УДК 536.46

К. О. Сабденов

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ИСКРИВЛЕННОГО ПЛАМЕНИ

В рамках теории ламинарного пламени Зельдовича–Франк-Каменецкого рассматривается линеаризованная стационарная краевая задача на собственное значение с целью установления зависимости скорости пламени от кривизны его фронта, имеющего синусоидальную форму. Анализ проведен для произвольных чисел Льюиса. Обсуждаются различные механизмы, способствующие сглаживанию искривленного фронта пламени.

Одним из самых загадочных явлений природы является спонтанное возникновение турбулентного пламени в газовых смесях. Известны два вида неустойчивости, приводящие, быть может, к возникновению данного режима горения: гидродинамическая [1, 2] и диффузионно-тепловая [3, 4]. В общей постановке задачи на исследование устойчивости рассматривается поведение горения по отношению к произвольным возмущениям, вызывающим пространственное искривление плоского ламинарного пламени, движущегося относительно исходной горючей смеси со скоростью v_{n}. В свою очередь искривление фронта горения приводит к новому значению нормальной скорости распространения пламени, зависящей от кривизны его фронта. Это означает, что теперь скорость v_{n} пламени уже не является, как принято считать, константой данной горючей смеси, а связана также с вновь возникшими условиями горения. В данном контексте – с кривизной фронта горения. Идея возможной зависимости скорости пламени от кривизны его фронта была высказана Маркштейном [2, 4] для объяснения устойчивости пламени по отношению к гидродинамическим возмущениям.

Первая попытка теоретического анализа данной проблемы предпринята в [3] и в расширенном виде изложена в [4]. В них считается, что зависимость скорости пламени от кривизны его фронта должен показывать в качестве побочного результата анализ диффузионно-тепловой неустойчивости. Однако авторы, выписывая требуемую формулу, не приводят конкретных рассуждений, каким образом она получена.

Теория гидродинамической неустойчивости Ландау–Дарье с парадоксальным выводом практической невозможности существования ламинарного пламени подвергает сомнению справедливость теории Зельдовича–Франк-Каменецкого [5], созданной на основе фундаментальных идей А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского и Н. С. Пискунова [4]. Если в рамках теории Зельдовича–Франк-Каменецкого не удастся объяснить устойчивость ламинарного пламени по отношению к гидродинамическим возмущениям, то эту, красивую и глубокую по физическому содержанию, теорию придется признать неполной. По сути, задача заключается в определении вида так называемой константы Маркштейна – коэффициента при кривизне в выражении скорости изогнутого пламени. Предложенное им значение этого коэффициента обеспечивает гидродинамическую устойчивость ламинарного пламени до чисел Рейнольдса $\text{Re} \sim 10^2$. В экспериментах же наблюдается устойчивость вплоть до $\text{Re} \sim 10^4$.

Формулировка математической задачи. С позиции математики нам необходимо решать краевую задачу на собственное значение. С позиции физики – найти новый режим горения, к которому выходит прежний стационарный, если внесено стационарное (а в общем случае нестационарное) возмущение, приведшее к искривлению ламинарного фронта горения.

Отметим принципиальные различия излагаемого в настоящей работе способа нахождения длины Маркштейна и предложенного ранее в [3]. Они заключаются в следующих положениях:

1) скорость распространения пламени является собственным значением краевой задачи не только в случае плоского фронта горения, но и в общем случае искривленного фронта;

2) исследование на диффузионно-тепловую неустойчивость и нахождение зависимости скорости пламени от кривизны его фронта – разные по физическому содержанию задачи.

Плоский стационарный фронт пламени в газовой смеси с протекающей в ней химической брутто-реакцией первого порядка описывается системой уравнений [4]

$$v_{\text{n}} \frac{dT}{dx'} = \kappa \frac{d^2T}{dx'^2} + \frac{Q}{c_p} N k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad v_{\text{n}} \frac{dN}{dx'} = D \frac{d^2N}{dx'^2} - N k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \ldots \tag{1}$$

С введением безразмерных параметров

$$u = \frac{T - T_0}{T_{\text{b}} - T_0} = \frac{c_p}{QN_0}(T - T_0), \quad b = \frac{N_0 - N}{N_0}, \quad x = \frac{x' v_*}{\kappa}, \quad w = \frac{v_{\text{n}}}{v_*}, \quad \text{Le} = \frac{D}{\kappa}, \quad T_{\text{b}} = T_0 + \frac{Q}{c_p} N_0,$$

