Список использованных источников

1. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича, Москва (1978).
2. Guliyev V., Deringoz F. Boundedness of fractional maximal operator and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces. // Complex Analysis and Operator Theory, 2014, P.1-23.

УДК 519.632.4

ПУАССОН ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМДЕРІН ДИСКРЕТИЗАЦИЯЛАУ ЕСЕБІНДЕГІ ДӘЛ ЕМЕС АҚПАРАТТЫҢ ШЕКТІК ҚАТЕЛІКТЕРІ

Алдиярова Жансая Сұлтанбекқызы

ibragim96.15@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ ММФ, Математика мамандығының 2-курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі - Жұбанышева Ақсауле Жанбыршиевна, доцент, PhD

Мақала Пуассон теңдеуінің шешімдерін дәл емес ақпарат бойынша Компьютерлік (есептеуіш) диаметр (К(Е)Д) мәнмәтінінде дискретизациялау есебіне арналған. Алдымен К(Е)Д есебінің қойылымына тоқталайық ([1] мақаласында К(Е)Д есебінің толық формулировкасы, тарихи мағлұматтар, басқа жуықтау есептерімен байланыстары келтірілген) . К(Е)Д есебіндегі негізгі анықтаманы келтірейік

$$\delta_N\left(\varepsilon_N; D_N\right)_Y \equiv \delta_N\left(\varepsilon_N; A, B; F; D_N\right)_Y \equiv$$
$$\equiv \delta_N\left(\varepsilon_N; A, B = B^{(1)} \times B^{(2)} \times \ldots \times B^{(k)}; F = F^{(1)} \times \ldots \times F^{(k)}; D_N\right)_Y \equiv$$
$$\equiv \min_{N = N_1 + \ldots + N_k} \inf_{\left(l^{(N_1,\ldots,N_k)}, \varphi_N\right)_Y} \left(\delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N_1,\ldots,N_k)}, \varphi_N\right)\right)\right)_Y,$$

мұндағы

$$\delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N_1,\ldots,N_k)}, \varphi_N\right)\right)_Y \equiv \delta_N\left(\varepsilon_N; A, B \equiv B^{(1)} \times \ldots \times B^{(k)}; F \equiv F^{(1)} \times \ldots \times F^{(k)}; \left(l^{(N_1,\ldots,N_k)}, \varphi_N\right)\right)_Y \equiv$$
$$\equiv \sup_{\substack{f_1 \in F^{(1)}, \ldots, f_k \in F^{(k)} \\ \left|\gamma_{N_j}^{(\tau)}\right| \le 1 \left(\tau = 1, \ldots, N_j\right) \\ j = 1, \ldots, k}} \left\| u(y; f_1, \ldots, f_k) - \varphi_N\left(l_{N_1}^{(1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(1)} \varepsilon_{N_1}^{(1)}, \ldots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(N_1)} \varepsilon_{N_1}^{(N_1)}, \ldots, l_{N_k}^{(N_k)}(f_k) + \gamma_{N_k}^{(N_k)} \varepsilon_{N_k}^{(N_k)}; y\right) \right\|_Y .$$

Мұнда *математикалық модель* $Tf=(Tf)(y)=u(y,f)\equiv u(y,f_1,...,f_k)$ операторы арқылы беріледі, ал $A\equiv A\left(y=(y_1,...,y_n),\frac{\partial u}{\partial y_1},...,\frac{\partial u}{\partial y_n},..,\frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}u}{\partial y_1^{\alpha_1}...\partial y_n^{\alpha_n}}\right)=0$ ($\alpha_j\,(j=1,...,n)$ - теріс емес бүтін сандар) дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің шешімі, $B\equiv B^{(1)}\times...\times B^{(k)}$ дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің бастапқы, шекаралық, аралас және басқада шарттары, $F\equiv F^{(1)}\times...\times F^{(k)}$ - функциялар класы, Y - Ω_F және Ω_Y кеңістіктерінде берілген нормаланған кеңістік, $f\in F\Leftrightarrow f=(f_1,...,f_k)\in F^{(1)}\times...\times F^{(k)}$.
$l_1^{(1)}(f_1),...,l_1^{(N_1)}(f_1);...;l_{N_k}^{(1)}(f_k),...,l_{N_k}^{(N_k)}(f_k)$ сандық мәліметтері $f=(f_1,...,f_k)$ функциясы арқылы $N=N_1+...+N_k\,(N=1,2,...)$ көлемді F класынан $l^{(N)}=l^{(N_1,...,N_k)}=(l_1,..,l_N)$ (жалпы жағдайда сызықты болу міндетті емес) сызықтық функционалдары арқылы алынады. $\varphi_N(z_1,...,z_N;y):C^N\times\Omega_Y\mapsto C$ мәліметтерді өңдеу алгоритмі әрбір бекітілген $(z_1,...,z_N)\in C^N$ үшін Y-тен алынған функция ретінде y элементі анықталады.

