ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2008, т. 260, с. 202–212

УДК 517.95

Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве

©2008 г. М. Отелбаев[1], А. А. Дурмагамбетов[1], Е. Н. Сейткулов[1]

Поступило в сентябре 2007 г.

Изучается нелинейное операторно-дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, которое является абстрактной моделью для системы уравнений Навье–Стокса. Основной результат состоит в доказательстве теоремы существования сильного решения этого уравнения при условии, что некоторая другая система уравнений (связанная с исходным уравнением) имеет только нулевое решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $p \in (1,\infty)$, $\theta \in (-\infty,+\infty)$, $a \in (0,\infty)$. Далее пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Норму в H будем обозначать через $|\cdot|$, а скалярное произведение через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть $C^\infty(H;0,a)$ — множество бесконечно гладких на $[0,a]$, $a>0$, функций со значениями в H. Пусть A — самосопряженный неотрицательный оператор с вполне непрерывным обратным. Через $H_{p,\theta}[0,a]$ обозначим пространство, полученное пополнением множества $C^\infty(H;0,a)$ по норме

$$|f|_{H_{p,\theta}[0,a]} = \left(\int\limits_0^a \left|A^\theta f(\eta)\right|_H^p d\eta\right)^{1/p}.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$u_t' + Au + B(u,u) = f(t), \qquad u(0)=0, \quad 0<t<a, \tag{1}$$

где $B(u,g)$ — билинейный оператор, а $f \in H_{p,\theta}[0,a]$. Обозначим через $D(A)$ область определения оператора A.

Определение 1. Будем говорить, что задача (1) в $H_{p,\theta}[0,a]$ *сильно разрешима* (*в целом*), если при любом $a>0$ из условия $f \in H_{p,\theta}[0,a]$ вытекает $u'+Au \in H_{p,\theta}[0,a]$, где u — решение задачи (1).

В работе [1] мы рассматривали вопросы сильной разрешимости задачи (1) в случае $p=2$ и $\theta=0$: $H_2[0,a] \equiv H_{2,0}[0,a]$. В указанной работе [1] предполагалось, что A и $B(\cdot,\cdot)$ связаны некоторыми условиями подчиненности преобразования $B(\cdot,\cdot)$ оператору A, а именно требовалось выполнение следующего условия:

$$|(A+E)^{-\gamma}B(u,g)| \le c\left[|(A+E)^{\gamma_0}u|\cdot\left|(A+E)^{\gamma_0+1/2}g\right| + |(A+E)^{\gamma_0}g|\cdot\left|(A+E)^{\gamma_0+1/2}u\right|\right] \tag{2}$$

для всех γ и γ_0, удовлетворяющих соотношениям

$$\gamma_0 = \delta_0 - \frac{\gamma}{2}, \qquad -\infty<\gamma\le\frac{3}{4}, \qquad 0<\delta_0<\frac{1}{2}, \tag{2'}$$

[1]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

где δ_0 — постоянное число, а константа c зависит только от γ. В этой работе мы, помимо условий (2), (2′), предполагаем, что имеет место равенство

$$\langle B(u,g),g\rangle = 0, \tag{3}$$

которое выполняется при любых $u, g \in D(A)$.

В [1] доказана

Теорема A. *Пусть $A \geq E$ и выполнены условия (2), (2′). Тогда задача (1) сильно разрешима в целом тогда и только тогда, когда единственным решением $(w(t), s(t))$ системы уравнений*

$$\begin{cases} -s'(t) + As(t) + B_w^* s(t) = 0, & s(a) = 0, \quad 0 < t < a, \\ w' + Aw(t) + B(w,w) = s(t), & w(0) = 0, \quad 0 < t < a, \end{cases} \tag{4}$$

является нуль-решение, т.е. $s(t) \equiv 0$ и $w(t) \equiv 0$.

Здесь B_w^* — оператор, сопряженный к B_w, а линейный оператор B_w определяется формулой $B_w g = B(w,g) + B(g,w)$, где w фиксировано. Ниже поясним смысл слова "решение", употребляемого в этой теореме.

Определение 2. Множество всех пар $\{w_1, w_2\}$ бесконечно гладких вектор-функций со значениями в $D(A) \subseteq H$, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) $w_1 = 0$ в окрестности $t = 0$, а $w_2 = 0$ в окрестности $t = a$;

б) $Aw_j \in H_2[0,a]$, $j = 1, 2$,

назовем *пробными функциями* и обозначим через D_a.

В [1] решение задачи (4) дается в соответствии со следующим определением.