где v_* – масштаб скорости, определенной ниже, система (1) принимает вид

Томский государственный университет: э-почта: sabdenov@ftf.tsu.ru. Поступила 18.07.2000.

$$w\,\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + W\,, \quad w\,\frac{db}{dx} = \mathrm{Le}\,\frac{d^2b}{dx^2} + W\,, \quad W = \frac{k_0\kappa}{v_*^2}\,(1-b)\exp\left(-\frac{E}{R\,[T_0 + u\,(T_\mathrm{b} - T_0)]}\right). \tag{2}$$

Задаче о распространении пламени по уравнениям (2) соответствуют граничные условия

$$x \to -\infty:\quad u = b = 0\,;\quad x \to +\infty:\quad du/dx = db/dx = 0\,. \tag{3}$$

Наложим теперь на плоский фронт малое возмущение, вызывающее такую же малую деформацию фронта по поперечным координатам y, z. С точки зрения физики мы слабо меняем пространственное распределение скорости газа горючей смеси, натекающего на неподвижный плоский фронт пламени, и наблюдаем за новым стационарным состоянием процесса горения. Тогда с точностью до малых второго порядка по степеням возмущений система уравнений, описывающих фронт горения, принимает следующую форму:

$$w\,\frac{\partial u}{\partial x} = \Delta u + W\,, \quad w\,\frac{\partial b}{\partial x} = \mathrm{Le}\,\Delta b + W\,, \tag{4}$$

где Δ – оператор Лапласа в декартовой системе координат, а W для сокращения записи пока еще не линеаризована. Обозначим $u^0(x)$, $b^0(x)$, w^0 – решения системы (2), (3). Решения же уравнений (4) для слабо искривленного фронта пламени будем искать в виде

$$u = u^0\,(x) + V\,(x, y, z)\,, \quad b = b^0\,(x) + P\,(x, y, z)\,, \quad w = w^0 + w'\,, \tag{5}$$

где V, P – новые неизвестные функции. Подстановка (5) в (4), дальнейшая линеаризация и использование (2) в промежуточных выкладках после несложных преобразований приводят к уравнениям для V, P

$$\frac{du^0}{dx}\,w' = \Delta' V - w^0\,\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial u^0}\,V + \frac{\partial W}{\partial b^0}\,P\,,$$

$$\frac{db^0}{dx}\,w' = \mathrm{Le}\,\Delta' P - w^0\,\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial u^0}\,V + \frac{\partial W}{\partial b^0}\,P\,,$$

$$\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{6}$$

В уравнениях (6) функция W зависит только от $u^0(x)$, $b^0(x)$.

Дальнейшие преобразования системы (6) заключаются в следующем. Ищем изменение w' в форме: $w' = -\,q\Delta'\xi$, здесь $q = \mathrm{const}$ – константа Маркштейна в безразмерном виде; ξ – деформация фронта горения. Для функций V, P и ξ примем

$$V = \xi F\,(x)\,, \quad P = \xi G\,(x)\,, \quad \Delta'\xi = -\,\lambda^2\xi\,, \quad \lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2\,,$$

где λ_1, λ_2 – волновые числа по направлениям y и z. В результате (6) преобразуется к виду

$$\frac{d^2F}{dx^2} - w^0\,\frac{dF}{dx} - \lambda^2 F + \frac{\partial W}{\partial u^0}\,F = -\,\frac{\partial W}{\partial b^0}\,G + q\lambda^2\,\frac{du^0}{dx}\,,$$

$$\mathrm{Le}\,\frac{d^2G}{dx^2} - w^0\,\frac{dG}{dx} - \lambda^2\,\mathrm{Le}\,G + \frac{\partial W}{\partial b^0}\,G = -\,\frac{\partial W}{\partial u^0}\,F + q\lambda^2\,\frac{db^0}{dx}\,. \tag{7}$$

Будем считать, что параметр λ задан. Тогда требуется найти конкретное представление собственного значения w: $w = w^0 - q\Delta'\xi$ уравнений (4). В приведенном виде w константа q является собственным значением уравнений (7) с соответствующими граничными условиями, к формулировке которых мы приступим ниже. Но рассмотрим сначала плоское пламя.

