$$2 < p_0 \le q_0 \le q_1 \le p_1 \quad \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{p_0}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}; \quad 1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}$$

болсын, онда

$$B_{rs}^{\alpha}(0,1) \quad \hookrightarrow M_{p_0 q_0}^{p_1 q_1}$$

енгізуі болады.

Теорема 4.

$$1 < p_0 < p_1, \ 1 < q_1 \le q_0, \ \frac{1}{r} - \alpha = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}, \ \frac{1}{s} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0},$$

$$\alpha > \max\left[\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, \ \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{q_0} - \frac{1}{p_0}, \ \frac{1}{2} - \frac{1}{p_0}\right]$$ болсын.

Онда келесі енгізу орындалады

$$B_{rs}^{\alpha}(0,1) \hookrightarrow M_{p_0 q_0}^{p_1 q_1}.$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Бирман М.Ш., Соломяк М.З., Количественный анализ в теоремах вложения Соболева приложение к спектральной теории // -В: X мат. школа, Киев. Т. 1974.
2. Эдельштейн С.Л. Ограниченность свертки в $L_p(Z_m)$ и гладкость символе оператора // Мат. заметки, 1977. Т. 22. №. 6. С. 873-884.
3. Hirshman I.I. On multiplier transformations. // Duke math. J., 1959. Vol. 26. P.221-242.
4. Jumabayeva A., Smailov E., Tleukhanova N. On spectral properties of the modified convolution operator // J. Inequal. Appl., 2012. Vol. 146. P. 15.

УДК 519.63

Т«А»ФТ НЕГІЗІНДЕ ДИСКРЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ЖУЫҚ ШЕШІМДЕРІ

Байұзақ Нұрлан Байұзақұлы

nura_b96@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 2-курс магистранты, Нұр-Сұлтан қаласы, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі –PhD Ғ.Е.Тауғынбаева

Фурье түрлендіруі негізінен француз физигі әрі математигі Жан Батист Фурье (1768-1830) құрметіне аталған. Ол өзінің математикалық жаңалықтары мен оны практикада тиімді қолдана алған қабілеті үшін де үлкен құрметке лайықты. 1802 жылы Фурье қатты денелердегі жылудың таралу заңдылығын сипаттайтын теңдеуді ашқан. Ал, 1807 жылы осы теңдеуді шешу үшін «Фурье түрлендіруі» деп аталып кеткен әдісті ашқан. Бұл теория екі жүз жыл бұрын дамыған және де қазіргі уақытта толығымен қолданысқа орныққан.

Жылдам Фурье түрлендіруін алғаш Дж.Кули мен Дж.Тьюки өздерінің мақаласында жазғаннан. Бұл мақала есептеуіш техниканың жылдам дамып келе жатқан уақытында шыққан.

Бұның өзі ерекше мәнге ие. Аталған осы уақытта көптеген мәселелер электрондық есептеуіш машиналар (ЭЕМ) көмегімен шешіле бастаған еді. 1965 жылы осы мақала шыққан уақытта, жылдам есептеуіш компьютерлерге қойылған тапсырмалар көбейе бастады.

Бұл сигналдарды аналогтық құрылғылардың көмегімен емес, тек сандық әдістермен жетілдіруге болады деген сөз. Осылайша, сигналдарды жақсы өңдейтін, жылдам жұмыс жасайтын алгоритм керек болды. Дискретті Фурье түрлендіруінің есептеу жылдамдығы N^2 болатын. Енді одан да жылдам есептейтін алгоритм керек. Осы тұрғыда Кули мен Тьюки есептеу жылдамдығы $N\log N$ элементар арифметикалық операцияға тең болатын жаңа алгоритмді шығаруы өте тиімді болып табылды. Есептеу жылдамдығы N^2-тан $N\log N$-ге дейін төмендеген жаңа алгоритм осылай шықты.

Сонымен қатар, Кули-Тьюкиге дейін бұл түрлендіруге ұқсас амалдар жариялынымға шыққан екен. Олардың қатарында Рунгенің, Кенингтің жұмыстары да бар. Олардың жұмыстары да есептеудің жылдамдығын арттыру үшін және есептеу қателігін бақылауға арналған.

