МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 20, № 6 (1976), 859—867

УДК 517.9

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. Отелбаев

В статье изучается спектр оператора Штурма — Лиувилля. Основные результаты — двусторонние оценки распределения собственных чисел, критерий принадлежности резольвенты симметрично-нормированному идеалу σ_θ. Библ. 12 назв.

Пусть Ω — некоторое открытое ограниченное или неограниченное множество в $J = (-\infty, \infty)$, состоящее из конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов, а $q(x)$ локально непрерывная в Ω функция, удовлетворяющая условию

$$q(x) \geqslant 0, \qquad x \in \Omega. \tag{1}$$

Обозначим через L расширение по Фридрихсу (т. е. расширение, соответствующее нулевым граничным условиям) оператора

$$L_0 y = -y'' + q(x) y, \tag{2}$$

определенного на $C_0^\infty(\Omega)$.

Число собственных чисел оператора L, меньших λ, будем обозначать через $N(\lambda, q(x), \Omega)$. Введем функцию

$$q_\Omega^*(x) = \inf_{(x-d,\, x+d) \subseteq \Omega} 1/4 \left(d^{-1} + 1/2 \int_{x-d}^{x+d} q(t)\, dt\right)^2.$$

Часто вместо $N(\lambda, q(x), \Omega)$ и $q_\Omega^*(x)$ будем писать просто $N(\lambda)$ и $q^*(x)$.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $q(x) \geqslant 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\gamma^{-1}\sqrt{\lambda}\mu\,(x \in \Omega:\ \lambda \geqslant \gamma q_\Omega^*(x)) \leqslant$$
$$\leqslant N(\lambda) \leqslant \gamma\sqrt{\lambda}\mu\,(x \in \Omega:\ \lambda \geqslant \gamma^{-1}q_\Omega^*(x)),$$

где $\mu(\cdot)$ — *мера Лебега,* γ — *постоянная, не зависящая от* λ, $q(x)$ *и* Ω.

Напомним, что через σ_θ обозначают [1, стр. 120] класс вполне непрерывных операторов, у которых сумма θ-х степеней S-чисел сходится. Самосопряженный положительный оператор A принадлежит σ_θ тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^\theta < \infty$, где λ_n — собственные числа оператора A.

Из теоремы будут выведены такие следствия:

Следствие 1. $(L+E)^{-1} \in \sigma_\theta$ $(\theta > 1/2)$ *тогда и только тогда, когда*

$$(1 + q_\Omega^*(x))^{-\theta+1/2} \in L_1(\Omega).$$

Следствие 2. *Пусть* $\Omega = J$ и $q_1(x) = \sup\limits_{|t|\leqslant|x|} q(t)$. *Предположим, что выполнены условия*:

а) $\mu\,(x:\ q_1(x) \geqslant \lambda,\quad q^*(x) \leqslant T_0\lambda) = o\,(\mu\,(x:\ q^*(x) \leqslant T_1\lambda))$, $\lambda \to \infty$, *где* $T_0 \geqslant 2\gamma$ *и* $T_1 \leqslant 1/2\gamma$;

б) $\mu\,(x:\ q_1(x) \leqslant \lambda/k) \approx \mu\,(x:\ q_1(x) \leqslant \lambda)$, $\lambda \to \infty$, *для любого* $k > 0$. *Тогда*

$$N(\lambda) \approx (\sqrt{\lambda}/\pi)\mu\,(x:\ q_1(x) \leqslant \lambda).$$

(*Знак* $\approx$ *означает, что отношение стремится к единице.*)

Теорема 1 позволяет судить о густоте спектра оператора L при одном лишь предположении $q(x) \geqslant 0$, кроме того, она интересна тем, что дает оценку сразу всех собственных чисел (больших и малых) одновременно. Близкие по смыслу оценки ранее были получены автором в [2] при изучении гладкости решения уравнения Штурма-Лиувилля. В работе [3] Г. В. Розенблюм установил оценки для $N(\lambda)$ многомерных операторов Шредингера в других терминах. Условиям следствия 2 могут удовлетворять быстро колеблющиеся потенциалы (например, $q(x) = e^{|x|}\sin^2 e^{|x|^\beta}$, $\beta > 1$). В этих случаях формулы для распределений собственных чисел не были известны, хотя условия Титчмарша — Левитана были сильно ослаблены [4—8].

Приступим к доказательству сформулированных результатов.

