Теорема 2-ге қолдана отырып келесіні аламыз:

$1 < p < r < p^{'} < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$ болсын. Онда

$$M_{p,q} \hookrightarrow M_{r,t} \qquad (14)$$

үшін орындалады. Кез келген $q, t \in [1; \infty)$. Мұндағы $M_{p,q}$ $M_{p,q}^{p,q}$ класын көрсетеді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Стечкин С.Б. О билинейных формах. ДАН СССР. 71. 1950. N3 с.237 240.
2. Hirshman I.I. On multiplier transformations. Duke Math. J..26, 1959 N2 p. 221-242.
3. Эдельштейн С.Л. Ограниченность свертки в $L_p(Z_m)$ и гладкость символа оператора. Мат.заметки,22. 1977, N6, б.873-884.
4. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Количественный анализ в теоремах вложения Соболева приложение к спектральной теории.- В: X мат.школа, Киев, 1974, б.5-189.
5. Караджов Г.Е. Тригонометрические проблема множителей. Конструктивная теория функций 81, София, 1983, б.82-86.
6. Тлеуханова Н.Т. О тригонометрической проблеме множителей в L_{pq}. Современные вопросы теории функции и функционального анализа., Караганда, 1988,б.32-33.

УДК 517.968.7

ЕКІНШІ РЕТТІ ФРЕДГОЛЬМ ТИПТІ ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТЫ БАР КӨПНҮКТЕЛІ ЕСЕП

Берікбай Ақерке Сазаханқызы

akerke.berikbay@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 2-курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – М.М. Байбурин

Алдымен көмекші

$$Ly = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f(x) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha_i y(x_i) + \beta_i y'(x_i)\right) + \int_0^1 [\mu_0(x)y(x) + \mu_1(x)y'(x)]dx = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} \left(\gamma_i y(x_i) + \delta_i y'(x_i)\right) + \int_0^1 [\nu_0(x)y(x) + \nu_1(x)y'(x)]dx = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(1) – (2) – есебін қарастырайық. Мұндағы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ - кейбір сандар. Ал, $x_i \in [0,1]$, $x_i < x_{i+1}$, $(i = 0,1,....., n-1)$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$.

(1) – теңдеудегі $a_1(x), a_2(x), f(x) \in C[0,1]$, ал $y(x) - [0,1]$ аралығында екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функция болсын, яғни $y(x) \in C^2[0,1] = \{y \in C[0,1]: y', y'' \in C[0,1]\}$. $Ly = f$ теңдеуінің жалпы шешімін тұрақтыларды вариациялау әдісі бойынша $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ түрінде іздейік.Мұндағы $y_1(x), y_2(x) - Ly = 0$ теңдеуінің сызықты тәуелсіз шешімдері, ал $c_1(x), c_2(x)$ функциялары келесі жүйе арқылы табылады:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{3}$$

(1)– дің шешімдері (2) – шекаралық шарттарына қоямыз:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\alpha_i y(x_i) + \beta_i y'(x_i)\right) + \int_0^1 [\mu_0(x)y(x) + \mu_1(x)y'(x)]dx = \sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} \alpha_i (c_1(x_i)y_1(x_i) + c_2(x_i)y_2(x_i)) + \\ \beta_i (c_1(x_i)y_1'(x_i) + c_2(x_i)y_2'(x_i)) \end{bmatrix} +$$

$$\int_0^1 [\mu_0(x)(c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)) + \mu_1(x)(c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x))]dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\{(\alpha_i y_1(x_i) + \beta_i y_1'(x_i))c_1(x_i) + (\alpha_i y_2(x_i) + \beta_i y_2'(x_i))c_2(x_i)\} +$$

$$+ \int_0^1 \{[\mu_0(x)y_1(x) + \mu_1(x)y_1'(x)]c_1(x) + [\mu_0(x)y_2(x) + \mu_1(x)y_2'(x)]c_2(x)\}dx = 0$$

Осы сияқты

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\gamma_i y(x_i) + \delta_i y'(x_i)\right) + \int_0^1 [\mu_0(x)y(x) + \mu_1(x)y'(x)]dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\{(\gamma_i y_1(x_i) + \delta_i y_1'(x_i))c_1(x_i) + (\gamma_i y_2(x_i) + \delta_i y_2'(x_i))c_2(x_i)\} +$$

$$+ \int_0^1 \{[\mu_0(x)y_1(x) + \mu_1(x)y_1'(x)]c_1(x) + [\mu_0(x)y_2(x) + \mu_1(x)y_2'(x)]c_2(x)\}dx = 0$$

