

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНОГО
РЕШЕНИЯ В ЦЕЛОМ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II
М. Отелбаев, А. А. Дурмагамбетов,
Е. Н. Сейткулов

Аннотация. Получен критерий сильной разрешимости в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, сильное решение в целом.

В этой работе, которая является продолжением работы [1], мы применим результаты, полученные в указанной работе, к системе уравнений Навье — Стокса.

1. Некоторые известные факты о классах периодических функций на кубе. Пусть Q — куб с ребрами, равными 2π , Δ — оператор Лапласа, $p \in (1; \infty)$, $\alpha \in (-\infty; +\infty)$. На множестве тригонометрических полиномов определим норму

$$|u|_{W_{p,\pi}^\alpha(Q)} = |(-\Delta + E)^{\frac{\alpha}{2}} u|_{L_p(Q)}. \quad (1)$$

Здесь E — единичный оператор.

Пополнение линейного многообразия тригонометрических полиномов по норме (1) обозначим через $W_{p,\pi}^\alpha(Q)$. Это дробное пространство Соболева периодических функций.

Если в (1) вместо куба Q рассмотреть \mathbb{R}^3 , то $W_p^\alpha(\mathbb{R}^3)$ — пространство беселевых потенциалов, о котором можно прочесть в [2]. Норма в $W_p^\alpha(\mathbb{R}^3)$ определяется по формуле

$$|u|_{W_p^\alpha(\mathbb{R}^3)} = \left[\int_{\mathbb{R}^3} |F_{\xi \rightarrow y}^{-1} (|\xi|^2 + 1)^{\frac{\alpha}{2}} F_{x \rightarrow \xi} u(x)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

где F — прямое, а F^{-1} — обратное преобразования Фурье.

Теорема 1. Если $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha \geq \beta \geq 0$, $\alpha - \beta \geq 3(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, то

$$W_p^\alpha(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W_q^\beta(\mathbb{R}^3),$$

где знак \hookrightarrow означает вложение вместе с топологией.

Доказательство этой теоремы имеет длинную историю, а ее полное доказательство (в более общей форме) получено П. И. Лизоркиным в [3].

Для удобства сформулируем один результат, вытекающий из теоремы 1.

Лемма 1. Если $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma = 3(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, то

$$|u|_{L_q(\mathbb{R}^3)} \leq C|(-\Delta + E)^{\frac{\gamma}{2}}u|_{L_p(\mathbb{R}^3)}, \quad |(-\Delta + E)^{-\frac{\gamma}{2}}u|_{L_q(\mathbb{R}^3)} \leq C|u|_{L_p(\mathbb{R}^3)}.$$

Для дробных классов Соболева $W_{p,\pi}^l$ периодических функций верны утверждения, подобные теореме 1 и лемме 1.

Лемма 1'. (а) Если $1 < p \leq 2$, $\gamma = 3(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$, то

$$|(-\Delta + E)^{-\frac{\gamma}{2}}u|_{L_2(Q)} \leq C|u|_{L_p(Q)}.$$

(б) Если $2 \leq q < \infty$, $\gamma = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$, то

$$|u|_{L_q(Q)} \leq C|(-\Delta + E)^{\frac{\gamma}{2}}u|_{L_2(Q)}.$$

В монографиях по теоремам вложений уделяется большое внимание теории пространств $W_p^\alpha(\mathbb{R}^3)$ и формулируется и доказывается теорема 1. Однако аналог теоремы 1 для пространств периодических на кубе Q функций отсутствует практически во всех известных монографиях. Конечно, результат леммы можно извлечь из результатов П. И. Лизоркина [3].

Мы укажем другой путь. В пространствах $L_p(Q)$ ($1 < p < \infty$) операторы $(-\Delta + E)^\alpha$ ($\alpha > 0$) можно определить по формуле (см. [4, с. 308])

$$(-\Delta + E)^\alpha u = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty [\lambda^{\alpha-1} (\lambda E - \Delta + E)^{-1} (-\Delta + E)u] d\lambda, \quad (3)$$

где $u \in D(-\Delta)$ ($D(\cdot)$ — область определения). Здесь Δ — самосопряженное расширение оператора Лапласа, соответствующее периодическим краевым условиям. Равенство (3), первоначально определенное на тригонометрических полиномах, по непрерывности (в метрике $L_p(Q)$) распространяется на все $u(\cdot)$, для которых имеет смысл правая часть (3). Так как локальная главная часть интегрального оператора $(\lambda E - \Delta + E)^{-1}$ (функции Грина) одна и та же для \mathbb{R}^3 и для Q (и равна фундаментальному решению), то лемма 1' сводится к лемме 1.