Определение 3. Пару вектор-функций $(w(t), s(t))$ называем решением задачи (4), если выполнены следующие условия:

в) при любом $\delta \in (0, a)$ имеют место соотношения

$$s(t) \in H_2[0,a], \qquad w' + Aw \in H_2[0, a-\delta];$$

г) если $(w_1, w_2) \in D_a$ и $B_w w_1 \in H_2[0,a]$, то справедливы равенства

$$\langle s, w_1' + Aw_1 + B_w w_1\rangle_{H_2[0,a]} = 0,$$

$$\left\langle -w_2' + Aw_2 + \frac{1}{2}B_w^* w_2, w\right\rangle_{H_2[0,a]} - \langle w_2, s\rangle_{H_2[0,a]} = 0.$$

В данной работе мы пользуемся определением решения, аналогичным этому, в котором отсутствует требование $B_w w_1 \in H_2[0,a]$. Дело в том, что из условия (3) автоматически вытекает $B_w w_1 \in H_2[0,a]$. Действительно, из условия (3) легко следует, что решение w задачи (1) удовлетворяет энергетической оценке, из которой вытекает $A^{1/2}w \in H_2[0,a]$. Поэтому, пользуясь условиями (2), (2′) и $(w_1, w_2) \in D_a$, получаем $B_w w_1 \in H_2[0,a]$. В работе [1], где $p = 2$, мы обошлись без условия типа (3). В настоящей работе в связи с теоремами 4 и 5 нам не удалось обойтись без условия (3).

Уравнение для $s(t)$ в системе (4) обратно параболическое, и условие Коши задано на правом конце. Более того, оно есть линейное однородное уравнение. Поэтому если $w(t)$ в окрестности точки $t = a$ такова, что выражение $B_w^* s(t)$ "подчинено" выражению $-s'(t) + As(t)$, то такая задача имеет только нуль-решение. Но так как в точке $t = a$ вектор-функция $w(t)$ может иметь особенности, то возможно ненулевое решение задачи для $s(t)$. Поэтому теорема А не решает проблему существования сильного решения в целом, а сводит ее к другой проблеме.

Из системы (4) можно исключить функцию $s(t)$. Тогда из (4) для $w(t)$ получим двухточечную задачу (в которой под решением понимается обобщенное решение)

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{d^2}{dt^2}+A^2\right)w+\left(-\dfrac{d}{dt}+A\right)B(w,w)+B_w^*\left(\dfrac{d}{dt}w+Aw+B(w,w)\right)=0, \\ \big(w'+Aw(t)+B(w,w)\big)\big|_{t=a}=0, \\ w(0)=0. \end{cases}$$

Линейная часть в основном уравнении является эллиптическим оператором. Тем не менее нам не удалось доказать, что решением этой задачи является только нуль-решение.

В разд. 2 даются обобщения теоремы А и других результатов работы [1] на более общие случаи, а также указывается возможность обобщения в случае, когда нелинейный оператор $B(\cdot)$ имеет более общий вид (см. замечание 3 из разд. 2). Основные результаты разд. 2 содержатся в теоремах 7 и 8 (теорема 5 является частным случаем теоремы 7). Теорема 7 проблему сильной разрешимости в целом сводит к проблеме единственности решения одной системы интегральных уравнений, которая по крайней мере формально относится к классу вольтерровых уравнений, имеющих единственные классические решения.

2. УСЛОВИЯ СИЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ $H_{p,\theta}[0,a]$

В этом разделе сначала кратко изложим основные результаты из работы [1]. Положим

$$T(\lambda)g=\int\limits_0^t e^{-(A+\lambda E)(t-\xi)}g(\xi)\,d\xi,$$

где E — единичный оператор, а $\exp\{(-A-\lambda E)(t-\xi)\}$ понимается в смысле спектрального разложения.

Помимо $T(\lambda)$, введем оператор $T(\lambda,\alpha)$, действующий по формуле

$$T(\lambda,\alpha)v=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t e^{-(A+\lambda)(t-\xi)}(t-\xi)^{\alpha-1}v(\xi)\,d\xi,$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $\alpha>0$.

Следующие леммы 1–3, а также теоремы 1–3 доказаны в [1].

Лемма 1. *Если $\alpha,\beta>0$, то $T(\lambda,\alpha)T(\lambda,\beta)=T(\lambda,\alpha+\beta)$, $T(\lambda,1)=T(\lambda)$.*

Отметим, что в силу леммы 1 вместо $T(\lambda,\alpha)$ можно писать

$$T(\lambda,\alpha)=T^\alpha(\lambda) \tag{5}$$

и понимать $T(\lambda,\alpha)$ как дробные степени оператора $T(\lambda)$. При $\alpha=0$ за $T^\alpha(\lambda)$ можно принять E, так как при $\alpha\to0$ сильным пределом семейства $T^\alpha(\lambda)$ будет именно E.

