Р. Ж. Наурызбаев

Определяющие соотношения группы почти ручных автоморфизмов свободных метабелевых алгебр Ли от трех переменных

(*Евразийский Национальный университет им. Л.Н.Гумилева, г. Астана, Казахстан*)

Описаны определяющие соотношения группы почти ручных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли от трех порождающих.

Введение

Известно, что автоморфизмы свободных алгебр Ли конечного ранга являются ручными [1]. Более того, этот результат был обобщен для свободных алгебр многобразий Нильсена-Шрайера [2]. Определяющие соотношения группы автоморфизмов конечнопорожденных свободных алгебр многобразий Нильсена-Шрайера описаны в [3].

В [4] доказано существование диких автоморфизмов алгебры многочленов от трех переменных над полем характеристики 0. Определяющие соотношения группы ручных автоморфизмов алгебры многочленов от трех переменных над полем характеристики 0 описаны в [5].

В работе [6] была определена группа почти ручных автоморфизмов свободных метабелевых алгебр Ли ранга 3, которая содержит в качестве подгруппы группу ручных автоморфизмов и является аналогом автоморфизмов, рассмотренных в [7].

В работе [8] описаны определяющие соотношения группы ручных автоморфизмов свободных метабелевых алгебр Ли ранга 3.

Настоящая работа посвящена описанию системы определяющих соотношений группы почти ручных автоморфизмов свободных метабелевых алгебр Ли ранга 3.

Автор благодарит своего научного руководителя, профессора У.У.Умирбаева за постановку задачи и за поддержку при работе над проектом, а также доцента К. Ахметжановой за помощь при оформлении работы.

Определяющие соотношения

Пусть M_n — свободная метабелева алгебра Ли над полем k со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $AutM_n$ — группа автоморфизмов этой алгебры. Через $\varphi = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ обозначим автоморфизм алгебры M_n такой, что $\varphi(x_i) = f_i, 1 \le i \le n$. Автоморфизмы вида

$$\sigma(i, \alpha, f) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \ldots x_n),$$

где $0 \neq \alpha \in k, f \in< x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n >$, называются *элементарными.* Подгруппа $TA(M_n)$ группы $AutM_n$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов.*

Назовем автоморфизмы вида

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, f, x_{i+1}, \ldots x_n),$$

где $f \in M_n$, *почти элементарными.* Подгруппу $AT(M_n)$ группы $Aut\, M_n$, порожденную всеми почти элементарными автоморфизмами, назовем *подгруппой почти ручных автоморфизмов.* Из определения следует, что $TA(M_n) \subset AT(M_n)$, более того, это включение является строгим (см. [6]) при $n = 3$.

Пусть $A_n = M_n/[M_n, M_n]$ – максимальный абелев фактор алгебры M_n и $U(A_n)$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры A_n, т.е. алгебра многочленов от n переменных. Для любого $f \in M_n$ через $\widehat{f}$ будем обозначать его прообраз в $A_n \subset U(A_n)$. Линейное отображение $\partial/\partial x_j : M_n \to U(A_n), 1 \le j \le n$, такое, что

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial [f, g]}{\partial x_j} = \widehat{f}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \widehat{g}\frac{\partial f}{\partial x_j},$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, $f, g \in M_n$, является дифференцированием алгебры M_n со значением в $U(A_n)$ и называется частной производной по x_j (см. [9]).

В [6] доказано, что эндоморфизм $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, f, x_{i+1}, \ldots x_n)$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда f можно представить в виде суммы $f = \alpha x_i + g$, где $0 \neq \alpha \in k, g \in M_n, \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$. Этот автоморфизм мы будем обозначать через

$$\delta(i, \alpha, g) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i + g, x_{i+1}, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Далее, для каждой пары целых чисел k, s из $\{1, 2, \ldots n\}$ положим

$$(ks) = \delta(s, -1, x_k)\delta(k, 1, -x_s)\delta(s, 1, x_k).$$

Автоморфизм (ks) отображает x_k на x_s и x_s на x_k, а все остальные x_i оставляет на месте.

