О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ $W_p^\alpha[0,1]^n$

Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha > 0$, f – 1-периодическая функция из $L_p[0,1]^n$ с рядом Фурье $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi ikx}$. Будем говорить, что $f \in W_p^\alpha[0,1]^n$, если найдется $f^\alpha \in L_p[0,1]^n$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \bar{k}^\alpha a_k e^{2\pi ikx}$, здесь $\bar{k}^\alpha = \prod_{j=1}^n \bar{k}_j^\alpha$, $\bar{k}_j^\alpha = \max\{|k_j|,1\}$. Положим $\|f\|_{W_p^\alpha[0,1]^n} \overset{\text{def}}{=} \|f^\alpha\|_{L_p[0,1]^n}$.

При $\alpha > 1/p$ класс $W_p^\alpha[0,1]^n$ вложен в пространство непрерывных функций $C[0,1]^n$. Следовательно, каждая функция f из $W_p^\alpha[0,1]^n$ интегрируема в смысле Римана и соответствующий интеграл $I(f) = \int_{[0,1]^n} f(x)\,dx$ может быть приближен квадратурной формулой вида $T_M(f) = \sum_{j=1}^M b_j f(t_j)$. Величина $\delta_M(W_p^\alpha[0,1]^n) = \sup_{\|f\|_{W_p^\alpha[0,1]^n}=1} |I(f) - T_M(f)|$ называется погрешностью квадратурной формулы $T_M(f)$ для класса $W_p^\alpha[0,1]^n$.

Изучению квадратурных формул для $W_p^\alpha[0,1]^n$, $\alpha > 1/p$, посвящено много работ (см. [1]–[12]). Полученные в них результаты при $n > 2$ имеют вид теорем существования, т.е. доказывается существование квадратурных формул $T_M(f)$ с погрешностью

$$\delta_M(W_p^\alpha) \ll \frac{(\log_2 M)^\beta}{M^\alpha}. \tag{1}$$

Эти оценки являются точными в степенной шкале. Отметим также, что в работах Н.Т. Темиргалиева, С.М. Воронина [11], [12] указывается алгоритм построения квадратурных формул, для погрешности которых имеет место соотношение вида (1).

В первой части работы приводятся квадратурные формулы, где в явном виде определены как коэффициенты $\{b_k\}$, так и узлы сетки $\{t_k\}$. Эти квадратурные формулы точны для тригонометрических полиномов, спектр которых лежит в определенных гиперболических крестах, и имеют место оценки вида (1).

Вторая часть работы посвящена приближенному интегрированию функций из $W_p^\alpha[0,1]^n$ при $\alpha \leqslant 1/p$. В этом случае функции из $W_p^\alpha[0,1]^n$ определены разве лишь почти всюду на $[0,1]^n$ и квадратурные формулы $\sum_{j=1}^M b_j f(t_j)$ не имеют смысла. С другой стороны, в реальных задачах информация f о рассматриваемом обьекте $[0,1]^n$ поступает через приборы, датчики в виде некоторых усредненных данных $\frac{1}{|e_j|}\int_{e_j} f(x)\,dx$ с соответствующих участков e_j ($|e_j|$ – мера e_j). Можно считать, что метод сбора информации единообразен, т.е. $e_j = e + t_j$. Таким образом, приходим к задаче восстановления интеграла Лебега $I(f) = \int_{[0,1]^n} f(x)\,dx$ с помощью квадратурных формул $\sum_{j=1}^M b_j \frac{1}{|e|}\int_{e+t_j} f(x)\,dx$.

Методы доказательства основываются на результатах работ [13], [14].

1. Пусть $x \in [0,1)^n$. Для измеримой функции f, определенной на торе $[0,1)^n$, введем квадратурную формулу

$$T_{2^m}(f;x) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+\operatorname{sgn} k_j)} \times f\biggl(x_1 + \frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, x_n + \frac{r_n}{2^{k_n}}\biggr). \tag{2}$$

Количество узлов данной квадратурной формулы равно $2^m(1+\frac{m}{2})^{n-1}$. Подобные сетки впервые ввел в рассмотрение С.А. Смоляк [4], они также использовались в работах В.Н. Темлякова [8], [9].