Из леммы 1 получаем равенство $(0\le\alpha\le1)$

$$T(\lambda)=(A+\lambda E)^b\,T^\alpha(\lambda)(A+\lambda E)^{-b}\,T^{1-\alpha}(\lambda).$$

Введем норму $|\cdot|_{\gamma,\lambda}$:

$$|v|^2_{\gamma,\lambda}=\sup_{0<t<a}|(A+\lambda)^\gamma v(t)|^2+\int\limits_0^a\big|(A+\lambda)^{\gamma+1/2}v(t)\big|^2\,dt.$$

Лемма 2. *Пусть* $f(t) \in H_2[0,a]$ *и решение* $u(t)$ *задачи* (1) *удовлетворяет условию* $|u|^2_{\gamma,1} = C < \infty$ *при некотором* $\gamma > \frac{1}{4}$. *Тогда* $u' + Au \in H_2[0,a]$.

Определение 4. Функция $f(t) \in H_2[0,a]$, $|f|_{H_2} \neq 0$, называется *разделяющей функцией* задачи (1), если выполнены следующие условия:

а) решение $u(t)$ задачи (1) в $(0,a)$ существует и $u' + Au \in H_2[0, a-\varepsilon]$ при любом $\varepsilon \in (0,a)$, но $u' + Au \notin H_2[0,a]$;

б) если $g(t) \in H_2[0,a]$ и $|g|_{H_2} < |f|_{H_2}$, то решение задачи

$$v'(t) + Av + B(v,v) = g(t), \qquad v(0) = 0, \quad 0 < t < a,$$

существует и $v'(t) + Av \in H_2[0,a]$.

Теорема 1. *Если существует* $f(\cdot) \in H_2[0,a]$ *такая, что задача* (1) *не имеет решения, удовлетворяющего условию* $u' + Au \in H_2[0,a]$, *то для задачи* (1) *существует разделяющая функция.*

Лемма 3. *Существует число* $\varepsilon > 0$ *такое, что если* $|f|^2_{H_2[0,a]} \leq \varepsilon$, *то задача* (1) *имеет решение* $u(t)$, *для которого* $u' + Au \in H_2[0,a]$.

Теорема 2. *Пусть* $s(t)$ — *разделяющая функция,* $|s|_{H_2[0,a]} > 0$, *а* $w(t)$ — *решение задачи* (1) *при* $f = s(t)$. *Тогда пара* $(w(t), s(t))$ *удовлетворяет системе уравнений* (4) (*см. введение*).

Теорема 3. *Пусть* $f(t)$ — *разделяющая функция задачи* (1) *и* $u(t)$ — *решение задачи* (1) *в* $(0,a)$. *Тогда*

$$\left(|u'_t|^2 - |Au + B(u,u)|^2\right)'_t = 0$$

при $0 < t < a$.

Приведем некоторые обобщения основных результатов.

Пусть $p \in (1,\infty)$, $\theta \in (-\infty,+\infty)$ и $a \in (0,\infty)$. Рассмотрим задачу (1) при $f \in H_{p,\theta}[0,a] \equiv \equiv H_{p,\theta}$. Понятие разделяющей функции вводится, как и в случае $p = 2$ и $\theta = 0$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (2) *для всех* γ *и* γ_0, *удовлетворяющих условиям*

$$\gamma_0 = \delta_0 - \frac{\gamma}{2}, \qquad -\infty < \gamma \leq \frac{3}{4}, \qquad \delta_0 > 0, \tag{6}$$

где $\delta_0 > 0$ — *постоянное число, а число* c *в условии* (2) *зависит от* γ. *Предположим, что выполнены неравенства*

$$0 \leq \delta_0 - \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}, \qquad \left(\delta_0 - \frac{\theta}{2}\right) p' < 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{7}$$

Тогда для того, чтобы задача (1) *не была сильно разрешимой в* $H_{p,\theta}$, *необходимо и достаточно, чтобы при некотором* $a > 0$ *существовала в* $H_{p,\theta}$ *разделяющая функция задачи* (1).

Содержание этой теоремы совпадает с содержанием теоремы 1 (с заменой $H_2[0,a]$ на $H_{p,\theta}[0,a]$), и ее доказательство по существу совпадает с доказательством теоремы 1, если не считать существенными обычные приемы использования неравенств Коши.