ЛЕММА 1. *Пусть* $a > 0$, $\lambda > 0$ *и* $q(x) \geqslant 0$. *Тогда*

$$N(\lambda a^2, \ a^2 q(at), \ \Omega_a) = N(\lambda, \ q(t), \ \Omega),$$

здесь и далее $\Omega_a = \{t: at \in \Omega\}$.

Доказательство. Если в уравнении $-y'' + q(x)y = \lambda y(x)$, $x \in \Omega$, сделать замену $x = at$, то получится уравнение $-y''(t) + a^2 q(at) y(t) = \lambda a^2 y(t)$. Поэтому лемма очевидна.

ЛЕММА 2. *Пусть* $a > 0$, $q(x) \geqslant 0$. *Тогда*

$$(a^2 q(at))^* = a^2 q^*(at).$$

Доказательство. Имеем

$$(a^2 q(at))^*_{\Omega_a} = \inf_{(t-d,\ t+d) \subseteq \Omega_a} 1/4 \left(d^{-1} + 1/2 \int_{t-d}^{t+d} q(ax)\, a^2\, dx\right)^2 =$$

$$= \inf_{(t-d,\ t+d) \subseteq \Omega} 1/4 \left(a\,(ad)^{-1} + a/2 \int_{at-da}^{at+da} q(t)\, dt\right)^2 = a^2 q^*_{\Omega}(at).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть* Ω *есть интервал* (a, b) *и* $q(x) \geqslant 0$. *Тогда*

$$c^{-1} \min_{x \in \Omega} q^*_{\Omega}(x) \leqslant \lambda_0 \leqslant c_0 \min_{x \in \Omega} q^*_{\Omega}(x),$$

где λ_0 — *наименьшее собственное число оператора*

$$Ly = -y'' + q(x)y, \ x \in (a, \ b), \ y(a) = y(b) = 0,$$

а c, c_0, ... *здесь и далее означают постоянные числа, не зависящие от* $q(x)$ *и* Ω.

Эта лемма доказана в работе [2].

ЛЕММА 4. *Пусть* $\mathscr{H}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, m \leqslant \infty$,— *некоторые сепарабельные гильбертовы пространства,* P_n, $n = 1, 2, \ldots, m \leqslant \infty$,— *линейные преобразования (ограниченные), действующие из* $\mathscr{H}_0$ *в* $\mathscr{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots, m$, A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, m$ — *линейные самосопряженные операторы в* $\mathscr{H}_n$. *Предположим, что для всякого* $y \in D(A_0)$ *выполнены условия*

$$P_n y \in D(A_n), \quad n \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{m} \| P_n y \|^2_{\mathscr{H}_n} \geqslant \| y \|^2_{\mathscr{H}_0},$$

$$\sum_{n=1}^{m} \| A_n P_n y \|^2_{\mathscr{H}_n} \leqslant (\| A_0 y \|_{\mathscr{H}_0} + \alpha \| y \|_{\mathscr{H}_0})^2, \quad \alpha > 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{m} M_n(-\lambda, \lambda) \geqslant M_0(-\lambda + \alpha, \lambda - \alpha),$$

где M_n (a, b) — число точек спектра оператора A_n в интервале (a, b).

Доказательство этой леммы проведено в [9].

ЛЕММА 5. *Пусть Ω — интервал, содержащийся в* $[0, 1]$, $q(x) \geqslant 0$.

Тогда

$$N(\lambda, q(x), \Omega) \leqslant c\mu(x \in \Omega: c\lambda \geqslant q^*_\Omega(x)) e^{c\lambda}\sqrt{\lambda}.$$

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда существуют Ω_n, $q_n(x)$, λ_n и $c_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $N(\lambda_n,$

$$q_n(x), \Omega_n) > c_n\mu(x \in (0, 1): c_n\lambda_n \geqslant$$
$$\geqslant q^*_n(x)) e^{c_n\lambda_n}\sqrt{\lambda_n}, \quad (3)$$

$c_n \to \infty$ при $n \to +\infty$ и $q_n(x) \geqslant 0, \lambda_n > 0, 1, \Omega_n \subseteq (0, 1)$. Отсюда следует, что оператор $L_n y = -y'' + q_n y$, $y(\Omega_n^+) = y(\Omega_n^-) = 0$, где $\Omega_n^\pm$ — концы интервала Ω_n, имеет собственное число, лежащее в отрезке $[0, \lambda_n]$. Поэтому из леммы 3 получаем, что существует точка $x_n \in \Omega_n$ такая, что $q^*_n(x_n) < c\lambda_n$. Но тогда из определения $q^*_n(x)$ легко следует, что

$$q^*_n(x) \leqslant 100c\lambda_n \quad \text{при} \quad |x - x_n| \leqslant (100\sqrt{c\lambda_n})^{-1}.$$

