$$

где $c>0$ независима от $t>0$, достаточно для ограниченности оператора I_α из $GM_{p_1\theta_1,w_1}$ в $GM_{p_2\theta_2,w_2}$.

В приведенных утверждениях параметры $p_1,p_2,\theta_1,\theta_2$ удовлетворяют условиям $1<p_1<p_2<\infty$, $0<\theta_1\le\theta_2<\infty$.Для локальных пространств типа Морри аналогичные вопросы рассмотрены в [2] и [3].

Список использованных источников

1. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – Мир: Москва, 1973, 343 с.

2. Burenkov V.I.,Guliyev V.S. Necessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of the Riesz Potential in Local Morrey-type Spaces // Potential Anal. 2009 №30. P.211–249
3. Burenkov V.I.,GuliyevH.V., Guliyev V.S. Necessary and Sufficient Conditions for Boundedness of the fractional maximal operator in the Local Morrey-type Spaces // J.Comput. Appl. Math. 2007.-№208. P.211–249

УДК 517

$1 < p \le q < \infty$ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ ЭРДЕЙИ – КОБЕР ОПЕРАТОРЫНЫҢ ШЕНЕЛУ КРИТЕРИЙІ

Қаламан Мәдина Саятқызы

kaliyakass0va@mail.ru

3 курс студенті, ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – А.М.Абылаева

$I=(a,b)$, $0 \le a < b \le \infty$ болсын және v, u - барлық жерде дерлік оң функциялар және олар I интервалында локалды интегралданады. $0 < p < \infty$ және $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ болсын. $L_{p,v} \equiv L_p(\text{v},\text{I})$ арқылы I интервалында өлшенетін барлық f функцияларының жиынын белгілейік және олар үшін келесі түрдегі функционал ақырлы:

$$\|f\|_{p.\text{v}}=\left(\int_a^b |f(x)|\text{v(x)dx}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

W функциясы I интервалында теріс емес, қатаң өспелі және локалды абсолютті үзіліссіз функция болсын. $\frac{dW(x)}{dx}=w(x)$ болсын делік.

Харди типті операторды қарастырайық:

$$T_{\alpha,\beta}f(x)=\int_a^x \frac{u(s)W^{\beta}f(s)w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}} \qquad (1)$$

$0 < p,q < \infty$ болған кезде $T_{\alpha,\beta}f$ операторының шенелгендігі мен компактылығы [1] жұмыстың нәтижесінен шығады.

Егер (1) операторда $W(x)=x^{\sigma}$, $\sigma > 0$ және $u(s)W^{\beta}(s)w^{\frac{1}{p'}}(s)=u(s)s^{\sigma\beta-\frac{\sigma-1}{p'}}=u(s)s^{\sigma\gamma+\sigma-1}$ болған кезде, мұндағы $\gamma=\beta-\frac{\sigma-1}{\sigma p}$, онда операторымыз келесі түрде

$$E_{\alpha,\gamma}f(x)=\rho(x)\int_a^x \frac{\omega(s)s^{\sigma\gamma+\sigma-1}f(s)ds}{(x^{\sigma}-s^{\sigma})^{1-\alpha}},$$

яғни $E_{\alpha,\gamma}$ - Эрдейи-Кобер типтес операторы болады.

Теорема. $0<\alpha<1, \frac{1}{\alpha}<p\le q<\infty$ $\sigma>0$, $\beta \ge 0$ және $\gamma=\beta-\frac{\sigma-1}{\sigma p}$ болсын. ω функциясы I аралығында өспейтін функция болсын. Онда $E_{\alpha,\gamma}$ операторы L_p кеңістігінен L_q кеңістігіне шенелген болады сонда тек сонда ғана, егер

$$A_{\alpha,\gamma}(z)=\left(\int_z^b \left|\rho(x)x^{\sigma(\alpha-1)}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^z |\omega(s)s^{\sigma\gamma+\sigma-1}|^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}} \quad A_{\alpha\gamma}=\sup_{z\in I}A_{\alpha\gamma}(z)<\infty.$$

Мұндағы, $\| E_{\alpha,\gamma}\| \equiv A_{\alpha,\gamma}$.

Қолданылған әдебиеттер тізімі