Лемму 1' можно доказать, не пользуясь теоремой 1 (или леммой 1). Например, теорема 2 Нурсултанова из [5] позволяет доказать аналог теоремы 1 для периодических классов, опираясь на преобразования Абеля и неравенства Юнга — О'Нейла.

Лемма 2. Пусть u и v — тригонометрические полиномы и $-\infty < \gamma < \frac{3}{4}$, а D — дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами. Тогда

$$|(-\Delta + E)^{-\gamma}(u \cdot Dv)|_{L_2(Q)} \leq C|(-\Delta + E)^{\frac{3}{8}-\frac{\gamma}{2}}u|_{L_2(Q)} \cdot |(-\Delta + E)^{\frac{7}{8}-\frac{\gamma}{2}}v|_{L_2(Q)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\frac{3}{2} \geq 2\gamma = 3(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \geq 0$ из леммы 1' имеем

$$|(-\Delta + E)^{-\gamma}(u \cdot Dv)|_{L_2(Q)} \leq C|u \cdot Dv|_{L_p(Q)}.$$

Используем неравенство Коши, а затем снова лемму 1':

$$\begin{aligned} |(-\Delta + E)^{-\gamma}(u \cdot Dv)|_{L_2(Q)} &\leq C|u|_{L_{2p}(Q)}|Dv|_{L_{2p}(Q)} \\ &\leq C|(-\Delta + E)^{\frac{3}{8}-\frac{\gamma}{2}}u|_{L_2(Q)}|(-\Delta + E)^{\frac{7}{8}-\frac{\gamma}{2}}v|_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Лемма при $\gamma \geq 0$ доказана.

Если $\gamma \in [-\frac{1}{2}, 0)$, то пользуемся доказанной частью леммы и неравенствами

$$\begin{aligned} |(-\Delta + E)^{-\gamma} f|_{L_2(Q)} &= | [(-\Delta + E)^{-(\gamma+\frac{1}{2})}] (-\Delta + E)^{\frac{1}{2}} f |_{L_2(Q)} \\ &\leq c \sum_{j=1}^3 \left| [(-\Delta + E)^{-(\gamma+\frac{1}{2})}] \frac{\partial}{\partial x_j} f \right|_{L_2(Q)} + | [(-\Delta + E)^{-(\gamma+\frac{1}{2})}] f |_{L_2(Q)}, \\ \sum_{j=1}^3 \left| [(-\Delta + E)^{-(\gamma+\frac{1}{2})}] \frac{\partial}{\partial x_j} f \right|_{L_2(Q)} &+ | [(-\Delta + E)^{-(\gamma+\frac{1}{2})}] f |_{L_2(Q)} \leq c |(-\Delta + E)^{-\gamma} f|_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Сами эти неравенства вытекают из простых соотношений коэффициентов Фурье.

Пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, $x \in Q$, каждая компонента которых принадлежит $W_{p,\pi}^\alpha(Q)$, обозначим через $L_{p,\alpha}$. Эти пространства, как и $W_{p,\pi}^\alpha(Q)$, определены при всех $p \in (1, \infty)$ и $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Обозначим $(u, \nabla)v = u_i \partial_i v = (u_i \partial_i v_1, u_i \partial_i v_2, u_i \partial_i v_3)$, где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $u_i \partial_i = u_1 \partial_1 + u_2 \partial_2 + u_3 \partial_3$.