Енді осы шарттарды матрицалық теңдік түрінде жазып, төмендегі түрдегі есепті аламыз:

$$\begin{cases} C'(x) = F(x) \\ \sum_{i=1}^{n} A_i C(x_i) + \int_0^1 B(x)C(x)dx = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$C(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}, \quad F(x) = [W(x)]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}, \quad C'(x) = \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i y_1(x_i) + \beta_i y_1'(x_i) & \alpha_i y_2(x_i) + \beta_i y_2'(x_i) \\ \gamma_i y_1(x_i) + \delta_i y_1'(x_i) & \gamma_i y_2(x_i) + \delta_i y_2'(x_i) \end{pmatrix}$$

$$B(x)=\begin{pmatrix}\mu_0 y_1(x)+\mu_1 y_1'(x) & \mu_0 y_2(x)+\mu_1 y_2'(x)\\ \nu_0 y_1(x)+\nu_1 y_1'(x) & \nu_0 y_2(x)+\nu_1 y_2'(x)\end{pmatrix}$$

(4) – есебі $C[0,2]_2=\{f=(f_1,f_2): f_1,f_2\in C(0,1)\}$ кеңістігінде қарастырылып отыр. Оның нормасы $\|f\|=\|f_1\|_{C[0,1]}+\|f_2\|_{C[0,1]}$ теңдігімен анықталады.

Лемма . (4) есеп коррективті болуы үшін

$$\det\left|\sum_{i=1}^{n}A_i+\int_0^1 B(x)dx\right|\neq 0 \qquad (5)$$

шарты орындалуы қажетті және жеткілікті.

(4) есебінің шешімі $C(x)=\int_0^x F(t)dt+C(0)$. [1] жұмысындағыдай түрлендірулер қолданып мынаны аламыз

$$C(0)=-T^{-1}\sum_{i=1}^{n}A_i\left(C(x_1)-C(x_0)\right)-T^{-1}\sum_{i=2}^{n}A_i\left(C(x_2)-C(x_1)\right)-\ldots-A_n\left(C(x_n)-C(x_{n-1})\right)-$$
$$-T^{-1}\int_0^1 B(x)\left(C(x)-C(0)\right)dx$$

Енді $-T^{-1}\sum_{i=1}^{n}A_i=D_i=\begin{pmatrix}p_i & q_i\\ r_i & s_i\end{pmatrix}$, $i=(1,...,n)$, $-T^{-1}\int_0^1 B(x)dx=D(x)=\begin{pmatrix}d_{11}(x) & d_{12}(x)\\ d_{21}(x) & d_{22}(x)\end{pmatrix}$ белгілеулерін енгізе отырып, былай жазамыз:

$$C(0)=\sum_{i=1}^{n}D_i\left(C(x_i)-C(x_{i-1})\right)+\int_0^1 D(x)\left(C(x)-C(0)\right)dx=\sum_{i=1}^{n}D_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}F(t)dt+\int_0^1 D(x)\int_0^x F(t)dt$$

мұндағы $\int_0^x F(t)dt=\int_0^x\frac{1}{|w(t)|}\begin{pmatrix}-y_2(t)f(t)\\ y_1(t)f(t)\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}-\int_0^x\frac{y_2(t)f(t)}{|w(t)|}dt\\ \int_0^x\frac{y_1(t)f(t)}{|w(t)|}dt\end{pmatrix}$. Осыдан

$$D(x)\cdot\int_0^x F(t)dt=\begin{pmatrix}d_{11}(x) & d_{12}(x)\\ d_{21}(x) & d_{22}(x)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\int_0^x\frac{y_2(t)f(t)}{|w(t)|}dt\\ \int_0^x\frac{y_1(t)f(t)}{|w(t)|}dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d_{11}(x)\int_0^x\frac{y_2(t)f(t)}{|w(t)|}dt+d_{12}(x)\int_0^x\frac{y_1(t)f(t)}{|w(t)|}dt\\ -d_{21}(x)\int_0^x\frac{y_2(t)f(t)}{|w(t)|}dt+d_{22}(x)\int_0^x\frac{y_1(t)f(t)}{|w(t)|}dt\end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} D\cdot\int_{x_{i-1}}^{x_i} F(t)dt=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} p_i & q_i \\ r_i & s_i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{y_2(t)f(t)}{|w(t)|}dt \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{y_1(t)f(t)}{|w(t)|}dt\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{[q_i y_1(t)-p_I y_2(t)]f(t)}{|w(t)|}dt \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{[s_i y_1(t)-r_I y_2(t)]f(t)}{|w(t)|}dt\end{pmatrix}$$

