Ж.Ж.Сирнебаева, М.С.Сауытбекова

О взаимосвязи классов функций связанных с сильной аппроксимацией

(Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан)

В работе исследуется взаимосвязь некоторых некоторых классов функций ($V_p(\lambda_{m,n}), S_p(\lambda_{m,n}), H^{\omega_1,\omega_2}$) связанных с сильной суммируемостью двойных тригонометрических рядов. В качестве решения наложены условия на последовательность $\{\lambda_{m,n}\}$.

Пусть $f(x,y)$ - непрерывная и 2π -периодическая функция по обеим переменным и пусть

$$f(x,y) \sim \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}(a_{k_1,k_2} cosk_1xk_2y + b_{k_1,k_2} sink_1xk_2y + c_{k_1,k_2} sink_1xcosk_2y + d_{k_1,k_2} sink_1xk_2y)$$

ряд Фурье функции $f(x,y)$.Обозначим через $S_{m,n}$ -прямоугольные частичные суммы ее тригонометрического ряда Фурье.

Пусть $\omega_1(\delta_1), \omega_2(\delta_2)$ -наперед заданный модуль непрерывности, а

$$\omega(\delta_1,\delta_2) = \sup_{\substack{0<h_1<\delta_1 \\ 0<h_2<\delta_2}} \|f(x_1+h_1,x_2+h_2) - f(x_1+h_1,x_2) - f(x_1,x_2+h_2) + f(x_1,x_2)\|_{C[0,2\pi)^2}$$

модуль непрерывности функций $f \in C[0,2\pi)^2$. В дальнейшем норму $\|f\|$ будем понимать в смысле $\sup_{x,y\in[0,2\pi)^2} |f(x,y)|$.

Через H^{ω_1,ω_2} обозначим класс функций, для которых

$$\omega(f,\delta_1,\delta_2) = O(\omega_1(\delta_1)\,\omega_2(\delta_2))$$

Определение. Последовательность $\lambda = \{\lambda_{m,n}\}$ $(m,n \in N)$ неотрицательных чисел называется монотонно неубывающей (или невозрастающей) по каждому индексу, если

$$\lambda_{m+1,n} \ge \lambda_{m,n}, \text{для любого } m \in N \text{ при каждом фиксированном } n$$

$$\lambda_{m,n+1} \ge \lambda_{m,n}, \text{для любого } n \in N \text{ при каждом фиксированном } m$$

$$(\lambda_{m+1,n} \le \lambda_{m,n}, \text{для любого } m \in N \text{ при каждом фиксированном } n\,)$$

$$(\lambda_{m,n+1} \le \lambda_{m,n}, \text{для любого } m \in N \text{ при каждом фиксированном } m\,)$$

Через $S_p(\lambda_{m,n})(1 \le p < \infty)$ обозначим класс фукций, для которых

$$S_p(\lambda_{m,n}) = \left\{ f : \left\| \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \lambda_{k_1,k_2} |S_{k_1,k_2} - f|^p \right\| < \infty \right\}$$

где $\lambda = \{\lambda_{m,n}\}$ - монотонная (невозрастающая или неубывающая) последовательность неотрицательных чисел, через

$$\tau_{m,n} = \tau_{m,n}(f,x,y) = \frac{1}{mn}\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n} S_{k_1k_2}(x,y), m,n = 1,2,...$$

обозначим средние Валле-Пуссена.

Через $V_p(\lambda_{m,n})$ обозначим класс функций, удовлетворяющих условию

$$V_p(\lambda_{m,n}) = \left\{ f : \left\| \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \lambda_{k_1,k_2} |\tau_{k_1k_2} - f|^p \right\| \right\} < \infty$$

где $\lambda = \{\lambda_{m,n}\}$ - монотонная последовательность неотрицательных чисел.

Через $E_{m,n}(f)$ обозначим наилучшие приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не ниже (m,n) в метрике $C\,[0,2\pi)^2$.

Через K будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, разные в разных формулах.