Из леммы 2 сразу получаем, что верна

Лемма 3. Пусть u и v — трехкомпонентные вектор-функции и $-\infty < \gamma < \frac{3}{4}$. Тогда имеет место неравенство

$$|(-\Delta + E)^{-\gamma} (u, \nabla)v|_{L_{2,0}} \leq C |(-\Delta + E)^{\frac{3}{8}-\frac{\gamma}{2}} u|_{L_{2,0}} |(-\Delta + E)^{\frac{7}{8}-\frac{\gamma}{2}} v|_{L_{2,0}}.$$

В пространстве $L_{p,\alpha}$ базисом являются следующие элементы:

$$(1\ 0\ 0) e^{i\langle m,x \rangle}, (0\ 1\ 0) e^{i\langle m,x \rangle}, (0\ 0\ 1) e^{i\langle m,x \rangle}, \tag{4}$$

где m пробегает множество всех целых векторов, а $\langle m, x \rangle = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$ ($i^2 = -1$). Из линейной комбинации элементов (4) при $m \neq (0, 0, 0)$ образуем два линейно независимых взаимно ортогональных вектора

$$e_m^{(j)} = (c_{m_1}^{(j)}\ c_{m_2}^{(j)}\ c_{m_3}^{(j)}) e^{i\langle m,x \rangle} \quad (j = 1, 2),$$

удовлетворяющих условиям

$$c_{m_1}^{(j)} m_1 + c_{m_2}^{(j)} m_2 + c_{m_3}^{(j)} m_3 = 0, \quad \sum_{k=1}^3 |c_{m_k}^{(j)}|^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3. \tag{4'}$$

Из множества вектор-функций $e_m^{(1)}, e_m^{(2)}$, где $m = (m_1, m_2, m_3)$ пробегает множество всех целых векторов ($m \neq (0, 0, 0)$), присоединив к нему векторы (4) при $m = (0, 0, 0)$, составим ортонормированную систему

$$(1\ 0\ 0), (0\ 1\ 0), (0\ 0\ 1), \dots, e_m^{(1)}, e_m^{(2)}, \dots, \tag{4''}$$

которая является подсистемой системы (4).

При $p \in (1, \infty)$ и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ введем пространство $H_{p,\alpha} \equiv H_{p,\alpha}(Q)$, пополняя по норме $L_{p,\alpha}$ все возможные конечные линейные комбинации векторов (4)''. Получим банахово пространство, являющееся подпространством $L_{p,\alpha}$.

Лемма 4. (а) Пусть $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ — конечная линейная комбинация элементов (4''). Тогда

$$\operatorname{div} u(x) \equiv \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_j} = 0. \quad (5)$$

(б) Пусть $u(x)$ — конечная линейная комбинация элементов из (4) и выполнено равенство (5). Тогда $u(x)$ представима в виде конечной суммы элементов (4'').

Эта лемма в силу (4') легко следует из построений ортонормированной системы (4'').

Из леммы 4 стандартными приемами получаем, что имеет место

Лемма 5. Справедливо равенство

$$H_{p,\alpha} \equiv H_{p,\alpha}(Q) = \{u \in L_{p,\alpha}(Q) : \operatorname{div} u = 0\}.$$

Здесь $\operatorname{div} u = 0$ понимается в обычном смысле при $\alpha \geq \frac{1}{2}$, а при $\alpha < \frac{1}{2}$ понимается как равенство нулю обобщенной вектор-функции над конечными линейными комбинациями базисных элементов (4).

Лемма 6. Если $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ и $u \in L_{2,\alpha}$, то

$$(u + \operatorname{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div} u) \in H_{2,\alpha}.$$

Здесь $(-\tilde{\Delta})^{-1}$ — оператор, определенный формулой: если

$$u = \sum_{\{m\}} (c_{m,1} \ c_{m,2} \ c_{m,3}) e^{i\langle m, x \rangle},$$

то

$$(-\tilde{\Delta})^{-1} u = \sum_{\{m\}, |m| \neq 0} \frac{1}{|m|^2} (c_{m,1} \ c_{m,2} \ c_{m,3}) e^{i\langle m, x \rangle}.$$

Доказательство леммы получается непосредственными простыми вычислениями. При $\alpha < \frac{1}{2}$ операции понимаются в обобщенном смысле.

Лемма 7. Пусть $P(x) \in W_{2,\pi}^\alpha(Q)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Тогда

$$\operatorname{grad} P(x) + [\operatorname{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div}] \operatorname{grad} P(x) = 0.$$

Доказательство леммы проводится простыми вычислениями.