Осылайша (1) – теңдеудің (2) – шарттарын қанағаттандыратын $y(x)$ шешімін аламыз:

$$\begin{aligned} y(x)&=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)=-y_1(x)\int_0^x\frac{y_2(t)f(t)}{|w(t)|}dt+y_2(x)\int_0^x\frac{y_1(t)f(t)}{|w(t)|}dt+\\ &+y_1(x)\left[\sum_{i=0}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{[q_i y_1(t)-p_i y_2(t)]f(t)}{|w(t)|}dt+\int_0^1\int_0^x\frac{[d_{12}(x)y_1(t)-d_{11}(x)y_2(t)]f(t)}{|w(t)|}dt\right]+\\ &+y_2(x)\left[\sum_{i=0}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{[s_i y_1(t)-r_i y_2(t)]f(t)}{|w(t)|}dt+\int_0^1\int_0^x\frac{[d_{22}(x)y_1(t)-d_{21}(x)y_2(t)]f(t)}{|w(t)|}dt\right]\end{aligned}\tag{6}$$

Теорема 1. (1) – (2) – есебі (5) – шарты орындалғанда корректі болады және оның шешімі (6) – формуласы арқылы табылады.

Енді негізгі есепке көшейік.

Келесі түрдегі интегралды дифференциалдық теңдеу үшін

$$y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)-\lambda\sum_{i=1}^{m}d_i(x)\int_0^1[h_{0i}(t)y'(t)+h_{1i}(t)y(t)]dt=f(x)\tag{7}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i y(x_i)+\beta_i y'(x_i))+\int_0^1[\mu_0(x)y(x)+\mu_1(x)y'(x)]dx=0\\ \sum_{i=0}^{n}(\gamma_i y(x_i)+\delta_i y'(x_i))+\int_0^1[\nu_0(x)y(x)+\nu_1(x)y'(x)]dx=0\end{cases}\tag{8}$$

(7),(8) – есебін коррективлікке зерттейік. Ол үшін (1),(2) – есебін қарастырамыз, ал ол есептің шешімі 1 – теоремада көрсетілгендей келесі түрде анықталады, яғни $y(x)=L_0^{-1}f(x)$ түрінде табылады. $L_0^{-1}f(x)$ (6) – теңдік арқылы жазылады.

Енді (7), (8) есебін шешу үшін (7) – теңдеуіне L_0^{-1} операторымен әсер етейік, сонда мынаны аламыз:

$$y(x)-\lambda\sum_{i=1}^{m}L_0^{-1}d_i(x)\int_0^1[h_{0i}(t)y'(t)+h_{1i}(t)y(t)]dt=L_0^{-1}f(x)\tag{9}$$

(9) – теңдеуінде $\mu_i(y)=\int_0^1 [h_{0i}(t)y'(t)+h_{1i}(t)y(t)]dt, \quad (i=1,...,m)$ белгілеулерін енгізейік, бұлар $y(x)$ функциясына қарағанда сызықтық функционалдар. Онда біздің (9) – теңдеу мына түрге келеді:

$$y(x)-\lambda\sum_{i=1}^{m}\mu_i(y)\left(L_0^{-1}d_i\right)(x)=L_0^{-1}f(x) \tag{10}$$

Сосын $\mu_i -$ мен әсер етіп, келесі жүйені аламыз:

$$\begin{cases} \mu_1(y)\left(1-\lambda\mu_1\left(L_0^{-1}d_1\right)\right)-\lambda\left[\mu_2(y)\mu_1\left(L_0^{-1}d_2\right)+\mu_3(y)\mu_1\left(L_0^{-1}d_3\right)+\ldots+\right. \\ \left.+\mu_m(y)\mu_1\left(L_0^{-1}d_m\right)\right]=\mu_1\left(L_0^{-1}f\right) \\ -\lambda\mu_1(y)\mu_2\left(L_0^{-1}d_1\right)+\mu_2(y)\left(1-\lambda\mu_2\left(L_0^{-1}d_2\right)\right)-\lambda\left[\mu_3(y)\mu_2\left(L_0^{-1}d_3\right)+\ldots+\right. \\ \left.+\mu_m(y)\mu_2\left(L_0^{-1}d_m\right)\right]=\mu_2\left(L_0^{-1}f\right) \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ -\lambda\left[\mu_1(y)\mu_m\left(L_0^{-1}d_1\right)+\mu_2(y)\mu_m\left(L_0^{-1}d_2\right)+\ldots+\right. \\ \left.+\mu_{m-1}(y)\mu_1\left(L_0^{-1}d_{m-1}\right)\right]+\mu_m(y)\left(1-\lambda\mu_m\left(L_0^{-1}d_m\right)\right)=\mu_m\left(L_0^{-1}f\right) \end{cases} \tag{11}$$

