((vspace2mm Модели бозонных струн с неканоническим кинетическим членом

(Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан)

В данной статье мы рассмотрели действие для бозонной струны с неканоническим кинетическим членом и модифицированное действие типа Намбу–Гото. Получили уравнения движения струны и условия связи для рассматриваемых действий.

Введение

Развитие фундаментальной физики в прошлом веке произошло в результате выявления и преодоления противоречий между существующими идеями. Например, несовместимость уравнений Максвелла и инвариантности Галилея, и несоответствие ньютоновской гравитации с результатами общей теории относительности привели Эйнштейна к созданию специальной теории относительности. То же самое случилось с объединением специальной теорией относительности и квантовой механикой, что привело к развитию квантовой теории поля. Сейчас, есть еще одно несоответствие: общая теория относительности и квантовая теория поля. Квантование гравитации, кажется, неперенормируемой теорией.

Теория струн является ведущим кандидатом на теорию, объединяющую все фундаментальные силы в природе в последовательной схеме. Таким образом, согласно теории струн необходимо отказаться от одного из основных положений квантовой теории поля – элементарных частиц, являющихся математическими точками, а вместо этого развивать квантовую теорию поля одномерных протяженных объектов, называемых струнами [1]. Теория струн все еще развивается, и на ее основе еще нет полного описания стандартной модели элементарных частиц. Однако есть некоторые важные особенности, которые могут быть универсальными для всякого рода теорий струн: во-первых, и самое главное, это то, что общая теория относительности уже включена в теорию. Хотя обычная квантовая теория поля не допускает гравитацию, теория струн требует этого. Второй факт состоит в том, что калибровочная теория Янга-Миллса вроде той, что составляет стандартную модель естественно возникает в теории струн, но пока нет полного понимания того, почему мы должны предпочитать конкретные $SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)$ калибровочные теории [2].

1. Модель с неканоническим кинетическм членом

В простейшем случае струна описывается ее d-мерными координатами Минковского $x^\mu(\sigma,\tau)$. Параметры σ и τ задают точки на мировом листе, которые струна заметает при своем движении; σ — координата вдоль пространственноподобного направления, а τ — вдоль времениподобного [1].

Введем метрику на мировом листе $h_{\alpha\beta}$, обратную метрику обозначим $h^{\alpha\beta}$ ($\alpha,\beta=0,1$). Действие для бозонной струны с неканоническим кинетическим членом имеет вид

$$S=-T\int d\sigma\ d\tau\sqrt{-h}\ K(Z), \tag{1}$$

где $h=\mathtt{det}\,(h_{\alpha\beta})$, T — постоянный множитель (необходимый для того, чтобы поле X^μ имело размерность длины), который оказывается равным натяжению струны, K является некоторой функцией ее аргументов. Здесь

$$Z=\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu. \tag{2}$$

Чтобы получить уравнения движения для релятивистской струны найдем вариацию действия

(1) относительно x^μ

$$\delta S = -T\int d\sigma\ d\tau\sqrt{-h}K_Z\delta Z =$$

$$= -T\int d\sigma\ d\tau\sqrt{-h}K_Z(Z_{\partial_\alpha x^\mu}\delta\partial_\alpha x^\mu + Z_{\partial_\beta x^\mu}\delta\partial_\beta x^\mu) =$$

$$= -T\int d\sigma\ d\tau\sqrt{-h}[(K_Z Z_{\partial_\alpha x^\mu}\delta x^\mu)_\alpha - (K_Z Z_{\partial_\alpha x^\mu})_\alpha\delta x^\mu + (K_Z Z_{\partial_\beta x^\mu}\delta x^\mu)_\beta - \tag{3}$$

$$-(K_Z Z_{\partial_\beta x^\mu})_\beta\delta x^\mu] = -T\int d\sigma\ d\tau\sqrt{-h}[(K_Z Z_{\partial_\alpha x^\mu}\delta x^\mu)_\alpha + (K_Z Z_{\partial_\beta x^\mu}\delta x^\mu)_\beta -$$

$$-(K_{ZZ}[Z_\alpha Z_{\partial_\alpha x^\mu} + Z_\beta Z_{\partial_\beta x^\mu}] + K_Z[(Z_{\partial_\alpha x^\mu})_\alpha + (Z_{\partial_\beta x^\mu})_\beta])\delta x^\mu].$$