Множества $\Gamma_m = \bigl\{r \in \mathbb{Z}^n : \prod_{j=1}^n |\bar{r}_j| < 2^{m+1}\bigr\}$, $m \in \mathbb{N}$, $Y_k = \bigcup_{j=1}^n \{r \in \mathbb{Z}^n : |r_j| \leqslant 2^{k_j-1}\}$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, называются соответственно гиперболическим крестом и крестом. $E_{\Gamma_m}(f)_W$, $E_{Y_k}(f)_W$ – соответствующие наилучшие приближения функции f в функциональном пространстве W тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболического креста Γ_m и креста Y_k.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 1/p$, $r = \min\{p, 2\}$, $n < m$, $f \in W_p^\alpha[0,1]^n$. Тогда при $\alpha > 1/2$ верно*

$$\sup_{x\in[0,1)^n} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \ll \frac{m^{\frac{n-1}{r}}}{2^{\alpha m}} E_{\Gamma_{m-n}}(f)_{W_p^\alpha},$$

а при $\alpha \leqslant 1/2$ верно

$$\sup_{x\in[0,1)^n} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \ll \frac{m^{(n-1)(1-\alpha)}(\log_2 m)^{n(1/p'+1-2\alpha)}}{2^{\alpha m}} E_{\Gamma_{m-n}}(f)_{W_p^\alpha}.$$

Из теоремы 1 следует, что квадратурные формулы $T_{2^m}(f;x)$ точны для полиномов с гармониками из гиперболического креста Γ_{m-n}.

2. Пусть e – произвольный компакт из $[0,1)^n$ положительной меры $|e| > 0$. Для интегрируемой на торе $[0,1)^n$ функции f рассмотрим квадратурную формулу

$$T_{2^m}(f;e) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+\operatorname{sgn} k_j)} \times \frac{1}{|e|}\int_e f\left(x_1 + \frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, x_n + \frac{r_n}{2^{k_n}}\right) dx.$$

Теорема 2. *Пусть $n \leqslant m$, e – произвольный компакт из $[0,1)^n$ положительной меры $|e|$, $\alpha \neq 1/p$, $(x)_+ = \max\{x, 0\}$, тогда*

$$|I(f) - T_{2^m}(f;e)| \leqslant c_{p\alpha} \frac{1}{2^{\alpha m}|e|^{(\frac{1}{p}-\alpha)_+}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^\alpha[0,1]^n}.$$

В теореме 2 при $\alpha > 1/p$ правая часть не зависит от выбора компакта e. Поэтому взяв в качестве e шар с центром в точке $x \in [0,1)^n$ радиуса r и переходя к пределу $r \to 0$, получим оценку погрешности квадратичной формулы классического вида:

$$|I(f) - T_{2^m}(f;x)| \leqslant c_{p\alpha} \frac{1}{2^{\alpha m}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^\alpha[0,1]^n}.$$

Теорема 3. *Пусть $n \leqslant m$, e – компакт из $[0,1]^n$ положительной меры. Тогда для любой функции $f \in W_p^{1/p}[0,1]^n$ имеет место неравенство*

$$|I(f) - T_{2^m}(f;e)| \leqslant c_{p,n} \frac{|\log_2 |e||^n}{2^{\alpha m}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^{1/p}[0,1]^n}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963. [**2**] Бахвалов Н. С. // Вестн. МГУ. Сер. матем. 1959. № 4. С. 3–18. [**3**] Hlawka E. // Monatsh. Math. 1962. V. 66. P. 140–151. [**4**] Смоляк С. А. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045. [**5**] Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. [**6**] Фролов К. К. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 181. № 4. С. 818–821. [**7**] Темляков В. Н. // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 10. С. 1403–1413. [**8**] Темляков В. Н. // Матем. сб. 1985. Т. 128. № 2. С. 256–268. [**9**] Темляков В. Н. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 6. С. 1310–1313. [**10**] Wang Yuan. // Contemp. Math. 1988. V. 77. P. 63–82. [**11**] Темиргалиев Н. Т. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 2. С. 297–301. [**12**] Воронин С. М., Темиргалиев Н. Т. // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 34–41. [**13**] Нурсултанов Е. Д. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 2. С. 235–248. [**14**] Nursultanov E. D. // East J. Approx. 1998. V. 4. № 2. P. 277–290.

Принято редколлегией
03.10.2000