ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2003, т. 243, с. 104–126

УДК 517.97

# О точных постоянных в неравенствах для модуля производной[1]

©2003 г. В. И. Буренков[2], В. А. Гусаков[3]

Поступило в апреле 2003 г.

Для любого $1 \le r \le \infty$ приводится решение задачи колмогоровского типа о нахождении необходимых и достаточных условий на числа $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \ge 0$, для которых существует такая функция $f$, имеющая абсолютно непрерывную производную на отрезке $[0,1]$, что $\|f\|_{L_\infty(0,1)} = \mu_0$, $|f'(x)| = \mu_1$, $\|f''\|_{L_r(0,1)} = \mu_2$, где $x$ — фиксированная точка отрезка $[0,1]$.

В настоящей работе рассматриваются три тесно связанные между собой задачи об оценке модуля производной функции в фиксированной точке отрезка $[0,1]$.

Пусть для $1 \le r \le \infty$

$$\|f\|_r = \|f\|_{L_r(0,1)}$$

и $W^2(0,1)$ обозначает пространство всех функций $f$, для которых при любых $x \in [0,1]$ существует производная $f'(x)$, причем производная $f'$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$. Зафиксируем некоторую точку $x \in [0,1]$.

**Задача 1.** Найти необходимые и достаточные условия на числа $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \ge 0$, при которых существует такая функция $f \in W^2(0,1)$, что

$$\|f\|_\infty = \mu_0, \qquad |f'(x)| = \mu_1, \qquad \|f''\|_r = \mu_2.$$

**Задача 2.** Для $\beta \ge 0$ найти

$$\Phi(\beta) := \sup\Big\{|f'(x)|\colon\ f \in W^2(0,1),\ \|f\|_\infty \le 1,\ \|f''\|_r \le \beta\Big\}.$$

**Задача 3.** Дать описание всех точных постоянных $A, B \ge 0$ в неравенстве

$$|f'(x)| \le A\|f\|_\infty + B\|f''\|_r,$$

справедливом для любых $f \in W^2(0,1)$. Другими словами, требуется найти

$$A_r^*(x) = \inf A,$$

где инфимум берется по всем $A$ таким, что это неравенство выполняется для некоторого $B$ (зависящего от $A$), а также для любых $A \ge A_r^*(x)$ требуется найти

$$B_r^*(x, A) = \inf B,$$

где инфимум берется по всем $B$, для которых выполняется это неравенство с фиксированным $A$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00602).

[2]School of Mathematics, Cardiff University, Cardiff, UK.
E-mail: Burenkov@Cardiff.ac.uk

[3]Московская межбанковская валютная биржа, Москва, Россия.

При $r=\infty$ решение сформулированных задач можно получить, следуя [1, 2]. Эти задачи для случая, когда $x=0$, или $x=1$, или вместо $|f'(x)|$ рассматривается $\|f'\|_\infty$, а также некоторые подобные задачи для производных более высокого порядка и более общих норм были решены в работах ряда авторов (см., например, [3–13]). Однако в этих работах (за исключением [1, 2]) не исследовался случай произвольной точки $x\in[0,1]$.

## 1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Теорема 1.1.** *Пусть*[4] $x\in[0,\frac12]$, $\mu_0,\mu_1,\mu_2\ge 0$. *Для того чтобы существовала такая функция* $f\in W^2(0,1)$, *что*

$$\|f\|_\infty=\mu_0,\qquad |f'(x)|=\mu_1,\qquad \|f''\|_1=\mu_2,$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

1) *если* $\mu_0=0$, *то* $\mu_1=\mu_2=0$;

2) *если* $\mu_0>0$ *и* $\mu_2=0$, *то*

$$\mu_1\le 2\mu_0; \tag{1.1}$$

3) *если* $\mu_0>0$ *и* $\mu_2>0$, *то (пусть* $\mu=\frac{2\mu_0}{\mu_2}$*)*

а) *если* $\mu\ge x$, *то*

$$\mu_1<2\mu_0+(1-x)\mu_2; \tag{1.2}$$

б) *если* $\mu\le x$, *то*

$$\mu_1<\frac{1}{x}\mu_0+\frac12\mu_2. \tag{1.3}$$

**Следствие 1.1.** *Пусть* $x\in[0,\frac12]$, $\beta\ge0$, *тогда*

$$\Phi(\beta)\equiv\sup_{\substack{f\in W^2(0,1)\\ \|f\|_\infty\le1,\ \|f''\|_1\le\beta}}|f'(x)|=\begin{cases}2+(1-x)\beta, & 0\le\beta\le\dfrac{2}{x},\\[2mm] \dfrac1x+\dfrac12\beta, & \beta\ge\dfrac2x,\end{cases} \tag{1.4}$$

*причем при* $\beta>0$ *экстремальных функций нет, а при* $\beta=0$ *экстремальными являются функции* $f(u)=\pm(2u-1)$, $u\in[0,1]$, *и только они.*

**Следствие 1.2.** *Если* $x\in[0,\frac12)$, *то*

$$A_1^*(x)=2,\qquad B_1^*(x,A)=\begin{cases}1-\dfrac{Ax}{2}, & 2\le A\le\dfrac1x,\\[2mm] \dfrac12, & A\ge\dfrac1x,\end{cases}\qquad A\ge2. \tag{1.5}$$

*Если* $x=\frac12$, *то*

$$A^*=2,\qquad B^*(A)=\frac12,\quad A\ge2.$$

[4]Все утверждения сформулированы и доказаны для $x\in[0,\frac12]$. Если $x\in(\frac12,1]$, то во всех утверждениях следует заменить $x$ на $1-x$.

Если $x \in (0, \frac{1}{2})$ и $A \ge \frac{1}{x}$ или $x = \frac{1}{2}$ и $A \ge 2$ — любое допустимое значение, то происходит своего рода насыщение: увеличение коэффициента при $\|f\|_\infty$ не приводит к уменьшению коэффициента при $\|f''\|_1$. В предельном случае, когда при $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $A = \frac{1}{x}$, неравенство с двумя точными постоянными имеет вид

$$|f'(x)| \le \frac{1}{x}\|f\|_\infty + \frac{1}{2}\|f''\|_1.$$

Если $A > \frac{1}{x}$, то неравенство с двумя точными постоянными

$$|f'(x)| \le A\|f\|_\infty + \frac{1}{2}\|f''\|_1$$

не дает новой информации по сравнению с предыдущим неравенством, из которого оно тривиальным образом следует. При $x = \frac{1}{2}$ единственным содержательным неравенством с двумя точными постоянными является неравенство

$$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le 2\|f\|_\infty + \frac{1}{2}\|f''\|_1.$$

Аналогичная ситуация возникает и при $x = 0$ или $x = 1$. При $x = 0$ единственным содержательным неравенством с двумя точными постоянными является неравенство

$$|f'(0)| \le 2\|f\|_\infty + \|f''\|_1.$$

**Теорема 1.2.** *Пусть* $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \ge 0$, $1 < r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$,

$$F(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (t-x)^{\frac{1}{\alpha}}] + x[(t-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}]}{(\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (t-x)^{\frac{1}{\alpha}}])^{1/r}}, \qquad t \in [2x, 1],$$

$$\lambda = F(2x) = \frac{\alpha}{1-\alpha}(2\alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}x^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad \nu = F(1).$$

*Для того чтобы существовала такая функция* $f \in W^2(0,1)$, *что*

$$\|f\|_\infty = \mu_0, \qquad |f'(x)| = \mu_1, \qquad \|f''\|_r = \mu_2,$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

1) *если* $\mu_0 = 0$, *то* $\mu_1 = \mu_2 = 0$;

2) *если* $\mu_0 > 0$ *и* $\mu_2 = 0$, *то*

$$\mu_1 \le 2\mu_0; \tag{1.6}$$

3) *если* $\mu_0 > 0$ *и* $\mu_2 > 0$, *то* (*пусть* $\mu = \frac{2\mu_0}{\mu_2}$)

а) *если* $\mu \ge \nu$, *то*

$$\mu_1 \le 2\mu_0 + (\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (1-x)^{\frac{1}{\alpha}}])^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mu_2; \tag{1.7}$$

