Математические заметки

том 54 выпуск 6 декабрь 1993

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ НУЛЬ-РЯДА ПО ПЕРИОДИЧЕСКИМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Н. А. Бокаев, М. А. Нурханов

В работе рассматриваются мультипликативные периодические ортонормированные системы, предложенные Н. Я. Виленкиным в [1]. Пусть G – нульмерная, компактная абелева группа со второй аксиомой счетности. Цепочка подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset \bigcap_{k=0}^{\infty} H_k = \{0\}$$

образует систему окрестностей нуля, причем H_k/H_{k+1} – циклическая группа простого порядка p_{k+1}, где $p_k \geqslant 2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Положим $m_0 = 1, m_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$. Пусть X–группа характеров для G, тогда

$$\{0\} = H_0^{\perp} \subset H_1^{\perp} \subset \cdots \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k = X,$$

где $H_k^{\perp} = \{\varphi \in X : \varphi_k(t) = 1, \quad t \in H_k\}$. Положим $\varphi_0(t) = 1, t \in G$. Если $n = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k m_k$,то $\varphi_k(t) = \prod_{k=1}^{s} \left[\varphi_{m_k}(t)\right]^{\alpha_k}$, $0 \le \alpha_k \le p_k - 1$. Таким образом определенная система $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ является периодической, мультипликативной и ортонормированной относительно нормированной меры Хаара на G, и при $p_k = 2$, $k = 1, 2, \dots$, представляет собой систему Уолша.

Определение. Множество $E \subset G$ называется *M-множеством* для системы $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, если существует ряд по этой системе, у которого не все коэффициенты равны нулю и который сходится к нулю всюду вне множества E. Такие ряды, в случае, когда M-множество имеет меру нуль, называются ***нуль-рядами***.

В этой заметке нашей основной целью является построение M-множества меры нуль для указанной системы характеров $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$. Широко известно, что M-множество меры нуль для тригонометрической системы было впервые построено Д. Е. Меньшовым [2], а для системы Уолша

– А. А. Шнейдером [3]. Для мультипликативных систем нуль-ряда в случае $\sup p_n = p < \infty$ построен В. А. Скворцовым [4], а в случае $\sup p_{n_k} \leq c < \infty$, – И. И. Тузиковой [5]. В этой заметке мы никаких ограничений на последовательность $\{p_n\}$ не накладываем.

ТЕОРЕМА. *Для системы характеров $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ существует M-множество меры нуль.*

При построении искомого нуль-ряда мы будем следовать схеме построения соответствующего M-множества для системы Уолша из работы [6].

Для $t \in L(G)$ положим

$$\alpha_j(f,H) = \frac{1}{\mu(H)} \int_H f(t)\varphi_j(t)\,d\mu(t), \tag{1}$$

где H – некоторое подмножество G, μ – нормированная мера Хаара на G. Через $xH_n = \{x \dotplus H_n,\ x \in G\}$ обозначим смежные классы по подгруппе H_n ($\dotplus$ – групповая операция). Докажем лемму.

ЛЕММА. *Для любых чисел $A > 0$, $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что для любого смежного класса xH_n, $n \geqslant N$, любых чисел $\delta > 0$, B, $0 < |B| \leq A$ и любого целого $\lambda > n$ существует полином*

$$P(t) = \sum_{j=m_\lambda}^{m_l - 1} \alpha_j \varphi_j(t), \tag{2}$$

обладающий свойствами

1) $\|\alpha_j\| < \varepsilon$, $m_\lambda \leq j \leq m_l - 1$;
2) $P(t) = 0$, $t \in G \setminus xH_n$;
3) $|p(t)| \geqslant |B|$, $t \in xH_n$;
4) $s \cdot \dfrac{1}{m_l} < \delta$, *где s – число всех смежных классов zH_l, $z \in xH_n$, таких, что $|P(t)| \neq |B|$ при $t \in zH_l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число N найдем из условия

$$A/m_N \leq \varepsilon. \tag{3}$$

Подберем такое l, что

$$\frac{m_\lambda}{m_n} \cdot \frac{1}{m_l} \leq \delta. \tag{4}$$

Пусть $\{y_i\}$ – набор элементов из G такой, что классы $y_i H_\lambda \cap y_j H_\lambda = \varnothing$, при $i \neq j$, и $\bigcup_i (y_i H_\lambda) = xH_n$. Определим

$$P(t) = \begin{cases} 0, & t \in G \setminus xH_n; \\ -B, & t \in y_i H_\lambda \setminus z_i'' H_l,\ y_i \in xH_n; \\ \left(\frac{m_l}{m_\lambda} - 1\right) \cdot B, & t \in z_i'' H_l, \end{cases} \tag{5}$$

где $z_i''H_l = \{z - iH_l : z_i = z' + y_iH_\lambda, z' \in H_l, y_iH_\lambda \subset xH_n\}$.