Выделим некоторые соотношения группы почти ручных автоморфизмов относительно систем порождающих (1). Легко проверить, что имеют место следующие соотношения:

$$\delta(i, \alpha, f)\delta(i, \beta, g) = \delta(i, \alpha\beta, \beta f + \delta(i, \alpha, f)(g)); \tag{2}$$

$$\delta(i, \alpha, f)\delta(j, \beta, g) = \delta(j, \beta, g)\delta(i, \alpha, \delta(j, \beta, g)^{-1}(f)), \tag{3}$$

где $i \neq j$, g не зависит от x_i и x_j;

$$\delta(i, \alpha, f)^{(ks)} = \delta(j, \alpha, (ks)(f)), \tag{4}$$

где $j = (ks)_{S_n}(i)$ и $(ks)_{S_n}$ – элемент группы подстановок S_n, который отображает k на s и s на k, а все остальные i оставляет на месте.

Заметим, что соотношение (3) записывается также в виде

$$\delta(i, \alpha, f)\delta(j, \beta, g) = \delta(j, \beta, \delta(i, \alpha, f)(g))\delta(i, \alpha, f), \tag{5}$$

где $i \neq j$, f не зависит от x_i и x_j. В некоторых случаях, мы будем использовать (5) вместо (3).

В [8] доказана

Лемма 1 *Соотношения (2)–(4) для элементарных линейных автоморфизмов являются определяющими соотношениями подгруппы линейных автоморфизмов группы* $TA(M_n)$.

Основной результат

Пусть M_3 — свободная метабелева алгебра Ли над полем k со свободными порождающими x_1, x_2, x_3. Степень $\deg f$ и старшая однородная часть $\overline{f}$ элемента $f \in M_3$ определяются стандартным способом. Для автоморфизма $\theta = (f_1, f_2, f_3) \in Aut\, M$ число

$$\deg\theta = \deg f_1 + \deg f_2 + \deg f_3$$

назовем *степенью* θ. Преобразование тройки (f_1, f_2, f_3), которое заменяет только один элемент f_i на элемент вида $\alpha f_i + g$, где $0 \neq \alpha \in k, g \in M_n, \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$, называется *почти элементарным.* Запись $\theta \mapsto \phi$ означает, что тройка ϕ получается из θ с помощью одного почти элементарного преобразования. В [6] доказана следующая

Лемма 2 *Пусть* $\theta = (f_1, f_2, f_3)$ *- почти ручной автоморфизм алгебры* M_3 *и* g *некоторый ненулевой элемент из* $[M_3, M_3]$ *такой, что* $\frac{\partial g}{\partial x_3} = 0$, *тогда*

$$\deg g(f_1, f_2, f_3) = \deg f + \max\{\deg f_1, \deg f_2\} - 1.$$

Теорема 1 *Соотношения (2)–(4) являются определяющими соотношениями группы почти ручных автоморфизмов $AT(M_3)$ с системой порождающих (1).*

Доказательство. Пусть
$$\delta_1\delta_2\dots\delta_s = id \tag{6}$$
произвольное соотношение между почти элементарными автоморфизмами $\delta_i, 1 \le i \le s$. Положим
$$\theta_i = \delta_1\delta_2\dots\delta_i, 1 \le i \le s.$$
Для наглядности изложения, соотношение (6) мы будем записывать в виде последовательности почти элементарных преобразований
$$id = \theta_0 \overset{\delta_1}{\mapsto} \theta_1 \overset{\delta_2}{\mapsto} \dots \overset{\delta_s}{\mapsto} \theta_s = id.$$
Положим $d = \max\{\deg\theta_i, 0 \le i \le s\}$. Пусть i_1, i_2 — минимальный и максимальный номера соответственно, для которых выполняется равенство $\deg\theta_{i_1} = \deg\theta_{i_2} = d$. Положим $q = i_2 - i_1$. Пару (d, q) назовем показателем соотношения (6) и упорядочим лексиграфически следующим образом: положим $(d_1, q_1) < (d_2, q_2)$, если $d_1 < d_2$ или $d_1 = d_2, q_1 < q_2$.

Назовем соотношение (6) тривиальным, если оно следует из (2)–(4).

Нам нужно показать, что соотношение (6) является тривиальным. Допустим, что это не так, т.е. существует нетривиальное соотношение (6), и пусть это соотношение имеет минимальный показатель (d, q). Найдем нетривиальное соотношение, которое имеет показатель меньше, чем (d, q). Тем самым мы придем к противоречию, которое доказывает теорему.