б) *если* $\lambda \le \mu \le \nu$, *то*

$$\mu_1 \le \frac{1}{z}\left(2\mu_0 + (\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}}])^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mu_2\right), \tag{1.8}$$

*где* $z = F^{-1}(\mu)$;

в) *если* $\mu \le \lambda$, *то*

$$\mu_1 \le 2^{-\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\mu_0^\alpha\mu_2^{1-\alpha}. \tag{1.9}$$

**Следствие 1.3.** *Пусть* $\beta \geq 0$, *тогда*

$$\Phi(\beta) \equiv \sup_{\substack{f\in W^2(0,1)\\ \|f\|_\infty\leq 1,\ \|f''\|_r\leq\beta}} |f'(x)| = \begin{cases} 2 + \left(\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (1-x)^{\frac{1}{\alpha}}]\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\beta, & 0 \leq \beta \leq \dfrac{2}{\nu}, \\ \dfrac{2 + \left(\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}}]\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\beta}{z}, & \dfrac{2}{\nu} \leq \beta \leq \dfrac{2}{\lambda}, \\ 2^{-\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\beta^{1-\alpha}, & \beta \geq \dfrac{2}{\lambda}, \end{cases}$$

*где* $z$ — *единственный корень уравнения* $F(z) = \frac{2}{\beta}$. *При* $\beta > 0$ *экстремальными являются функции, определяемые формулами* (2.8), (2.7), (2.6) *с* $\|f\|_\infty = 1$, $\mu = \frac{2}{\beta}$, *а при* $\beta = 0$ *функции* $f(u) = \pm(2u-1)$, $u \in [0,1]$; *других экстремалей нет.*

**Следствие 1.4.** *Пусть* $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \geq 0$, $1 < r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$. *Для того чтобы существовала такая функция* $f \in W^2(0,1)$, *что*

$$\|f\|_\infty = \mu_0, \qquad \|f'\|_\infty = \mu_1, \qquad \|f''\|_r = \mu_2,$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

1) *если* $\mu_0 = 0$, *то* $\mu_1 = \mu_2 = 0$;

2) *если* $\mu_0 > 0$ *и* $\mu_1 = 0$, *то* $\mu_2 = 0$;

3) *если* $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$ *и* $\mu_2 = 0$, *то*

$$\mu_1 \leq 2\mu_0; \tag{1.10}$$

4) *если* $\mu_0, \mu_1, \mu_2 > 0$, *то* (*пусть* $\mu = \frac{2\mu_0}{\mu_2}$)

а) *если* $\mu \geq \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}$, *то*

$$\mu_1 \leq 2\mu_0 + \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mu_2; \tag{1.11}$$

б) *если* $\mu \leq \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}$, *то*

$$\mu_1 \leq 2^\alpha(1-\alpha)^{\alpha-1}\mu_0^\alpha\mu_2^{1-\alpha}. \tag{1.12}$$

**Следствие 1.5.** *Пусть* $1 < r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$, $\beta \geq 0$, *тогда*

$$\Phi(\beta) \equiv \sup_{\substack{f\in W^2(0,1)\\ \|f\|_\infty\leq 1,\ \|f''\|_r\leq\beta}} \|f''\|_\infty = \begin{cases} 2 + \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\beta, & 0 \leq \beta \leq \dfrac{2(1-\alpha)}{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \\ 2^\alpha(1-\alpha)^{\alpha-1}\beta^{1-\alpha}, & \beta \geq \dfrac{2(1-\alpha)}{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \end{cases}$$

*причем при* $\beta > 0$ *экстремальными являются функции, определяемые формулами* (2.8) *и* (2.7) *с* $\|f\|_\infty = 1$, $\mu = \frac{2}{\beta}$, $x = 0$, *а при* $\beta = 0$ *функции* $f(u) = \pm(2u-1)$, $u \in [0,1]$.

**Следствие 1.6.** *Пусть* $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \geq 0$, $1 \leq r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$. *Для того чтобы существовала такая функция*[5] $f \in W^2(0,\infty)$, *что*

$$\|f\|_{L_\infty(0,\infty)} = \mu_0, \qquad \|f'\|_{L_\infty(0,\infty)} = \mu_1, \qquad \|f''\|_{L_r(0,\infty)} = \mu_2,$$

[5] $f \in W^2(0,\infty) \Leftrightarrow f \in W^2(0,a)$ для любого $a > 0$.

*необходимо и достаточно, чтобы*

1) *если* $\mu_0 = 0$, *то* $\mu_1 = \mu_2 = 0$;
2) *если* $\mu_0 > 0$, $\mu_1 = 0$, *то* $\mu_2 = 0$;
3) *если* $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$, *то* $\mu_2 > 0$ *и*

$$\mu_1 \le 2^{\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\mu_0^{\alpha}\mu_2^{1-\alpha}. \tag{1.13}$$

**Следствие 1.7.** *Пусть* $1 \le r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$, $\beta > 0$, *тогда*

$$\Phi(\beta) \equiv \sup_{\substack{f\in W^2(0,\infty)\\ \|f\|_{L_\infty(0,\infty)}\le 1,\ \|f''\|_{L_r(0,\infty)}\le\beta}} \|f'\|_{L_\infty(0,\infty)} = 2^{\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\beta^{1-\alpha},$$

*причем при* $r > 1$ *экстремальной является, например, функция* (4.2) *с* $\mu_0 = 1$, $\mu_2 = \beta$, *а при* $r = 1$ *функция* (4.4) *с* $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = \beta$.

**Следствие 1.8.** *Пусть* $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \ge 0$, $1 \le r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$. *Для того чтобы существовала такая функция*[6] $f \in W^2(-\infty,\infty)$, *что*

$$\|f\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} = \mu_0, \qquad \|f'\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} = \mu_1, \qquad \|f''\|_{L_r(-\infty,\infty)} = \mu_2,$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

1) *если* $\mu_0 = 0$, *то* $\mu_1 = \mu_2 = 0$;
2) *если* $\mu_0 > 0$, $\mu_1 = 0$, *то* $\mu_2 = 0$;
3) *если* $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$, *то* $\mu_2 > 0$ *и*

$$\mu_1 \le 2^{-\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\mu_0^{\alpha}\mu_2^{1-\alpha}. \tag{1.14}$$

**Следствие 1.9.** *Пусть* $1 \le r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$, $\beta > 0$, *тогда*

$$\Phi(\beta) \equiv \sup_{\substack{f\in W^2(-\infty,\infty)\\ \|f\|_{L_\infty(-\infty,\infty)}\le 1,\ \|f''\|_{L_r(-\infty,\infty)}\le\beta}} \|f'\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} = 2^{\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\beta^{1-\alpha},$$

*причем при* $r > 1$ *экстремальной является, например, функция* (4.5) *с* $\mu_0 = 1$, $\mu_2 = \beta$, *а при* $r = 1$ *функция* (4.6) *с* $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = \beta$.

Отметим, что следствия 1.7 и 1.9 получены ранее В.В. Арестовым [13].

Главный исходный момент доказательств — это “правильно” подобранное интегральное представление для производной, отражающее специфику данной задачи. Следующий шаг базируется на элементарных средствах: применяется неравенство Гёльдера, а также, что существенно, описание всех функций, для которых в неравенстве Гёльдера достигается знак равенства. Дальнейшее — дело техники, в ряде случаев довольно кропотливой.

Результаты работы, относящиеся к решению экстремальной задачи 2, и как следствие к решению задачи 3, могут быть получены также на основе общего подхода к решению выпуклых экстремальных задач (при $r > 1$) и задач, сводящихся к ним путем предельного перехода (при $r = 1$), подробно изложенного в применении к задачам колмогоровского типа в статье Г.Г. Магарил-Ильяева и В.М. Тихомирова [14] и в их книге [15].

Что касается задачи 1, то после того, как решена задача 2, для ее полного решения требуется ряд дополнительных рассуждений, которые в данной работе базируются на рассуждениях, приводящих к решению задачи 2.

[6] $f \in W^2(-\infty,\infty) \Leftrightarrow f \in W^2(-a,a)$ для любого $a > 0$.

С точки зрения авторов, использованная в работе схема доказательств имеет ряд своих достоинств и может быть с успехом применена для исследования более сложных, в том числе многомерных, задач (см., например, [16]).

Результаты данной работы кратко изложены в заметке авторов [17].

