Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 15 – 24*

УДК 517.95

КРИТЕРИИ ОСЦИЛЛЯТОРНОСТИ И НЕОСЦИЛЛЯТОРНОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. З. Алимагамбетова, Р. Ойнаров

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова
030000 Актобе ул. Бр. Жубановых, 263 zhanatarman@ok.kz

Для полулинейного разностного уравнения второго порядка устанавливаются необходимые и достаточные признаки его осцилляторности и неосцилляторности.

1. Введение. Рассмотрим полулинейное разностное уравнение второго порядка

$$\Delta(r_k\phi(\Delta x_k)) + c_k\phi(x_{k+1}) = 0, \;\; k = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где $\triangle x_k = x_{k+1} - x_k$, $\phi(x)|x|^{p-2}x$, $p > 1$. Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагаем, что с $r = \{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $c = \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательности действительных чисел. Последовательность действительных чисел $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется решением уравнения (1), если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $k = 0, 1, \ldots$

Пусть N – множество натуральных чисел и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Приведем основные понятия, относящиеся к теме настоящей работы.

Говорят, что интервал $(m, m+1]$, $m \in N$, содержит обобщенный нуль решения $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ уравнения (1), если $x_m \neq 0$ и $r_m x_m x_{m+1} \leq 0$. Нетривиальное решение уравнения (1) называется осцилляторным, если оно имеет бесконечно много обобщенных нулей на дискретном интервале $[n, \infty)$, $n \in N$, в противном случае решение уравнения (1) называется неосцилляторным. Известно [1], что все решения уравнения (1) либо осцилляторны, либо неосцилляторны, и в соответствии с этим уравнение (1) называется осцилляторным или неосцилляторным. Уравнение (1) называется уравнением без сопряженных точек на дискретном отрезке $[0, n]$, если каждое его решение имеет не более одного обобщенного нуля на дискретном интервале $(0, n+1]$ и его решение x с начальными условиями $x_0 = 0$, $x_1 \neq 0$ не имеет обобщенного нуля на $(0, n+1]$.

Уравнение (1) при $p = 2$ имеет вид

$$\Delta(r_k\Delta x_k) + c_k\phi(x_{k+1}) = 0, \;\; k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Keywords: *half–linear difference equation, discrete oscillation theory, Hardy inequality*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A45

Уравнения (1) и (2) соответственно являются дискретными аналогами полулинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$(r(t)\phi(x'(t)))' + c(t)\phi(x(t)) = 0 \tag{3}$$

и уравнения Штурма–Лиувилля

$$(r(t)x'(t))' + c(t)x(t) = 0. \tag{4}$$

Основные методы исследования и последние результаты, полученные для уравнения (3), хорошо изложены в работах [2, 3]. Методы исследования уравнения (3) перенесены и для уравнения (1) (см. [1, 4] и приведенные там ссылки). Основные свойства уравнений (1) и (3) соответственно схожи со свойствами уравнений (2) и (4). В частности, для уравнений (1) и (3) справедливы теоремы Штурма о разделении нулей и о сравнении.

2. Вспомогательные утверждения. Исследование уравнения (1) опирается на следующие утверждения, приведенные в работе [1].

Теорема A. *Уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на дискретном отрезке $[0,n]$, $n \in N$, тогда и только тогда, когда*

$$F(x,0,n) = \sum_{k=0}^{n} \{r_k|\Delta x_k|^p - c_k||x_{k+1}\} > 0$$

для всех нетривиальных $x = \{x_k\}_{k=0}^{n+1}$, удовлетворяющих условию $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Числовую последовательность $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ назовем финитной, если конечное число ее членов отлично от нуля, а множество $suppx = \{k : x_k \neq 0,\ k \geq 0\}$ – ее носителем.

Обозначим через $\mathring{X}(m,n)$, $0 \leq m < n \leq \infty$, совокупность всех финитных последовательностей x, у которых $supp\, x \subset (m,n)$.