Из теоремы 4, так же как выводилась теорема A из теоремы 1 (см. [1]), получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (6). *Предположим, что числа* $1 < p < \infty$ *и* $\theta \in (-\infty, \infty)$ *удовлетворяют условию* (7). *Тогда задача* (1) *сильно разрешима в* $H_{p,\theta}$, *если и только если при любом* $a > 0$ *решение* (*обобщенное*) *системы уравнений*

$$\begin{cases} u'_t + Au + B(u,u) = f(t), \quad u(0) = 0, \quad f(\cdot) \in H_{p,\theta}, \\ -g' + Ag + B^*_u g = 0, \quad g(a) = 0, \\ g(t) = |A^\theta f|_H^{p-2} \cdot A^{2\theta} f, \quad 0 < t < a, \end{cases}$$

является только нуль-решением.

Задачу (1) можно переписать в “ограниченной записи”.

Пусть $0 \le \alpha \le 1$, $\theta \in (-\infty, \infty)$. В уравнении (1) положим $u = T^\alpha A^{-\theta} w$ и подействуем на (1) оператором $T^{1-\alpha} A^\theta$. Тогда получим

$$w + A^\theta T^{1-\alpha} B\bigl(T^\alpha A^{-\theta} w, T^\alpha A^{-\theta} w\bigr) = g. \tag{8}$$

Здесь $g = T^{1-\alpha} A^\theta f$, а T^α — оператор, определенный по формуле (5) при $\lambda = 0$.

Уравнение (8) рассмотрим в пространстве $H_p[0,a] \equiv H_p$ с нормой

$$|u|_{H_p[0,a]} = \left(\int\limits_0^a |u(\eta)|_H^p \, d\eta \right)^{1/p}.$$

Определим понятия сильной разрешимости и разделяющей функции для уравнения (8).

Определение 5. Будем говорить, что уравнение (8) *сильно разрешимо*, если при любом $a > 0$ из $g(\cdot) \in H_p$ вытекают существование и единственность решения w уравнения (8), которое таково, что $w(\cdot) \in H_p$.

Определение 6. Вектор-функцию $g^* \in H_p$ будем называть *разделяющей функцией* уравнения (8), если выполнены следующие условия:

а) при любом $\varepsilon > 0$ уравнение (8), в котором $g = g^*(x)$, имеет единственное решение $w^*(t)$ из класса $H_p[0, a-\varepsilon]$ и $w^*(\cdot) \notin H_p[0,a]$;

б) если $\widetilde{g} \in H_p$ и $|\widetilde{g}|_{H_p} < |g^*|_{H_p}$, то решение $\widetilde{w}$ уравнения (8), в котором $g = \widetilde{g}$, принадлежит классу H_p.

Имеет место

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* (2) *для всех* γ *и* γ_0, *удовлетворяющих условиям* (6) *из теоремы* 4. *Предположим, что* $0 \le \alpha \le 1$, $1 < p < \infty$, $p'^{-1} + p^{-1} = 1$ *и*

$$0 \le \left(\delta_0 + \frac{1 - \alpha - \theta}{2} \right) p' < 1, \qquad \delta_0 - \frac{\alpha + \theta}{2} < 0, \qquad \theta + \alpha \ge \frac{1}{4}, \qquad 2\delta_0 + \alpha \ge 1 + \theta. \tag{9}$$

Тогда для того, чтобы уравнение (8) *не было сильно разрешимым в* H_p, *необходимо и достаточно, чтобы при некотором* $a > 0$ *существовала в* H_p *разделяющая функция уравнения* (8).

Доказательство. Содержательная часть доказательства этой теоремы в существенном совпадает с доказательством теоремы 1 из [1]. Отличающиеся выкладки опираются на следующее равенство:

$$(Tf)(t) = e^{\lambda t}[T(\lambda) g](t), \qquad g(t) = e^{-\lambda t} f(t),$$

и неравенства, краткий вывод которых приводим ниже:

$$S \equiv \int_0^a \bigl|A^\theta T^{1-\alpha} B(w,g)(t)\bigr|^p\,dt = \int_0^a \left|\int_0^t \frac{A^\theta e^{-A(t-\xi)}}{(t-\xi)^\alpha} B(w,g)(\xi)\,d\xi\right|^p dt \le$$
$$\le \int_0^a \left|\int_0^t \frac{A^\theta (t-\xi)^{1-\alpha-\varepsilon} e^{-A(t-\xi)}}{(t-\xi)^{1-\varepsilon}} B(w,g)(\xi)\,d\xi\right|^p dt \le$$
$$\le C_\varepsilon \int_0^a \left(\int_0^t \frac{1}{(t-\xi)^{1-\varepsilon}} \bigl|A^\theta A^{\alpha+\varepsilon-1} B(w,g)(\xi)\bigr|\,d\xi\right)^p dt \le C_{\varepsilon,1} \int_0^a \bigl|A^{\theta+\alpha-1+\varepsilon} B(w,g)(t)\bigr|^p\,dt,$$