Жоғарыда келтірілген түсініктер мен анықтамалардың аясында К(Е)Д есебі төмендегі үш есепті тізбектеп шешуден тұрады ($A<<B$ және $A>>B$ жазбалары сәйкесінше $|A|\le cB$ және $A<<B$ және $A>>B$ бір уақытта орындалатындығын білдіреді):

К(Е)Д-1: $D_N\equiv D_{N_1...N_k}(F)_Y$ - есептеу агрегаттар жиынтығының ақпараттық қуатының $\succ\prec\delta_N(0;D_N)_Y\equiv\delta_N(0;A,B;F;D_N)_Y$ реті анықталады.
К(Е)Д-2: $\succ\prec\delta_N(0;D_N)_Y$ ретін сақтайтын $D_N\equiv D_{N_1...N_k}(F)_Y$ алынған $\left(\bar{l}^{(N_1,...,N_k)},\bar{\varphi}_N\right)$ есептеу агрегаты үшін төмендегі екі шартты қанағаттандыратын $\bar{\varepsilon}_N\equiv\bar{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N_1,...,N_k)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y\equiv\left(\bar{\varepsilon}_N^{(1)},...,\bar{\varepsilon}_N^{(N)}\right)$ теріс емес тізбегінің бар болу және оны құру есебі қарастырылады:

$$\delta_N(0;D_N)_Y\succ\prec\delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N;(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N)\right)_Y\equiv$$
$$\equiv\sup\left\{\left\|u(y;f)-\bar{\varphi}_N(z_1(f),...,z_N(f);y)\right\|_Y:f\in F,\left|\bar{l}_\tau(f)-z_\tau(f)\right|\le\bar{\varepsilon}_N^{(\tau)}(\tau=1,...,N)\right\}$$

сонымен қатар

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty\left(0<\eta_N<\eta_{N+1},\eta_N \to +\infty\right):\ \overline{\lim_{N\to+\infty}}\, \delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N;(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N))_Y / \delta_N(0;D_N)_Y = +\infty$$

К(Е)Д-3: $\bar{\varepsilon}_N(D_N;(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N))_Y$ шектік қателігінің массивтілігі орнатылады: $M_N(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N)$ жиынында жататын әрбір $(l^{(N)},\varphi_N)$ есептеу агрегаты үшін

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty\left(0<\eta_N<\eta_{N+1},\eta_N \to +\infty\right):\ \overline{\lim_{N\to+\infty}}\, \delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N;(l^{(N)},\varphi_N))_Y / \delta_N(0;D_N)_Y = +\infty$$

орындалатындай мейлінше үлкен $M_N(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N)$ есептеу агрегаттар жиыны құрылады.

Енді осы мақалада қарастырылатын К(Е)Д есебінің конкретизациясын берейік. Мақалада қарастырылатын математикалық модель - Пуассон теңдеуі ($s=1,2,\ldots$):

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}=f,\ u=u(x),\quad f=f(x),\quad x=(x_1,\ldots,x_s). \qquad (1.1)$$

Мұндағы $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$ Коробов E_s^r, $r>1$, $s=1,2,\ldots$ класында жататын функциялар, яғни әр s айнымалысы бойынша бір периодты, тригонометриялық Фурье коэффициенті

$$\hat{f}(m)=\int_{[0,1]^s} f(x)e^{-2\pi i(m,x)}dx$$

келесі шартты қанағаттандыратын

$$|\hat{f}(m)|\le \left(\bar{\bar{m}}\right)^{-r},\ \bar{m}_j=\max\{1;|m_j|\},\quad j=1,\ldots,s,\ \bar{\bar{m}}=\bar{m}_1\ldots\bar{m}_s$$

функциялар жиыны.