Отсюда и из (3) вытекает неравенство

$$N(\lambda_n, q_n(x), \Omega_n) \geqslant c_n c^{-1} e^{c_n\lambda_n}, \qquad c_n \gg c.$$

Так как при расширении области и уменьшений потенциала собственные числа оператора L не возрастают [10, стр. 110—114], то левая часть этого неравенства не превосходит величины

$$N(\lambda_n, 0, (0, 1)) \leqslant \text{const}\sqrt{\lambda_n},$$

и, значит, $\text{const}\sqrt{\lambda_n} \geqslant c_n c^{-1} e^{c_n\lambda_n}$. При $c_n \gg 1$ это неравенство невозможно. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Пусть $q(x) \geqslant 0$, Ω — произвольный интервал. Тогда*

$$N(1, q(x), \Omega) \leqslant c\mu(x \in \Omega; q^*(x) \leqslant c).$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j(x)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — система бесконечно гладких функций, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{supp}\varphi_j(x) \subset (j/2,\ j/2+1),\ \sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi_j^2(x) = 1,$$
$$\sum_{k=0}^{3}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\varphi_j^{(k)}(x)| < T. \tag{4}$$

Легко проверить, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|\sqrt{L}\,\varphi_j y\|^2_{L_2(\Omega\cap(j/2,\ j/2+1))} =$$
$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\Omega\cap(j/2,\ j/2+1)}(|(\varphi_j y)'|^2 + q(x)|\varphi_j y|^2)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\Omega}(|y'|^2 + q(x)|y|^2)\,dx + T^2\int_{\Omega}|y|^2\,dx. \tag{5}$$

Обозначим через $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности множеств и функций, полученные из $\{\Omega\cap(j/2,\ j/2+1)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ и $\{\varphi_j(x)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ соответственно некоторой перенумерацией. В лемме 4 возьмем $\mathscr{H}_n = L_2(\Omega_n)$, $\mathscr{H}_0 = L_2(\Omega)$, $A_0 = \sqrt{L}$, $A_n = \sqrt{L_n}$, где L_n—оператор—$y'' + q(x)y$, соответствующий множеству Ω_n, а за P_n — оператор умножения на $\psi_n(x)$. Из (5) вытекает, что все условия леммы 4 выполнены, причем в качестве α можно взять число T из неравенства (4). Поэтому

$$N(1,\ q(x),\ \Omega) \leqslant c_1\sum_{n=1}^{\infty}N_n(c_1),$$

где $N_n(c_1)$ — число собственных чисел оператора L_n, меньших чем c_1. К каждому слагаемому правой части применим лемму 5 и очевидное неравенство

$$q^*_{\Omega_n}(x) \geqslant q^*_{\Omega}(x) \quad \text{при} \quad x\in\Omega_n.$$

Тогда получаем, что

$$N(1,\ q(x),\ \Omega) \leqslant c_2\sum_{n=1}^{\infty}\mu(x\in\Omega_n:\ q^*_{\Omega}(x) \leqslant c_2) \leqslant$$
$$\leqslant c\mu(x\in\Omega:\ q_{\Omega}(x) \leqslant c).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Если Ω состоит из счетного (или конечного) числа непересекающихся интервалов $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$, то оператор L, соответствующий множеству $\Omega = \bigcup_{j=1}\Omega_j$, будет ортогональной суммой операторов, соответствующих множествам Ω_j. Поэтому теорему достаточно доказать только для случая, когда Ω

состоит из одного интервала (конечного или бесконечного). Выберем в лемме 1 число $a > 0$ из условия $\lambda a^2 = 1$. Тогда получаем

$$N(\lambda, q(x), \Omega) = N(1, \lambda^{-1} q(t/\sqrt{\lambda}), \Omega_a).$$

К этому равенству применим лемму 6, а затем лемму 2:

$$\begin{aligned} N(\lambda, q(x), \Omega) &= N(1, \lambda^{-1} q(t/\sqrt{\lambda}), \Omega_a) \leqslant \\ &\leqslant c\mu(x \in \Omega_{1/\sqrt{\lambda}}\colon\ (\lambda^{-1} q(x/\sqrt{\lambda}))^* \leqslant c) = \\ &= c\mu(x \in \Omega_{1/\sqrt{\lambda}}\colon\ \lambda^{-1} q^*(x/\sqrt{\lambda}) \leqslant c) = \\ &= \sqrt{\lambda}\, c\mu(x \in \Omega\colon\ q^*(x) \leqslant c\lambda). \end{aligned}$$