Из (3) уравнения движения примут вид

$$K_{ZZ}[Z_\alpha Z_{\partial_\alpha x^\mu} + Z_\beta Z_{\partial_\beta x^\mu}] + K_Z[(Z_{\partial_\alpha x^\mu})_\alpha + (Z_{\partial_\alpha x^\mu})_\beta] = 0 \tag{4}$$

или

$$K_{ZZ}[\dot{Z}Z_{\dot{x}^\mu} + Z'Z_{x'^\mu}] + K_Z[(Z_{\dot{x}^\mu})_\tau + (Z_{x'^\mu})_\sigma] = 0, \tag{5}$$

где точка означает дифференцирование по τ, а штрих дифференцирование по σ. Так как $\alpha, \beta = 0, 1$ выражение (2) можно записать в виде

$$Z = \frac{1}{2}(h^{00}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu + h^{01}\dot{x}^\mu x'_\mu + h^{10}x'^\mu\dot{x}_\mu + h^{11}x'^\mu x'_\mu) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x'^2), \tag{6}$$

где компоненты метрики $h_{\alpha\beta}$ имеют вид

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ двумерная метрика пространства Минковского. Следовательно уравнения движения (5) примут вид

$$K_{ZZ}[(\dot{x}^\nu\ddot{x}_\nu - x'^\nu\dot{x}'_\nu)\dot{x}^\mu - (\dot{x}^\nu\dot{x}'_\nu - x'^\nu x''_\nu)x'^\mu] + K_Z(\ddot{x}^\mu - x''^\mu) = 0. \tag{8}$$

Формула для нахождения тензора энергии-импульса имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{-h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}. \tag{9}$$

Найдем вариацию действия (1) относительно $h^{\alpha\beta}$

$$\delta S_{h^{\alpha\beta}} = -T\int d\sigma\ d\tau[K\delta\sqrt{-h} + \sqrt{-h}\delta K]. \tag{10}$$

Для оценки вариации действия, полезны следующие формулы

$$\delta h = -h\, h_{\alpha\beta}\delta h^{\alpha\beta} \tag{11}$$

откуда следует, что

$$\delta\sqrt{-h} = -\frac{1}{2}\sqrt{-h}\, h_{\alpha\beta}\delta h^{\alpha\beta} \tag{12}$$

и

$$\delta K = K_Z\delta Z = K_Z Z_{h^{\alpha\beta}}\delta h^{\alpha\beta}. \tag{13}$$

Следовательно (10) примет вид

$$\delta S_{h^{\alpha\beta}} = -T\int d\sigma\ d\tau\sqrt{-h}[-\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}K + K_Z Z_{h^{\alpha\beta}}]\delta h^{\alpha\beta}. \tag{14}$$

Тензор энергии–импульса (9) для бозонной струны с неканоническим кинетическим членом примет вид

$$T_{\alpha\beta} = 2K_Z Z_{h_{\alpha\beta}} - h_{\alpha\beta}K = \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu K_Z - h_{\alpha\beta}K. \tag{15}$$

Уравнения движения (8) должны быть дополнены условиями связей $T_{\alpha\beta} = 0$

$$T_{00} = \partial_0 x^\mu \partial_0 x_\mu K_Z - h_{00}K = 0, \tag{16}$$

$$T_{11} = \partial_1 x^\mu \partial_1 x_\mu K_Z - h_{11}K = 0, \tag{17}$$

$$T_{10} = \partial_1 x^\mu \partial_0 x_\mu K_Z - h_{10}K = 0, \tag{18}$$

$$T_{01} = \partial_0 x^\mu \partial_1 x_\mu K_Z - h_{01}K = 0 \tag{19}$$

или учитывая (6)–(7) условия связей (16)–(19) примут вид

$$T_{00} = \dot{x}^2 K_Z - K = 0, \tag{20}$$

$$T_{11} = x'^2 K_Z + K = 0, \tag{21}$$

$$T_{01} = T_{10} = \dot{x}^\mu x'_\mu K_Z = 0. \tag{22}$$

Из (8), (20)–(21) и (22) следует система уравнений состоящая из уравнения движения и условий связи

$$K_{ZZ}[(\dot{x}^\nu \ddot{x}_\nu - x'^\nu \dot{x}'_\nu)\dot{x}^\mu - (\dot{x}^\nu \dot{x}'_\nu - x'^\nu x''_\nu)x'^\mu] + K_Z(\ddot{x}^\mu - x''^\mu) = 0. \tag{23}$$

