**Б. Рысбайулы, А.Т. Байманкулов**

# Ограниченность приближенного значения коэффициента влагопроводности почвы в процессе перенос тепла и влаги

*( Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы)*
*(Костанайский государственный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай)*

Изучается движение влаги температуры в ненасыщенном грунте. Задается влага и температура на поверхности земли. Для того чтобы определить коэффициент диффузии почвенной воды составляются прямая и сопряженная задачи. Доказывается ограниченность коэффициента влагопроводности почвы.

**1 Постановка задачи**.

Движение воды в капиллярно-пористых средах, к каковым относятся почвы, может происходить под воздействием самых разнообразных движущих сил, представляющих градиент давления, потенциала гравитационного поля, потенциала электрического поля, температуры, концентрации растворенных веществ [1-4]. Нерпин С.В. [5], проведя классификацию механизмов движения воды в дисперсных средах, предполагает, помимо движущихся сил, различать силы по месту их действия в потоке, когда они распределены внутри объема потока, или вызваны поверхностными силами на границе "жидкость-воздух", или обусловлены силами, возникающими вблизи границы жидкости с твердой стенкой. Поэтому, принимая это обстоятельство во внимание и решая относительно простую задачу, предполагающую: отсутствие электрического поля и постоянство концентрации рассмотренных веществ, движение влаги и температуры в области $Q = (0, H) \times (0, T)$ можно уравнением [6]

$$\gamma_0 = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}\Big|_{z=H} + \overline{\alpha}(\theta - T_b(t))\Big|_{z=H} = 0, \theta\Big|_{z=0} = T_1, \theta\Big|_{t=0} = \theta_0(z), \tag{2}$$

где $\overline{\alpha} = \alpha + \alpha_0 D_n(H)$.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K(z) + D\frac{\partial W}{\partial z} + D\mu\frac{\partial \theta}{\partial z}\right), \tag{3}$$

$$\sigma\Big|_{z=H} = A(t), \sigma\Big|_{z=H} = 0, W\Big|_{t=0} = W_0(z), \tag{4}$$

здесь $\sigma(z,t) = K(z) + D(z)\frac{\partial W}{\partial z} + D(z)\mu\frac{\partial \theta}{\partial z}$.

Используя изменение температуры грунта и влаги на поверхности земли $T_g(t), W_g(t)$, требуется определить коэффициент диффузии $D(z)$. Методы решения обратных задач изучены в работах /6-9/, а в работах [10-14] изучены различные обратные задачи переноса тепла и влаги. В работе [15] нами получены задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \tag{5}$$

$$D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=H} = 2A_0(W(H,t) - W_g(t)), \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, u(z,T) = 0, \tag{6}$$

$$\gamma_0 C\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \tag{7}$$

$$\left(\alpha\psi + \lambda\frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu D_n(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=H} = 2(\theta(H,t) - T_g(t)), \psi(0,t) = 0, \psi(z,T) = 0 \tag{8}$$

$$\delta D=\beta_n(z)\int_0^T\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)dt+\beta_n(z)\alpha_0\int_0^T(\theta-T_B)\psi\Big|_{z=H}d\tau, \tag{9}$$

Здесь $\delta D=D_{n+1}(z)-D_n(z)$. В настоящей работе доказывается ограниченность приближенного значения коэффициента влагопроводности $D_{n+1}(z), n-0,1,....$

**2 Априорные оценки прямой задачи**

1) Умножим (1) на $\theta(z,t)$ и интегрируем по области $Q_t=(0,H)\times(0,t)$:

$$\int_0^H\int_0^t\gamma_0c\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\theta d\tau dz=\int_0^t d\tau\int_0^H\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\theta dz.$$

Интегрируя по частям и учитывая начально-граничные условия (2) выводится равенство

$$\frac{1}{2}\int_0^H\gamma_0c\theta^2dz+\int_0^t d\tau\int_0^H\lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)dz+\alpha\int_0^t\theta^2(H,\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^H\gamma_0c\theta_0^2(z)dz+\alpha\int_0^t T_b(\tau)\theta(H,\tau)d\tau.$$

Применяя неравенство Коши, получим

**Лемму 1.** Если $\theta_0(z)\in L_2(0,H), T_b(t)\in L_2(0,T)$, и $\gamma_0$, c- ограниченные положительные величины, то для решения задачи (1)-(2) имеет место оценка

$$\frac{1}{2}\int_0^H\gamma_0c\theta^2dz+\int_0^t d\tau\int_0^H\lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)^2dz+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\theta^2(H,t)d\tau\le C_1(1+D_n(H)).$$

**Лемму 2.** Если $\theta_0(z)\in W_2^2(0,H), T_b(t)\in W_2^1(0,T)$, то для решения задачи (1)-(2) имеет место оценка:

$$\max_t\int_0^H\gamma_0c\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)^2dz+\int_0^t d\tau\int_0^H\lambda\left(\frac{\partial t^2\theta}{\partial z\partial t}\right)_2dz+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2_{z=H}d\tau\le C_2(1+D_n(k))$$

.