Докажем, что $P(t)$ есть искомый полином по данной системе. Имеем

$$\int_G P(t)\varphi_j(t)\,d\mu(t) = \int_{xH_n} P(t)\varphi_j(t)\,d\mu(t)$$
$$= \sum_{y_iH_\lambda \subset xH_n} \int_{y_iH_\lambda} P(t)\varphi_j(t)\,d\mu(t).$$

Если $j < m_\lambda$, то $\varphi_j(t) \in H_\lambda^\perp$, поэтому

$$\sum_{y_iH_\lambda \subset xH_n} \int_{y_iH_\lambda} P(t)\varphi_j(t)\,d\mu(t) = \sum_{y_iH_\lambda \subset xH_n} \varphi_j(t_i) \int_{y_iH_\lambda} P(t)\,d\mu(t).$$

Для последнего интеграла получим

$$\int_{y_iH_\lambda} P(t)\,d\mu(t) = \int_{z_i''H_l} P(t)\,d\mu(t) + \int_{y_iH_\lambda \setminus z_i''H_l} P(t)\,d\mu(t)$$
$$= \left(\frac{m_l}{m_\lambda} - 1\right) \cdot B \cdot \mu(H_l) - B \cdot (\mu(H_\lambda) - \mu(H_l)) = 0.$$

При $j > m_l$ имеем

$$\sum_{y_iH_\lambda \subset xH_n} \int_{y_iH_\lambda} P(t)\varphi_j(t)\,d\mu(t)$$
$$= \sum_{y_iH_\lambda \subset xH_n} \sum_{zH_l \subset y_iH_\lambda} P(t_l) \int_{zH_l} \varphi_j(t)\,d\mu(t) = 0.$$

Таким образом, в разложение $P(t)$ входят только те функции $\varphi_j(t)$, для которых $m_\lambda \le j < m_l$, и, значит, $P(t)$ является полиномом вида (2).

Свойства 2), 3), 4) полинома $P(t)$ непосредственно следуют из (5). Теперь проверим свойство 1). Пусть j – такое, что $m_\lambda \le j < m_l$. Тогда найдется r, удовлетворяющее соотношениям $\lambda \le r < l$ и $m_r \le j < m_{r+1}$. Тогда

$$\alpha_j(P, \nu H_r) = 0, \quad \nu H_r \subset xH_n, \quad \text{если } \nu H_r \cap z_i''H_l = \varnothing. \tag{6}$$

Пусть $z_i''H_l \subset \nu H_r$; в силу неравенства $m_r \le j < m_{r+1}$ число j представимо в виде:

$$j = \sum_{q=0}^{r} \alpha_q^{(j)} \cdot m_q, \quad \text{где } 0 \le \alpha_q^{(j)} < p_q, \quad \alpha_r^{(j)} \ne 0.$$

Тогда

$$\varphi_j(t) = \prod_{q=0}^{r} \left[\varphi_{m_q}(t)\right]^{\alpha_q^{(j)}} = C_{r,j} \cdot \left[\varphi_{m_r}(t)\right]^{\alpha_q^{(j)}} \quad \text{при } t \in \nu H_r,$$

где

$$C_{r,j}=\prod_{q=0}^{r-1}\left[\varphi_{m_q}(t)\right]^{\alpha_q^{(j)}}$$

Обозначим

$$\eta''H_{r+1}=\left\{\eta H_{r+1}:\eta=\eta'\dot{+}\nu H_r,\eta'\in H_{r+1},\nu\in y_i H_\lambda\subset xH_n\right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_{\nu H_r}P(t)\varphi_j(t)\,d\mu(t)\\
&=\left\{\sum_{\eta H_{r+1}\subset\nu H_r}\int_{\eta H_{r+1}}P(t)\left[\varphi_{m_r}(t)\right]^{\alpha_r^{(j)}}d\mu(t)\right\}\cdot C_{r,j}\\
&=C_{r,j}\cdot\left\{\int_{\eta''H_{r+1}}P(t)\,d\mu(t)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{\substack{\eta H_{r+1}\subset\nu H_r,\\ \eta\neq\eta''}}\int_{\nu H_r\setminus\eta''H_{r+1}}P(t)\left[\varphi_{m_r}(t)\right]^{\alpha_r^{(j)}}d\mu(t)\right\}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

По определению, $P(t)=-B$ при $t\in\nu H_r\setminus\eta''H_{r+1}$, поэтому для последней суммы в (7) имеем:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\eta H_{r+1}\subset\nu H_r,\eta\neq\eta''}\left\{\int_{\nu H_r\setminus\eta''H_{r+1}}P(t)\left[\varphi_{m_r}(t)\right]^{\alpha_r^{(j)}}d\nu(t)\right\}\\
&\quad=-B\cdot\mu(H_{r+1})\sum_{\eta H_{r+1}\subset\nu H_r,\eta\neq\eta''}\left[\varphi_{m_r}(t)\right]^{\alpha_r^{(j)}} \qquad (8)
\end{aligned}$$