В силу леммы 1 при $d = 3$ утверждение о тривиальности соотношения (6) справедливо. Следовательно, мы будем рассматривать случай когда $d > 3$.

Положим $\delta_{i_1} = \delta(i, \alpha, a), \delta_{i_1+1} = \delta(j, \beta, b).$ Допустим $i = j$. Тогда в силу соотношения (2), в (6) мы сделаем замену $\delta(i,\alpha,a)\delta(i,\beta,b) = \delta(i, \alpha\beta, \beta a + \delta(i,\alpha,a)(b)) = \delta'$ и получим новое нетривиальное соотношение
$$\delta_1\delta_2\dots\delta_{i_1-1}\delta'\delta_{i_1+2}\dots\delta_s = id,$$
которое имеет показатель меньше, чем (d, q).

Пусть теперь $i \ne j$. Для определенности возьмем $i = 2, j = 3$. Положим
$$\theta_{i-1} = (f_1, g_2, f_3), \theta_i = (f_1, \alpha g_2 + a(f_1, f_2, f_3), f_3) = (f_1, f_2, f_3),$$
$$\theta_{i+1} = (f_1, f_2, \beta f_3 + b(f_1, f_2, f_3)).$$
Допустим $\deg a > 1$. Покажем, что в этом случае b не зависит от x_2. Предположим, что это не так. Тогда в силу леммы 2
$$\deg f_2 = \deg a(f_1, f_2, f_3) = \max\{\deg f_1, \deg f_3\} + \deg a - 1,$$
т.е. $\deg f_2 > \deg f_3$ и $\deg f_2 > \deg f_1$. Если $\deg b(x_1, x_2) = 1$, то
$$\deg b(f_1, f_2) = \deg f_2 > \deg f_3,$$
если $\deg b(x_1, x_2, x_3) > 1$, то в силу леммы 2
$$\deg b(f_1, f_2, f_3) = \max\{\deg f_1, \deg f_2\} + \deg b - 1 > \deg f_2 > \deg f_3.$$
Так как $\deg b(f_1, f_2, f_3) > \deg f_3$, то $\deg\theta_{i+1} > d$, т.е. соотношение (6) будет иметь показатель больше, чем (d, q), что противоречит выбору соотношения. Так как b не зависит от переменных x_2, x_3, то в силу соотношения (3) имеем
$$\delta(2, \alpha, a)\delta(3, \beta, b) = \delta(3, \beta, b)\delta(2, \alpha, \delta(3, \beta, b)^{-1}(a)).$$

Подставив это равенство в (6), мы получим новое соотношение. Если переписать полученное соотношение в виде последовательности почти элементарных преобразований, то имеем

$$id = \theta_0 \overset{\delta_1}{\mapsto} \ldots \overset{\delta_{i-1}}{\mapsto} \theta_{i-1} = (f_1, g_2, f_3) \overset{\delta(3,\beta,b)}{\mapsto} (f_1, g_2, \beta f_3 + b(f_1)) \overset{\delta(2,\alpha,\delta(3,\beta,b)^{-1}(a))}{\mapsto}$$
$$\mapsto (f_1, f_2, \beta f_3 + b(f_1)) = \theta_{i+1} \overset{\delta_{i+2}}{\mapsto} \ldots \overset{\delta_s}{\mapsto} \theta_s = id.$$

Если учесть, что $\deg b(f_1) \leq f_3$, то новое нетривиальное соотношение имеет показатель меньше, чем (d, q) .