Плоское пламя. Решение уравнений (7) с законом Аррениуса (третье соотношение в (2)) – математически весьма трудоемкая работа. Задачу можно значительно упростить, если использовать W в форме

$$W = \frac{k_0\kappa}{v_*^2}\,(1-b)\exp\left(-\frac{E}{RT_\mathrm{b}}\right)\eta\,(u - u_*)\,, \tag{8}$$

где η – единичная функция Хевисайда, а u_* – безразмерная температура, явный вид которой можно определить, требуя совпадения формы скорости пламени асимптотически в пределе $u_* \to 1$ с известным результатом из теории Зельдовича–Франк-Каменецкого.

Приведенная форма W сохраняет основные свойства закона Аррениуса: его нелинейность и сильную зависимость от температуры. Ясно, что в отличие от использованного в аналитических исследованиях [3, 4] представления W в виде δ-функции Дирака форма (8) обладает большей информацией о характере протекающей химической реакции.

Помещая место разрыва (8) в точку $x = 0$ и присваивая индексы 1 и 2 температуре u и выгоранию b соответственно при $x < 0$ и $x > 0$, приведем распределения $u^0(x)$, $b^0(x)$:

$$x < 0: \quad u_1^0 = u_* \exp(w^0 x) = \frac{k}{k + w^0} \exp(w^0 x) ;$$

$$b_1^0 = \left(1 - \frac{w^0 k}{a}\right) \exp(w^0 x / \mathrm{Le}) = \frac{k^2 \,\mathrm{Le}}{a} \exp(w^0 x / \mathrm{Le}) ,$$

$$x > 0: \quad u_2^0 = 1 - \frac{w^0}{k + w^0} \exp(-kx) , \quad b_2^0 = 1 - \frac{w^0 k}{a} \exp(-kx) , \quad k = \frac{\sqrt{(w^0)^2 + 4a \,\mathrm{Le}} - w^0}{2 \,\mathrm{Le}} , \tag{9}$$

$$a = \frac{k_0 \kappa}{v_*^2} \exp\left(-\frac{E}{RT_{\mathrm{b}}}\right), \quad (w^0)^2 = \left(\frac{1 - u_*}{u_*}\right)^2 \frac{a}{\mathrm{Le} + (1 - u_*)/u_*} ,$$

где k является положительным корнем уравнения $\mathrm{Le}\, k^2 + w^0 k - a = 0$.

Решения (9) удовлетворяют граничным условиям (3) и условиям непрерывности $u^0(x)$, $b^0(x)$ и их первых производных в точке $x = 0$.

В пределе $a \to \infty$ (тогда $u_* \to 1$). Если принять

$$\frac{1 - u_*}{u_*} \approx 1 - u_* = \frac{T_{\mathrm{b}}}{T_{\mathrm{b}} - T_0} \sqrt{\frac{2T_0}{T_{\mathrm{b}}}} \frac{RT_{\mathrm{b}}}{E} ,$$

то получим выражение для скорости пламени v_{n}, приведенное в [4]. За масштаб скорости v_* удобно взять v_{n}. Тогда

$$w^0 = 1 , \quad a = \mathrm{Le}\, n \left(\frac{n - 1}{n} \frac{E}{RT_{\mathrm{b}}}\right)^2 , \quad n = \frac{T_{\mathrm{b}}}{T_0} . \tag{10}$$

С учетом сказанного в дальнейшем будем полагать $w^0 = 1$.

С принятым видом температуры воспламенения u_* в пределе $E/RT_{\mathrm{b}} \to \infty$ скорость химической реакции в форме (8) стремится к δ-функции Дирака и сколь угодно точно аппроксимирует аналогичное выражение по закону Аррениуса, поскольку решения уравнений (2), (3) в этом пределе для обоих видов скорости реакции совпадают.