Авторы благодарят профессоров Г.Г. Магарил-Ильяева и В.М. Тихомирова за полезные замечания и обсуждения.

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

Введем следующее обозначение:

$$A = \{(x, y, z)\colon\ 0 \le y \le x \le z \le 1,\ y < z\}. \tag{2.1}$$

**Лемма 2.1.** *Для любой функции $f \in W^2(0,1)$ и для любых $(x,y,z) \in A$ справедливо равенство*

$$f'(x) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y} + \frac{\int_0^1 K(u) f''(u)\, du}{z - y}, \tag{2.2}$$

*где*

$$K(u) \equiv K(x,y,z;u) = \begin{cases} 0, & u \in [0, y], \\ u - y, & u \in (y, x], \\ u - z, & u \in (x, z], \\ 0, & u \in (z, 1]. \end{cases} \tag{2.3}$$

**Доказательство.** Поскольку функции $f$ и $f'$ абсолютно непрерывны, то

$$\begin{aligned} f'(x) - \frac{f(z) - f(y)}{z - y} &= \frac{1}{z - y}\left((z-y)f'(x) - \int_y^z f'(\xi)\, d\xi\right) = \\ &= \frac{1}{z-y}\int_y^z (f'(x) - f'(\xi))\, d\xi = \frac{1}{z-y}\int_y^z \left(\int_\xi^x f''(u)\, du\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{z-y}\left(\int_y^x \left(\int_\xi^x f''(u)\, du\right) d\xi + \int_x^z \left(\int_\xi^x f''(u)\, du\right) d\xi\right) = \\ &= \frac{1}{z-y}\left(\int_y^x \left(\int_y^u f''(u)\, d\xi\right) du + \int_x^z \left(\int_z^u f''(u)\, d\xi\right) du\right) = \\ &= \frac{1}{z-y}\left(\int_y^x (u-y) f''(u)\, du + \int_x^z (u-z) f''(u)\, du\right) = \frac{\int_0^1 K(u) f''(u)\, du}{z-y}. \end{aligned}$$

**Следствие 2.1.** *Для любой функции $f \in W^2(0,1)$ и для любых $(x,y,z) \in A$ имеет место неравенство*

$$|f'(x)| \le \frac{2\|f\|_\infty + \max\{x - y, z - x\}\|f''\|_1}{z - y}, \tag{2.4}$$

*причем если $\|f''\|_1 > 0$, то неравенство (2.4) строгое.*

**Следствие 2.2.** *Пусть* $1 < r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$. *Для любой функции* $f \in W^2(0,1)$ *и для любых* $(x,y,z) \in A$ *имеет место неравенство*

$$|f'(x)| \le \frac{2\|f\|_\infty + \left(\alpha[(x-y)^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}}]\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|f''\|_r}{z-y}. \tag{2.5}$$

*Пусть дополнительно* $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\|f''\|_r > 0$, $\mu = \frac{2\|f\|_\infty}{\|f''\|_r}$, $c = (\alpha[(x-y)^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}}])^{-\frac{1}{r}}$; $F$, $\lambda$, $\nu$ — *функции из условия теоремы* 1.2. *Тогда для достижения равенства в* (2.5) *необходимо и достаточно, чтобы*

1) *если* $\mu \le \lambda$, *то*

$$y = x - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1-\alpha} x, \qquad z = x + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1-\alpha} x, \tag{2.6а}$$

$$f(u) = \pm\|f\|_\infty \begin{cases} -1, & u \in [0,y], \\ -1 + \left(\dfrac{u-y}{x-y}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & u \in [y,x], \\ 1 - \left(\dfrac{z-u}{z-x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & u \in [x,z], \\ 1, & u \in [z,1]; \end{cases} \tag{2.6б}$$

2) *если* $\lambda \le \mu \le \nu$, *то*

$$y = 0, \qquad z = F^{-1}(\mu), \tag{2.7а}$$

$$f(u) = \pm\|f\|_\infty \begin{cases} -1 + \dfrac{2\alpha c}{\mu(1-\alpha)}\left(\alpha u^{\frac{1}{\alpha}} + u\Big[(z-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\Big]\right), & u \in [0,x], \\ 1 - \dfrac{2\alpha^2 c}{\mu(1-\alpha)}(z-u)^{\frac{1}{\alpha}}, & u \in [x,z], \\ 1, & u \in [z,1]; \end{cases} \tag{2.7б}$$

3) *если* $\mu \ge \nu$, *то*

$$y = 0, \qquad z = 1, \tag{2.8а}$$

$$f(u) = \pm\|f\|_\infty \begin{cases} -1 + 2\left(1 - \dfrac{\nu}{\mu}\right)u + \dfrac{2\alpha c}{\mu(1-\alpha)}\left(\alpha u^{\frac{1}{\alpha}} + u\Big[(1-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\Big]\right), & u \in [0,x], \\ 1 - 2\left(1 - \dfrac{\nu}{\mu}\right)(1-u) - \dfrac{2\alpha^2 c}{\mu(1-\alpha)}(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}, & u \in [x,1]. \end{cases} \tag{2.8б}$$

**Доказательство следствий 2.1 и 2.2.** 1. Из (2.2) следует, что

$$|f'(x)| \le \frac{|f(z) - f(y)| + |\int_0^1 K(u) f''(u)\,du|}{z-y}. \tag{2.9}$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|f'(x)| \le \frac{2\|f\|_\infty + \|K\|_{r'}\|f''\|_r}{z-y} \tag{2.10}$$

(здесь $1 \le r < \infty$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$). Если $r = 1$, то $r' = \infty$ и

$$\|K\|_\infty = \operatorname*{sup\,vrai}_{u\in[0,1]} \|K(u)\| = \max\Big\{ \sup_{u\in[y,x]} |u-y|,\ \sup_{u\in(x,z]} |u-z| \Big\} = \max\{x-y, z-x\};$$

если же $1 < r < \infty$, то $1 < r' < \infty$ и

$$\|K\|_{r'} = \Big(\alpha\Big[(x-y)^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}}\Big]\Big)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

2. Далее, если $r = 1$, то равенство в неравенстве Гёльдера достигается тогда и только тогда, когда $K(u) = \|K\|_\infty$ почти всюду на множестве $\{u \in [0,1]\colon f''(u) \ne 0\}$, что в силу (2.3) возможно только при условии $f'' \sim 0$ на $[0,1]$. Поэтому если $\|f''\|_1 > 0$, то неравенство (2.4) строгое.

3. Пусть $1 < r < \infty$. Для достижения равенства в (2.9) необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{sgn}(f(z) - f(y)) = \operatorname{sgn} \int_0^1 K(u) f''(u)\, du. \tag{2.11а}$$

Далее, $|f(z) - f(y)| = 2\|f\|_\infty$ тогда и только тогда, когда

$$f(y) = \mp\|f\|_\infty, \qquad f(z) = \pm\|f\|_\infty. \tag{2.11б}$$

Наконец, для достижения равенства в неравенстве Гёльдера необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $u \in [0,1]$

$$f''(u) = c_1 |K(u)|^{\frac{1}{r-1}} \operatorname{sgn} K(u) \tag{2.11в}$$

(из (2.11в) и (2.2) следует, что $|c_1| = c\|f''\|_r$). Таким образом, равенство в (2.5) достигается тогда и только тогда, когда выполняется система условий (2.11).

Если $\|f''\|_r > 0$, то из (2.11б) следует, что $f(y) \ne f(z)$. Пусть, например, $f(z) > f(y)$, тогда из условий (2.11а) и (2.11в) вытекает, что

$$0 < \int_0^1 K(u) f''(u)\, du = c_1 \int_0^1 |K(u)|^{\frac{r}{r-1}}\, du,$$

т.е. $c_1 > 0$ и $c_1 = c\|f''\|_r$.

Заметим, что если функция $g$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и (существующая почти всюду) производная $g' \sim \varphi$, где функция $\varphi$ непрерывна в точке $u_0 \in [a,b]$, то $g'(u_0) = \varphi(u_0)$, так как в этом случае

$$g(u) = g(a) + \int_a^u g'(\xi)\, d\xi = g(a) + \int_a^u \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad u \in [a,b],$$

и можно воспользоваться теоремой о производной интеграла по верхнему пределу.