Лемма 1. *Уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на дискретном интервале $[0,\infty)$ тогда и только тогда, когда*

$$F(x,0,\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \{r_k|\Delta x_k|^p - c_k|x_{k+1}|^p\} > 0 \tag{5}$$

для всех нетривиальных $x \in \mathring{X}(0,\infty)$.

Лемма 2. *Уравнение (1) является неосцилляторным тогда и только тогда, когда существует $m \in N$ такое, что*

$$F(x,m,\infty) = \sum_{k=m}^{\infty} \{r_k|\Delta x_k|^p - c_k|x_{k+1}|^p\} > 0 \tag{6}$$

для всех нетривиальных $x \in \mathring{X}(m,\infty)$.

Лемма 3. *Уравнение (1) является осцилляторным тогда и только тогда, когда для любого $m \in N$ существует нетривиальная последовательность $\widetilde{x} \in \mathring{X}(m,\infty)$ такая, что*

$$F(\widetilde{x},m,\infty) = \sum_{k=m}^{\infty} \{r_k|\Delta \widetilde{x}_k|^p - c_k|\widetilde{x}_{k+1}|^p\} \leq 0. \tag{7}$$

Утверждения леммы 1 и 2 являются непосредственным следствием теоремы 1. Мы докажем лишь лемму 3.

Доказательство леммы 3. Пусть уравнение (1) осцилляторно, тогда на основании леммы 2 не существует $m \in N$ такого, что (6) выполнялось бы для всех нетривиальных $\widetilde{x} \in \overset{\circ}{X}(m, \infty)$, т.е. для каждого $m \in N$ существует по крайней мере одна нетривиальная последовательность $\widetilde{x} \in \overset{\circ}{X}(m, \infty)$, для которой выполняется (7).

Обратно, пусть для каждого $m \in N$ существует $\widetilde{x} \in \overset{\circ}{X}(m, \infty)$ и имеет место (7). Так как последовательность $\widetilde{x}$ финитная, то существуют $n_1(m) \in N$, $n_2(m) \in N :\ m \le n_1(m) < n_2(m)$ такие, что $x_k = 0$ при $0 \le k \le n_1(m)$, $k \ge n_2(m)$ и имеет место

$$F(x, m, \infty) = F(x, n_1(m), n_2(m)) = \sum_{k=n_1(m)}^{n_2(m)} \{r_k|\Delta x_k|^p - c_k|x_{k+1}|^p\} \le 0.$$

Тогда в силу теоремы А уравнение (1) имеет нетривиальное решение, имеющее на дискретном отрезке $[n_1(m), n_2(m)]$ по крайней мере два обобщенных нуля. Берем возрастающую последовательность $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ так, чтобы $n_2(m_{k-1}) < n_1(m_k) < n_2(m_k) < n_1(m_{k+1})$. Тогда мы имеем непересекающиеся отрезки $\{[n_1(m_k), n_2(m_k)]\}_{k=0}^{\infty}$, для каждого из которых уравнение (1) имеет нетривиальное решение, имеющее там по крайней мере два обобщенных нуля. Тогда на основании теоремы Штурма о разделении нулей существует ненулевое решение уравнения (1), имеющее на каждом отрезке $[n_1(m_k), n_2(m_k)]$, $k = 0, 1, \ldots$, по крайней мере один обобщенный нуль. Следовательно, уравнение осцилляторно. Лемма 3 доказана.

Пусть $u = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\rho = \{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$ – фиксированные, соответственно, неотрицательная и положительная последовательности. Для произвольной последовательности $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ рассмотрим неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\sum_{k=1}^{n} a_k|^p u_n\right)^{\frac{1}{p}} \le C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{8}$$

которое называется дискретным неравенством Харди [5].