где $\varepsilon > 0$ — малое число, $0 \le \alpha < 1-\varepsilon$. При $w = g = A^{-\theta} T^\alpha u$ использованы оценки операторов, инвариантных относительно сдвига, из [2]. Отсюда, используя условия теоремы, имеем

$$S \le C_{\varepsilon,2} \int_0^a \left\{ \left|A^{\delta_0 + \frac{\theta+\alpha-1+\varepsilon}{2}} w\right|^p \left|A^{\delta_0 + \frac{\theta+\alpha-1+\varepsilon}{2} + \frac12} g\right|^p + \left|A^{\delta_0 + \frac{\theta+\alpha-1+\varepsilon}{2} + \frac12} w\right|^p \left|A^{\delta_0 + \frac{\theta+\alpha-1+\varepsilon}{2} + \frac12} g\right|^p \right\} dt =$$
$$= C_{\varepsilon,3} \int_0^a \left\{ \left| \int_0^t A^{\delta_0 + \frac{\theta+\alpha-1+\varepsilon}{2}} A^{-\theta} e^{-A(t-\xi)} \frac{u(\xi)}{|t-\xi|^{1-\alpha}}\,d\xi \right|^p \times \right.$$
$$\left. \times \left| \int_0^t A^{\delta_0 + \frac{\theta+\alpha-1+\varepsilon}{2}} A^{-\theta+\frac12} e^{-A(t-\xi)} \frac{u(\xi)}{|t-\xi|^{1-\alpha}}\,d\xi \right|^p \right\} dt \le$$
$$\le C_{\varepsilon,4} \int_0^a \left\{ \left| \int_0^t \frac{|u(\xi)|\,d\xi}{|t-\xi|^{1-\alpha+\delta_0+\frac{-\theta+\alpha-1+\varepsilon}{2}}} \right|^p \left| \int_0^t \frac{|u(\xi)|d\xi}{|t-\xi|^{1-\alpha+\delta_0+\frac{-\theta+\alpha-1+\varepsilon}{2}+\frac12}} \right|^p \right\} dt =$$
$$= C_{\varepsilon,4} \int_0^a \left(\left| \int_0^t \frac{|u(\xi)|\,d\xi}{|t-\xi|^{\frac{1-\alpha-\theta}{2}+\delta_0}} \right| \cdot \left| \int_0^t \frac{|u(\xi)|\,d\xi}{|t-\xi|^{\frac{2-\alpha-\theta}{2}+\delta_0}} \right| \right)^p du \le C_{\varepsilon,5} \left(\int_0^a |u(\xi)|^p\,d\xi \right)^2.$$

Это неравенство имеет место, если выполнены условия (9). Из этой оценки, так же как и в [1], получается утверждение теоремы.

Из теоремы 6, так же как теорема А выводилась из теоремы 1 работы [1], выводится следующий результат.

Теорема 7. *Пусть выполнено условие* (2) *для всех* γ *и* γ_0, *удовлетворяющих условиям* (6) *из теоремы* 4. *Предположим, что выполнены условия* (9) *из теоремы* 6. *Тогда уравнение* (8) *сильно разрешимо, если и только если при любом* $a > 0$ *обобщенное решение системы*

$$\begin{cases} w(t) + A^\theta T^{1-\alpha} B\bigl(T^\alpha A^{-\theta} w, T^\alpha A^{-\theta} w\bigr) = f(t), \\ g(t) + S^* g(t) = 0, \quad g = |f|_H^{p-2} f, \quad 0 < t \le a, \end{cases} \tag{10}$$

где S^* *— оператор, зависящий от* w *и сопряженный к* $S(w)$ *в смысле* H_p, *а* $S(w)$ *определяется равенством*

$$Su \equiv S(w)u = A^\theta T^{1-\alpha} B\bigl(T^\alpha A^{-\theta} w, T^\alpha A^{-\theta} u\bigr) + A^\theta T^{1-\alpha} B\bigl(T^\alpha A^{-\theta} u, T^\alpha A^{-\theta} w\bigr),$$

является только нуль-решением.

Приведем определение обобщенного решения (10).