Зависимость скорости пламени от кривизны фронта. Используя (9) в уравнениях (8), имеем

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{dF}{dx} - \lambda^2 F + a (1 + b^0)\, \delta (u^0 - u_*)\, F = a \eta (u^0 - u_*)\, G + q \lambda^2 \frac{du^0}{dx} ,$$

$$\mathrm{Le} \frac{d^2 G}{dx^2} - \frac{dG}{dx} - \lambda^2 \,\mathrm{Le}\, G - a \eta (u^0 - u_*)\, G = - a (1 - b^0)\, \delta (u^0 - u_*)\, F + q \lambda^2 \frac{db^0}{dx} . \tag{11}$$

Сформулируем граничные условия для системы (11). Из (3) следует обращение в ноль F и G при $x \to -\infty$ и их первых производных при $x \to +\infty$. В точке $x \approx 0$ должны быть непрерывными значения u, b, du/dx, db/dx. Условие непрерывности u и b дает равенства

$$F_1 = F_2 , \quad G_1 = G_2 . \tag{12}$$

Условие непрерывности их производных (точнее, потоков энергии и вещества) приводит к требованиям

$$\frac{d^2 u_1^0}{dx^2} + \frac{dF_1}{dx} = \frac{d^2 u_2^0}{dx^2} + \frac{dF_2}{dx} , \quad \frac{d^2 b_1^0}{dx^2} + \frac{dG_1}{dx} = \frac{d^2 b_2^0}{dx^2} + \frac{dG_2}{dx} . \tag{13}$$

Поскольку $u^0(x)$, $b^0(x)$ являются решениями уравнений

$$\frac{du^0}{dx} = \frac{d^2 u^0}{dx^2} + a (1 - b^0)\, \eta (u^0 - u_*) , \quad \frac{db^0}{dx} = \mathrm{Le} \frac{d^2 b^0}{dx^2} + a (1 - b^0)\, \eta (u^0 - u_*) ,$$

что указывает на наличие разрыва вторых производных от $u^0(x)$, $b^0(x)$ в точке $x = 0$:

$$\frac{d^2 u_1^0}{dx^2} - \frac{d^2 u_2^0}{dx^2} = k , \quad \frac{d^2 b_1^0}{dx^2} - \frac{d^2 b_2^0}{dx^2} = \frac{k}{\mathrm{Le}} ,$$

условия (13) в окончательном виде принимают форму

$$\frac{dF_1}{dx} - \frac{dF_2}{dx} + k = 0 , \quad \frac{dG_1}{dx} - \frac{dG_2}{dx} + \frac{k}{\mathrm{Le}} = 0 . \tag{14}$$

Кроме всего этого, первые производные от самих $F(x)$, $G(x)$ претерпевают разрыв в точке $x = 0$, что непосредственно следует из (11). Интегрируя (11) по исчезающе малой области вблизи $x = 0$ и используя известные [6] свойства δ-функции, находим

$$\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_2}{dx} + (k+1)\,F_2 = 0\ , \quad \frac{dG_2}{dx} - \frac{dG_1}{dx} + \frac{k+1}{\mathrm{Le}}\,F_2 = 0\ . \tag{15}$$

Но одно из (15) лишнее, так как вторые выражения в (14) и (15) приводят к равенству

$$F_2 = -\frac{k}{k+1} = F_1\ , \tag{16}$$

что совместно с первым в (15) приводит к уже имеющемуся первому условию из (14). Одно из равенств (16) можно взять в качестве граничного условия, дополнительного к (14) и (15). Таким образом, при $x = 0$ имеем пять граничных условий на нахождение неизвестных четырех постоянных интегрирования (после выполнения условий при $x \to \pm\infty$) и собственного числа q.

Приступим теперь к решению уравнений (11). Для области $x < 0$ из (11) с учетом (10) получаем систему уравнений

$$\frac{d^2F_1}{dx^2} - \frac{dF_1}{dx} - \lambda^2 F_1 = q\lambda^2 \frac{k}{k+1}\exp(x)\ , \quad \mathrm{Le}\,\frac{d^2G_1}{dx^2} - \frac{dG_1}{dx} - \lambda^2\,\mathrm{Le}\,G_1 = q\lambda^2\frac{k^2}{a}\exp(-kx)\ .$$

Ее решения, обращающиеся в ноль при $x \to -\infty$, следующие:

$$F_1 = f_1\exp(\alpha x) - \frac{qk}{k+1}\exp(x)\ , \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{1+4\lambda^2}}{2}\ ;$$

$$G_1 = g_1\exp(\beta x) - \frac{qk^2}{a\,\mathrm{Le}}\exp(x/\mathrm{Le})\ , \quad \beta = \frac{1+\sqrt{1+4\lambda^2\,\mathrm{Le}^2}}{2\,\mathrm{Le}}\ . \tag{17}$$