Теорема 1. 1) Пусть $1 \le p < \infty$ и $\{\lambda_{m,n}\}$ монотонно неубывающая по каждому индексу последовательность неотрицательных чисел $\left(\lambda_{m,n} \le \lambda_{m',n'}, \text{где} \quad m \le m', n \le n'\right)$. Тогда имеет место

$$S_p(\lambda_{m,n}) \subset V_p(\lambda_{m,n}).$$

2)Пусть $1 \le p < \infty$ и $\{\lambda_{m,n}\}$ монотонно невозрастающая по каждому индексу последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условию

$$\frac{\lambda_{m,n}}{\lambda_{2m,2n}} \le K \quad m,n = 1,2,... \tag{1}$$

Тогда имеет место вложение

$$S_p(\lambda_{m,n}) \subset V_p(\lambda_{m,n}) \tag{2}$$

Теорема 2. Пусть $1 \le p < \infty$ и $\{\lambda_{m,n}\}$ монотонно неубывающая по каждому индексу последовательность неотрицательных чисел и $\omega_1(\delta_1)$, $\omega_2(\delta_2)$ модули непрерывности удовлетворяющие условию

$$\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{n}(k_1k_2\lambda_{k_1,k_2})^{-\frac{1}{p}} = O\left(mn\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{3}$$

Тогда имеет место следующее вложение

$$V_p(\lambda_{m,n}) \subset H^{\omega_1,\omega_2}.$$

Теорема 3. Пусть $a_{k_1,k_2} \ge 0 \quad (k_1,k_2 \in N)$ и пусть функция

$$f(x,y) \sim \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} a_{k_1,k_2} sin k_1 x k_2 y$$

принадлежит классу H^{ω_1,ω_2}. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{n} k_1k_2a_{k_1k_2} = O\left(mn\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Лемма А. ([1],стр 363) Для любых непрерывных функций $f(x,y)$ выполняется неравенство

$$\omega\left(f,\frac{1}{m}\frac{1}{n}\right) \le K\,(mn)^{-1}\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{n}E_{k_1,k_2}(f)$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $p \ge 1$. На основании неравенства Гельдера, имеем

$$|\tau_{m,n} - f|^p = \left[\frac{1}{mn}\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}|S_{k_1,k_2} - f|\right]^p \le \frac{1}{(mn)^p}\left\{\left(\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}|S_{k_1,k_2} - f|^p\right)^{\frac{1}{p}}(mn)^{\frac{p-1}{p}}\right\}^p =$$

$$= \frac{1}{(mn)^p}\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}|S_{k_1,k_2} - f|^p\,(mn)^{p-1} = \frac{1}{mn}\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}|S_{k_1,k_2} - f|^p.$$

Поэтому

$$|\tau_{m,n}-f|^p\le\frac{1}{mn}\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}|S_{k_1,k_2}-f|^p$$

Следовательно в силу монотонности последовательности $\lambda=\{\lambda_{m,n}\}$, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{m,n}\,|\tau_{m,n}-f|^p\le\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{m,n}}{mn}\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}|S_{k_1,k_2}-f|^p\le$$

$$\le\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=2}^{\infty}|S_{k_1,k_2}-f|^p\sum_{m=\left[\frac{k_1}{2}\right]}^{k_1-1}\sum_{n=\left[\frac{k_2}{2}\right]}^{k_2-1}\frac{\lambda_{m,n}}{mn}\le\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=2}^{\infty}|S_{k_1,k_2}-f|^p\,\lambda_{k_1,k_2}\frac{1}{\frac{k_1}{2}\frac{k_2}{2}}\frac{k_1}{2}\frac{k_2}{2}\le$$

$$\le\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=2}^{\infty}\lambda_{k_1,k_2}\,|S_{k_1,k_2}-f|^p\,.$$

Значит $S_p(\lambda_{m,n})\subset V_p(\lambda_{m,n})$

2) Если $\{\lambda_{m,n}\}$ монотонно невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, то учитывая неравенство (1), имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_m n}{mn}\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}|S_{k_1,k_2}-f|^p\le\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=2}^{\infty}|S_{k_1,k_2}-f|^p\sum_{m=\left[\frac{k_1}{2}\right]}^{k_1-1}\sum_{n=\left[\frac{k_2}{2}\right]}^{k_2-1}\frac{\lambda_{m,n}}{mn}\le$$

$$\le\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=2}^{\infty}|S_{k_1,k_2}-f|^p\,\lambda_{\frac{k_1}{2},\frac{k_2}{2}}\frac{1}{\frac{k_1}{2}\frac{k_2}{2}}\frac{k_1}{2}\frac{k_2}{2}\le$$

$$\le\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=2}^{\infty}|S_{k_1,k_2}-f|^p\,\lambda_{k_1,k_2}$$