Жуықтау қателігі Лебег $L^p\left([0,1]^s\right)$ кеңістігінде өлшенеді, яғни $[0,1]^s$–де өлшемді,

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L^p(E)}=\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

нормалары ақырлы болатын эквивалентті функциялар жиынында өлшенеді.

Егер $f \in E_s^r (r > 1)$ және $\hat{f}(0) \neq 0$ шарты орындалса (мысалы, [2]-ні қараңыз) , онда (1.1) есебі үшін кез келген шекаралық шарттарда

$$u_\omega(x, f) = \omega(x) \cdot \hat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s}{}^{*} \frac{\hat{f}(m)}{(m,m)} e^{2\pi i (m,x)} \tag{1.2}$$

функциясы (1.1) есебінің шешімі болатындай $[0,1]^s$ сегментінде үзіліссіз, шекаралық шарттарға тәуелді, $\Delta\omega \equiv 1$ қанағаттандыратын $\omega(x)$ функциясы табылады. Және керісінше, (1.2) түріндегі кез келген жеткілікті тегіс функция $[0,1]^s$ -те (1.1) теңдеуін қанағаттандырады.
Егер $f(x_1, x_2, ..., x_s)$ функциясы әрбір s айнымалысы бойынша тақ болса, онда

$$u_\omega(x, f) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s}{}^{*} \frac{\hat{f}(m)}{(m,m)} e^{2\pi i (m,x)}$$

функциясы $[0,1]^s$ -те нөлдік шекаралық шартын қанағаттандыратын, Пуассон теңдеуіне арналған Дирихле есебінің шешімі болады ([3, 187 б.] қараңыз).
[2] мақаласында (1.1) есебінің шешімінің дискретизациясын Пуассон теңдеуінің оң жағындағы f функциясының нүктедегі мәні бойынша алынған ақпарат негізінде жуықтау қарастырылған. Атап айтқанда, К(Е)Д есебінің келесі конкретизациясы қарастырылады: F -Коробов класы E_s^r, $\Omega = \Omega_1 = [0,1]^s$, $Y = L^2(0,1)^s$, $\{\xi_j\}_{j=1}^N$ - Смоляк торы ([4],[5] қараңыз)

$$\left\{ \left(\frac{2\mu_1 - 1}{2^{\nu_1}}, \frac{2\mu_2 - 1}{2^{\nu_2}}, ..., \frac{2\mu_{s-1} - 1}{2^{\nu_{s-1}}}, \frac{\mu_s}{2^{\nu_s}} \right) : \begin{array}{c} 1 \le \mu_j \le \max\{1; 2^{\nu_j - 1}\}, \nu_j \ge 0,\ j = 1,2,...,s-1, \\ 1 \le \mu_s \le 2^{\nu_s},\ \sum\limits_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{s}} \nu_{\mathrm{j}} = q \end{array} \right\}$$

және дискретизациялау операторы

$$(Jf)(x) = \omega(x) \sum_{(\nu_1,...,\nu_s) \in \Omega_{(\nu(0),q)} \subset Z^s_{\nu(0)}} \frac{1}{2^{\nu_1 + ... + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} ... \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s} (k_j - 1) \operatorname{sgn}(\nu_j - \nu_j(0))} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, ..., \frac{k_s}{2^{\nu_s}} \right) -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in V_q}{}^{*} \frac{1}{(m,m)} e^{2\pi i (m,x)} \sum_{(\nu_1,...,\nu_s) \in \Omega_{(\nu(m),q)} \in Z^s_{\nu(m)}} \frac{1}{2^{\nu_1 + ... + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} ... \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s} (k_j - 1) \operatorname{sgn}(\nu_j - \nu_j(m))} \times$$

(1.3)

$$\times f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)e^{-2\pi i(m,\frac{k}{2^{\nu}})},$$

мұндағы $V_q=\left\{(m_1,...,m_s)\in Z^s:1\le \bar{m}_1 ... \bar{m}_s \le 2^q\right\}, q>0$.