Определение 7. Пара вектор-функций (w, g), определенных в $[0, a)$, называется *обобщенным решением* (10), если

а) $f(\cdot) \in H_p[0, a]$, $g = |f|_H^{p-2} f$, а $w \in H_p[0, a-\varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$;

б) если $\varepsilon \in (0, a)$, то на $(0, a-\varepsilon]$ первое уравнение выполняется в обычном смысле в $H_p[0, a-\varepsilon]$;

в) если $\varepsilon \in (0, a)$ и $m(t)$ — вектор-функция из $C^\infty(H; 0, a)$, равная нулю на $[a-\varepsilon, a]$, то

$$\int\limits_0^{a-\varepsilon} \big\langle g(t), m(t) + Sm(t)\big\rangle_H \, dt = 0.$$

При выполнении условий теорем 6 и 7 в классах $H_p[0, a]$ для уравнения (8) можно использовать теорию возмущений. Именно верно следующее

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 7. *Тогда если для данного* $g(t) \in H_p$ *уравнение* (8) *имеет решение* $u(t) \in H_p$ *и если* $|g(\cdot) - \widetilde{g}(\cdot)|_{H_p} \le \varepsilon$, *где* ε — *малое число, то уравнение* (8) *с правой частью* $\widetilde{g}(t)$ *имеет в* H_p *решение* $\widetilde{u}(t)$ *такое, что*

$$|u(\cdot) - \widetilde{u}(\cdot)|_{H_p} \le \delta(\varepsilon), \qquad \delta(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \ \ \varepsilon \to 0.$$

Это утверждение доказывается с помощью простых оценок, которые мы использовали в [1] неоднократно. Аналогичное утверждение можно доказать для решения задачи (1) при выполнении условий теоремы 5. Имеет место

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* (2) *для всех* γ *и* γ_0, *удовлетворяющих условиям* (6) *теоремы* 4. *Предположим, что при некоторых* θ_0 *и* p_0, *удовлетворяющих* (7), *задача* (1) *сильно разрешима в* H_{p_0,θ_0}. *Тогда задача* (1) *сильно разрешима в* $H_{p_0,\theta}$ *при любом* $\theta \ge \theta_0$.

Доказательство. Пусть задача (1) сильно разрешима в классе H_{p_0,θ_0}, где p_0, θ_0 удовлетворяют (7). Предположим, что $f_0(\cdot) \in H_{p_0,\theta}$. Тогда $f_0(\cdot) \in H_{p_0,\theta_0}$, так как имеет место вложение

$$H_{p_0,\theta}[0, a] \hookrightarrow H_{p_0,\theta_0}[0, a].$$

Поэтому решение $u_0(t)$ задачи (1) с $f(\cdot)$, равной $f_0(\cdot)$, принадлежит классу H_{p_0,θ_0}, так как по предположению в H_{p_0,θ_0} задача (1) сильно разрешима. Теперь задачу (1) запишем в виде

$$\begin{cases} u' + Au + B(u_0, u) = f_0(t), \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Далее, пользуясь приемом, использованным в [1] при доказательстве леммы 2, получаем, что решение $u(t)$ задачи (11) принадлежит классу $H_{p_0,\theta}$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть выполнено условие* (2) *для всех* γ *и* γ_0, *удовлетворяющих условиям* (6) *теоремы* 4. *Предположим, что при некоторых* θ_0 *и* p_0, *удовлетворяющих* (7), *задача* (1) *сильно разрешима в* H_{p_0,θ_0}. *Тогда задача* (1) *сильно разрешима в* H_{p,θ_0} *при любом* $p \ge p_0$.

Эта лемма доказывается так же, как лемма 4.

Применяя эти две леммы, получаем следующий результат.

Теорема 8. *Пусть выполнено условие* (2) *для всех* γ *и* γ_0, *удовлетворяющих условиям* (6) *теоремы* 4. *Предположим, что при некоторых* θ_0 *и* p_0, *удовлетворяющих* (7), *задача* (1) *сильно разрешима в* H_{p_0,θ_0}. *Тогда если* p, θ *удовлетворяют условиям* $\theta \ge \theta_0$, $p \ge p_0$, *то задача* (1) *сильно разрешима в* $H_{p,\theta}$.

Отметим, что для трехмерного уравнения Навье–Стокса число δ_0 равно $\frac{3}{8}$, а для двумерного $\frac{1}{4}$. Вообще говоря, для n-мерного уравнения Навье–Стокса число δ_0 равно $\frac{n}{8}$.

Замечание 1. Всюду мы предполагали, что резольвента оператора A компактна. Это условие для нас было существенным при доказательстве существования разделяющей функции.