Положим

$$A_1(n) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_2(n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \left(\sum_{m=1}^{k} \rho_k^{1-p'}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$A_3(n) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{-\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^{1-p'} \left(\sum_{m=k}^{\infty} u_m\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Из результатов работы [6, 7] следует

Теорема B. *Неравенство (8) выполнено для всех последовательностей $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых конечна правая часть (8), тогда и только тогда, когда по крайней мере при одном значении $i = 1, 2, 3$ конечна величина $A_i = \sup\limits_{n \ge 1} A_i(n)$, при этом для наименьшей константы C в (8) имеют место оценки*

$$A_1 \le C \le (p)^{\frac{1}{p}} (p')^{\frac{1}{p'}} A_1,$$

$$\frac{1}{p}^{\frac{1}{p}} A_2 \le C \le (p')A_2,$$

$$\frac{1}{p'}^{\frac{1}{p'}} A_3 \le C \le pA_3.$$

Пусть $\dot{X}$ – множество числовых последовательностей, у которых конечное число начальных членов равны нулю.

Пусть $W_p^1(r) \equiv W_p^1(r,0,\infty)$ – множество всех числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{W_p^1} = |x_0| + \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{9}$$

где $r_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$

Пусть $\dot{W}_p^1(r) \equiv \dot{W}_p^1(r,0,\infty)$ и $\mathring{W}_p^1(r) \equiv \mathring{W}_p^1(r,0,\infty)$ – соответственно замыкания множеств $\dot{X} \bigcap W_p^1(r)$ и $\mathring{X}(0,\infty)$ по норме (8). Очевидно, что $\dot{W}_p^1(r) \supset \mathring{W}_p^1(r)$.

3. Основные результаты.

3.1. Неосцилляторность. Предположим, что коэффициенты r_k уравнения (1) удовлетворяют условию $r_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$, и для $m \in N$ имеем

$$\sum_{k=m}^{\infty} r_k^{1-p'} = \infty. \tag{10}$$

Введем следующие обозначения

$$B_1(m) \equiv B_1(m,r,c) = \sup_{n \ge m} \left(\sum_{k=m}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$B_2(m) \equiv B_2(m,r,c) = \sup_{n \ge m} \left(\sum_{k=m}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=m}^{n} c_k \left(\sum_{i=m}^{k} r_k^{1-p'}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$B_3(m) \equiv B_3(m,r,c) = \sup_{n \ge m} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k\right)^{-\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} r_k^{1-p'} \left(\sum_{i=k}^{\infty} c_i\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B_i \equiv B_i(r,c) = B_i(0),\ i = 1, 2, 3,$$

$$K_1(p) \equiv \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},\ K_2(p) = \frac{1}{p'},\ K_3(p) = \frac{1}{p},$$

$$k_1(p) = 1,\ k_2(p) = (p)^{\frac{1}{p}},\ k_3(p) = (p')^{\frac{1}{p'}},$$

$$c^+ = \{c_k^+\}_{k=0}^{\infty},\ c_k^+ = max\{0, c_k\},\ k = 0, 1, \dots$$

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию (10) и $c_k \ge 0$, $r_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$ Тогда выполнение условий $B_i \le k_i(p)$ при всех $i = 1, 2, 3$ необходимо, а выполнение условий $B_i < K_i(p)$, по крайней мере, при одном из значений $i = 1, 2, 3$ достаточно для того, чтобы уравнение (1) было уравнением без сопряженных точек на дискретном интервале $[0, \infty)$.*

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда выполнение условий* $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) \le k_i(p)$ *при всех* $i = 1,2,3$ *необходимо, а выполнение условий* $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) < K_i(p)$ *по крайней мере при одном из значений* $i = 1,2,3$ *достаточно для неосцилляторности уравнения (1).*

Утверждение теоремы 2 вытекает из утверждения теоремы 1. Действительно, если уравнение (1) неосцилляторно, тогда существует $m \in N$ такое, что уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на интервале $[m,\infty)$. Тогда по теореме 1 $B_i(m) \le k_i(p)$ при $i = 1,2,3$. Так как величины $B_i(m)$ не возрастают по m, то $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) \le k_i(p)$, $i = 1,2,3$.