Сәбит Кудайбергенов және Светлана Сабитова [2] мақаласында оң жағы Коробов класында жататын Пуассон (1.1) теңдеуінің шешімін (1.3) операторымен дәл ақпарат бойынша жуықтау есебін қарастырып, келесі бағалаулар алды.

Теорема A ([2] қараңыз). $s(s=2,3,...)$, $r>1$ және $2\le p\le\infty$ сандары берілсін, онда

$$\frac{1}{N^r} << \Delta_N\left(u_\omega, Jf, E_s^r\right)\equiv$$

$$\equiv \sup_{f\in E_s^r}\left\|u(x,f)-(Jf)(x)\right\|_{L^q(0,1)^s} << \begin{cases}\dfrac{(\ln N)^{(s-1)\left(r+\frac{2}{s}\right)}}{N^r}, & 1-\dfrac{1}{q}-\dfrac{2}{s}<0,\\ \dfrac{(\ln N)^{(s-1)\left(r+\frac{2}{s}\right)}}{N^{r-\left(1-\frac{1}{q}-\frac{2}{s}\right)}}, & 1-\dfrac{1}{q}-\dfrac{2}{s}>0,\\ \dfrac{(\ln N)^{r(s-1)+2s-1-\frac{s}{q}}}{N^r}, & 1-\dfrac{1}{q}-\dfrac{2}{s}=0.\end{cases}$$

Мақалада $p=2$ жағдайында оң жағы Коробов класында жататын Пуассон (1.1) теңдеуінің шешімін (1.3) операторымен дәл емес ақпарат бойынша жуықтау есебінде К(Е)Д-2 есебінің бірінші бөлігі шешілді.

Теорема. $s\ (s=2,3,...)$, $r>1$ және $p=2$ сан мәндері берілсін, онда

$$\varepsilon_N \succ\prec \begin{cases}\dfrac{(\ln N)^{(s-1)\left(r+\frac{1}{2}\right)}}{N^r}, & s<4,\\ \dfrac{(\ln N)^{(s-1)\left(r-\frac{1}{2}+\frac{2}{s}\right)}}{N^{\left(r-\frac{1}{2}+\frac{2}{s}\right)}}, & s>4,\\ \dfrac{(\ln N)^{3r+4}}{N^r}, & s=4.\end{cases}$$

тізбегі үшін келесі жоғарыдан бағалауы орындалады

$$\Delta_N\left(u_\omega, Jf, E_s^r\right)_{L^2(0,1)^s} \equiv \sup_{\substack{f\in E_s^r \\ \bar{\gamma}=\left(\gamma_N^{(1)},\dots,\gamma_N^{(N)}\right) \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1, (\tau=1,\dots,N)}} \left\| u_\omega(\cdot, f) - \left(J\left(f + \bar{\gamma}\,\varepsilon_N \right)\right)\right\|_{L^2}$$

$$<< \begin{cases} \dfrac{(\ln N)^{(s-1)\left(r+\frac{2}{s}\right)}}{N^r}, & s<4, \\ \dfrac{(\ln N)^{(s-1)\left(r+\frac{2}{s}\right)}}{N^{r-\frac{1}{2}+\frac{2}{s}}}, & s>4, \\ \dfrac{(\ln N)^{3r+5}}{N^r}, & s=4. \end{cases}$$