Учитывая это замечание, получим, что в случае $f(z) > f(y)$ равенство в (2.5) достигается тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$f(y) = -\|f\|_\infty, \qquad f(z) = \|f\|_\infty, \tag{2.12а}$$

$$f''(u) = c\|f''\|_r \begin{cases} 0, & u \in [0,y], \\ (u-y)^{\frac{1}{r-1}}, & u \in [y,x), \\ -(z-u)^{\frac{1}{r-1}}, & u \in (x,z], \\ 0, & u \in [z,1]. \end{cases} \tag{2.12б}$$

Аналогично доказывается, что в случае $f(z) < f(y)$ равенство в (2.5) достигается тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.12′), получаемые из условий (2.12) заменой знаков в правых частях на противоположные. Таким образом, для достижения равенства в (2.5) при $\|f''\|_r > 0$ необходимо и достаточно выполнение условий (2.12) или (2.12′). Системы условий (2.12) и (2.12′) разрешимы одновременно и имеют не более чем по одному решению (с точностью до положительного множителя), которые отличаются только знаком.

4. Пусть $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Докажем необходимость и достаточность условий (2.6)–(2.8). Заметим сразу, что при $\mu = \lambda$ совпадают условия (2.6) и (2.7), а при $\mu = \nu$ условия (2.7) и (2.8). Обозначим $\mu_0 = \|f\|_\infty$, $\mu_2 = \|f''\|_r$, $\widetilde{c} = c\mu_2$ и рассмотрим все возможные случаи взаимного расположения точек $x, y, z$, где $(x, y, z) \in A$.

5. Пусть $y \neq 0$, значит, $x \in (0, \frac{1}{2}]$.

Пусть $y = x$, $z \in (x, 1]$. Условия (2.12) принимают вид

$$f(x) = -\mu_0, \qquad f(z) = \mu_0,$$

$$f''(u) = \widetilde{c}\begin{cases} 0, & u \in [0, x), \\ -(z-u)^{\frac{1}{r-1}}, & u \in (x, z], \\ 0, & u \in [z, 1]. \end{cases}$$

Поскольку $x$ — внутренняя точка минимума функции $f$, то $f'(x) = 0$ и, следовательно, $f'(z) < 0$, так как $f''(u) < 0$, $u \in (x, z)$. С другой стороны, $z$ — точка максимума функции $f$, следовательно, $f'(z) \geq 0$. Получили противоречие, которое показывает несовместность условий (2.12) в рассматриваемом случае.

С помощью аналогичных рассуждений доказывается несовместность условий (2.12) в случае $y \in (0, x)$, $z = x$.

Пусть $y \in (0, x)$, $z = 1$. Условия (2.12) принимают вид

$$f(y) = -\mu_0, \qquad f(1) = \mu_0,$$

$$f''(u) = \widetilde{c}\begin{cases} 0, & u \in [0, y], \\ (u-y)^{\frac{1}{r-1}}, & u \in [y, x), \\ -(1-u)^{\frac{1}{r-1}}, & u \in (x, 1]. \end{cases}$$

Заметим, что $f'(1) \geq 0$, так как $u = 1$ — точка максимума функции $f$. Поскольку $y$ — внутренняя точка минимума, то $f'(y) = 0$ и, следовательно,

$$f'(u) = \widetilde{c}\,\frac{\alpha}{1-\alpha}\begin{cases} 0, & u \in [0, y], \\ (u-y)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, & u \in [y, x], \\ (x-y)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + (1-u)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (1-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, & u \in [x, 1]. \end{cases}$$

Условие $f'(1) \geq 0$ выполняется, только если $x > \frac{1}{2}$, что показывает несовместность условий (2.12) в рассмотренном случае.

Пусть $y \in (0, x)$, $z \in (x, 1)$. Из условий (2.12) следует, что $y$ и $z$ — внутренние экстремальные точки функции $f$, $f'(u) = 0$, $u \in [0, y] \cup [z, 1]$, и $f(u) = -\mu_0$ на $[0, y]$, $f(u) = \mu_0$ на $[z, 1]$. Из условия

$$f'(1) = \widetilde{c}\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[(x-y)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (z-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right] = 0$$

вытекает, что $x-y=z-x$ и, следовательно, $z<2x$. Далее,

$$f(u)=-\mu_0+\widetilde{c}\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\begin{cases}0, & u\in[0,y],\\ (u-y)^{\frac{1}{\alpha}}, & u\in[y,x],\\ 2(z-x)^{\frac{1}{\alpha}}-(z-u)^{\frac{1}{\alpha}}, & u\in[x,z],\\ 2(z-x)^{\frac{1}{\alpha}}, & u\in[z,1].\end{cases}$$

Условие $f(z)=\mu_0$ равносильно условию $\mu=\lambda\left(\frac{z-x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (напомним, что $z\in(x,2x)$ и, значит, $\mu<\lambda$). Таким образом, если $(x,y,z)\in A$ и $y\neq 0$, то для достижения равенства в (2.5) необходимо и достаточно выполнение условий (2.6), при этом $\mu<\lambda$.

6. Пусть $y=0$, $z<1$.

Несовместность условий (2.12) в случае $z=x$ доказывается так же, как и в случае $y=x\neq 0$, $z\in(x,1]$.

Пусть $z\in(x,1)$. Условия (2.12) принимают вид

$$f(0)=-\mu_0,\qquad f(z)=\mu_0,$$

$$f''(u)=\widetilde{c}\begin{cases}u^{\frac{1}{r-1}}, & u\in[0,x),\\ -(z-u)^{\frac{1}{r-1}}, & u\in(x,z],\\ 0, & u\in[z,1].\end{cases}$$

Поскольку $u=0$ — точка минимума функции $f$, то $f'(0)\geq 0$. Поскольку $z$ — внутренняя точка максимума, то $f'(z)=0$ и, следовательно, $f'(u)=0$, $f(u)=\mu_0$ на $[z,1]$. Из условий

$$f'(1)=f'(0)+\widetilde{c}\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-(1-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]=0$$

и $f'(0)\geq 0$ вытекает, что $z\geq 2x$. Далее,

$$f(u)=-\mu_0+\widetilde{c}\frac{\alpha}{1-\alpha}\begin{cases}\alpha u^{\frac{1}{\alpha}}+u\left[(z-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right], & u\in[0,x],\\ \alpha\left[x^{\frac{1}{\alpha}}+(z-x)^{\frac{1}{\alpha}}-(z-u)^{\frac{1}{\alpha}}\right]+x\left[(z-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right], & u\in[x,z],\\ \alpha\left[x^{\frac{1}{\alpha}}+(z-x)^{\frac{1}{\alpha}}\right]+x\left[(z-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right], & u\in[z,1].\end{cases}$$

Условие $f(z)=\mu_0$ равносильно условию $F(z)=\mu$ (напомним, что $z\in[2x,1)$). Поскольку $\forall t\in[2x,1]$

$$F'(t)=c\frac{1-\alpha}{\alpha}(t-x)^{\frac{1}{r-1}}\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2(t-x)+x\left(1-\left[1-\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2\right]\frac{(t-x)^{\frac{1}{\alpha}}-(t-x)x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{(t-x)^{\frac{1}{\alpha}}+x^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right]>0,$$

то $\forall\mu\in[F(2x),F(1))$ (т.е. $\forall\mu\in[\lambda,\nu)$) существует единственная точка $z\in[2x,1)$ такая, что $F(z)=\mu$. Таким образом, в рассматриваемом случае для достижения равенства в (2.5) необходимо и достаточно выполнение условий (2.7), при этом $\lambda\leq\mu<\nu$.