Замечание 2. Для решения уравнения Навье–Стокса известна энергетическая априорная оценка. Мы такой оценкой не пользовались. Если воспользоваться энергетической оценкой, то с помощью теоремы 7 нетрудно получить результат О.А. Ладыженской о сильной разрешимости уравнения Навье–Стокса в двумерном случае. Но можно показать, что уравнение Навье–Стокса ($n=2$), записанное в форме (8), сильно разрешимо в H_p, если $1<p<\infty$ и

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1-\alpha-\theta}{2}\right)p'<1, \qquad \frac{1}{4}-\frac{\alpha+\theta}{2}<0, \qquad \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1, \qquad \alpha-\theta\ge\frac{1}{2}, \qquad 0\le\alpha\le 1.$$

При $n\ge 3$ наши результаты не решают проблему, но сводят ее к другой эквивалентной проблеме (см. теорему 7).

Замечание 3. Вообще говоря, в наших теоремах границы изменения параметров можно расширить. Более того, в задаче (1) вместо билинейного оператора $B(u,u)$ можно рассмотреть общий нелинейный оператор вида $[B(u)](t)=B(u(t),t)$, подчиненный условию

$$|B(u_1,t)-B(u_2,t)|_{H_2}\le F\big(|A^\theta u_1|_H,|A^\theta u_2|_H\big)|A^\gamma(u_1-u_2)|_H,$$

где $0\le\gamma<1$, $0\le\theta<1$, а функция двух переменных $F(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет оценке

$$|F(x,y)|\le C_p\big[x^{2p}+y^{2p}\big], \qquad 0\le p<\infty,$$

в которой число C_p зависит от p, но не зависит от x и y. Конечно, пространства, в которых для рассматриваемой задачи можно использовать теорию возмущений, будут зависеть от чисел p, θ и γ.

3. О СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u_j-\Delta u_j+\dfrac{\partial}{\partial x_l}u_lu_j+\dfrac{\partial}{\partial x_j}P=f_j, \quad j=1,2,3, \\ \operatorname{div}u=\dfrac{\partial}{\partial x_k}u_k=0 \end{cases} \tag{12}$$

в области $Q\times[0,a]$, где $a>0$, $Q=\{x\colon -\pi<x_j<\pi,\ j=1,2,3\}$. К системе (12) добавим начальные и граничные условия:

$$\begin{cases} u_j(t,x)\big|_{t=0}=0, \\ u_j(t,x)\big|_{x_k=-\pi}=u_j(t,x)\big|_{x_k=\pi}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_k}u_j(t,x)\big|_{x_k=-\pi}=\dfrac{\partial}{\partial x_k}u_j(t,x)\big|_{x_k=\pi}, \\ P(t,x)\big|_{x_k=-\pi}=P(t,x)\big|_{x_k=\pi}, \quad k,j=1,2,3. \end{cases} \tag{13}$$

Давление P из (12) и (13) может быть определено только с точностью до функции, зависящей от времени. Поэтому, чтобы функция P определялась однозначно, добавим условие

$$\int\limits_Q P(t,x)\,dx=0, \qquad t\in[0,a]. \tag{14}$$

Пусть $v = \sum_k v_k(t)e^{i\langle k,x\rangle}$. Введем оператор $(-\widetilde{\Delta})^{-1}$, действующий по формуле

$$(-\widetilde{\Delta})^{-1}v(t,x) = \sum_{|k|^2\neq 0} v_k(t)\frac{e^{i\langle k,x\rangle}}{|k|^2}, \qquad k=(k_1,k_2,k_3), \quad |k|^2 = k_1^2+k_2^2+k_3^2.$$

Легко подсчитать, что равенство

$$\operatorname{div}\bigl[\operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div} u\bigr] = -\operatorname{div} u$$

имеет место для любой дважды гладкой периодической (с периодом 2π) по всем пространственным переменным вектор-функции $u=(u_1,u_2,u_3)$.

Подействуем на первые три уравнения системы (12) операцией

$$E + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div},$$

где E — единичный оператор. Тогда, учитывая, что $\operatorname{div} u = 0$, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u - \Delta u + (\nabla,u)u + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}(\nabla,u)u = f + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div} f, \\ u\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Из (12) мы исключили давление P. Рассматривая (15) в классе периодических по пространственным переменным функций, для которых $\operatorname{div} u = 0$, мы получаем запись системы уравнений Навье–Стокса в абстрактной форме (1).

Применив результаты разд. 2 к задаче (12)–(14), получаем следующую теорему.