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0, \tag{24}$$

$$\dot{x}x' = 0. \tag{25}$$

2. Действие типа Намбу-Гото

Струна представляет собой одномерный протяженный объект. Поэтому траекторией струны является двумерная поверхность в пространстве времени. Обобщая случай релятивистской частицы, приходим к выводу, что свободная струна (со свободными концами, если она открытая) описывается поверхностью со следующими свойствами:
1. Поверхность является времениподобной, т.е. всюду на поверхности (за исключением, может быть, граничных точек) можно выбрать два направления времениподобное и пространственноподобное.
2. Поверхность имеет экстремальную площадь, т.е. является "экстремальной поверхностью". Квадрат интервала между двумя близкими событиями, различающимися координатами dx^i, в евклидовом пространстве задается формулой [3]

$$ds^2 = dx^i dx^j, \tag{26}$$

где

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial\sigma}d\sigma + \frac{\partial x^i}{\partial\tau}d\tau = x'^i d\sigma + \dot{x}^i d\tau. \tag{27}$$

Тогда

$$ds^2 = (x'^i d\sigma + \dot{x}^i d\tau)(x'^j d\sigma + \dot{x}^j d\tau) = x'^i x'^j d\sigma^2 + \dot{x}^i \dot{x}^j d\tau^2 + (x'^i \dot{x}^j + \dot{x}^j x'^j) d\sigma d\tau =$$
$$= \dot{x}^2 d\tau^2 + 2x'\dot{x} d\sigma d\tau + x'^2 d\sigma^2 = g_{00} d\tau^2 + 2g_{01} d\tau d\sigma + g_{11} d\sigma^2, \quad (28)$$

где $g_{00} = \dot{x}^2$, $g_{01} = \dot{x}x'$, $g_{11} = x'^2$.

Для релятивистской бозонной струны Намбу и Гото предложили действие, которое пропорционально площади мировой поверхности в пространстве–времени, заметаемой струной в процессе ее движения [4]

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-g}, \quad (29)$$

где g – детерминант матрицы g_{ik} , который отрицателен, так как g_{ik} имеет сигнатуру $(+, -)$. Из (28) следует

$$g = \begin{vmatrix} \dot{x}^2 & \dot{x}x' \\ \dot{x}x' & x'^2 \end{vmatrix} = \dot{x}^2 x'^2 - (\dot{x}x')^2. \quad (30)$$

Действие Намбу-Гото, описывающее струну

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}. \quad (31)$$

Возьмем действие в виде

$$S = -T \int d\tau d\sigma K(Z), \quad (32)$$

где

$$Z = \sqrt{-g} = \sqrt{g_{01}^2 - g_{00} g_{11}} = \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}. \quad (33)$$

Чтобы получить уравнения движения для релятивистской струны из вариационного принципа, будем варьировать действие (32). В результате получим

$$\delta S = \int d\tau d\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu + \frac{\partial L}{\partial x'^\mu} \delta x'^\mu \right) = 0, \quad (34)$$

где $L = -TK(Z)$ является лагранжианом.

Используем формулу Стокса (или формулу Грина) [3]

$$\int d\tau d\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{\partial P}{\partial \sigma} \right) = \oint (P d\tau + Q d\sigma). \quad (35)$$

Полагая в (35)

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu, \ P = -\frac{\partial L}{\partial x'^\mu} \delta x^\mu \quad (36)$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu, \quad (37)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = -\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial x'^{\mu}}\right)\delta x^{\mu} - \frac{\partial L}{\partial x'^{\mu}}\delta x'^{\mu}, \tag{38}$$

преобразуем уравнение (34) к следующему виду

$$\delta S = \oint \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} d\sigma - \frac{\partial L}{\partial x'^{\mu}} d\tau\right]\delta x^{\mu} - \int d\tau d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial x'^{\mu}}\right)\right]\delta x^{\mu} = 0. \tag{39}$$

Из (39) получаем уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial x'^{\mu}}\right) = 0 \tag{40}$$