7. Пусть, наконец, $y=0$, $z=1$. Условия (2.12) принимают вид

$$f(0)=-\mu_0,\qquad f(1)=\mu_0,$$

$$f''(u)=\widetilde{c}\begin{cases}u^{\frac{1}{r-1}}, & u\in[0,x),\\ -(1-u)^{\frac{1}{r-1}}, & u\in(x,1].\end{cases}$$

Поскольку $u=1$ — точка максимума функции $f$, то $f'(1)\ge 0$, откуда следует, что $f'(0)\ge d$, где $d=\widetilde{c}\frac{\alpha}{1-\alpha}\big[(1-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\big]$. Далее,

$$f(u)=-\mu_0+f'(0)u+\widetilde{c}\frac{\alpha}{1-\alpha}\begin{cases}\alpha u^{\frac{1}{\alpha}}, & u\in[0,x],\\ \alpha\Big[x^{\frac{1}{\alpha}}+(1-x)^{\frac{1}{\alpha}}-(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}\Big]+(u-x)\Big[x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-(1-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\Big], & u\in[x,1].\end{cases}$$

Условие $f(1)=\mu_0$ равносильно условию $\mu=\nu+\frac{f'(0)-d}{\mu_2}\ge\nu$ (напомним, что $f'(0)\ge d$). Таким образом, в рассматриваемом случае для достижения равенства в (2.5) необходимо и достаточно выполнение условий (2.8), при этом $\mu\ge\nu$.

Итак, из п. 4–7 вытекает вторая часть следствия 2.2.

## 3. ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МОДУЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ТОЧКЕ ОТРЕЗКА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

**Лемма 3.1.** *Пусть* $x\in[0,\frac{1}{2}]$, $1\le r<\infty$, $f\in W^2(0,1)$, $\|f''\|_r=0$. *Тогда*

$$|f'(x)|\le 2\|f\|_\infty, \tag{3.1}$$

*причем равенство достигается тогда и только тогда, когда*

$$f(u)=\pm(2u-1)\|f\|_\infty,\qquad u\in[0,1]. \tag{3.2}$$

**Доказательство.** Неравенство (3.1) вытекает из неравенства (2.10) для $y=0$, $z=1$.

Пусть $|f'(x)|=2\|f\|_\infty$. Поскольку $\|f''\|_r=0$, то $f$ — линейная функция и $f'(u)=\pm2\|f\|_\infty$, $u\in[0,1]$, откуда и следует (3.2).

**Лемма 3.2.** *Пусть* $x\in[0,\frac{1}{2}]$, $f\in W^2(0,1)$, $\|f''\|_1>0$, $\mu=\frac{2\|f\|_\infty}{\|f''\|_1}$. *Тогда*

1) *если* $\mu\le x$, *то*

$$|f'(x)|<\frac{1}{x}\|f\|_\infty+\frac{1}{2}\|f''\|_1; \tag{3.3}$$

2) *если* $\mu\ge x$, *то*

$$|f'(x)|<2\|f\|_\infty+(1-x)\|f''\|_1. \tag{3.4}$$

**Доказательство.** Обозначим $\mu_0=\|f\|_\infty$, $\mu_1=|f'(x)|$, $\mu_2=\|f''\|_1$, $A_x=\{(y,z)\colon 0\le y\le \le x\le z\le 1,\ y<z\}$. В силу следствия 2.1 $\forall(y,z)\in A_x$ имеет место неравенство $\mu_1<G_1(y,z)$, где

$$G_1(y,z)=\frac{2\mu_0+\max\{x-y,z-x\}\mu_2}{z-y}.$$

Минимизируем функцию $G_1$ по множеству $A_x$. Заметим, что минимум достигается на этом множестве, поскольку функция $G_1$ непрерывна на замкнутом множестве $A_x\cup(x,x)$ и точка $(x,x)$ не является точкой минимума. Следовательно,

$$\mu_1<\min_{(y,z)\in A_x}G_1(y,z). \tag{3.5}$$

Пусть $x=0$. Из (3.5) следует, что

$$\mu_1<\min_{0<z\le1}\frac{2\mu_0+\max\{0,z\}\mu_2}{z}=2\mu_0+\mu_2$$

и имеет место неравенство (3.4).

Положим $v = x - y$, $w = z - x$, тогда неравенство (3.5) примет вид $\mu_1 < \min_{(v,w)\in B_x} G_2(v,w)$, где

$$B_x = \Big\{(v,w)\colon\ 0 \le v \le x,\ 0 \le w \le 1-x,\ (v,w) \ne (0,0)\Big\},$$

$$G_2(v,w) = \frac{2\mu_0 + \max\{v,w\}\mu_2}{v+w}.$$

Поскольку функция $G_2(v,w)$ симметрична, то

$$\min_{(v,w)\in B_x} G_2(v,w) = \min_{\substack{(v,w)\in B_x\\ v\le w}} G_2(v,w) = \min_{\substack{0<w\le 1-x\\ 0\le v\le \min\{w,x\}}} G_2(v,w) =$$

$$= \min_{0<w\le 1-x} \frac{2\mu_0 + w\mu_2}{\min\{w,x\}+w} = \min\left\{\min_{0<w\le x} \frac{2\mu_0 + w\mu_2}{2w}, \min_{x\le w\le 1-x} \frac{2\mu_0 + w\mu_2}{x+w}\right\}.$$

Далее,

$$\min_{0<w\le x} \frac{2\mu_0 + w\mu_2}{2w} = \frac{\mu_0}{x} + \frac{\mu_2}{2},$$

$$\min_{x\le w\le 1-x} \frac{2\mu_0 + w\mu_2}{x+w} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{x} + \dfrac{\mu_2}{2}, & \mu \le x,\\ 2\mu_0 + (1-x)\mu_2, & \mu \ge x. \end{cases}$$

Таким образом, если $\mu \le x$, то имеет место (3.3), если же $\mu \ge x$, то имеет место (3.4), поскольку в этом случае

$$2\mu_0 + (1-x)\mu_2 \le \frac{1}{x}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_2.$$

Заметим, что при $\mu < x$ минимум функции $G_1(y,z)$ достигается только в точке $(0,2x)$, при $\mu > x$ только в точке $(0,1)$, при $\mu = x$ во всех точках вида $(0,z)$, $z \in [2x,1]$, и только в них.

**Следствие 3.1.** *Пусть* $f \in W^2(0,1)$, $\|f''\|_1 > 0$, *тогда*

$$\|f'\|_\infty < 2\|f\|_\infty + \|f''\|_1. \tag{3.6}$$

**Доказательство.** Обозначим $\mu_0 = \|f\|_\infty$, $\mu_2 = \|f''\|_1$, $\mu = \frac{2\|f\|_\infty}{\|f''\|_1}$. Учитывая непрерывность функции $f'$, получим

$$\sup_{x\in[0,\frac12]} |f'(x)| = \begin{cases} \max\limits_{x\in[0,\frac12]} |f'(x)|, & \mu \ge \dfrac12,\\ \max\Big\{\max\limits_{x\in[0,\mu]} |f'(x)|, \max\limits_{x\in[\mu,\frac12]} |f'(x)|\Big\}, & \mu \le \dfrac12. \end{cases}$$

Из леммы 3.2 вытекает, что при $\mu \ge \frac12$

$$\max_{x\in[0,\frac12]} |f'(x)| < 2\mu_0 + \mu_2,$$

при $\mu \le \frac12$

$$\max_{x\in[0,\mu]} |f'(x)| < \mu_2, \qquad \max_{x\in[\mu,\frac12]} |f'(x)| < 2\mu_0 + \mu_2,$$

откуда и следует неравенство (3.6).

**Лемма 3.3.** *Неравенство* (3.3) *точное, т.е. существует такое семейство функций* $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, $\varepsilon_0>0$, *что*

$$\frac{2\|f_\varepsilon\|_\infty}{\|f''_\varepsilon\|_1}\le x \qquad \text{и} \qquad \frac{\frac{1}{x}\|f_\varepsilon\|_\infty+\frac{1}{2}\|f''_\varepsilon\|_1}{|f'_\varepsilon(x)|}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}1.$$

*Более того,* $\forall\mu_0,\mu_2>0$ *таких, что* $\frac{2\mu_0}{\mu_2}\le x$, *существует такое семейство функций* $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, $\varepsilon_0>0$, *что*

$$\|f_\varepsilon\|_\infty=\mu_0,\qquad \|f''_\varepsilon\|_1=\mu_2,\qquad |f'_\varepsilon(x)|\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\frac{1}{x}\mu_0+\frac{1}{2}\mu_2.$$