Пусть теперь $\deg a = 1$. Положим $a = \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3$, где $\lambda_1, \lambda_3 \in k$ и хотя бы один из λ_1, λ_3 не равен нулю. Пусть ненулевой константой будет λ_3 . С помощью соотношений (2)–(4) автоморфизм $\delta(2, \alpha, \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3)$ преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta(2, \alpha, \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3) &= \delta(2, \alpha, 0)\delta(2, 1, \lambda_3 x_3)\delta(2, 1, \lambda_1 x_1) \\
&= \delta(2, \alpha, 0)\delta(2, 1, \lambda_3 x_3)\delta(3, -\lambda_3, x_2)\delta(3, -\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_3} x_2)\delta(2, 1, \lambda_1 x_1) \\
&= \delta(2, \alpha, 0)\delta(2, 1, \lambda_3 x_3)\delta(3, -\lambda_3, x_2)\delta(2, 1, \lambda_1 x_1)\delta(3, -\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_3} x_2)^{\delta(2,1,\lambda_1 x_1)} \\
&= \delta(2, \alpha, 0)\delta(2, 1, \lambda_3 x_3)\delta(3, -\lambda_3, x_2)\delta(2, 1, \lambda_1 x_1)\delta(3, -\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_3}(x_2 - \lambda_1 x_1)) \\
&= \delta(2, \alpha, 0)\delta(2, 1, \lambda_3 x_3)\delta(3, -\lambda_3, x_2)\delta(2, \frac{1}{\lambda_3}, -\frac{1}{\lambda_3} x_3) \times \\
&\quad \times \delta(2, \lambda_3, x_3 + \lambda_1 x_1)\delta(3, -\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_3}(x_2 - \lambda_1 x_1)) \\
&= \delta(2, \alpha, 0)(23)\delta(2, \lambda_3, x_3 + \lambda_1 x_1)\delta(3, -\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_3}(x_2 - \lambda_1 x_1)) \\
&= (23)\delta(3, \alpha, 0)\delta(2, \lambda_3, x_3 + \lambda_1 x_1)\delta(3, -\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_3}(x_2 - \lambda_1 x_1)).
\end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в соотношение (6), получим новое нетривиальное соотношение

$$\delta_1 \ldots \delta_{i-1}(23)\delta(3, \alpha, 0)\delta(2, \lambda_3, x_3 + \lambda_1 x_1) \times$$
$$\times \delta(3, -\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_3}(x_2 - \lambda_1 x_1))\delta(3, \beta, b)\delta_{i+2} \ldots \delta_s = id. \tag{7}$$

Запишем соотношение (7) в виде последовательности почти элементарных преобразований

$$id = \theta_0 \overset{\delta_1}{\mapsto} \ldots \overset{\delta_{i-1}}{\mapsto} \theta_{i-1} = (f_1, g_2, f_3) \overset{(23)}{\mapsto} (f_1, f_3, g_2) \overset{\delta(3,\alpha,0)}{\mapsto} (f_1, f_3, \alpha g_2) \overset{\delta(2,\lambda_3,x_3+\lambda_1 x_1)}{\mapsto}$$
$$\mapsto (f_1, f_2, \alpha g_2) \overset{\delta(3,-\frac{1}{\lambda_3},\frac{1}{\lambda_3}(x_2-\lambda_1 x_1))}{\mapsto} (f_1, f_2, f_3) = \theta_i \overset{\delta_{i+1}}{\mapsto} \ldots \overset{\delta_s}{\mapsto} \theta_s = id.$$

Если

$$\deg(f_1, f_2, \alpha g_2) < d, \tag{8}$$

то подставив (2) в (7), получим соотношение с показателем меньше, чем (d, q) . Если неравенство (8) не выполняется, т.е. $\deg f_2 > \deg g_2 \geq \deg f_3$, то $\overline{f_2} = \overline{f_1}$. С помощью соотношений (2), (5) автоморфизм $\delta(2, \alpha, \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3)\delta(3, \beta, b)$ преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta(2, \alpha, \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3)\delta(3, \beta, b) &= \delta(2, \alpha, \lambda_3 x_3)\delta(2, 1, \lambda_1 x_1)\delta(3, \beta, b) \\
&= \delta(2, \alpha, \lambda_3 x_3)\delta(3, \beta, \delta(2, 1, \lambda_1 x_1)(b))\delta(2, 1, \lambda_1 x_1).
\end{aligned}$$

Подставив последнее в соотношение (6), получим новое нетривиальное соотношение

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_{i-1}\delta(2,\alpha,\lambda_3x_3)\delta(3,\beta,\delta(2,1,\lambda_1x_1)(b))\delta(2,1,\lambda_1x_1)\delta_{i_1+2}\ldots\delta_s=id. \quad (9)$$