Аналогично в области $x > 0$ соответственно имеем

$$\frac{d^2F_2}{dx^2} - \frac{dF_2}{dx} - \lambda^2 F_2 = aG_2 + q\lambda^2\frac{k}{k+1}\exp(-kx)\ , \quad \mathrm{Le}\,\frac{d^2G_2}{dx^2} - \frac{dG_2}{dx} - \lambda^2\,\mathrm{Le}\,G_2 - aG_2 = q\lambda^2\frac{k^2}{a}\exp(-kx)\ ,$$

$$G_2 = g_2\exp(-\chi x) - \frac{qk^2}{a\,\mathrm{Le}}\exp(-kx)\ , \quad \chi = \frac{-1+\sqrt{1+4\,\mathrm{Le}\,(\lambda^2\,\mathrm{Le}+a)}}{2\,\mathrm{Le}}\ ,$$

$$F_2 = f_2\exp(-\gamma x) + A_1 g_2\exp(-kx) - qA_2\exp(-\chi x)\ ; \quad \gamma = \frac{-1+\sqrt{1+4\lambda^2}}{2}\ , \tag{18}$$

$$A_1 = \frac{a}{\chi^2+\chi-\lambda^2}\ , \quad A_2 = \frac{k}{k+1}\,\frac{k^2+k-\mathrm{Le}\,\lambda^2}{k^2+k-\lambda^2}\ .$$

В (17) и (18) f_1, f_2, g_1, g_2 – постоянные интегрирования.

Подстановка (17) и (18) в граничные условия (12) приводит к алгебраическим уравнениям

$$f_1 - q\frac{k}{k+1} = f_2 + g_2 A_1 - \frac{q}{\mathrm{Le}}A_2\ , \quad g_1 = g_2\ . \tag{19}$$

Использование (17), (18) в (14) дает уравнения

$$\alpha f_1 - q\frac{k}{k+1} + \gamma f_2 + \chi g_1 A_1 - \frac{q}{\mathrm{Le}}kA_2 + k = 0\ ,$$

$$\beta g_1 - q\frac{k^2}{a\,\mathrm{Le}^2} + \chi g_2 - q\frac{k^3}{a\,\mathrm{Le}} + \frac{k}{\mathrm{Le}} = (\beta+\chi)\,g_1 - \left(\frac{q}{\mathrm{Le}} - 1\right)\frac{k}{\mathrm{Le}} = 0\ , \tag{20}$$

где при записи второго выражения использовано второе равенство из (19) и известное выше (см. (9)) $\mathrm{Le}\,k^2 + k - a = 0$.

С учетом второго равенства из (19) находим

$$g_1 = \frac{k}{\mathrm{Le}\,(\chi+\beta)}\left(\frac{q}{\mathrm{Le}} - 1\right). \tag{21}$$

Из условия (16) определяем f_1:

$$f_1 = \frac{k}{k+1}(q-1)\ . \tag{22}$$

Из первых соотношений в (19), (20) и (21), (22) после несложного расчета получим уравнение

$$\frac{k}{k+1}\left[q(\alpha-1) - \alpha - \gamma\right] + \frac{\chi-\gamma}{\chi+\beta}\,\frac{k\,(\mathrm{Le}\,k+1)}{\chi^2+\chi-\lambda^2}\,\frac{k}{\mathrm{Le}}\left(\frac{q}{\mathrm{Le}} - 1\right) - \frac{k\,(k-\gamma)}{k+1}\,\frac{k^2+k-\mathrm{Le}\,\lambda^2}{k^2+k-\lambda^2}\left(\frac{q}{\mathrm{Le}} - 1\right) + k = 0\ . \tag{23}$$

$$k \approx \sqrt{\frac{a}{\mathrm{Le}}} = \sqrt{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{E}{RT_b}$$