Следовательно,

$$S_p(\lambda_{m,n})\subset V_p(\lambda_{m,n})\,.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $p\ge 1$ и пусть $f\in V_p(\lambda_{m,n})$. Учитывая, что $\tau_{2m,2n}$ - тригонометрический многочлен порядка $(4m,4n)$ и применяя неравенство Гельдера,а также учитывая монотонность последовательности $\lambda=\{\lambda_{m,n}\}$, получим

$$E_{4m,4n}(f)\le\left\|\frac{1}{mn}\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}|\tau_{k_1,k_2}-f|\right\|\le\left\|\frac{1}{mn}\left\{\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}|\tau_{k_1,k_2}-f|^p\right\}^{\frac{1}{p}}(mn)^{\frac{p-1}{p}}\right\|=$$

$$=\left\|\left\{\frac{1}{mn}\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}|\tau_{k_1,k_2}-f|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|\le\left\|\left\{\frac{1}{mn}\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}\frac{\lambda_{k_1,k_2}\,|\tau_{k_1,k_2}-f|^p}{\lambda_{k_1,k_2}}\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|=$$

$$=\left(\frac{1}{mn\lambda^*_{m,n}}\right)^{\frac{1}{p}}\left\|\left\{\sum_{k_1=m+1}^{2m}\sum_{k_2=n+1}^{2n}\lambda_{k_1,k_2}\,|\tau_{k_1,k_2}-f|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|\le K\left(mn\lambda^*_{m,n}\right)^{-\frac{1}{p}}$$

где $\lambda^*_{m,n}=min\left(\lambda_{m+1,n+1},\lambda_{2m,2n}\right)$.

Отсюда учитывая, что $\{\lambda_{m,n}\}$ не убывает или не возрастает по каждому индексу, имеем

$$E_{4^{\nu_1},4^{\nu_2}} \leq K\left(4^{\nu_1-1+\nu_2-1}\lambda_{4^{\nu_1-1},4^{\nu_2-1}}\right)^{-\frac{1}{p}}$$

Из этого неравенства, суммируя по ν_1 и ν_2 (предварительно умножив обе части этого неравенства на $4^{\nu_1+\nu_2}$) получим

$$\sum_{\nu_1=1}^{m}\sum_{\nu_2=1}^{n} 4^{\nu_1+\nu_2}E_{4^{\nu_1},4^{\nu_2}}(f) \leq K\sum_{\nu_1=0}^{m}\sum_{\nu_2=0}^{n}\left(4^{\nu_1+\nu_2}\lambda_{4^{\nu_1},4^{\nu_2}}\right)^{-\frac{1}{p}}4^{\nu_1+\nu_2}$$

Далее, согласно лемме А учитывая монотонность наилучшего приближения E_{ν_1,ν_2}, имеем

$$\omega\left(f,\frac{1}{4^m},\frac{1}{4^n}\right) \leq K\frac{1}{4^{m+n}}\sum_{k_1=1}^{4^m}\sum_{k_2=1}^{4^n}E_{k_1,k_2}(f) = K\frac{1}{4^{m+n}}\sum_{k_1=0}^{m-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{\nu_1=4^{k_1}}^{4^{k_1+1}-1}\sum_{\nu_2=4^{k_2}}^{4^{k_2+1}-1}E_{\nu_1,\nu_2} \leq$$

$$\leq K\frac{1}{4^{m+n}}\sum_{k_1=0}^{m-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}E_{4^{k_1},k_2}(f)4^{k_1+k_2} \leq K\frac{1}{4^{m+n}}\sum_{k_1=0}^{m-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\left(4^{\nu_1+\nu_2}\lambda_{4^{\nu_1},4^{\nu_2}}\right)^{-\frac{1}{p}}4^{\nu_1+\nu_2}$$

Но в силу того, что $\{\lambda_{\nu_1,\nu_2}\}$ не убывает, можно получить оценку

$$\sum_{k_1=1}^{4^m}\sum_{k_2=1}^{4^n}(k_1k_2\lambda_{k_1,k_2})^{-\frac{1}{p}} = \sum_{k_1=0}^{m-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\sum_{\nu_1=4^{k_1}}^{4^{k_1+1}-1}\sum_{\nu_2=4^{k_2}}^{4^{k_2+1}-1}(\nu_1\nu_2\lambda_{\nu_1,\nu_2})^{-\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq \sum_{k_1=0}^{m-1}\sum_{k_2=0}^{n-1}\left(\lambda_{4^{k_1+1},4^{k_2+1}}4^{k_1+1+k_2+1}\right)^{-\frac{1}{p}}4^{k_1+k_2} =$$

$$= K\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{n}\left(\lambda_{4^{k_1},4^{k_2}}4^{k_1+k_2}\right)^{-\frac{1}{p}}4^{k_1+k_2}$$