**Доказательство.** Дифференцируем (1) по $t$, $\gamma_0c\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial t}\right)$. Умножим последнее равенство на $\theta_t'$ и интегрируем по области $Q=(0,H)\times(0,t)$. Интегрируем по частям по преременной $z$ и учитывая граничное условие (2), выводим:

$$\frac{1}{2}\int_0^H\gamma_0c\int_0^t\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2dz+\int_0^t d\tau\int\lambda\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial t}\right)^2dz=-\alpha\int_0^t\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-T_b'\right)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}d\tau+\frac{1}{2}\int_0^H\gamma_0c\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2_{t=0}dz.$$

Отсюда следует утверждение леммы 2. 2) Умножим (3) на $W(z,t)$ и интегрируем по области $Q=(0,H)\times(0,t)$. Применяем формулу интегрирования по частям по переменной $z$. Применяя неравенство Коши при $\epsilon=\frac{1}{2}$ имеем:

$$\frac{1}{2}\int_0^H W^2(z,t)dz+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^H D_n(z)\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2dzd\tau\le\int_0^t\Big|A(\tau)W(H,\tau)\Big|d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^H\frac{K^2(z)}{D_n(z)}dzd\tau+\int_0^t\int_0^H D_n(z)\mu^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2dzd\tau. \tag{10}$$

3) Умножим (1) на $\theta^{2k-1}$ и интегрируем по области $\theta_t=(0,H)\times(0,t)$. Правую часть знака равенство интегрируется по частям и учитывая начально-граничные условия (2) имеем равенство

$$\frac{1}{2k}\int_b^H\gamma_0c\theta^{2k}dz+(2p-1)\int_0^t d\tau\int_b^H\lambda\theta^{2k-1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2dz+\alpha\int_b^t\theta^{2k}(H,\tau)d\tau=$$
$$\alpha\int_b^t(T_b(\tau))\theta^{2k-1}(H,\tau)d\tau+\frac{1}{2k}\int_0^H\gamma_0c\theta_0^{2k}dz.$$

Первый интеграл в правой части знака равенства оценивается неравенствам Гельдера и Юнга. Тогда получается неравенства

$$\max_{t,z}\left|\theta(z,t)\right| \leq \max_{t}\left|\theta_0(z)\right| + \max_{t}\left|(T_b(t))\right|, \max_{t}\left|\theta(H,t)\right| \leq \max_{z}\left|\theta_0(z)\right| + \max_{t}\left|(T_b(t))\right|$$

.

Предполагая, что $k(z) \in C(0,H)$ и применяя неравенство Коши выводится неравенство

$$\int_0^t \left|A(\tau)W(H,\tau)\right|d\tau \leq \int_0^t \frac{A^2(\tau)}{\sqrt{D_{\min}}}d\tau + \frac{1}{4}\sqrt{D_{\min}}\int_0^t W^2(H,\tau)d\tau/$$

Из тожества

$$W^2(,t) = 2\int_0^H W(z,t)\frac{\partial W}{\partial z}dz$$

следует равенство

$$W^2(H,t) \leq \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}\int_0^H W^2(z,t)dz + \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}\int_0^H D_n(z)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 dz.$$

Поэтому

$$\int_0^t \left|A(\tau)W(H,t)\right|d\tau \leq \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}\int_0^t A^2(\tau)d\tau + \frac{1}{4}\int_0^H\int_0^t W^2(z,\tau)dzd\tau + \frac{1}{4}\int_0^t\int_0^H D_n(z)\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 dzd\tau.$$

Усиливая (10), имеем неравенство:

$$\frac{1}{2}\int_0^H W^2(z,t)dz + \frac{1}{4}\int_0^t\int_0^H D_n(z)\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 dzd\tau \leq$$
$$\frac{1}{4}\int_0^H\int_0^t W^2(z\tau)dzd\tau + \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}\int_0^t A^2(\tau)d\tau + C_5\int_0^H\left(D_0(z) + \frac{1}{D_n(z)}\right)dz.$$