Осылайша, тарихқа тоқталғаннан кейін алгоритмнің өзіне көшейін. Алдымен, $s=1$ бастапқы жағдайды қарастырамыз. Біз қызығып отырған бұл алгоритмнің негізгі идеясы, оның құрастырылуында бізге қажетсіз артық амалдарды оның қасиеттерін қолдана отырып алып тастау, жою және есепті тура жолмен шешу болып табылады. ДФТ алгоритмін тиімді қолданудың төрт әдісі белгілі. Оның бастапқы екеуі дискретті Фурье түрлендіруін бірнеше берілгенінен кіші бөлікке бөліп, есепті жеңілдетіп есептеу. Үшінші әдісі дискретті Фурье түрлендіруінің операторын, яғни матрицаны сирек кездесетін факторларға жіктеп, оны өңдеу операторын факторлау болып табылады. Төртіншісі, ДФТ-ны үйірткі немесе фильтрация ретінде бастапқы ұзындығындағы ДФТ циклдік үйірткіге айналдыру арқылы есепті жеңілдетіп шешу. Осыларға қосымша, тағы да бір әдіс соңғы уақытта қолданысқа ие. Бұл әдіс бойынша ДФТ-ін рекурсия жүргізу арқылы ұзындығы бастапқы ұзындығынан екі есе қысқа болатын ДФТ-ларға бөледі. Одан кейін, алынған екі ДФТ-ны тағы да рекурсия көмегімен қақ екіге бөліп, төрт ДФТ алады және осылай жалғастыра беріп, әр пайда болған ДФТ-ларды бөлшектеу арқылы бастапқы ДФТ-ның мәнін табуға болады.

Келесі көпөлшемді индекстерді бейнелеу алгоритмін қысқаша айта кетейін. Бұл алгоритм тиімділігі үлкен мәселелерді бірнеше кішкене мәселеге жіктеу арқылы шешуде. Ұйытқы мен ДФТ-ны бұл әдіспен жіктеуде бірөлшемді есептерді бастапқы берілген көпөлшемді есептерге сәйкестендіру үшін айнымалылардың индекстік сызықты өзгеруін қолданамыз. Бұл амал Кули-Тьюкидің ЖФТ, Виноградовтың Фурье түрлендіруі алгоритмін және жылдам Фурье түрлендіруінің қарапайым коэффициенттік алгоритмін алудың негізгі жолдарын көрсетеді. Осыларға қосымша, бұл әдіс үйірткіні бірнеше кіші үйірткілерге бөлу мақсатында да қолданыс тапқан.

Дискреттік Фурье түрлендіруі – сигналдардың сандық өңделуі алгоритмі үшін және дискретті сигналдардағы жиіліктерге анализ жасау үшін толығымен қолданылатын Фурье түрлендіруінің бір түрі. Бұның кіріс сигналы дискретті сигнал болып табылады. Бұндай функциялар әлбетте диретизациялау арқылы (үзіліссіз функциялардың кей мәндерін біз таңдап аламыз) алынады. Бұл ДФТ дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешуге және үйірткі сияқты операцияларды орындау үшін көп көмектеседі. Осыған қоса, бұл статистикада жиіліктік және уақыттық қатарларға анализ жасауда белсенді түрде қатысады [1-6].

Ерекше емес бүтін санды $s\times s$ өлшемді d матрицасы берілсін және N_d нүктелі $\{f_k\}_{k\in Z^s/d'}$ ақырлы сандық тізбегі берілсін, мұндағы «'» - транспонирлеу белгісі.

Анықтама. Дискретті «алгебралық» Фурье түрлендіруі (Д«а»ФТ) деп

$$f_m = \frac{1}{N_d} \sum_{k \in Z^s/d'} f_k W_d^{m,k}$$, мұндағы $W_d^{m.k} = e^{-2\pi i \left(m, k \left(d' \right)^{-1} \right)}$ $\left(m \in Z^s / d \right)$

түрлендіруі аталады.

Жылдам «алгебралық» Фурье түрлендіруі N^2 амалынан аз амал орындай отырып дискретті Фурье түрлендіруін жылдам есептеуге арналған алгоритм

[1] -де Tf ретінде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = -(-L)^p u(t,x), \; t > 0, x \in [0,1]^s, \tag{1}$$

$$u(0,x) = f_1(x) \in F_1, \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) \Big|_{t=0} = f_2(x) \in F_2, x \in [0,1]^s, \tag{2}$$

есебінің $u(t, x, f_1, f_2)$ шешімін бастапқы шарттарының нүктелердегі мәндері бойынша (1)-(2) есебінің шешімін дискретизациялау есебі қарастырылады, мұндағы p -оң бүтін сан, $L = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ коэффициенттері $A = (a_{ij})$ болатын оң анықталған екінші ретті дифференциалдық оператор,

$$D_N = \bigcup_{N_1 + N_2 = N} \left\{ \left(l^{(N_1, N_2)}, \varphi_N \right) : l_k^{(j_k)}(f_k) = f_k\left(\xi_{j_k}^{(k)} \right), j_k = 1, 2, \ldots, N_k, k = 1, 2 \right\} \equiv P_N \times \{\varphi_N\}.$$

Егер $p = 1$ болса, онда $L = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ Лаплас операторын береді. Осы толқындық теңдеу үшін [2] жұмысындағы толқындық теңдеудің шешімін дискретизациялау есебі қойылған.