Легко доказывается

Лемма 8. Имеет место равенство

$$L_{2,\alpha}(Q) = H_{2,\alpha}(Q) \oplus M,$$

где \oplus — знак ортогональной суммы, $M = \{u : u = \operatorname{grad} g \in L_{2,\alpha}(Q)\}$, т. е. если $f(x) \in L_{2,\alpha}(Q)$, то $f(x) = \tilde{f}(x) + u(x)$, $\tilde{f}(x) \in H_{2,\alpha}(Q)$, $u = \operatorname{grad} g \in M$.

Доказательство следует из равенства $f(x) = [f + \operatorname{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div} f] - \operatorname{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div} f$ и леммы 6.

Любопытно и, по-видимому, полезно в гидродинамике следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть Ω_0 и Ω_1 — области в \mathbb{R}^3 , и пусть Ω_1 содержит Ω_0 вместе с окрестностью. В области Ω_1 рассмотрим некоторую граничную задачу

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega_1, \quad R(u)|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad (6)$$

где $R(\cdot)$ — линейный оператор. Предположим, что эта задача однозначно разрешима для любого $f \in L_2(\Omega_1)$ и решение принадлежит классу $W_2^{(2)}(\Omega_1)$. Через $\widehat{\Delta}^{-1}$ обозначим оператор, сопоставляющий f решение задачи (6). В пространстве трехкомпонентных вектор-функций, компоненты которых лежат в $W_2^1(\Omega_0)$, определим оператор

$$Nu \equiv \text{grad}(\widehat{\Delta}^{-1})\chi(\Omega_0) \text{div} u,$$

где χ — характеристическая функция. Легко убедиться, что в Ω_0 выполнено $\text{div}(E - N)u \equiv \text{div} u - \text{div} Nu = 0$.

2. О системе уравнений Навье — Стокса. Рассмотрим систему уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j - \Delta u_j + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} P = f_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad \text{div} u \equiv \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} u_k = 0, \quad (7)$$

в области $[0, a] \times Q$ ($t \in [0, a]$, $x \in Q$). К системе добавим периодические граничные условия по пространственным переменным и нулевое начальное условие Коши по времени:

$$\begin{aligned} u_j(t, x)|_{t=0} &= 0, \quad u_j(t, x)|_{x_k=-\pi} = u_j(t, x)|_{x_k=\pi}, \\ \frac{\partial}{\partial x_k} u_j(t, x)|_{x_k=-\pi} &= \frac{\partial}{\partial x_k} u_j(t, x)|_{x_k=\pi}, \\ P(t, x)|_{x_k=-\pi} &= P(t, x)|_{x_k=\pi} \quad (k, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7) и (8) давление $P(t, x)$ не может быть определено однозначно. Оно может содержать (в виде слагаемого) произвольную функцию, зависящую от времени t . Поэтому для однозначности определения P к (7) и (8) добавим условие

$$\int_Q P(t, x) dx = 0. \quad (9)$$

Поддействуем операцией $K \equiv E + \text{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}$ на первые три уравнения системы (7). Тогда получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (E + \text{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div})(u, \nabla)u = (E + \text{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div})f \equiv \tilde{f}, \quad u|_{t=0} = 0. \quad (10)$$

При выводе (10) мы учитывали (7), (8) и то, что в силу $\text{div} u = 0$

$$(E + \text{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (E + \text{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}) \Delta u = \Delta u.$$

Так как в классе периодических функций (пополнении многообразия тригонометрических полиномов) операторы $\frac{\partial}{\partial t}$ и Δ перестановочны с проектором $K = [E + \text{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}]$, в системе уравнений (10) нет необходимости писать Ku , $K \frac{\partial}{\partial t} K$ и $K \Delta K$ вместо u , $\frac{\partial}{\partial t}$ и Δ соответственно.

Отметим, что, действуя на систему (10) операцией div , получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} u) - \Delta(\operatorname{div} u) = 0, \quad (\operatorname{div} u)|_{t=0} = 0.$$

Отсюда следует, что для решения (10) условие $\operatorname{div} u = 0$ выполняется автоматически.