**Доказательство.** Положим $\varepsilon_0=x$ (заметим, что согласно условию леммы 3.2 $x>0$). Для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ рассмотрим такую функцию $f_\varepsilon$, что $f_\varepsilon(0)=-\mu_0$, $f_\varepsilon(1)=\mu_0$, $f'_\varepsilon(1)=0$,

$$f''_\varepsilon(u)=\begin{cases}0, & u\in[0,x-\varepsilon],\\ \dfrac{\alpha_\varepsilon}{\varepsilon}, & u\in(x-\varepsilon,x],\\ -\dfrac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon}, & u\in(x,x+\varepsilon],\\ 0, & u\in(x+\varepsilon,1],\end{cases}$$

где $\alpha_\varepsilon$, $\beta_\varepsilon$ — такие положительные числа, что $\alpha_\varepsilon+\beta_\varepsilon=\mu_2$. Тогда $\|f''_\varepsilon\|_1=\mu_2$ и

$$f'_\varepsilon(u)=f'_\varepsilon(0)+\begin{cases}0, & u\in[0,x-\varepsilon],\\ \dfrac{u-x+\varepsilon}{\varepsilon}\alpha_\varepsilon, & u\in[x-\varepsilon,x],\\ \alpha_\varepsilon-\dfrac{u-x}{\varepsilon}\beta_\varepsilon, & u\in[x,x+\varepsilon],\\ \alpha_\varepsilon-\beta_\varepsilon, & u\in[x+\varepsilon,1].\end{cases}$$

Из условия $f'_\varepsilon(1)=0$ следует, что $f'_\varepsilon(0)=\beta_\varepsilon-\alpha_\varepsilon$ и $f'_\varepsilon(x)=\beta_\varepsilon$. Далее,

$$f_\varepsilon(u)=-\mu_0+\begin{cases}(\beta_\varepsilon-\alpha_\varepsilon)u, & u\in[0,x-\varepsilon],\\ (\beta_\varepsilon-\alpha_\varepsilon)u+\dfrac{(u-x+\varepsilon)^2}{2\varepsilon}\alpha_\varepsilon, & u\in[x-\varepsilon,x],\\ \left(\dfrac{\varepsilon}{2}-x\right)\alpha_\varepsilon+\beta_\varepsilon u-\dfrac{(u-x)^2}{2\varepsilon}\beta_\varepsilon, & u\in[x,x+\varepsilon],\\ (\beta_\varepsilon-\alpha_\varepsilon)x+(\alpha_\varepsilon+\beta_\varepsilon)\dfrac{\varepsilon}{2}, & u\in[x+\varepsilon,1],\end{cases}$$

и поскольку $f_\varepsilon(1)=\mu_0$, а $\alpha_\varepsilon+\beta_\varepsilon=\mu_2$, то $\beta_\varepsilon-\alpha_\varepsilon=\frac{2\mu_0-\frac{\varepsilon}{2}\mu_2}{x}$. Следовательно, $f'_\varepsilon(0)=\beta_\varepsilon-\alpha_\varepsilon>0$ (так как $\varepsilon\le x\le\frac{2\mu_0}{\mu_2}$), $f'_\varepsilon(u)\ge 0$, $u\in[0,1]$, и $\|f_\varepsilon\|_\infty=\mu_0$. Решая, наконец, систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_\varepsilon+\beta_\varepsilon=\mu_2,\\ \beta_\varepsilon-\alpha_\varepsilon=\dfrac{2\mu_0-\frac{\varepsilon}{2}\mu_2}{x},\end{cases}$$

получим

$$\alpha_\varepsilon=-\frac{1}{x}\mu_0+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{\varepsilon}{4x}\mu_2,\qquad \beta_\varepsilon=\frac{1}{x}\mu_0+\frac{1}{2}\mu_2-\frac{\varepsilon}{4x}\mu_2.$$

Таким образом,

$$\|f_\varepsilon\|_\infty = \mu_0, \qquad \|f''_\varepsilon\|_1 = \mu_2, \qquad f'_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_2 - \frac{\varepsilon}{4x}\mu_2$$

и лемма 3.3 доказана.

**Лемма 3.4.** *Неравенство* (3.4) *точное, т.е. существует такое семейство функций* $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, $\varepsilon_0 > 0$, *что*

$$\frac{2\|f_\varepsilon\|_\infty}{\|f''_\varepsilon\|_1} \ge x \qquad \text{и} \qquad \frac{2\|f_\varepsilon\|_\infty + (1-x)\|f''_\varepsilon\|_1}{|f'_\varepsilon(x)|} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1.$$

*Более того,* $\forall \mu_0, \mu_2 > 0$ *таких, что* $\frac{2\mu_0}{\mu_2} \ge x$, *существует такое семейство функций* $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, $\varepsilon_0 > 0$, *что*

$$\|f_\varepsilon\|_\infty = \mu_0, \qquad \|f''_\varepsilon\|_1 = \mu_2, \qquad |f'_\varepsilon(x)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\mu_0 + (1-x)\mu_2.$$

**Доказательство.** Заметим, что доказательство для случая $\frac{2\mu_0}{\mu_2} = x$ уже проведено при доказательстве леммы 3.3, поскольку в этом случае неравенства (3.3) и (3.4) совпадают.

Пусть $\frac{2\mu_0}{\mu_2} > x$, тогда $\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ рассмотрим такую функцию $f_\varepsilon$, что $f_\varepsilon(0) = -\mu_0$, $f_\varepsilon(1) = \mu_0$ и

$$f''_\varepsilon(u) = \begin{cases} 0, & u \in [0,x], \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}\mu_2, & u \in (x, x+\varepsilon], \\ 0, & u \in (x+\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Для нее $\|f''_\varepsilon\|_1 = \mu_2$,

$$f'_\varepsilon(u) = f'_\varepsilon(0) + \begin{cases} 0, & u \in [0,x], \\ -\dfrac{u-x}{\varepsilon}\mu_2, & u \in [x, x+\varepsilon], \\ -\mu_2, & u \in [x+\varepsilon, 1], \end{cases}$$

и $f'_\varepsilon(x) = f'_\varepsilon(0)$. Далее,

$$f_\varepsilon(u) = -\mu_0 + \begin{cases} f'_\varepsilon(0)u, & u \in [0,x], \\ f'_\varepsilon(0)u - \dfrac{(u-x)^2}{2\varepsilon}\mu_2, & u \in [x, x+\varepsilon], \\ \left(x + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\mu_2 + (f'_\varepsilon(0) - \mu_2)u, & u \in [x+\varepsilon, 1], \end{cases}$$

и поскольку $f_\varepsilon(1) = \mu_0$, то $f'_\varepsilon(x) = f'_\varepsilon(0) = 2\mu_0 + (1-x)\mu_2 - \frac{\varepsilon}{2}\mu_2$.

Если $f'_\varepsilon(1) \ge 0$, т.е. $f'_\varepsilon(0) \ge \mu_2$, то $f'_\varepsilon(u) \ge 0$, $u \in [0,1]$, и $\|f_\varepsilon\|_\infty = \mu_0$, откуда следует утверждение леммы 3.4. Осталось проверить, что $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $f'_\varepsilon(0) \ge \mu_2$. Действительно,

$$2\mu_0 + (1-x)\mu_2 - \frac{\varepsilon}{2}\mu_2 - \mu_2 = \left(\frac{2\mu_0}{\mu_2} - x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\mu_2 \ge 0 \qquad \forall \varepsilon \in \left(0, 2\left(\frac{2\mu_0}{\mu_2} - x\right)\right]$$

и можно положить $\varepsilon_0 = \min\{\frac{1}{2}, 2(\frac{2\mu_0}{\mu_2} - x)\}$.

В заключение заметим, что $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $0 \le f_\varepsilon(u) \le f_\varepsilon(x)$, $u \in [0,1]$.