Енді белгісіз $\mu_i(y)$ - функцияларын табу үшін Крамер әдісін пайдаланамыз:

$$\Delta=\begin{pmatrix} 1-\lambda\mu_1\left(L_0^{-1}d_1\right) & -\lambda\mu_1\left(L_0^{-1}d_2\right) & \cdots & -\lambda\mu_1\left(L_0^{-1}d_m\right) \\ -\lambda\mu_2\left(L_0^{-1}d_1\right) & 1-\lambda\mu_2\left(L_0^{-1}d_2\right) & \cdots & -\lambda\mu_2\left(L_0^{-1}d_m\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda\mu_m\left(L_0^{-1}d_1\right) & -\lambda\mu_m\left(L_0^{-1}d_2\right) & \cdots & 1-\lambda\mu_m\left(L_0^{-1}d_m\right) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

үшін $|\Delta|\neq 0$ орындалсын, онда жоғарыдағы жүйенің жалғыз ғана шешімі бар болады. Оны табу үшін қосымша $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_m$ – ларды тауып аламыз:

$$\Delta_1=\begin{pmatrix} \lambda\mu_1\left(L_0^{-1}f\right) & -\lambda\mu_1\left(L_0^{-1}d_2\right) & \cdots & -\lambda\mu_1\left(L_0^{-1}d_m\right) \\ \lambda\mu_2\left(L_0^{-1}f\right) & 1-\lambda\mu_2\left(L_0^{-1}d_2\right) & \cdots & -\lambda\mu_2\left(L_0^{-1}d_m\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda\mu_m\left(L_0^{-1}f\right) & -\lambda\mu_m\left(L_0^{-1}d_2\right) & \cdots & 1-\lambda\mu_m\left(L_0^{-1}d_m\right) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

…

$$\Delta_m = \begin{pmatrix} 1-\lambda\mu_1\left(L_0^{-1}d_1\right) & -\lambda\mu_1\left(L_0^{-1}d_2\right) & \cdots & \lambda\mu_1\left(L_0^{-1}f\right) \\ -\lambda\mu_2\left(L_0^{-1}d_1\right) & 1-\lambda\mu_2\left(L_0^{-1}d_2\right) & \cdots & \lambda\mu_2\left(L_0^{-1}f\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda\mu_m\left(L_0^{-1}d_1\right) & -\lambda\mu_m\left(L_0^{-1}d_2\right) & \cdots & \lambda\mu_m\left(L_0^{-1}f\right) \end{pmatrix} \tag{14}$$

Онда $\mu_k = \frac{|\Delta_k|}{|\Delta|}$, осылай $\mu_k -$ функционалдарын тауып, (10) – теңдеуге қою арқылы (7) – теңдеудің (8) – шарттарын қанағаттандыратын $y(x)$ шешімін аламыз:

$$y(x) = \frac{\lambda}{|\Delta|}\sum_{i=1}^{m}|\Delta_i|\left(L_0^{-1}d_i\right)(x) + L_0^{-1}f(x) \tag{15}$$

Теорема 2. (7), (8) есебінің коэффиценттері үшін $|\Delta| \neq 0$ шарты орындалсын. Онда $|T| = \det\left|\sum_{i=1}^{n} A_i + \int_0^1 B(x)dx\right| \neq 0$ болғанда бұл есеп корректілі болады және оның шешімі (15) теңдігі түрінде табылады.

Корректілікке байланысты теоремалар [2] – де келтірілген.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Байбурин М.М. Многоточечные задачи для дифференциального оператора 2-го порядка.//Вестник КарГУ Серия мат. – 2005. –№1. –С.36-40
2. Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К теории расширения и сужения операторов.//Известия АН КазССР Серия физико-математическая. – 1982. –№5. –С.24-26

УДК 517.9

BOUNDEDNESS OF THE HILBERT TRANSFORM ON MARCINKIEWICZ SPACE

Nurken Bekbayev

bekbayevnurken@mail.com

PhD student at Al-Farabi Kazakh National University, Almaty

Supervisor – K.Tulenov

I Preliminaries and introduction

The classical Hilbert transform H (for measurable functions on R) is given by the formula

$$(Hx)(t) = p.v.\frac{1}{\pi}\int_R \frac{x(s)}{t-s}ds \tag{1}$$