Далее, так как $\eta''H_{r+1}=z_i''H_l\cup(\eta''H\setminus z_i''H_i)$, получим (см. (5)):

$$\begin{aligned}
\int_{\eta''H_{r+1}}P(t)\,d\mu(t)&=\int_{z_i''H_l}P(t)\,d\mu(t)+\int_{\eta''H_{r+1}\setminus z_i''H_l}P(t)\,d\mu(t)\\
&=\left(\frac{m_l}{m_\lambda}-1\right)\cdot B\cdot\mu(H_l)-B\cdot\left(\mu(H_{r+1})-\mu(H_l)\right)\\
&=\left(\frac{1}{m_\lambda}-\frac{1}{m_{r+1}}\right)\cdot B. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Тогда из (7)–(9), с учетом равенства $\int_{\nu H_r}\varphi_n(t)\,d\mu(t)=0$ при $n\geqslant m_r$ (см. [1, с. 89]), получим

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mu H_r}P(t)\varphi_j(t)\,d\mu(t)\right|\\
&\quad=\left|C_{r,j}\cdot\left[\frac{B}{m_\lambda}-\frac{B}{m_{r+1}}\cdot\sum_{\eta H_{r+1}\subset\nu H_r}\left[\varphi_{m_r}(t)\right]^{\alpha_r^{(j)}}\right]\right|=\frac{\|B\|}{m_\lambda}.
\end{aligned}$$

Следовательно (см. (1)),

$$|\alpha_j (P, \nu H_r)| = \frac{1}{\mu(H_r)} \left| \int_{\nu H_r} P(t)\varphi_j(t)\, d\nu(t) \right| = \frac{m_r}{m_\lambda} |B|. \tag{10}$$

Далее, согласно (1),

$$\begin{aligned} a_j (f, y_i H_\lambda) &= \frac{1}{\mu(H_\lambda)} \int_{y_i H_\lambda} f(t)\varphi_j(t)\, d\mu(t) \\ &= \frac{1}{\mu(H_\lambda)} \sum_{\nu H_r \subset y_i H_\lambda} \int_{\nu H_r} f(t)\varphi_j(t)\, d\mu(t) \\ &= \frac{\mu(H_r)}{\mu(H_\lambda)} \sum_{\nu H_r \subset y_i H_\lambda} \frac{1}{\mu(H_r)} \int_{\nu H_r} f(t)\varphi_j(t)\, d\mu(t) \\ &= \frac{\mu(H_r)}{\mu(H_\lambda)} \sum_{\nu H_r \subset y_i H_\lambda} a_j (f, \nu H_r). \end{aligned} \tag{11}$$

В частности, для коэффициентов Фурье $a_j(f)$ функции $f(t) \in L(G)$ имеем:

$$a_j(f) = \mu(H_r) \sum_{\nu H_r \subset G} a_j (f, \nu H_r). \tag{12}$$

Тогда из (6), (10), (11) следует, что

$$\begin{aligned} |a_j (P, y_i H_\lambda)| &= \frac{\mu(H_r)}{\mu(H_\lambda)} \left| \sum_{\nu H_r \subset y_i H_\lambda} a_j (P, \nu H_r) \right| \\ &\le \frac{\mu(H_r)}{\mu(H_\lambda)} \cdot \frac{m_r}{m_\lambda} |B| = |B|. \end{aligned} \tag{13}$$

Откуда и из (11)

$$\begin{aligned} |a_j (P, x H_n)| &= \frac{\mu(H_\lambda)}{\mu(H_n)} \left| \sum_{y H_\lambda \subset x H_n} a_j (P, y H_\lambda) \right| \\ &\le \frac{\mu(H_\lambda)}{\mu(H_n)} \cdot \frac{m_\lambda}{m_n} |B| = |B|. \end{aligned}$$

Окончательно, в силу (12), (13) и (3),

$$\begin{aligned} |a_j(P)| &= \left| \int_G P(t)\varphi_j(t)\, d\mu(t) \right| = \left| \int_{x H_n} P(t)\varphi_j(t)\, d\mu(t) \right| \\ &= \mu(H_n)\, |a_j (P, H_n)| \le \frac{|B|}{m_n} \le \frac{A}{m_n} \le \frac{A}{m_N} \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для доказательства теоремы нам нужна еще следующая

ЛЕММА А (см. [4]). *Если у ряда по системе* $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(t)$, *с условием* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *некоторая подпоследовательность частичных сумм вида*

$$S_{m_{n_s}}(t) = \sum_{j=0}^{m_{n_s}-1} a_j\varphi_j(t)$$

сходится к нулю при всех t *из некоторого открытого множества* R, *то этот ряд сходится к нулю на этом множестве.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Возьмем последовательность чисел ε_k, $\varepsilon_k > 0$, $k = 1,2,3,\ldots$, $\varepsilon_1 = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ и построим последовательность полиномов $\{Q_k(t)\}$, с помощью которой будем строить нуль-ряд по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$.