**Лемма 3.5.** *Пусть* $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $1 < r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$, $f \in W^2(0,1)$, $\|f''\|_r > 0$, $\mu = \frac{2\|f\|_\infty}{\|f''\|_r}$; $F$, $\lambda$, $\nu$ *— функции из условия теоремы* 1.2. *Тогда*

1) *если* $\mu \le \lambda$, *то*

$$|f'(x)| \le 2^{-\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\|f\|_\infty^\alpha \|f''\|_r^{1-\alpha}; \tag{3.7}$$

2) *если* $\lambda \le \mu \le \nu$, *то*

$$|f'(x)| \le \frac{2\|f\|_\infty + (\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}}])^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\|f''\|_r}{z}, \tag{3.8}$$

*где* $z = F^{-1}(\mu)$;

3) *если* $\mu \ge \nu$, *то*

$$|f'(x)| \le 2\|f\|_\infty + \big(\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (1-x)^{\frac{1}{\alpha}}]\big)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\|f''\|_r. \tag{3.9}$$

*В частности,*

$$|f'(0)| \le \begin{cases} 2^\alpha(1-\alpha)^{\alpha-1}\|f\|_\infty^\alpha\|f''\|_r^{1-\alpha}, & \mu \le \dfrac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}, \\ 2\|f\|_\infty + \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\|f''\|_r, & \mu \ge \dfrac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\|f\|_\infty^\alpha\|f''\|_r^{1-\alpha}, & \mu \le \dfrac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{2(1-\alpha)}, \\ 2\|f\|_\infty + \dfrac{1}{2}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\|f''\|_r, & \mu \ge \dfrac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{2(1-\alpha)}. \end{cases} \tag{3.11}$$

**Доказательство.** Заметим сразу, что при $\mu = \lambda$ совпадают условия (3.7) и (3.8), а при $\mu = \nu$ условия (3.8) и (3.9).

Обозначим $\mu_0 = \|f\|_\infty$, $\mu_1 = |f'(x)|$, $\mu_2 = \|f''\|_r$, $A_x = \{(y,z)\colon 0 \le y \le x \le z \le 1,\ y < z\}$. В силу следствия 2.2 и рассуждений, проведенных в начале доказательства леммы 3.2, имеет место неравенство

$$\mu_1 \le \min_{(y,z)\in A_x} H_1(y,z), \tag{3.12}$$

где

$$H_1(y,z) = \frac{2\mu_0 + (\alpha[(x-y)^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}}])^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mu_2}{z-y}.$$

Положим $v = x - y$, $w = z - x$, тогда неравенство (3.12) примет вид $\mu_1 \le \min_{(v,w)\in B_x} H_2(v,w)$, где

$$B_x = \Big\{(v,w)\colon\ 0 \le v \le x,\ 0 \le w \le 1-x,\ (v,w) \ne (0,0)\Big\},$$

$$H_2(v,w) = \frac{2\mu_0 + (\alpha[v^{\frac{1}{\alpha}} + w^{\frac{1}{\alpha}}])^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mu_2}{v+w}.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_2}{\partial v}(v,w) = 0, \\ \dfrac{\partial H_2}{w}(v,w) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(v_0, w_0)$, где $v_0 = w_0 = (\frac{\mu}{\lambda})^{1-\alpha}x$. Следовательно, если $x \in (0, \frac{1}{2}]$ и $v_0 \le x$, т.е. $\mu \le \lambda$, то

$$\min_{(v,w)\in B_x} H_2(v,w) = H_2(v_0,w_0) = 2^{-\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\mu_0^\alpha\mu_2^{1-\alpha}$$

и имеет место неравенство (3.7).

Пусть $\mu > \lambda$, тогда минимум функции $H_2$ достигается на границе множества $B_x$. Заметим, что, во-первых, $\forall v \in (0,x]$ $H_2(v,0) = H_2(0,v) > H_2(\frac{v}{2},\frac{v}{2})$; во-вторых, $\forall w \in [0,x)$ $H_2(x,w) > H_2(\frac{x+w}{2},\frac{x+w}{2})$; в-третьих, $\forall w \in (x, 1-x]$ $H_2(0,w) > H_2(x, w-x)$, поскольку это неравенство эквивалентно неравенству $h(w) \equiv w^{\frac{1}{\alpha}} - x^{\frac{1}{\alpha}} - (w-x)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, $h(x) = 0$ и $h'(w) > 0$, $w \in [x, 1-x]$; в-четвертых, $\forall v \in [0,x)$ $H_2(v, 1-x) > H_2(x, 1+v-2x)$, поскольку это неравенство эквивалентно неравенству $h(v) \equiv v^{\frac{1}{\alpha}} + (1-x)^{\frac{1}{\alpha}} - x^{\frac{1}{\alpha}} - (1+v-2x)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, $h(x) = 0$ и $h'(v) \le 0$, $v \in [0,x]$. Следовательно,

$$\min_{(v,w)\in B_x} H_2(v,w) = \min_{x\le w\le 1-x} H_2(v,w) = \min_{2x\le z\le 1} H(z),$$

где $H(z) \equiv H_1(0,z)$.

Уравнение $H'(z) = 0$ эквивалентно уравнению $F(z) = \mu$. При доказательстве следствия 2.2 было уже показано, что $F(z) > 0$, $z \in [2x, 1]$. Поэтому если $\mu \in [F(2x), F(1)]$ (т.е. $\mu \in [\lambda, \nu]$), то уравнение $F(z) = \mu$ имеет решение, причем единственное, и выполняется неравенство (3.8).

Если же $\mu > \nu$, то минимум функции $H$ достигается на границе отрезка $[2x, 1]$. Заметим, что условия $H'(z) < 0$ и $\mu > F(z)$ эквивалентны. Поскольку $\mu > F(1)$ и $F'(z) > 0$, $z \in [2x, 1]$, то $\mu > F(z)$, $z \in [2x, 1]$. Следовательно, минимум функции $H$ достигается в точке $z = 1$ и имеет место неравенство (3.9).

**Следствие 3.2.** *Пусть* $1 < r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$, $f \in W^2(0,1)$, $\|f''\|_r > 0$, $\mu = \frac{2\|f\|_\infty}{\|f''\|_r}$. *Тогда*

1) *если* $\mu \le \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\alpha}$, *то*

$$\|f'\|_\infty \le 2^\alpha(1-\alpha)^{\alpha-1}\|f\|_\infty^\alpha\|f''\|_r^{1-\alpha}; \tag{3.13}$$

2) *если* $\mu \ge \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}$, *то*

$$\|f'\|_\infty \le 2\|f\|_\infty + \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\|f''\|_r. \tag{3.14}$$

**Доказательство.** Как и при доказательстве следствия 3.1, достаточно оценить величину $\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]}|f'(x)|$.

Введем следующие обозначения для правых частей неравенств (3.7)–(3.9) для функции $f$: $P$ для (3.7), $Q(x)$ для (3.8), $R(x)$ для (3.9). Заметим, что $\forall x \in [0, \frac{1}{2})$

$$Q'(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (z-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{z(\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}}])^{\frac{1}{r}}}\|f''\|_r < 0,$$

$$R'(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (1-x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{(\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (1-x)^{\frac{1}{\alpha}}])^{\frac{1}{r}}}\|f''\|_r < 0,$$

т.е. $\forall x \in (0, \frac{1}{2}]$

$$Q(x) < Q(0) = 2^\alpha(1-\alpha)^{\alpha-1}\|f\|_\infty^\alpha\|f''\|_r^{1-\alpha},$$

$$R(x) < R(0) = 2\|f\|_\infty + \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\|f''\|_r.$$

Очевидно, $Q(0) > P$. Заметим также, что $R(0) \geq Q(0)$, поскольку

$$\frac{R(0)}{Q(0)} = (1-\alpha)^{1-\alpha}[\mu^{1-\alpha} + \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mu^{-\alpha}] \geq 1.$$

Рассмотрим множества $U = \{x \in (0, \frac{1}{2}] \colon \mu \leq \lambda(x)\}$, $V = \{x \in [0, \frac{1}{2}] \colon \lambda(x) \leq \mu \leq \nu(x)\}$, $W = \{x \in [0, \frac{1}{2}] \colon \mu \geq \nu(x)\}$, где $\lambda$, $\nu$ из условия теоремы 1.2. В силу леммы 3.5 и непрерывности функции $f'$ имеем

$$\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f'(x)| = \max\Big\{\max_{x\in U}|f'(x)|,\ \max_{x\in V}|f'(x)|,\ \max_{x\in W}|f'(x)|\Big\} \leq \max\Big\{P,\ \max_{x\in V} Q(x),\ \max_{x\in W} R(x)\Big\}.$$

Пусть $\mu \leq \nu(0) = \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}$. Тогда $\max_{x\in V} Q(x) = Q(0) > P$. Покажем, что $\max_{x\in W} R(x) \leq Q(0)$. Заметим, что $\nu(x)$ — непрерывная функция, причем $\nu'(0) = \frac{1}{r}\frac{\alpha^2}{1-\alpha} > 0$. Пусть $x_0 = \min_{x\in W} x$, тогда $\mu = \nu(x_0)$ и $\max_{x\in W} R(x) = R(x_0) = Q(x_0) \leq Q(0)$, поскольку $R$ и $Q$ — убывающие функции. Следовательно, $\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f'(x)| \leq Q(0)$.