Следовательно,

$$\omega\left(f,\frac{1}{4^m},\frac{1}{4^n}\right) \leq K\frac{1}{4^{m+n}}\sum_{k_1=1}^{4^m}\sum_{k_2=1}^{4^n}(k_1k_2\lambda_{k_1,k_2})^{-\frac{1}{p}}$$

Теперь на основании условии (3), имеем

$$\omega\left(f,\frac{1}{4^m},\frac{1}{4^n}\right) \leq K\omega_1\left(\frac{1}{4^m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

Значит $f \in H^{\omega_1,\omega_2}$.

Доказательство теоремы 3. Ясно, что $f(0,0)=0, f(h_1,0)=f(0,h_2)=0$. Пусть $f \in H^{\omega_1,\omega_2}$. По условию теоремы выполняется неравенство

$$\omega(f,\delta_1,\delta_2) \leq K\omega_1(\delta_1)\omega_2(\delta_2)$$

а это означает, что выполняется неравенство

$$\sup_{\substack{0<h_1<\delta_1\\0<h_2<\delta_2}}\|f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1+h_1,x_2)-f(x_1,x_2+h_2)+f(x_1,x_2)\| \leq \omega_1(\delta_1)\omega_2(\delta_2)$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{0<t_1<x_1\\0<t_2<x_2}} f(t_1,t_2) \leq \omega_1(x_1)\omega_2(x_2) \quad \text{где} \quad 0<x_1<\pi, 0<x_2<\pi$$

.

Поэтому

$$4\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{a_{k_1,k_2}}{k_1k_2}sin^2\frac{k_1x_1}{2}sin^2\frac{k_2x_2}{2}=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{a_{k_1,k_2}}{k_1k_2}\int_0^{x_1}sink_1t_1dt_1\int_0^{x_2}sink_2t_2dt_2=$$

$$=\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}f(t_1,t_2)dt_1dt_2\le Kx_1x_2\omega_1(x_1)\omega_2(x_2).$$

Если $x_1=\frac{\pi}{m}, x_2=\frac{\pi}{n}$, тогда для всех $m,n=1,2,...$

$$(mn)^{-2}\sum_{k_1=0}^{m}\sum_{k_2=0}^{n}k_1k_2a_{k_1,k_2}=\sum_{k_1=0}^{m}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{a_{k_1,k_2}}{k_1k_2}\left(\frac{k_1k_2}{mn}\right)^2\le$$

$$\le\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{a_{k_1,k_2}}{k_1k_2}sin^2\frac{k_1\pi}{2m}sin^2\frac{k_2\pi}{2n}\le\frac{K}{mn}\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

Из этого следует

$$\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{n}k_1k_2a_{k_1k_2}\le K\left(mn\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Теорема 3 доказана.

Теоремы 1-3 является распространением на двумерный случай соответствующих результатов работы [2],[3].

ЛИТЕРАТУРА

1.А.Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного // Москва - 1960.-363 с.

2.L.Leindler and A.Meir, Embedding theorems and strong approximation //Acta Sci.Math.(Szeged)- 1984. -P.371-375.

3.V.G.Krotov and L.Leindler, On the strong summability of Fourier series and the classes H^ω //Acta Sci.Math.(Szeged)- 1978. - P.93-98.

Ж.Ж.Сірнебаева, М.С.Сауытбекова

Күшті жуықтаумен байланысқан кейбір функция класстарынң қарым-қатынасы

Бұл жұмыста кейбір функция класстарының ($V_p(\lambda_{m,n}), S_p(\lambda_{m,n}), H^{\omega_1,\omega_2}$) арасындағы қарым-қатынас зерттеледі. $\{\lambda_{m,n}\}$ тізбектеріне шарттар қою арқылы жұмыстын нәтижесін алдық.

Zh.Zh.Sirnebayeva, M.S. Sautbekova

About interrelation of some classes of the functions connected by strong approximation

In this work investigated interrelation of some classes of the functions ($V_p(\lambda_{m,n}), S_p(\lambda_{m,n}), H^{\omega_1,\omega_2}$) connected with strong approximation of double trigonometrical series. In quality decisions imposed conditions on sequence $\{\lambda_{m,n}\}$

Поступила в редакцию 11.01.12

Рекомендована к печати 19.01.12