к бесконечности, т. е. рассмотрим случай большой энергии активации. При этом пределе члены, пропорциональные k, взаимно уничтожаются. Пренебрегая малыми величинами порядка $1/k$ и выше, имеем

$$q = \mathrm{Le}\,\frac{1/\mathrm{Le} - \beta + \lambda^2/\alpha}{1/\mathrm{Le} - \beta + \mathrm{Le}\,\lambda^2/\alpha} + o\,(k^{-1})\ .$$

Отсюда видно, что при $\mathrm{Le} = 1$ $q = 1$ для любых волновых чисел. Если же $\mathrm{Le} \neq 1$, то в пределе $\lambda \to 0$; когда искривленный фронт пламени вырождается в плоскую поверхность, то $q \sim \lambda^{-2} \to \infty$, что лишено физического смысла. Поэтому стационарное решение задачи (2), (3) со слабо искривленным фронтом возможно только лишь в случае $\mathrm{Le} = 1$. Этот результат остается справедливым и при произвольном значении k, в чем легко убедиться, положив в уравнении (23) $\mathrm{Le} = 1$. Учитывая, что $\alpha = \gamma + 1$ и при $\mathrm{Le} = 1$ $\chi(\chi + 1) = k^2 + k + \lambda^2$, $\beta = \alpha$, получим

$$(q-1)\left(\frac{2\gamma - k}{k+1} + \frac{\chi - \gamma}{\chi + \gamma + 1}\right) = 0\ .$$

Выражение во второй скобке при произвольных значениях k и λ в ноль не обращается, поэтому приходим к известному результату $q = 1$ [4].

Естественный вопрос, возникающий здесь, – это диффузионно-тепловая устойчивость найденных решений. Необходимое, но, по всей видимости, недостаточное условие устойчивости сформулировано из ясных физических соображений еще Маркштейном [2]: $q > 0$. Найденное здесь значение $q = 1$, возможно, не гарантирует полную устойчивость решений (17), (18). Более точное условие устойчивости предстоит еще выяснить.

Обсуждение полученных результатов. Таким образом, проведенное здесь исследование показало невозможность существования стационарного произвольным образом слабо искривленного пламени при произвольных числах Льюиса, что противоречит эксперименту: в опытах существует не только слабо, но и сильно искривленное пламя (которое, конечно, описывается уже нелинейной теорией). Поэтому теория ламинарного горения газов Зельдовича–Франк-Каменецкого без привлечения дополнительных принципов не дает зависимости скорости пламени от кривизны фронта, которая позволяла бы разрешить парадокс гидродинамической неустойчивости пламени. Более того, линейной зависимости, аналогичной из теории Маркштейна, скорости пламени от кривизны фронта не существует, за исключением случая $\mathrm{Le} = 1$.

Возвращаясь к проблеме гидродинамической неустойчивости ламинарного пламени, видим, что при существующих представлениях о горении газовых смесей данную проблему полностью решить не удается.

Противоречия теории с экспериментом, отмеченные в предыдущем разделе, можно снять, если предположить, что в наблюдающемся в экспериментах стационарном пламени химическая реакция протекает с эффективным числом Le, равным единице. Обоснованием данного предположения может служить то, что использованное здесь описание горения по модели Зельдовича–Франк-Каменецкого, допускающей произвольные числа Льюиса, является сильно упрощенным. По всей видимости, существуют физические принципы, запрещающие не равные единице числа Le при моделировании горения газовых смесей простой брутто-реакцией.

Кроме указанной во введении работы [2], попытка теоретического определения q предпринята еще в [7], где найдено $q = 1$ в формуле $w' = -q\Delta'\xi$ Маркштейна. В работе [8] численно исследуется эволюция ячеистых структур, заданных с начальным профилем, с учетом вязкости газа при бесконечно большой энергии активации. Но изначально в постановке задачи [8] (как и в [2, 4, 7]) нормальная скорость пламени полагается постоянной и не зависящей от кривизны фронта. Тем не менее в [8] устойчивая ячеистая структура выявляется, что авторы объясняют влиянием нелинейных эффектов, т. е. результаты [8] говорят о возможности объяснения ячеистой структуры пламени без привлечения формулы Маркштейна.