В качестве пространства H в пп. 1–3 из [1] возьмем $H_{2,0}$. Тогда оператор $(-\Delta)$ будет самосопряженным в H неотрицательным оператором, а оператор $[E + \operatorname{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div}](u, \nabla)u$ — билинейным в H оператором. Обозначим их соответственно через A и $B(\cdot, \cdot)$.

Теперь система уравнений (10) записывается в виде

$$u'_t + Au + B(u, u) = f(t), \quad u|_{t=0} = 0. \quad (10')$$

Условие (2), (3) из [1] выполняется в силу леммы 3. Помимо условий, которые требовались в пп. 1–3 из [1], выполняется еще одно условие:

$$\langle B(u, g), g \rangle_{H_{2,0}} = 0.$$

Из этого условия для решения (10') вытекает хорошо известная априорная оценка:

$$|u|^2(t) + \int_0^t |A^{\frac{1}{2}}u|^2 dt \leq \int_0^t |f|^2 dt. \quad (11)$$

Эта оценка позволяет получить существование «слабого решения Хопфа» в целом (см. [6, с. 83]).

Применим теперь теорему А из [1] к системе уравнений (10). Пусть $a > 0$. Через $H_{2,\alpha}^a$ будем обозначать трехкомпонентные вектор-функции $u(t, x)$, значения которых при почти всех $t \in [0, a]$ принадлежат $H_{2,\alpha}$ и

$$|u(\cdot, \cdot)|_{H_{2,\alpha}^a} = \left(\int_0^a |u(t, \cdot)|_{H_{2,\alpha}}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

В пространстве $H_{2,0}^a$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + K(v, \nabla)v &= s \quad (0 < t < a), \quad v|_{t=0} = 0, \\ -\frac{\partial s}{\partial t} - \Delta s - K \left[(v, \nabla)s + \sum_{i=1}^3 s_i \operatorname{grad} v_i \right] &= 0 \quad (0 < t < a), \quad s|_{t=a} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $K = [E + \operatorname{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div}]$ — проектор.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в системе уравнений (12) решения обобщенные, смысл их дается в определении 1 (см. ниже). Поэтому производные по времени от $s(\cdot)$ — обобщенные производные (пробные функции определены равенствами (13)). Можно показать, что решения системы (12) на любом строго внутреннем к $[0, a]$ отрезке имеют обычные производные и бесконечно гладкие.

Приведем определение обобщенного решения. Сначала отметим, что из априорной оценки (11) следует (см. [1]), что если $(w_1, w_2) \in D_a$ и $w' + Aw + B(w, w) \in H_2[0, a]$, $w(0) = 0$, то $B_w w_1 \in H_2[0, a]$. Поэтому в определении 3г) из [1] вместо «Если $(w_1, w_2) \in D_a$ и $B_w w_1 \in H_2[0, a]$, то ...» можно использовать

следующее: «Если $(w_1, w_2) \in D_a$, то ...». С учетом сказанного определение обобщенного решения для системы (12) будет следующим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть

$$w_1(t, x) = \sum c_{1,n}(t)e_n(x), w_2(t, x) = \sum c_{2,n}(t)e_n(x), \quad (13)$$

где суммы конечные, $c_{1,n}(t)$ и $c_{2,n}(t)$ — бесконечно гладкие на $[0, a]$ функции, удовлетворяющие условиям $c_{1,n}(0) = 0, c_{2,n}(a) = 0$, а $\{e_n(x)\}$ — ортонормированный базис (4''). Пара функций

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)e_n(x), \quad s(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t)e_n(x) \quad (14)$$

называется *решением системы* (12), если

$$\int_0^a \int_Q (|s(t, x)|^2 + |v(t, x)|^2) dxdt < \infty,$$

и при любом $\delta \in (0, a)$ выполнено неравенство

$$\int_0^{a-\delta} \int_Q |v'_t(t, x) - \Delta v(t, x)|^2 dxdt < \infty,$$

а также для любой пары (w_1, w_2) вида (13) справедливы равенства

$$\int_0^a \int_Q s(t, x)[w'_{1t} - \Delta w_1 + (v, \nabla)w_1 + (w_1, \nabla)v] dxdt = 0,$$

$$\int_0^a \int_Q \{-w'_{2t} - \Delta w_2\}v(t, x) + w_2(v, \nabla)v(t, x) - w_2(t, x)s(t, x) dxdt = 0. \quad (15)$$

В последних равенствах перед $(v, \nabla)w_1 + (w_1, \nabla)v$ и перед $(v, \nabla)v(t, x)$ должен стоять оператор проектирования $K = [E + \text{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}]$. Этот оператор «переброшен» на рядом стоящий множитель, на который он действует как единичный. Поэтому в этих равенствах отсутствует проектор K .