Это доказывает правое неравенство теоремы 1. Докажем теперь левое неравенство. Пусть $x_0 \in \Omega$ и $q^*(x_0) < \lambda$. Тогда из определения $q^*(x)$ следует, что

$$16\sqrt{\lambda} \geqslant \int_{x_0 - 1/\sqrt{\lambda}}^{x_0 + 1/\sqrt{\lambda}} q(t)\, dt. \tag{6}$$

Обозначим через $\omega(x)$ функцию из $C_0^\infty(-1, 1)$, которая равна 1 при $|x| \leqslant 0{,}5$ и нулю вне $(-3/4, 3/4)$. Пользуясь неравенством (6), непосредственными вычислениями находим

$$\langle L\omega((x - x_0)\sqrt{\lambda}), \omega((x - x_0)\sqrt{\lambda})\rangle \leqslant \\ \leqslant c\lambda \|\omega(\sqrt{\lambda}(x - x_0))\|_{L_2}^2. \tag{7}$$

Легко видеть, что при достаточно большом c можно указать не менее $c^{-1}\sqrt{\lambda}\mu(x \in \Omega\colon \lambda \geqslant q^*(x))$ точек $x_0, x_1, \ldots$, для которых выполнено (7), причем интервалы $(x_i - 1/\sqrt{\lambda}, x_i + 1/\sqrt{\lambda})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются. Поэтому существует подпространство D_λ, размерность которого не меньше чем $c^{-1}\sqrt{\lambda}\mu(x \in \Omega\colon \lambda \geqslant q^*(x))$, на котором выполняется неравенство

$$\langle Ly,\ y\rangle \leqslant c\lambda \|y\|_{L_2}^2,\quad y \in D_\lambda.$$

Но тогда из известной леммы Глазмана [11, стр. 277] получаем

$$N(c\lambda) \geqslant c^{-1}\sqrt{\lambda}\mu(x \in \Omega\colon\ \lambda \geqslant q^*(x)).$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Доказательство следствия 1. Неограничивая общности, можно считать, что $q(x) \geqslant 100$ и $q^*(x) \geqslant 100$.

При $\theta > 1/2$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{1}{\theta-1/2}\int_{\substack{k\geqslant q^*(x)\\ x\in\Omega}}\frac{dx}{q^*(x)^{\theta-1/2}}=\frac{1}{\theta-1/2}\int_0^k\frac{d_\lambda\mu\,(x\in\Omega:\ \lambda\geqslant q^*(x))}{\lambda^{\theta-1/2}}=$$

$$=\mu\,(x\in\Omega:\ k\geqslant q^*(x))/((\theta-1/2)\,k^{\theta-1/2})+$$

$$+\int_0^k\mu\,(x\in\Omega:\ \lambda\geqslant q^*(x))/\lambda^{\theta+1/2}\,d\lambda,\qquad k\geqslant 100.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$c^{-1}\int_{x\in\Omega}\frac{dx}{q^*(x)^{\theta-1/2}}\leqslant\int_0^\infty\frac{\mu\,(x\in\Omega:\ \lambda\geqslant q^*(x))}{\lambda^{\theta+1/2}}\,d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant c\int_\Omega\frac{dx}{q^*\,(x)^{\theta-1/2}}. \tag{8}$$

Из теоремы легко следует, что

$$c^{-1}\int_0^\infty N\,(\lambda)/\lambda^{\theta+1}\,d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^\infty\mu\,(x\in\Omega:\ \lambda\geqslant q^*\,(x))/\lambda^{\theta+1/2}\,d\lambda\leqslant c\int_0^\infty N\,(\lambda)/\lambda^{\theta+1}\,d\lambda.$$

Но число $\theta\int_0^\infty\frac{N\,(\lambda)}{\lambda^{\theta+1}}\,d\lambda$ равно сумме θ-х степеней собственных чисел оператора L^{-1}, поэтому следствие 1 получается из последних оценок и неравенств (8).