Егер (2) бастапқы шарттары $f_k(x) = \sum_{m \in Z^s} f_k(m) e^{2\pi i (m,x)}$ $(k = 1, 2)$ абсолютті жинақталатын Фурье қатары түрінде жазылса, онда (1) теңдеуінің $[0, +\infty) \times [0,1]^S$ жиынында $u(t, x)$ шешімі

$$u(t,x) = \sum_{m \in Z^s} \left\langle \rho_m(t), \hat{f}(m) \right\rangle e^{2\pi i (m,x)}$$

түрінде жазылады, бұл жерде $\left([m, m] = mAm^T \right)$

$$\rho_m(t)=\left(\rho_m^{(1)}(t),\rho_m^{(2)}(t)\right)=\begin{cases}\left(\cos\left(\left(2\pi\sqrt{[m,m]}\right)^p t\right),\dfrac{\sin\left(\left(2\pi\sqrt{[m,m]}\right)^p t\right)}{\left(2\pi\sqrt{[m,m]}\right)^p}\right), егер\, m\neq 0\\ (1,t), егер\, m=0\end{cases}$$

$$\hat{f}(m)=\left(\hat{f}_1(m),\hat{f}_2(m)\right)^T.$$

Теорема. *Толқындық теңдеудің шешімін жуықтап есептеуге арналған*

$$\bar{\varphi}_N\left(f_1(\sigma_1),\dots,f_1(\sigma_N);f_2(\sigma_1),\dots,f_2(\sigma_N),t,x\right)=$$

$$\bar{\varphi}_N^{(1)}\left(f_1(\sigma_1),\dots,f_1(\sigma_N);t,x\right)+\bar{\varphi}_N^{(2)}\left(f_2(\sigma_1),\dots,f_2(\sigma_N);t,x\right),$$

$$\bar{\varphi}_{N_j}^{(j)}\left(f_j(\sigma_1),\dots,f_j(\sigma_N);t,x\right)=\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_l\geq 0,\|\nu\|_1<q}}\frac{1}{2^q}\sum_{\substack{k_l=0,\dots,2^{\nu_l}-1:\\ l=1,\dots,s}} f_j\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\sum_{\substack{m:2^{\nu_l-1}\leq|m_l|<2^{\nu_l}\\ l=1,\dots,s}}\rho_m^{(j)}(t)e^{2\pi i\sum_{l=1}^{s}m_l\left(x_l-\frac{k_l}{2^{\nu_l}}\right)},$$

$$\{\sigma_k\}_{k=1}^N\equiv\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right),\ k_l=0,1,\dots,2^{\nu_l}-1,l=1,\dots,s;\|\nu\|_1\leq q\right\}\left(N\succ\prec 2^q q^{s-1}\right)$$

- *тиімді жуықтау агрегатын* $\succ\prec N(\ln N)^2$ *көбейту амалдарын қолданып есептеуге болады.*

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1 Drmota M., Tichy R.F. Sequences, Discrepancies and Applications// Lect. Notes Math.- Berlin. Springer: 1997.- Vol. 1651.

2 Н. Темиргалиев, К. Е. Шерниязов және М. Е. Берикханова, «Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье,» Совр. пробл. матем., 1 номері17, p. 179– 207, 2013.

3 Ж. Н. Темиргалиева, Н. Темиргалиев, “Быстрые “алгебраические” преобразования Фурье на равномерно распределенных сетках”, Изв. вузов. Матем., 2016, 5, 93–98 ; Zh. N. Temirgaliyeva, N. Temirgaliyev, “Rapid “algebraic” Fourier transforms on uniformly distributed meshes”, Russian Math. (Iz. VUZ), 60:5 (2016), 81–85

4 В. А. Желудев, Периодические сплайны и быстрое преобразование Фурье, Ж. вычисл. матем. и матем. физ.,1992, том 32, номер 2, 179–198

5 А. М. Чеботарёв, Быстрое преобразование Фурье в задаче с кратными узлами, Ж. вычисл. матем. И матем. физ., 1988, том 28, номер 2, 278–281

6 А. С. Джюгис, Быстрое преобразование Фурье по нечетным косинусам, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1989, том 29, номер 1, 125–127