Обратно, пусть выполняется условие $\lim\limits_{m\to\infty} B_{i_0}(m) < K_{i_0}(p)$, $1 \le i_0 \le 3$. Тогда существует $m \in N$ такое, что $B_{i_0}(m) < K_{i_0}(p)$, $1 \le i_0 \le 3$. Следовательно, по теореме 1 уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на интервале $[m,\infty)$, что означает неосцилляторность уравнения (1). Теорема 2 доказана.

На основании теоремы 2 и теоремы о сравнении вытекает

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $r_k > 0$, $k = 0,1,\ldots,$ *и выполнено условие (10). Если при некотором* $m \in N$ *выполнено одно из условий*

$$B_i(m,r,c^+) < K_i(p),\ \ i = 1,2,3,$$

то уравнение (1) неосцилляторно.

Например, условие $B_1(m,r,c^+) < K_1(p)$, $i = 1,2,3$, выполняется, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{k=0}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^+\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{11}$$

так как по определению верхнего предела существует $m \in N$ такое, что

$$B_1(m,r,c^+) \le \sup_{n\ge m} \left(\sum_{k=0}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^+\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Поэтому справедливо

С л е д с т в и е 2. *Пусть выполнены условия следствия 1. Если имеет место неравенство(11), то уравнение (1) неосцилляторно.*

Сравнение утверждения следствия 2 с утверждением следующей теоремы, полученной в работе [1], представляет интерес.

Т е о р е м а C [1]. *Пусть выполнены условия следствия 1, и кроме того, предположим, что*

$$\varphi_N = \left[\sup_{k\in N} \frac{\sum\limits_{j=0}^{k} r_j^{1-p'}}{\sum\limits_{j=0}^{k-1} r_j^{1-p'}}\right]^{p(p-1)} < \infty, \quad \psi_N = \left[\sup_{k\ge N} \frac{r_k}{r_{k-1}}\right]^{1-p'} < \infty,$$

$$0 < \overline{\lim_{N\to\infty}}\,(1+\psi_N)\,\varphi_n = \psi < \infty.$$

Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} r_j^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} c_j^+\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{1}{\mu p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{\psi p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

то уравнение (1) неосцилляторно, где

$$\mu = \begin{cases} \sup\limits_{t>s>0} \frac{1}{t-s}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{t^p-s^p}{p(t-s)}\right)-s\right], \ p \geq 2 \\ \sup\limits_{t>s>0} \frac{1}{t-s}\left[t-\Phi^{-1}\left(\frac{t^p-s^p}{p(t-s)}\right)\right], \ p \leq 2. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 предварительно докажем два утверждения.

Лемма 4. *Пусть $1 < p < \infty$ и $r_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$ Тогда для любого $x \in \dot{W}_p^1(r, 0, \infty)$ имеем $x_0 = 0$ и функционал*

$$\|x\|_{\dot{W}_p^1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

является нормой в пространстве $\dot{W}_p^1(r, 0, \infty)$.

Доказательство. Пусть x – произвольный элемент пространства $\dot{W}_p^1(r)$.

Тогда по определению пространства $\dot{W}_p^1(r)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $y \in \dot{X} \bigcap W_p^1(r)$ такая, что

$$\|x-y\|_{W_p^1} = |x_0 - y_0| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k |\Delta(x_k - y_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon. \tag{13}$$

Так как $y_0 = 0$ для $y \in \dot{X}$, то из (13) следует $|x_0| \leq \varepsilon$. Откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $x_0 = 0$. Тогда из $x \in \dot{W}_p^1(r)$ и $\|x\|_{\dot{W}_p^1} = 0$ легко следует, что $x_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$ Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $1 < p < \infty$ и $r_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$, и выполнено условие (10). Тогда*

$$\dot{W}_p^1(r) = \mathring{W}_p^1(r). \tag{14}$$

Доказательство. Так как $\dot{W}_p^1(r) \supset \mathring{W}_p^1(r)$, то для доказательства равенства (14) достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in \dot{X} \bigcap W_p^1(r)$ существует $x_\varepsilon \in \mathring{X}$ такое, что $\|x - x_\varepsilon\|_{\dot{W}_p^1(r)} \leq \varepsilon$.