Применяя лемму Гронуолла, имеем

**Лемму 3.** Если $K(z) \in C(0,H), T_b(t) \in C(0,T), A(t) \in L_2(0,T), W_0(z) \in L_2(0,H)$, то для решения задачи (3)-(4),имеют место оценки:

$$\int_0^H W^2(z,t)dz + \int_0^t\int_0^H D_n(z)\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 dzd\tau \leq C_3 f(D_n(z))$$

$$\int_0^t W^2(H,\tau)d\tau \leq C_4\frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}f(D_n(z)).$$

Аналогично доказываются утверждения:

**Лемма 4.** Если $W_0(z), \theta_0(z) \in W_2^2(0,H), T_t(t) \in W_2^1(0,T)$,то для решения задачи (3)-(4) имеют место оценка:

$$\max_t \int_0^H \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dz + \int_0^t\int_0^H D_n(z)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial t}\right)^2 dzdt \leq C_5\left(1 + D_{\max} + \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}\right)$$

,

$$\int_0^t \left(\frac{\partial W(H,\tau)}{\partial t}\right)d\tau \leq C_6\left(1 + D_{\max} + \frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}\right)\frac{1}{\sqrt{D_{\min}}}.$$

**Лемма 5.** Если $W_0(z), \theta_0(z) \in W_2^2(0,H), T_b(t), W_g(t) \in W_2^1(0,T)$,то для решения задачи (5)-(6) имеют место оценка:

$$\max_t \left( \int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dz + \int_0^H u^2 dz \right) + \int_0^T \int_0^H D_n(z) \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz d\tau +$$

$$+ \int_0^T \int_0^H D_n(z) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}\right)^2 dz d\tau \leq C_7 \left(1 + D_{\max} + \frac{1}{D_{\min}}\right) \frac{1}{D_{\min}}. \quad (11)$$

**Лемма 6.** Если $W_0(z), \theta_0(z) \in L_2(0,H), T_b(t), W_g(t), T_g(t) \in L_2(0,T)$,то для решения задачи (7)-(8) имеют место оценка:

$$\max_t \int_0^H \psi^2 dz + \int_t^H \int_0^H \lambda \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 dz + \int_t^T \alpha \psi^2(H,\tau) d\tau \leq C_8 f(D_n(z)).$$

**3 Ограниченность коэффициента влагопроводности.**

Обращаемся к формуле (9):

$$D_{n+1}(z) - D_0(z) = \sum_n \beta_n(z) \int_0^T \frac{\partial u}{\partial z} \left( \frac{\partial W}{\partial z} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial z} d\tau + \sum_n \beta_n(z) \alpha_0 \int_0^T \theta(H,\tau) - T_g(\tau)\psi(H,\tau) d\tau \right)$$

Оцениваем эту величину сверху используя неравенство Коши. Тогда

$$\Big| D_{n+1}(z) - D_0(z) \Big| \leq \sum_n \beta_n(z) \int_0^T \Big|\frac{\partial u}{\partial z}\Big| \left( \Big|\frac{\partial W}{\partial z}\Big| + \mu \Big|\frac{\partial \theta}{\partial z}\Big| \right) d\tau +$$

$$+ \sum_n \beta_n(z) \alpha_0 \left( \int_0^T (\theta^2(H,\tau) - T_g(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^T \psi^2(H,\tau) d\tau \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Интегрируем (5) по $z$ от 0 до произвольного z. Тогда.

$$\int_0^z \frac{\partial u}{\partial t} dz + D_n(z) \frac{\partial u}{\partial z} - D_n(0) \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=H} = 0$$

Учитывая граничные условия при $z = 0$ и используя лемму 5 получаем оценку:

$$\max_t \Big|\frac{\partial u}{\partial z}\Big| \leq C_9 \sqrt{1 + D_{\max} + \frac{1}{D_{\min}}} \cdot \frac{1}{D_{\min}^3} \quad (13)$$

Теперь, интегрируем (3) по $z$ от 0 до $z$. Тогда

$$D \frac{\partial W}{\partial z} + D\mu \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(z) = \int_0^z \frac{\partial W}{\partial t} dz$$

Отсюда используя лемму 4, имеем неравенство:

$$\max_t \Big|\frac{\partial u}{\partial z}\Big| \leq C_{10} \sqrt{1 + D_{\max} + \frac{1}{D_{\min}}} \cdot \frac{1}{D_{\min}}. \quad (14)$$

На основе (11), (12) и леммы 6 из (13) выводится соотношение:
$\Big| D_{n+1}(z) - D_0(z) \Big| \leq \sum_n \beta_n(z) \left(1 + D_{\max} + \frac{1}{D_{\min}}\right) \frac{1}{D_{\min}^{3i}} \cdot C_{11}$.

