

Н.А. Испулов, А.К. Сейтханова

Коэффициенты затухания и скорости тепловых и упругих волн в анизотропной среде ромбической сингонии

(Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г.Павлодар, Казахстан)

Актуальность исследования закономерностей волновых процессов в упругих средах с термомеханическим эффектом связана с необходимостью решения теоретических и прикладных задач геофизики, сейсмологии, механики композитных материалов и т.д. Связанные уравнения движения и уравнения теплопроводности отличаются сложностью и обилием физико-механических параметров. В связи с этим интенсивно развивается раздел механики деформируемого твердого тела, - термоупругость. В рамках этого направления, опираясь на использование определенных физико-механических свойств анизотропных средах, изучаются связанные тепловые и механические поля. В данной работе, на основе метода матрицанта, определены виды зависимостей скоростей и коэффициентов затухания, связанных термоупругих волн от частоты; построены качественные графические зависимости скоростей и коэффициентов затухания упругих и тепловых волн от частоты, при изменении параметров среды (термомеханического параметра, температуры и коэффициента теплопроводности).

Матрица коэффициентов B (если параметры среды постоянны) в случае распространения одномерной термоупругой волны в анизотропной среде ромбической сингонии имеет вид [1]:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

здесь, коэффициенты b_{ij} равны:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}; b_{17} = \frac{\beta_{33}}{c_{33}}; b_{21} = -\omega^2 \rho; b_{87} = -i\omega \left(\frac{\beta_{33}^2}{c_{33}} + c_\epsilon \right); b_{78} = -\frac{1}{\lambda_{33}}.$$

Учитывая условие [2]:

$$\det |B - \lambda E| = 0 \quad (2)$$

для данной задачи получим характеристическое уравнение в виде:

$$\lambda^4 - B\lambda^2 + C = 0 \quad (3)$$

где $B = b_{12}b_{21} + b_{78}b_{87}$, $C = b_{21}b_{78}(i\omega b_{17}^2 + b_{12}b_{87})$

Из (3) получаем:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(b_{12}b_{21} + b_{78}b_{87}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87})^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21}b_{78}} \quad (4)$$

Если допустить, что упругая продольная и тепловые волны распространяются несвязанно, т.е. термомеханические параметры $\beta_{ij} = 0$, тогда корни характеристического уравнения (3) будут равны:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}}; \lambda_{3,4} = \pm i\omega \sqrt{\frac{i\omega c_\epsilon}{\lambda_{33}}}; \quad (5)$$

Из первого корня соотношения (5) следует скорость упругой продольной волны, которая будет распространяться с затуханием; второе соотношение определяет тепловую волну.

Из соотношения (4) получим четыре корня характеристического уравнения (3), имеющие вид:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a}{2} \left(1 + \frac{2b - \frac{c}{a}}{\sqrt{2}\sqrt{D-x}} \right) + \frac{1}{2}i \left(b - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{D-x} \right)};$$

$$k_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{a}{2} \left(1 - \frac{2b - \frac{c}{a}}{\sqrt{2}\sqrt{D-x}}\right) + \frac{1}{2}i \left(b + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{D-x}\right)}; \quad (6)$$

где $a = b_{12}b_{21}$; $b = b_{78}b_{87}$; $c = 4i\omega b_{17}^2 b_{21}b_{78}$; $D = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + (2ab - c^2)}$

В корнях (6) уже учитывается эффект связанности упругой и тепловой волн, т.е. $\beta_{ij} \neq 0$.
Перепишем $k_{1,2}$ в (6) в следующем виде:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{x_1 + iy_1} = \sqrt[4]{x_1^2 + y_1^2} (\cos \psi + i \sin \psi) \quad (7)$$

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{x_1 + iy_1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{y_1}{\sqrt{D_1 + x_1}} + i \sqrt{D_1 + x_1} \right) \quad (8)$$

где $D_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $x_1 = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{2b - \frac{c}{a}}{\sqrt{2}\sqrt{D-x}}\right)$; $y_1 = \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{D-x}\right)$

Корни $k_{3,4}$ в (6) равны:

$$k_{3,4} = \pm \sqrt{x_2 + iy_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{y_2}{\sqrt{D_2 + x_2}} \pm i \sqrt{D_2 + x_2} \right) \quad (9)$$

где

$$x_2 = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{2b - \frac{c}{a}}{\sqrt{2}\sqrt{D-x}}\right); \quad y_2 = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{D-x}\right)$$

В явном виде корни (8) и (9) имеют вид:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c_\varepsilon \omega}{2\lambda_{33}}} (1 + i) \left[1 + \frac{\lambda_{33}}{2} \left(\frac{i\omega c_\varepsilon \rho \lambda_{33} T_0^2 + c_{33}^3}{\rho^2 \omega^3 \lambda_{33}^2 T_0^2 + \omega c_\varepsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right] \quad (10)$$

$$k_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{c_{33}}} \left(1 - \frac{i\omega}{2c_{33} \lambda_{33}} \left(\frac{\rho \omega c_{33} \lambda_{33}^2 T_0^2 - i c_\varepsilon c_{33}^2 \lambda_{33} T_0}{\rho^2 \omega^3 \lambda_{33}^2 T_0^2 + \omega c_\varepsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right) \quad (11)$$

Рассмотрим корень k_1 в соотношениях (10).