Пусть $x \in \dot{X} \bigcap W_p^1(r)$. Тогда для $\varepsilon > 0$ существует $m \in N$ и

$$\left(\sum_{k=m}^{\infty} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{6}. \tag{15}$$

В силу (10) существует $n \in N$ такой, что $n > m$ и

$$|x_m| \left(\sum_{k=m}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Введем последовательность

$$w_k = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq m, \\ \left(\sum\limits_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-1} \sum\limits_{i=k}^{n} r_j^{1-p'}, & \text{при } m+1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{при } k \geq n+1. \end{cases}$$

Положим $x_\varepsilon = \{w_k x_k\}_{k=0}^{\infty}$. Очевидно, что $x_\varepsilon \in \overset{\circ}{X}$. Тогда

$$\|x - x_\varepsilon\|_{\dot{W}_p^1(r)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |\Delta(x_k - w_k x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |(1-w_k)\Delta x_k - x_{k+1}\Delta w_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k (1-w_k)^p |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |x_{k+1}|^p |\Delta w_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = I_1 + I_2. \tag{17}$$

Так как $(1-w_k) = 0$ при $1 \le k \le m$, $1 - w_k = 1$ при $k \ge n+1$ и $(1-w_k) \le 2$ при $m+1 \le k \le n$, то с учетом (15) имеем

$$I_1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k (1-w_k)^p |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le 2\left(\sum_{k=m}^{\infty} r_k |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{18}$$

Непосредственное вычисление показывает, что $\Delta w_k = 0$ при $0 \le k \le m-1$, $k \ge n+1$ и $\Delta w_k = -r_k^{1-p'} \left(\sum\limits_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-1}$ при $m \le k \le n$. Поэтому

$$I_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |x_{k+1}|^p |\Delta w_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=m}^{n} r_k^{1-p'} |x_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-1}. \tag{19}$$

Так как $x_{k+1} = \sum\limits_{i=m}^{k} \Delta x_i + x_m$ при $k \ge m$, то на основании неравенства Гельдера для $m \le k \le n$ получим

$$|x_{k+1}| \le \left(\sum_{i=m}^{n} r_i^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=m}^{n} r_i |\Delta x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |x_m|.$$

Подставляя полученную оценку в (19), с учетом (15) и (11) имеем

$$I_2 \le \left(\sum_{k=m}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-1} \left(\sum_{i=m}^{n} r_i^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=m}^{n} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left(\sum_{k=l}^{n} r_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-1} |x_m| \le \left(\sum_{k=m}^{\infty} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |x_m| \left(\sum_{j=m}^{n} r_j^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \le \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{20}$$

Из (17), (18) и (20) следует, что $\|x - x_\varepsilon\|_{\dot{W}_p^1(r)} \le \varepsilon$. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на дискретном интервале $[0, \infty)$. Тогда по лемме 1 для всех ненулевых $x \in \overset{\circ}{X}(0,\infty)$ выполнено неравенство (5). В силу плотности множества $\overset{\circ}{X}(0,\infty)$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(r, 0, \infty)$ выполнено неравенство

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k |x_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{21}$$

для всех $x \in \mathring{W}_p^1(r,0,\infty)$ или в силу леммы 5 для всех $x \in \dot{W}_p^1(r,0,\infty)$. Так как в силу леммы 4 $x_0 = 0$ для всех $x \in W_p^1(r)$, то, полагая $\Delta x_k = a_{k+1}$, $k = 0,1,\ldots$, получим $x_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \ \forall k \in N$. В (21) выражая $\{x_k\}$ через $\{a_k\}$, имеем, что справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \Big|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |a_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c_k} \Big|\sum_{i=1}^{k} a_i\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r_k} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{22}$$