Мұндағы $J(f+\varepsilon_N\gamma_N)(x)=$

$$=\omega(x)\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in\Omega_{(\nu(0),q)}\subset Z^s_{\nu(0)}} \frac{1}{2^{\nu_1+\dots+\nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\dots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}(-1)^{\sum_{j=1}^{s}(k_j-1)\operatorname{sgn}(\nu_j-\nu_j(0))}\left(f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)+\varepsilon_N\gamma_N\right)-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in V_q}^{*}\frac{1}{(m,m)}e^{2\pi i(m,x)}\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in\Omega_{(\nu(m),q)\in Z^s_{\nu(m)}}}\frac{1}{2^{\nu_1+\dots+\nu_s}}\times$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\dots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}(-1)^{\sum_{j=1}^{s}(k_j-1)\operatorname{sgn}(\nu_j-\nu_j(m))}\left(f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)e^{-2\pi i\left(m,\frac{k}{2^\nu}\right)}+\varepsilon_N\gamma_N\right).$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика.Механика. -2018. -Т. 124. - No3. -С. 8-88.
2. Кудайбергенов С.С, Сабитова С.Г. О дискретизации решений уравнения Пуассона на классе Коробова // Ж.вычисл.матем. и матем. физ. -2013. -Т.53. -№7. -С.1082-1093.
3. Коробов Н.М. Теоретико:числовые методы в приближенном анализе. -М.: Физматгиз, 1963 (Изданиевторое, переработанное и дополненное. -М.: МЦНМО, 2004).
4. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций// Докл. АН СССР. -1963. -Т. 148. -№5. -С.1042-1045.

5. Naurizbayev N., Temirgaliyev N. An exact order of discrepancy of the Smolyak grid and some general conclusions in the theory of numerical integration // Found Comput Math. -2012. –Vol. 12. –P. 139-172.

УДК. 517.51

КОПСОН ЖӘНЕ ЛЕЙНДЛЕР ТИПТІ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Аманжанова Айгерим Какембаевна
aigerim_amanzhanova@mail.ru
Ешмағамбетова Нұргүл Сұлтанқызы
ademi_laif@list.ru
Механика-математика факультетінің магистранттары
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Ж.Б. Муканов

[1]-де Копсон және Лейндлер теңсіздіктер типті келесі теңсіздіктер дәлелденген.

Теорема А. $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ - өспейтін теріс емес нақты сандар тізбегі болсын, $\alpha > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Онда

(1) $1 \le \rho < \infty$ және $m \ge 16n$ үшін келесі теңсіздіктер орындалады:

$$\sum_{\mu=n}^{m} \mu^{\alpha-1} \left(\sum_{\nu=\mu}^{m} a_\nu \nu^\lambda \right)^p \ge C_1 \sum_{\mu=8n}^{m} \mu^{\propto-1} \left(a_\mu \mu^{\lambda+1} \right)^p, \tag{1}$$

$$\sum_{\mu=n}^{m} \mu^{-\alpha-1} \left(\sum_{\nu=n}^{\mu} a_\nu \nu^\lambda \right)^p \ge C_2 \sum_{\mu=4n}^{m} \mu^{-\propto-1} \left(a_\mu \mu^{\lambda+1} \right)^p, \tag{2}$$

(2) $0 < \rho \le 1$ және $m \ge 4n$ үшін келесі теңсіздіктер орындалады:

$$\sum_{\mu=4n}^{m} \mu^{\alpha-1} \left(\sum_{\nu=4n}^{\mu} a_\nu \nu^\lambda \right)^p \ge C_3 \sum_{\mu=n}^{m} \mu^{\propto-1} \left(a_\mu \mu^{\lambda+1} \right)^p, \tag{3}$$

$$\sum_{\mu=4n}^{m} \mu^{-\alpha-1} \left(\sum_{\nu=\mu}^{m} a_\nu \nu^\lambda \right)^p \ge C_4 \sum_{\mu=n}^{m} \mu^{-\propto-1} \left(a_\mu \mu^{\lambda+1} \right)^p, \tag{4}$$

мұндағы C_i , $\mathrm{i} = 1,2,3,4$, тұрақтылары ρ, α, λ-дан тәуелді.

(1) - (4) теңсіздіктері сияқты теңсіздіктер гармоникалық анализ бен жуықтау теориясында қолданылады. Атап айтқанда, (1)-(4) теңсіздіктері алдыңғы [2] жұмысында тегіс функциялар кеңістігінде жататын функциялардың нормаларын сипаттау үшін қолданылды.

Осы жұмыста біз (1)-(4) теңсіздіктері әлсіз монотонды тізбектердің неғұрлым кең класында [3] орындалатының дәлелдедік.

Анықтама 1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі әлсіз монотонды деп айтамыз, егер

$$|a_k| \le C|a_n|, \qquad n \le k \le 2n.$$