Теорема 2. Система (10) при любом $\tilde{f} \in H_{2,0}^a$ имеет решение $u(t, x)$, удовлетворяющее условию $\frac{\partial u}{\partial t}, \Delta u \in H_{2,0}^a$, если и только если система уравнений (12) (рассматриваемая в $H_{2,0}^a$) имеет только нулевое решение (т. е. $v(t, x) \equiv s(t, x) \equiv 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения 1 система (12) эквивалентна системе (4) из теоремы А работы [1], соответствующей уравнению (10'), т. е. система (4) из [1] есть абстрактная запись системы (12). Поэтому теорема 2 — следствие теоремы А из [1].

Следующая теорема является переформулировкой теоремы 2.

Теорема 2'. Для того чтобы задача (7)–(9) при любом $f = (f_1(t, x), f_2(t, x), f_3(t, x))$, удовлетворяющем условию

$$\int_0^a |f(t, \cdot)|_{L_2(Q)}^2 dt < \infty,$$

имела решение (u, P) , $u = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$, удовлетворяющее условию

$$\int_0^a |u_t - \Delta u|_{L_2(Q)}^2 + \int_0^a |\text{grad } P|_{L_2(Q)}^2 dt < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы обобщенное решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial t} - \Delta v_j + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} P &= s_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad \text{div } v = \frac{\partial}{\partial x_k} v_k = 0, \\ -\frac{\partial s_j}{\partial t} - \Delta s_j - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} s_k \right) v_k - \frac{\partial}{\partial x_k} s_j v_k + \frac{\partial}{\partial x_j} r &= 0, \\ \text{div } s = \frac{\partial}{\partial x_k} s_k = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad \int_Q P(t, x) = 0, \quad \int_Q r(t, x) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

с условиями Коши

$$v(t, x)|_{t=0} = 0, \quad s(t, x)|_{t=a} = 0$$

и с периодическими условиями по пространственным переменным для $v = (v_1, v_2, v_3)$, $s = (s_1, s_2, s_3)$, P , r , $\frac{\partial}{\partial x_k} v$, $\frac{\partial}{\partial x_k} s$ ($k = 1, 2, 3$) было только нулевым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2'. Если $(u(t, x), P(t, x))$ — решение задачи (7)–(9), то $u(t, x)$ будет решением задачи (10), так как, действуя на систему (7) (при этом учитывая (8) и (9)) проектором $K = [E + \text{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}]$, получаем (10). Обратно, если $u(t, x)$ — решение (10), которое может быть записано в виде (14), то, обозначив

$$P(t, x) = c(t) + (-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}(u, \nabla)u - (-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div } f, \quad (17)$$

где $c(t)$ — произвольная функция от времени, вместо (10) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u, \nabla)u + \text{grad } P = f, \quad u|_{t=0} = 0.$$

В (17) оператор $(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}$ понимается как замыкание операции $(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}$, первоначально определенной на тригонометрических полиномах.

Уравнение $\text{div } u = 0$, а также периодические граничные условия на u и P по пространственным переменным вытекают из представимости u в виде (14) и определения операции $(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}$. Следовательно, задача (7)–(9) эквивалентна задаче (10) в классе вектор-функций, представимых в виде (14).