для всех $a \in l_{p,r}$, где $\tilde{r_k} = r_{k-1}$, $\tilde{c_k} = c_{k-1}$ $\forall k \in N$ и $l_{p,r}$ – пространство числовых последовательностей $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых конечна норма $\|a\|_{l_{p,r}} = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{r_k}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Заметим, что соотношения

$$\Delta x_k = a_{k+1}, \ x_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, \ k \geq 0, \tag{23}$$

устанавливают изометрию между пространствами $\dot{W}_p^1(r)$ и $l_{p,r}$, где полагаем $\sum\limits_{i=1}^{0} a_i = 0$.

Неравенство (22) – это дискретное неравенство Харди (см.(7)) с наименьшей константой $C \leq 1$. Тогда по Теореме В $B_i \leq k_i(p)$ при $i = 1,2,3$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено $B_{i_0} < K_{i_0}(p)$, $1 \leq i_0 \leq 3$. Тогда по теореме В выполнено неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c_k} \Big|\sum_{i=1}^{k} a_i\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_{i_0}^{-1}(p) B_{i_0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r_k} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

для всех $a \in l_{p,r}$. Переходя от последовательности $a \in l_{p,r}$ к последовательности $x \in \dot{W}_p^1(r)$, согласно (23) имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c_k} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_{i_0}^{-1}(p) B_{i_0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{r_k} |\Delta x_{k-1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k |x_{k+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_{i_0}^{-1}(p) B_{i_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k |\Delta x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{24}$$

для всех $x \in \dot{W}_p^1(r)$. Так как по условию $K_{i_0}^{-1}(p) B_{i_0} < 1$, то из (24) имеем

$$F(x,0,\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \{r_k |\Delta x_k|^p - c_k |x_{k+1}|^p\} > 0$$

для всех нетривиальных $x \in \dot{W}_p^1(r) = \mathring{W}_p^1(r)$, в частности для всех ненулевых $x \in \mathring{X}(0,\infty)$. Тогда по лемме 1 уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на дискретном интервале $[0,\infty]$. Теорема 1 доказана.

3.2. Осцилляторность.

Теорема 3. *Пусть $1 < p < \infty$, $r_k > 0$, $c_k > 0$, $k = 0,1,\ldots$, и выполнено условие (10). Тогда выполнение условий $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) \geq K_i(p)$ при всех $i = 1,2,3$ необходимо, а выполнение* *условий* $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) > k_i(p)$ *по крайней мере при одном из значений* $i = 1, 2, 3$ *достаточно для осцилляторности уравнения (1).*

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (1) осцилляторно. Тогда по лемме 3 для любого $m \in N$ существует ненулевой $\tilde{x} \in \overset{\circ}{X}(m,\infty)$ и выполняется неравенство (7) или равносильное ему неравенство

$$\left(\sum_{k=m}^{\infty} c_k |\tilde{x_{k+1}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=m}^{\infty} r_k |\Delta\tilde{x_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{25}$$

Так как $\tilde{x_m} = 0$, то для последовательности $a_{k+1} = \Delta\tilde{x_k}$, $k \geq m$, выполнено неравенство

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{c_k} |\sum_{i=m+1}^{k} \tilde{a_i}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{r_k} |\tilde{a_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{26}$$

Рассмотрим дискретное неравенство Харди

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{c_k} |\sum_{i=m+1}^{k} a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{r_k} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ a \in l_{p,r}. \tag{27}$$

Неравенство (26) показывает, что неравенство Харди (27) либо не выполняется, либо выполняется с наименьшей константой $C \geq 1$, так как

$$C = \sup_{a \in l_{p,r},\, a\neq 0} \frac{\left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \tilde{c_k} |\sum\limits_{i=m+1}^{k} a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \tilde{r_k} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \tilde{c_k} |\sum\limits_{i=m+1}^{k} \tilde{a_i}|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \tilde{r_k} |\tilde{a_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \geq 1. \tag{28}$$