Действительная и мнимая части этого корня равны:

$$\text{Re} k_1 = \sqrt{\frac{c_\varepsilon \omega}{2\lambda_{33}}} \left(1 + \frac{\lambda_{33}}{2} \left(\frac{c_{33}^2 - \omega c_\varepsilon \rho \lambda_{33} T_0^2}{\rho^2 \omega^3 \lambda_{33}^2 T_0^2 + \omega c_\varepsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right) \quad (12)$$

$$\text{Im} k_1 = i \sqrt{\frac{c_\varepsilon \omega}{2\lambda_{33}}} \left(1 + \frac{\lambda_{33}}{2} \left(\frac{\omega c_\varepsilon \rho \lambda_{33} T_0^2 + c_{33}^3}{\rho^2 \omega^3 \lambda_{33}^2 T_0^2 + \omega c_\varepsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right) \quad (13)$$

Из мнимой части корня k_1 получим формулу для скорости тепловой волны:

$$c = \frac{k_1}{\omega} = \sqrt{\frac{2\lambda_{33} T \omega}{c_\varepsilon}} \left[1 - \frac{\lambda_{33}}{2} \left(\frac{\omega c_\varepsilon \rho \lambda_{33} T_0^2 + c_{33}^3}{\rho^2 \omega^2 \lambda_{33}^2 T_0^2 + c_\varepsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right] \quad (14)$$

Действительная часть этого корня позволяет получить коэффициент затухания тепловой волны:

$$k_{zat} = \sqrt{\frac{\omega c_\varepsilon}{2\lambda_{33}}} \left[1 + \frac{\lambda_{33}}{2} \left(\frac{c_{33}^2 - \omega c_\varepsilon \rho \lambda_{33} T_0^2}{\rho^2 \omega^2 \lambda_{33}^2 T_0^2 + c_\varepsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right] \quad (15)$$

Рассмотрим теперь положительный корень k_3 в соотношениях (11). Действительная и мнимая части которого, соответственно, позволяют получить коэффициент затухания и скорость упругой волны:

$$k_{zat} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}} \left(\frac{\rho \omega^3 c_{33} \lambda_{33} T_0^2}{\rho^2 \omega^2 \lambda_{33}^2 T_0^2 + c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \quad (16)$$

$$c = \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{c_{\epsilon} c_{33} T_0}{\rho^2 \omega^2 \lambda_{33}^2 T_0^2 + c_{\epsilon}^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right) \quad (17)$$

В результате из корней (10), (11) построены качественные графические зависимости скоростей и коэффициентов затухания упругих и тепловых волн от частоты, при изменении параметров среды (термомеханического параметра, температуры), представленные ниже.

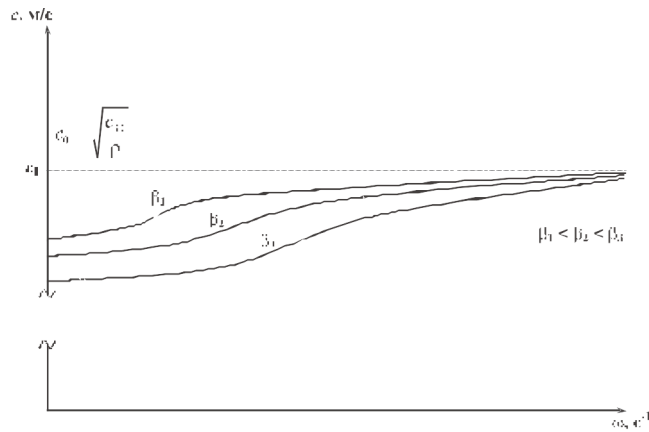


Рисунок 1 - График зависимости скорости с упругой продольной волны от частоты при различных термомеханических параметрах β_{ij}

Из приведенного графика зависимости, видно, что при увеличении термомеханического параметра скорость упругой продольной волны уменьшается.