Действуя на систему (16) проектором $E + \text{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}$, учитывая $\text{div } s = \text{div } v = 0$ и периодические граничные условия по пространственным переменным, получаем систему (12) и для v и s — представление вида (14). Таким образом, из (16) следует (12). Обратно, из (12) вытекает (16). Действительно, обозначив

$$P(t, x) = c_1(t) + (-\tilde{\Delta})^{-1} \text{div}(v, \nabla)v,$$

$$r(t, x) = c_2(t) + (-\tilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div} \left[(v, \nabla) s + \sum_{i=1}^3 s_i \operatorname{grad} v_i \right],$$

из системы (12) получаем систему (16). Уравнение $\operatorname{div} s = \operatorname{div} v = 0$, а также периодичность s, v и r по пространственным переменным вытекают из представимости s и v в виде (14). Мы доказали, что системы (16) и (12) эквивалентны. Поэтому, так как задача (10) и задача (7)–(9) эквивалентны, теорема 2' есть следствие теоремы 2.

Если краевые условия не периодические, а скажем, выполняются условия «прилипания», то переход к абстрактной записи затруднен. Трудности связаны с неперестановочностью резольвенты оператора Лапласа и операций дифференцирования по пространственным переменным. Тем не менее такой переход возможен, если воспользоваться, например, результатами работ В. А. Солонникова из [7, 8].

Нетрудно показать, что классическое (сильное) решение задачи (16) будет только нулевым, но в теореме 2' речь идет об обобщенном решении. Поэтому теорема 2' не решает известной проблемы о сильной разрешимости, а сводит ее к другой проблеме.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для системы уравнений Навье — Стокса при $t = 0$ можно задавать ненулевые начальные условия Коши. Тогда проблема сильной разрешимости в целом становится более общей, чем рассмотренная нами, но благодаря теореме существования в малом легко сводится к случаю, когда начальные условия Коши равны нулю. Покажем это для абстрактной задачи (1). Пусть $\varphi(t)$ — бесконечно гладкая функция такая, что $\varphi(t) = 0$ при $0 \leq t < \varepsilon$ и $\varphi(t) = 1$ при $t \geq 2\varepsilon$, где ε — малое число. Допустим, что задача (1) из [1] имеет решение $u(t)$ на $(0, 4\varepsilon)$ такое, что $|B(u, u)|_H, |u' + Au|_H \in L_2(0, 4\varepsilon)$. Положим $v = \varphi(t)u(t)$. Для $v(t)$ получим $v(0) = 0$ и

$$v' + Av + B(v, v) = \begin{cases} (\varphi u)' + A\varphi u + \varphi^2 B(u, u) & \text{при } 0 < t \leq 2\varepsilon, \\ f(t) & \text{при } t > 2\varepsilon. \end{cases}$$

Поэтому общий случай сведен к частному.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если известно, что задача типа (*) из замечания 3.1 в [1] не сильно разрешима в целом, то теоремы типа А дают существование решения системы типа (4) или (4') из [1]. Такое применение теорем типа А даже в конечномерном случае полезно. Применяя теорему 1 к скалярному уравнению $y' + y^2 = f(t)$, $y(0) = 0$, получаем существование обобщенного решения краевой задачи (4'') из [1].

Краткое содержание этой работы содержится в [9] (см. также [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Отелбаев М., Дурмагамбетов А. А., Сейткулов Е. Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 620–634.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1972.
3. Лизоркин П. И. Обобщенные лиувиллевские дифференцирования и функциональные пространства. Теоремы вложения // Мат. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 325–353.
4. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
5. Нурсултанов Е. Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 1. С. 22–25.
6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

7. Солонников В. А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1964. Т. 70. С. 213–317.
8. Солонников В. А. О дифференциальных свойствах решений первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье — Стокса // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1964. Т. 73. С. 221–291.
9. Отелбаев М., Дурмагамбетов А. А., Сейткулов Е. Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 4. С. 446–449.
10. Отелбаев М. О свойствах одного класса уравнений типа Навье — Стокса // Российско-Казахстанский симпозиум. Нальчик: Эльбрус, 2004. С. 140–145.

Статья поступила 26 декабря 2006 г., окончательный вариант — 6 августа 2007 г.

Отелбаев Мухтарбай, Дурмагамбетов Асет Асхатбекович,
Сейткулов Ержан Нураханович
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Мунайпасова, 7, Астана 010010, Казахстан
otelbayev_m@rambler.ru, aset.durmagambetov@gmail.com, erj@mail.ru