Если неравенство Харди (27) не имеет место, то по теореме B

$$B_i(m) = \infty, \ \ i = 1, 2, 3, \tag{29}$$

причем по определению $B_i(m)$, $i = 1, 2, 3$, соотношение (29) выполняется для всех $m \in N$, поэтому $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) > K_i(p)$, $i = 1, 2, 3$. Если неравенство Харди (27) выполняется, то по теореме B $B_i(m) < \infty$, $i = 1, 2, 3$, и имеет место оценка $K_i^{-1}(p)B_i(m) \geq C$, которая вместе с (28) дает

$$B_i(m) \geq K_i(p), \ \ i = 1, 2, 3. \tag{30}$$

Если $B_i(m)$, $i = 1, 2, 3$, конечно при одном $m \in N$, то оно конечно при всех $m \in N$, поэтому неравенство (30) верно при всех $m \in N$. Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} B_i(m) \geq K_i(p)$, $i = 1, 2, 3$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} B_{i_0}(m) > K_{i_0}(p)$, $1 \leq i_0 \leq 3$. Если $B_{i_0}(m) = \infty$, то по теореме B неравенство Харди (27) не имеет места, т.е. для любого $C > 0$ найдется $a \in l_{p,r}$, при котором неравенство (27) имеет знак $\gg$". В частности, для $C = 1$ выполняется (26). Переходя от последовательности $\tilde{a} \in l_{p,r}$ к последовательности $\tilde{x} \in \dot{W}_p^1(r, m, \infty)$, получим неравенство (25). Так как по лемме 4 $\dot{W}_p^1(r) = \overset{\circ}{W}{}_p^1(r)$, то в $\overset{\circ}{X}(m,\infty)$ найдется последовательность, которую мы обозначим снова через $\tilde{x}$, и выполняется (25) или (7). Следовательно, по лемме 3 уравнение (1) осцилляторно.

Теперь рассмотрим случай, когда $B_{i_0}(m) < \infty$, $\forall m \in N$. По теореме В $\forall m \in N$ выполняется неравенство (27) с оценкой $C \geq k_{i_0}^{-1} B_{i_0}(m) > 1$ с наименьшей постоянной C в (27). Тогда в силу плотности $\overset{\circ}{X}(m,\infty)$ в $\dot{W}_p^1(r,m,\infty)$ существует $\tilde{x} \in \dot{X}(m,\infty)$, для которой выполняется (25) или то же самое неравенство (7). Следовательно, по лемме 3 уравнение (1) осцилляторно. Теорема 3 доказана.

Следствие 3. *Пусть выполнено условие теоремы 3. Если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{k=0}^{n} r_k^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k \right)^{\frac{1}{p}} = \infty, \tag{31}$$

то уравнение (1) осцилляторно.

Из следствия 3 вытекает, что, если наряду с условием (10) имеем $\sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k = \infty$, то уравнение (1) осциллятарно. Это утверждение при $p = 2$, т.е. для уравнения (2), доказано в [8].

Цитированная литература

1. **Dosly O., Rehak P.** // Comp. and Math. with Appl. 2001. V.42. P. 453–464.
2. **Dosly O.** // Czechoslovak Math.J. 2000. V.50(125). P. 657–671.
3. **Dosly O.** // Math.Bohemica. 2001. V.127. N 2. P.181–195.
4. **Marik R.** // Arch.Math. 2000. V.36. P. 513–518.
5. **Kufner A. Persson L.–E.** Weighted inequalities with weights of Hardy type. World Scientific. 2003.
6. **Bennett G.** // Quart.J.Math. Oxford Ser. 1987. V.38. N 2. P.401–425.
7. **Bennett G.** // Quart.J.Math. Oxford Ser. 1991. V.42. N 2. P.149–174.
8. **Dosly O.** // Arch. Math. 2000. V.36. P. 329–342.

Поступила в редакцию 11.10.2006г.