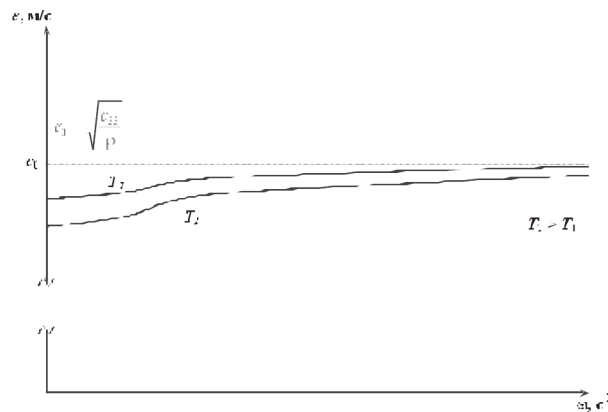


Рисунок 2 - График зависимости скорости с упругой продольной волны от частоты при различных температурах

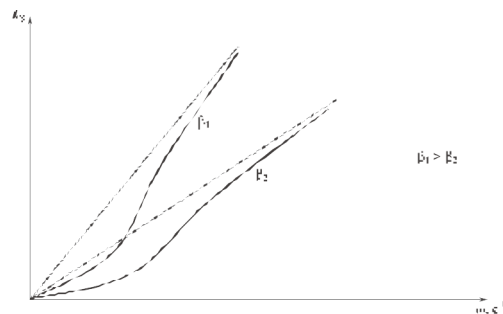


Рисунок 3 - График зависимости коэффициента затухания k_3 упругой продольной волны от частоты при различных термомеханических параметрах β_{ij}

Данный график зависимости свидетельствует о том, что с увеличением термодинамической температуры скорость упругой продольной волны уменьшается. Это связано с воздействием колебаний узлов кристаллической решетки на скорость волны.

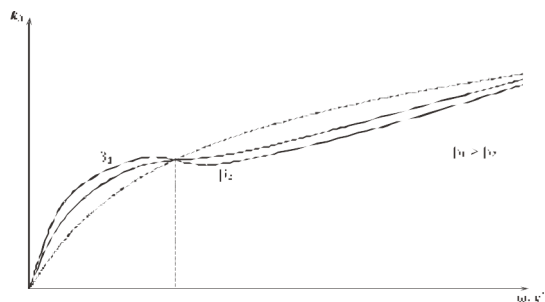


Рисунок 4 - График зависимости коэффициента затухания k_3 тепловой волны от частоты при различных термомеханических параметрах β_{ij}

Из последнего графика зависимости следует, что увеличение термомеханического параметра приводит к затуханию тепловой волны в анизотропной среде. При определенной частоте ω_0 , выводимой из формулы (15), не происходит взаимовлияния тепловой и упругой волны, т.е. волны распространяются без термоупругого эффекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.К. Тлеукунов, М.К. Кудерин, В.А. Козионов, Н.А. Испулов Е.К. Баяубаев, А.К. Сейтханова Динамические и термодинамические процессы в скальных грунтах и строительных конструкциях. Монография под ред. академика АЕН, д.ф.-м.н., профессора С.К. Тлеукунова.- Павлодар, 2006.
2. Тлеукунов С.К. Метод матрицанта. - Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. - 148 с.
3. Ш.М. Айталиев, С.К. Тлеукунов, А.К. Сейтханова / 4 класты тетрагоналды сингониялы анизотропты ортада термосерпімді толғындардың таралуы туралы. Вестник КазНПУ им. Абая, Серия механика, физика, информатика, Алматы, 2007.
4. Тлеукунов С.К., Испулов Н.А., Сейтханова А.К. О распространении термоупругих волн в анизотропной среде ромбической сингонии классов 222 и mm^2 . Механика и машиноведение, Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова МОН РК, №3, С. 102-106, Алматы, 2008 .

Испулов Н.А., Сейтханова А.К.

Анизотропты ортаның ромбылық сингониядағы жылулық және серпімді толқындардың үшу коэффициенттері мен жылдамдықтар

Термомеханикалық эффектімен болатын серпімді орталарда толқындық процестердің заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептерді шешуінде қажеттілігімен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулері мен жылөткізгіштік теңдеулері физика-механикалық параметрлердің күрделілігі мен көп болуымен ерекшеленеді. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының - термосерпімділік деген тарауы қарқынды дамып келеді. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбір физика-механикалық қасиеттерін қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрістер зерттеледі.

Берілген жұмыста, матрицант әдісінің негізінде, жиілікке тәуелді байланысқан термосерпімді толқындардың жылдамдықтары мен өшу коэффициенттерінің тәуелділіктердік түрлері анықталған; серпімді және жылу толқындардың (термомеханикалық параметрлердің аздығы кезіндегі) жылдамдықтардың және өшу коэффициенттерінің температураына, жылуөткізгіштік коэффициентінің және жиіліктің өзгерісіне тәуелділігінің сапалы графиктері сызылды.

N.A. Ispulov, A.K. Seythanova

Coefficients of quenching and velocities thermal and elastic waves in an anisotropic medium of trimetric system

The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical-mechanical

parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical-mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied.

In given article on the basis of a method matrizant, kinds of dependences of speeds and factors of the attenuation, the connected thermoelastic waves from frequency are defined; the quality graphs of the dependence of decay rates and attenuation coefficients of elastic and thermal waves (under small thermomechanical parameter) on the changes of temperature, heat conductivity tensor and frequency have been plotted.

Поступила в редакцию 12.05.11

Рекомендована к печати 31.05.11