и граничные условия

$$\oint \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} d\sigma - \frac{\partial L}{\partial x'^{\mu}} d\tau\right]\delta x^{\mu} = 0. \tag{41}$$

Запишем уравнения движения (40) подставив туда лагранжиан

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(K_Z Z_{\dot{x}^{\mu}}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(K_Z Z_{x'^{\mu}}\right) = 0 \tag{42}$$

или

$$K_{ZZ}[\dot{Z} Z_{\dot{x}^{\mu}} + Z' Z_{x'^{\mu}}] + K_Z[(Z_{\dot{x}^{\mu}})_{\tau} + (Z_{x'^{\mu}})_{\sigma}] = 0. \tag{43}$$

На решения системы уравнений (43) обычно накладываются два условия

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0, \quad \dot{x}x' = 0 \tag{44}$$

или, что эквивалентно,

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 0. \tag{45}$$

С геометрической точки зрения условия (44) означают, что на мировой поверхности струны выбрана изометрическая или конформноплоская система криволинейных координат τ , σ . В теории релятивистской струны эти условия называют ортонормированной калибровкой [3].

Внутренняя метрика на мировой поверхности струны (28) при выполнении условий (44) принимает вид

$$ds^2 = \lambda(\tau, \sigma)[(d\tau)^2 - (d\sigma)^2], \tag{46}$$

где $\lambda(\tau, \sigma) = g_{00}(\tau, \sigma) = -g_{11}(\tau, \sigma)$, $g_{01}(\tau, \sigma) = g_{10}(\tau, \sigma) = 0$.

Запишем уравнения движения (43) подставив туда (33)

$$K_{ZZ}[(\dot{x}^{\nu}\ddot{x}_{\nu} - x'^{\nu}\dot{x}'_{\nu})\dot{x}^{\mu} - (\dot{x}^{\nu}\dot{x}'_{\nu} - x'^{\nu}x''_{\nu})x'^{\mu}] + K_Z(\ddot{x}^{\mu} - x''^{\mu}) = 0. \tag{47}$$

Мы получили систему уравнений состоящую из уравнения движения (47) и условий ортонормированной калибровки (44) аналогичную системе (23)–(25)

$$K_{ZZ}[(\dot{x}^{\nu}\ddot{x}_{\nu} - x'^{\nu}\dot{x}'_{\nu})\dot{x}^{\mu} - (\dot{x}^{\nu}\dot{x}'_{\nu} - x'^{\nu}x''_{\nu})x'^{\mu}] + K_Z(\ddot{x}^{\mu} - x''^{\mu}) = 0. \tag{48}$$

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0, \tag{49}$$

$$\dot{x}x' = 0. \tag{50}$$

Заключение

В данной статье мы ввели действие для бозонной струны с неканоническим кинетическим членом и модифицированное действие типа Намбу–Гото. Получили уравнения движения струны и условия связи для рассматриваемых действий. В обоих случаях получились аналогичные результаты, что подтверждает правильность полученных уравнений движения струны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бринк Л., Энно М. Принцип теории струн. М.:Мир. – 1991. – 296 с.
2. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ. – 1987. – 176 с.
3. Барбашов Б. М., Нестеренко В. В. *Суперструны – новый подход к единой теории фундаментальных взаимодействий* // Успехи физических наук. – М. – 1986. – Том 150, №4. – с. 489-524.
4. Разина О.В. *Уравнения движения точечной частицы и релятивистской струны* // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. – Серия естественно-технических наук. – 2010. – №6(79). – с. 255-258.

Разина О.В., Ержанов К.К.

Канондық емес кинетикалық мүшесі бар бозондық ішек модельдері

Осы мақалада біз канондық емес кинетикалық мүшесі бар бозондық ішек модельдері үшін және Намбу-Гото типіндегі модификацияланған әсерлерді қарастардық. Қарастырылған әсерлер үшін ішек қозғалысының теңдеуін алдық.

Razina O.V., Yerzhanov K.K.

Bosonic string models with non-canonical kinetic term

In this paper we consider the action for the bosonic string with non-canonical kinetic term and a modified type of the Nambu - Goto action. Equations of motion of the string and connection conditions for the considered action.

Поступила в редакцию 11.10.2011

Рекомендована к печати 18.10.2011