Доказательство следствия 2. Пусть x_λ^- и x_λ^+ — самая левая и самая правая точки числовой оси, для которых $q_1\,(x_\lambda^-)=q_1\,(x_\lambda^+)=\lambda$. Обозначим через $L_{1,\lambda}$, $L_{2,\lambda}$ и $L_{3,\lambda}$ операторы с потенциалом $q\,(x)$ в областях $(-\infty, x_\lambda^-)$, $(x_\lambda^-,\ x_\lambda^+)$ и $(x_\lambda^+,\ +\infty)$. Ортогональная сумма $L_{1,\lambda}\oplus\oplus L_{2,\lambda}\oplus L_{3,\lambda}$ и оператор L являются разными самосопряженными расширениями оператора $L_0y=-y''+q\,(x)y$, определенного на

$$C_0^\infty\,(-\infty,\ x_\lambda^-)\oplus C_0^\infty\,(x_\lambda^-,\ x_\lambda^+)\oplus C_0^\infty\,(x_\lambda^+,\ +\infty).$$

Индексы дефекта оператора L_0 не больше, чем 6. Поэтому

$$\sum_{i=1}^3 N_{i\lambda}-6\leqslant N\,(\lambda)\leqslant\sum_{i=1}^3 N_{i,\lambda}+6,$$

где $N_{i,\lambda}$ — число собственных чисел оператора $L_{i,\lambda}$ в интервале $(0,\ \lambda)$. Последнее неравенство общеизвестно. Оно может быть доказано, например, рассуждениями, примененными при доказательстве [12, лемма 5].

Из условия а) следствия 2 и из теоремы нетрудно вывести что $N_{1,\lambda} = o(N_{2,\lambda})$, $N_{3,\lambda} = o(N_{2,\lambda})$ и, следовательно,

$$N(\lambda) \approx N_{2,\lambda}, \quad \lambda \gg 1. \tag{9}$$

Но так как при уменьшении потенциала и расширении области собственные числа не возрастают, число $N_{2,\lambda}$ допускает оценку сверху числом $\tilde{N}_\lambda$ — собственных чисел оператора $-y''$, $y(x_\lambda^-) = y(x_\lambda^+) = 0$, не превосходящих λ, а снизу допускает оценку числом $\tilde{\tilde{N}}_\lambda$ — собственных чисел оператора

$$-y'' + \lambda y/k, \quad y(x_{\lambda|k}^-) = y(x_{\lambda|k}^+) = 0, \qquad k > 1,$$

не превосходящих λ. Числа $\tilde{N}_\lambda$ и $\tilde{\tilde{N}}_\lambda$ вычисляются точно. Проделав соответствующие вычисления, получаем

$$-2 + 1/\pi\sqrt{\lambda - \lambda/k}\ \mu(x\colon\ q_1(x) \leqslant \lambda/k) \leqslant N_{2,\lambda} \leqslant$$
$$\leqslant 1/\pi\sqrt{\lambda}\mu(x\colon\ q_1(x) \leqslant \lambda) + 2.$$

Эти неравенства, асимптотическое равенство (9) и условие б) следствия 2 дают, что

$$N(\lambda) \approx (1/\pi)\sqrt{\lambda}\ \mu(x\colon\ \lambda \geqslant q_1(x)).$$

В заключение автор благодарит М. З. Соломяка за ценные критические замечания.

Институт математики и механики
АН Каз. ССР

Поступило
19.VII.1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.

[2] Отелбаев М., О суммируемости с весом решения уравнения Штурма — Лиувилля, Матем. заметки, 16, № 6 (1974), 969—980.

[3] Розенблюм Г. В., Об оценках спектра оператора Шредингера, Сб., Проблемы матем. анализа, Ленинградский ун-т, № 5, 1975, 17—23.

[4] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении функции Грина и разложении по собственным функциям уравнения Шредингера, Матем. сб., 41, № 4 (1957), 439—458.

[5] Костюченко А. Г., Асимптотическое распределение собственных значений эллиптических операторов, Докл. АН СССР, 158, № 1 (1964), 41—44.

[6] Бойматов К. Х., Асимптотика спектра оператора Шредингера, Дифф. уравнения, **10**, № 11 (1974), 1939—1945.
[7] Розенблюм Г. В., Асимптотика собственных чисел оператора Шредингера, Матем. сб., **93**, № 3 (1974), 347—367.
[8] Отелбаев М., К методу Титчмарша оценки резольвенты, Докл. АН СССР, **211**, № 4 (1973), 787—790.
[9] Отелбаев М., Двухсторонние оценки распределения собственных чисел расщепляемых операторов, Изв. АН Каз. ССР, Сер. физ.-матем., № 3 (1974), 75—78.
[10] Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, т. **2**, М.. ИЛ, 1961.
[11] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1968.
[12] Отелбаев М., Распределение собственных чисел оператора Дирака, Матем. заметки, **14**, № 6, (1974), 843—852.