Теорема 9. *Для того чтобы задача* (12)–(14) *при любом* $f=(f_1,f_2,f_3)$, *удовлетворяющем условию*

$$\int_0^a |f(t,\cdot)|^2_{L_2(Q)}\,dt < \infty,$$

имела решение $(u,P)=(u_1,u_2,u_3;P)$, *удовлетворяющее условию*

$$\int_0^a \bigl(|u_t - \Delta u|^2_{L_2(Q)} + |\operatorname{grad} P|^2_{L_2(Q)}\bigr)\,dt < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u_j - \Delta u_j + \dfrac{\partial}{\partial x_l}u_l u_j + \dfrac{\partial}{\partial x_j}P = f_j, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_k}u_k \equiv \operatorname{div} u = 0, \\ -\dfrac{\partial}{\partial t}f_j - \Delta f_j - f_{lx_j}u_l - f_{jx_l}u_l + \dfrac{\partial}{\partial x_j}r = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_k}f_k \equiv \operatorname{div} f = 0, \quad j=1,2,3, \\ \displaystyle\int_Q P\,dx = \int_Q r\,dx = 0, \end{cases} \tag{16}$$

с условиями Коши

$$u_j\big|_{t=0} = 0, \qquad f_j\big|_{t=a} = 0$$

и с периодическими краевыми условиями по пространственным переменным для

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad f = (f_1, f_2, f_3), \quad P, \quad r, \quad \frac{\partial}{\partial x_k}u, \quad \frac{\partial}{\partial x_k}f, \quad k = 1, 2, 3,$$

было только нуль-решением (*см. определение* 3).

Доказательство. Эта теорема является следствием теоремы А.

Отметим, что из (16) можно исключить P и r. Для этого достаточно к первому и третьему равенствам применить оператор $E + \mathrm{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\,\mathrm{div}$, и тогда (16) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u_j - \Delta u_j + \big(E + \mathrm{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\big)\dfrac{\partial}{\partial x_l}u_l u_j = f_j, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_k}u_k = 0, \\ -f_{jt} - \Delta f_j - \big(E + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\big)(f_{lx_j}u_l + f_{jx_l}u_l) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_k}f_k = 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Если краевые условия не периодические, а, скажем, требуется выполнение условий “прилипания”, то переход к абстрактной записи затруднен. Трудности связаны с тем, что резольвента оператора Лапласа и операции дифференцирования не коммутируют. Тем не менее такой переход возможен, если воспользоваться результатами работ В.А. Солонникова [3, 4].

Нетрудно показать, что классическое, или сильное, решение задачи (16) будет только нуль-решением. Но в теореме 9 речь идет об обобщенном решении в смысле определения 3. Поэтому теорема 9 не решает известную проблему существования сильного решения в целом для системы уравнений Навье–Стокса, а дает ее эквивалентную переформулировку.

Замечание 4. Для системы уравнений Навье–Стокса при $t = 0$ можно задавать ненулевые начальные условия Коши. Тогда проблема сильной разрешимости в целом становится более общей, чем рассмотренная нами. Благодаря теореме существования в малом такой случай легко сводится к случаю, когда начальные условия Коши равны нулю. Покажем это для абстрактной задачи (1). Пусть $\varphi(t)$ — бесконечно гладкая функция такая, что $\varphi(t) = 0$ при $0 \le t < \varepsilon$ и $\varphi(t) = 1$ при $t \ge 2\varepsilon$, где ε — малое число. Допустим, что задача (1) имеет решение $u(t)$ на $(0, 4\varepsilon)$ такое, что

$$|B(u,u)|, |u' + Au|_H \in L_2(0, 4\varepsilon).$$

Положим $v = \varphi(t)u(t)$. Для $v(t)$ получим $v(0) = 0$ и

$$v' + Av + B(v,v) = \begin{cases} (\varphi u)' + A\varphi u + \varphi^2 B(u,u) & \text{при} \;\; 0 < t \le 2\varepsilon, \\ f(t) & \text{при} \;\; t > 2\varepsilon. \end{cases}$$

Пусть $a > 0$, $v(t)$ существует на $(0, a)$ и $|v' + Av|_H \in L_2(0, a)$. Тогда $|u' + Au|_H \in L_2(0, a)$. Поэтому общий случай сведен к частному.

В работе [5] изложено краткое содержание результатов этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н.* Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн. 2008 (в печати).
2. *Хермандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. *Солонников В.А.* Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса // Тр. МИАН. 1964. Т. 70. С. 213–317.
4. *Солонников В.А.* О дифференциальных свойствах решений первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье–Стокса // Тр. МИАН. 1964. Т. 73. С. 221–291.
5. *Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н.* Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // ДАН. 2006. Т. 408, №4. С. 446–449.