Это соотношение запишем в виде последовательности почти элементарных преобразований:

$$id=\theta_0\overset{\delta_1}{\mapsto}\ldots\overset{\delta_{i-1}}{\mapsto}\theta_{i-1}=(f_1,g_2,f_3)\overset{\delta(2,\alpha,\lambda_3x_3)}{\mapsto}(f_1,\alpha g_2+\lambda_3f_3,f_3)\overset{\delta(3,\beta,\delta(2,1,\lambda_1x_1)(b))}{\mapsto}$$

$$\mapsto(f_1,\alpha g_2+\lambda_3f_3,\beta f_3+b(f_1,f_2,f_3))\overset{\delta(2,1,\lambda_1x_1)}{\mapsto}(f_1,f_2,\beta f_3+b(f_1,f_2,f_3)$$

$$=\theta_{i+1}\overset{\delta_{i+2}}{\mapsto}\ldots\overset{\delta_s}{\mapsto}\theta_s=id.$$

Так как

$$\deg(f_1,\alpha g_2+\lambda_3f_3,\beta f_3+b(f_1,f_2,f_3))<d,$$

то соотношение (9) имеет показатель меньше, чем (d,q).

Пусть теперь $\lambda_3=0$. Тогда в силу (5) имеем

$$\delta(2,\alpha,\lambda_1x_1)\delta(3,\beta,b)=\delta(3,\beta,\delta(2,1,\lambda_1x_1)(b))\delta(2,1,\lambda_1x_1) \quad (10)$$

и подставим это в соотношение (6). Соответствующая соотношению (10) последовательность почти элементарных преобразований имеет вид

$$id=\theta_0\overset{\delta_1}{\mapsto}\ldots\overset{\delta_{i-1}}{\mapsto}\theta_{i-1}=(f_1,g_2,f_3)\overset{\delta(3,\beta,\delta(2,1,\lambda_1x_1)(b))}{\mapsto}(f_1,g_2,\beta f_3+b(f_1,\alpha g_2+\lambda_1f_1,f_3))\mapsto$$

$$\overset{\delta(2,1,\lambda_1x_1)}{\mapsto}(f_1,\alpha g_2+\lambda_1f_1,\beta f_3+b(f_1,\alpha g_2+\lambda_1f_1,f_3))=\theta_{i+1}\overset{\delta_{i+2}}{\mapsto}\ldots\overset{\delta_s}{\mapsto}\theta_s=id.$$

Так как $\deg(f_1,g_2,\beta f_3+b(f_1,\alpha g_2+\lambda_1f_1,f_3))<d$, мы получили нетривиальное соотношение с показателем меньше, чем (d,q). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. P.M. Cohn. Subalgebras of free associative algebras. // Proc. London Math. Soc. 56 (1964), P. 618–632.

2. J. Lewin. On Schreier varities of linear algebras. // Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), P. 553–562.

3. U.U. Umirbaev. Definig relations for automorphism groups of free algebras. // J. Algebra 314 (2007), P. 209–225.

4. I.P. Shestakov and U.U. Umirbaev, Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables, J. Amer. Math. Soc., 17 (2004), P. 197–227.

5. У.У. Умирбаев. Определяющие соотношения группы ручных автоморфизмов колец многочленов и дикие автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр. // Доклады академии наук 407 (2006), №3, С. 319–324.

6. Р. Ж. Наурызбаев. Сократимость автоморфизмов свободных метабелевых алгебр Ли ранга 3. // Вестник ЕНУ (2009), №6, С. 200–213.

7. В.А. Романьков. Свап-гиппотеза Теннанта-Тернера. //Алгебра и логика 34 (1995), вып. 4, С. 448–463.

8. Р. Ж. Наурызбаев. Определяющие соотношения группы ручных автоморфизмов свободных метабелевых алгебр Ли ранга 3. // Вестник ЕНУ (2010), №4(77), С. 164–170.

9. У.У. Умирбаев. Частные производные и эндоморфизмы некоторых относительно свободных алгебр Ли. // Сиб. матем. журн. 34 (1993), №6, С. 179–188.

Наурызбаев Р. Ж.

Рангі 3-ке тең еркін метабельді Ли алгебралары қолдық дерлік автоморфизмдері тобының анықтаушы қатынастары.

Үш айнымалы еркін метабелді Ли алгебраларының қолдық дерлік автоморфизмдері топтарының анықтаушы қатынастары сипатталған.

Nauryzbayev R. Zh.

Defining relation of almost tame automorphisms group of free metabelian Lie algebras of rank 3.

We deshribe a set of defining relations for almost tame automorphisms groups of free metabelian Lie algebras in three variables.

Поступила в редакцию 12.05.11

Рекомендована к печати 31.05.11