В работах [9, 10] теоретическое изучение ячеистой структуры пламени на основе уравнения Сивашинского проводится с допущением постоянства скорости пламени при искривлении его фронта. Из-за наличия разных механизмов, приводящих к появлению в расчетах членов вида $q\Delta'\xi$, авторы обычно принимают их за зависимость скорости пламени от кривизны. На элементарном примере [11] покажем, как могут появиться члены, пропорциональные второй производной по пространственной переменной от смещения ξ фронта пламени. Пусть в нестационарной форме уравнений (4) $E/RT_b = \infty$, $\mathrm{Le} = 1$ $(u = b)$ и отсутствует зависимость температуры и выгорания по координате z

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ . \tag{24}$$

Тогда вместо (5) имеем

$$u = u^0(x) + \xi(y)\,\frac{du^0}{dx}\,, \tag{25}$$

где $u^0(x)$ – распределение Михельсона

$$u^0(x) = \exp(w^0 x)\,, \quad x < 0\,; \quad u^0(x) = 1\,, \quad x > 0\,.$$

Считая скорость пламени не зависящей от кривизны его фронта и подставив (25) в (24), получим уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\,, \tag{26}$$

являющееся линейной частью уравнения Сивашинского [9, 10] и описывающее сглаживание неоднородностей фронта пламени за счет диссипативных процессов диффузии и теплопроводности. Если еще считать скорость газа переменной (в прежней системе координат, связанной с невозмущенным пламенем), например, за счет гидродинамического перепада давления, то в левой части (26) возникнет дополнительно возмущение скорости газа и (26) превратится в граничное условие из теории Маркштейна [2] гидродинамической неустойчивости ламинарного пламени. Распределение же температуры (25) означает постоянство плотности по обе стороны фронта пламени, что соответствует физическому содержанию гидродинамической неустойчивости; возмущения давления при этом связаны с возмущениями скорости газа, а не температуры и плотности [1].

Выводы

1. Маркштейновская линейная зависимость (при этом не отрицается существование возможной нелинейной зависимости) скорости пламени с протекающей в нем одностадийной брутто-реакцией от кривизны фронта пламени возможна только при числе Льюиса, равном единице.

2. Существуют два механизма, способствующих сглаживанию искривленного фронта пламени: первый из них связан напрямую с диссипативными процессами диффузии реагирующего газа и теплопроводности, другой же – с зависимостью скорости пламени от кривизны его фронта; второй механизм с диссипативными процессами связан косвенно.

Обозначения

T, u – размерная и безразмерная температура; N – концентрация реагирующего вещества; Q – тепловой эффект химической реакции; E – энергия активации; R – универсальная газовая постоянная; k_0 – предэкспоненциальный множитель; v_n, w – размерная и безразмерная скорости движения пламени относительно исходной горючей смеси; c_p – теплоемкость газовой смеси при постоянном давлении; D, κ – коэффициенты диффузии и температуропроводности; x' – координата; T_0, N_0 – начальные значения температуры и концентрации реагирующего вещества; w' – изменение скорости пламени в результате искривления его фронта; T_b – (температура горения) адиабатическая температура пламени; W – скорость химической реакции; Le – число Льюиса. Индексы: n – нормаль; b – горение.

Литература

1. **Ландау Л. Д.**//ЖЭТФ. 1944. Т. 14, № 6. С. 240–244.
2. **Нестационарное** распространение пламени /Под ред. Дж. Г. Маркштейна. М., 1968.
3. **Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г.**//ПМТФ. 1962. Т. 17, № 3. С. 21–26.
4. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.** Математическая теория горения и взрыва. М., 1980.
5. **Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А.**//ДАН СССР. 1938. Т. 19. С. 693–695.
6. **Арсенин В. Я.** Методы математической физики и специальные функции. М., 1974.
7. **Рогоза Б. Е.**//ФГВ. 1985. Т. 21, № 3. С. 45–48.
8. **Игнатьев С. М., Петухов Ю. И.**//ФГВ. 1989. Т. 25, № 5. С. 58–62.
9. **Минаев С. С., Бабкин В. С.**//ФГВ. 1987. Т. 23, № 2. С. 49–57.
10. **Kuznetzov E. A., Minaev S. S.**//Advanced Computation and Analysis of Combustion. (G. D. Roy, S. M. Frolov, P. Givi (eds.)). Moscow, 1997.
11. **Сабденов К. О.** Нестационарные задачи горения газовых смесей, жидких и твердых взрывчатых веществ и ракетных топлив: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1999.