Последовательность полиномов $\{Q_k(t)\}$ построим индукцией по k. Положим $Q_1(t) = \varepsilon_1$ для всех $t \in G$. Пусть построены все полиномы $Q_j(t)$ при всех $j \leq k-1$ и пусть r_{k-1} – максимальный ранг входящих в $Q_{k-1}(t)$ функций системы $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$. Построим $Q_k(t)$. Обозначим

$$A_{k-1} = \max_{t\in G}\left|\sum_{j=1}^{k-1} Q_j(t)\right|.$$

По доказанной лемме для чисел A_{k-1} и ε_{k-1} найдем N_k и возьмем число $n_k = \max(N_k, r_{k-1})$. Пусть $E_{k-1} = \bigcup_{s=1}^{s_{k-1}} \nu_s$ – совокупность множеств, на которых

$$\sum_{j=1}^{k-1} Q_j(t) \neq 0,$$

и пусть

$$xH_{n_k\cdot j_q} = \left\{xH_{n_k} \colon x \in E_{k-1},\ q = 1,2,3,\ldots,q_k\right\},$$

где q_k – количество xH_{n_k}, входящих E_{k-1}. В силу неравенства $n_k \geqslant r_{k-1}$ множества $xH_{n_k\cdot j_q}$ лежат целиком внутри множества постоянства функции $\sum_{j=1}^{k-1} Q_j(t)$. Положим

$$B_q = \sum_{j=1}^{k-1} Q_j\left(xH_{n_k\cdot j_q}\right).$$

Из определения чисел A_{k-1} и B_q следует, что $0 < |B| \leq A_{k-1}$.

Применим лемму последовательно ко всем $xH_{n_k\cdot j_q}$ для чисел $\delta_k = \frac{\varepsilon_k}{q_k}$, B_q, $\lambda_{q+1} = l_q$, $\lambda_1 = n_k$, $q = 1,2,3,\ldots,q_k$, получим полиномы $P_q(t) = \sum_{j=m_{l_q}}^{m_{l_q}-1} a_j\varphi_j(t)$, $q = 1,2,\ldots,q_k$. Причем полиномы $P_q(t)$ не содержат подобных членов при различных q. Положим

$$Q_k(t) = \sum_{q=1}^{q_k} P_q(t).$$

Из построения полиномов $\{Q_k(t)\}$ следует, что максимальный ранг функций системы $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, входящих в $Q_k(t)$, меньше максимального ранга функций из $Q_{k+1}(t)$ и коэффициенты полинома $Q_k(t)$ по модулю не превосходят ε_k. Отсюда заключаем, что сумма $\sum_{j=1}^{\infty} Q_j(t)$ задает ряд по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_j(t) \tag{14}$$

с частичными суммами

$$S_{m_{\lambda_k}}(t) = \sum_{j=1}^{k} Q_j(t) \tag{15}$$

и коэффициентами, удовлетворяющими условию $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Кроме того, из определения чисел B_q следует, что

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j(t) = B_q + P_q(t) \text{ при } t \in xH_{n_k \cdot j_q}$$

и

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j(t) = 0 \text{ вне } E_{k-1}.$$

К тому же, по построению полиномов $Q_k(t)$ и свойств 2)–4) леммы имеем, что если $E_k = \bigcup_{s=1}^{s_k} \nu_s$, где ν_s – множество, на котором $\sum_{j=1}^{k} Q_j(t) \neq 0$, то $E_{k-1} \subset E_k$ и $\sum_{s=1}^{s_k} \mu(\nu_s) < \varepsilon_k$. Отсюда заключаем, что множество $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ имеет меру нуль и частичные суммы (15) сходятся к нулю вне E. Значит, на основании леммы А можно сделать вывод, что ряд (14) сходится к нулю вне E. Итак, множество E удовлетворяет требованиям теоремы. Теорема доказана.

Карагандинский государственный университет

Поступило
02.12.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: Элм, 1981.

[2] Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

[3] Шнейдер А.А. О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24. С. 279–300.

[4] Скворцов В.А. О нуль-рядах по некоторой мультипликативной системе // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1979. №6. С. 63–67.

[5] Тузикова И.И. Об одном примере нуль-ряда по ортогональной мультипликативной системе функций // Изв. вузов. Матем. 1985. №5. С. 52–59.

[6] Скворцов В.А. Матем. заметки. 1977. Т. 21. №3. С. 335–340.