Если $\beta_n(z) \left(1 + D_{\max} + \frac{1}{D_{\min}}\right) \frac{1}{D_{\min}^{3i}} = \frac{\beta}{n^{k_0}}, k_0 > 1$, то получится неравенство:

$$D_0(z) - C_{12}\beta \leq D_{n+1}(z) \leq D_0(z) + C_{12}\beta.$$

Из этого соотношения следует.

**Теорема 1.** Если $\theta_0(z), W_0(z) \in W_2^2(0,H), K(z) \in C(0,H), W_g(t) \in W_2^1(0,T), T_g(t) \in L_2(0,T)$, то подбирая достаточно малую функцию $\beta_n(z)$ из равенство (9) всегда можно получить ограниченность коэффициента влагопроводности, т.е.

$$0 < C_{13} \leq D_{n+1}(z) \leq C_{14} < \infty, n = 1, 2, ...$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Buckingham E. Studies on movement of soil moisture. U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington), 1907, Bull. 38.
2. Richards L.A. Capillary conduction of liguids through medians. - Physics, 1931, vol, 1, p.318-333.
3.Childs E.D. The transport of water through heavy clay soils. I, III. - j.Ag. Sci., 1936, vol. 26.
4. Полубаринова-Кочина П.Я Теория движения грунтовых вод Москва:Наука, - 1977.- 664 с.
5. Неприн С.В. Юзефович Г.И. О расчете нестационарного движения влаги в почве// Докл. ВАСХНИЛ, №6, 1966.
6. Мартынов Г.А. Тепло - и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогиии (мерзлотоведения). - М.: 1959, под. ред. Н.А. Цытович. гл. VI С. 153-192
7. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена-Москва:Машиностроение, 1988.- 280 с.
8. Кабанихин С.И., Бектемисов М.А., Нурсейтова А.Т. Итерационные методы решения обратные и некорректные задач с данными на части гарницы - Алматы-Новосибирск, 2006, 426 с.
9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи.- Новосибирск:Новосибирск, 2009.- 457 с.
10. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений-Алматы:Даур,2007.- 331 с.
11. Рысбайулы Б. Идентификация коэффициента теплопроводности распространения тепла в неоднородной среде//Вестник КБТУ, 2008, №1, С.62-65
12. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Махамбетова Г.И. Обратная задача кондуктивного распространения тепла в неоднородной среде//Вестник НАН РК,2008, №1, С. 11-13
13. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмаилов А.О. Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний//Вестник НАН РК. 2008.-№2.-С. 7-9.
14. Байманкулов А.Т. Определение коэффициента дифузи почвенной воды в однородной среде//Вестник НАН РК.2008.-№2.-С.7-9.
15. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т. Определение коэффициента влагопроводности почвы с учетом изменения температуры // Вестник КБТУ, 2010 (в печати).


**Рысбаұлы Б., Байманкулов А.Т.**

**Жылу мен ылғалды көшіру үрдісіндегі топырақтың ылғалөткізгіштік коэффициентін жуықтап есептеудің шектеулігі**

Қанықпаған топырақтағы ылғал мен температура қозғалысы қарастырылады. Жер бетіндегі ылғал мен температура беріледі. Топырақ суының ылғалдылық коэффициентін анықтауда тура және түйіндес есептер алынады. Топырақтың ылғал өткізгіштік коэффициентінің шектеулі әрі оң болатыны дәлелденеді.

**Rysbaiuly B., Baimankulov A.T.**

**Boundedness of the approximate value of the coefficient of moisture conductivity of the soil in the process of heat and moisture transfer.**

Moisture and temperature movement in a no saturated ground was stud. The moisture and temperature on an earth surface is set. To define factor of diffusion of soil water are made direct and interfaced problems. Proved the limited diffusion factor of soil water.

*Поступила в редакцию 22.04.10*

*Рекомендована к печати 25.05.10*