Пусть $\mu \geq \nu(0) = \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}$. Тогда $\max_{x\in W} R(x) = R(0)$, $\max_{x\in V} Q(x) \leq \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} Q(x) = Q(0) \leq R(0)$ и, наконец, $Q(0) > P$. Следовательно, $\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f'(x)| \leq R(0)$.

**Следствие 3.3.** *Пусть* $1 < r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$, $f \in W^2(0,\infty)$, $\|f''\|_{L_r(0,\infty)} > 0$. *Тогда*

$$\|f''\|_{L_\infty(0,\infty)} \leq 2^\alpha (1-\alpha)^{\alpha-1} \|f\|^\alpha_{L_\infty(0,\infty)} \|f''\|^{1-\alpha}_{L_r(0,\infty)}. \tag{3.15}$$

**Доказательство.** Пусть $\|f''\|_{L_r(0,\infty)} < \infty$. Допустим противное, т.е. пусть существует точка $v \in [0,\infty)$ такая, что

$$|f'(v)| > 2^\alpha(1-\alpha)^{\alpha-1}\|f\|^\alpha_{L_\infty(0,\infty)}\|f''\|^{1-\alpha}_{L_r(0,\infty)}.$$

Рассмотрим функцию $h(u) = f(u+v)$, $u \in [0,\infty)$. Для нее $h'(0) = f'(v)$, $\|h\|_{L_\infty(0,\infty)} = \|f\|_{L_\infty(v,\infty)}$, $\|h''\|_{L_r(0,\infty)} = \|f''\|_{L_r(v,\infty)}$ и, следовательно, $\forall \delta > 0$

$$|h'(0)| > 2^\alpha(1-\alpha)^{\alpha-1}\|h\|^\alpha_{L_\infty(0,\delta)}\|h''\|^{1-\alpha}_{L_r(0,\delta)}.$$

Далее, $\forall\delta > 0$ рассмотрим функцию $g(u) = h(\delta u)$, $u \in [0,1]$. Тогда $g \in W^2(0,1)$, $g'(0) = \delta h'(0)$, $\|g\|_{L_\infty(0,1)} = \|h\|_{L_\infty(0,\delta)}$, $\|g''\|_{L_r(0,1)} = \delta^{\frac{1}{1-\alpha}}\|h''\|_{L_r(0,\delta)}$ и, следовательно,

$$|g'(0)| > 2^\alpha(1-\alpha)^{\alpha-1}\|g\|^\alpha_\infty\|g''\|^{1-\alpha}_r.$$

С другой стороны,

$$\frac{2\|g\|_\infty}{\|g''\|_r} = \frac{2\|h\|_{L_\infty}(0,\delta)}{\delta^{\frac{1}{1-\alpha}}\|h''\|_{L_r(0,\delta)}} \leq \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}$$

при достаточно большом $\delta$. Таким образом, получено противоречие с условием (3.10), откуда и следует справедливость неравенства (3.15).

**Следствие 3.4.** *Пусть* $1 < r < \infty$, $\alpha = \frac{r-1}{2r-1}$, $f \in W^2(-\infty,\infty)$, $\|f''\|_{L_r(-\infty,\infty)} > 0$. *Тогда*

$$\|f'\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} \leq 2^{-\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\|f\|^\alpha_{L_\infty(-\infty,\infty)}\|f''\|^{1-\alpha}_{L_r(-\infty,\infty)}. \tag{3.16}$$

**Доказательство.** Пусть $\|f''\|_{L_r(-\infty,\infty)} < \infty$. Допустим противное, т.е. пусть существует точка $v \in (-\infty, \infty)$ такая, что

$$|f'(v)| > 2^{-\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\|f\|^{\alpha}_{L_\infty(-\infty,\infty)}\|f''\|^{1-\alpha}_{L_r(-\infty,\infty)}.$$

Для любого $\delta > 0$ рассмотрим функцию $h(u) = f(u - \frac{\delta}{2} + v)$, $u \in (-\infty, \infty)$. Для нее $h'(\frac{\delta}{2}) = f'(v)$, $\|h\|_{L_\infty(0,\delta)} = \|f\|_{L_\infty(v-\frac{\delta}{2},v+\frac{\delta}{2})}$, $\|h''\|_{L_r(0,\delta)} = \|f''\|_{L_r(v-\frac{\delta}{2},v+\frac{\delta}{2})}$ и, следовательно,

$$\left|h'\left(\frac{\delta}{2}\right)\right| > 2^{-\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\|h\|^{\alpha}_{L_\infty(0,\delta)}\|h''\|^{1-\alpha}_{L_r(0,\delta)}.$$

Те же рассуждения, что и в заключительной части доказательства следствия 3.3, приводят к противоречию с условием (3.11), откуда вытекает справедливость неравенства (3.16).

## 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

**Доказательство теоремы 1.1.** Случай $\mu_0 = 0$ очевиден.

Пусть $\mu_0 > 0$, $\mu_2 = 0$. Необходимость условия (1.1) следует из леммы 3.1. Чтобы показать достаточность условия (1.1), $\forall\mu_1 \in [0, 2\mu_0]$ рассмотрим функцию $g(u) = \mu_1 u - \mu_0$, $u \in [0,1]$. Для нее $\|g\|_\infty = \mu_0$, $g'(x) = \mu_1$, $\|g''\|_1 = 0$.

Пусть $\mu_0 > 0$ и $\mu_2 > 0$. Необходимость условий (1.2) и (1.3) следует из леммы 3.2.

При доказательстве леммы 3.3 построено такое семейство функций $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, что $\|f_\varepsilon\|_\infty = \mu_0$, $\|f''_\varepsilon\|_1 = \mu_2$ и $|f'(x)| = \mu_1$ $\forall\mu_1 \in [\widetilde{\mu}_1, \frac{1}{x}\mu_0 + \frac{1}{2}\mu_2)$, где $\widetilde{\mu}_1 = \frac{1}{x}\mu_0 + \frac{1}{4}\mu_2$, откуда следует достаточность условия (1.3) для указанных $\mu_1$. Докажем достаточность условия (1.3) для остальных $\mu_1 \in [0, \widetilde{\mu}_1)$. Рассмотрим функцию $f_{\varepsilon_0}$ из доказательства леммы 3.3 ($\varepsilon_0 = x$) и обозначим ее $g_0$. Заметим, что при изменении $u$ от $x$ до $x + \varepsilon_0$ значение $g'_0(u)$ непрерывно изменяется от $\widetilde{\mu}_1$ до нуля. Для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ (напомним, что в данном случае $\varepsilon_0 = x > 0$) положим $g_\varepsilon(u) = -\mu_0 - g_0(\varepsilon) + g_0(u+\varepsilon)$, $u \in [0, 1-\varepsilon]$. Тогда $g_\varepsilon(0) = -\mu_0$ и $g'_\varepsilon(x) = g'_0(x+\varepsilon)$, т.е. $\forall\mu_1 \in [0, \widetilde{\mu}_1)$ $\exists\,\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ такое, что $g'_\varepsilon(x) = \mu_1$.

Далее, пусть $|g''_\varepsilon(u)| = a$, $u \in (1-\varepsilon, 1]$, где постоянная $a$ такова, что $\|g''_\varepsilon\|_1 = \mu_2$, т.е. $a = -\frac{1}{x}\mu_0 + \frac{3}{4}\mu_2$. Осталось доопределить функцию $g_\varepsilon \in W^2(0,1)$ так, чтобы $\|g_\varepsilon\|_\infty = \mu_0$. Разобьем отрезок $[1-\varepsilon, 1]$ на $4k+2$ частей (число $k$ выберем позднее), обозначим $b = \frac{\varepsilon}{4k+2}$ и положим

$$g''_\varepsilon(u) = \begin{cases} g''_0(u+\varepsilon), & u \in [0, 1-\varepsilon],\\ a, & u \in (1-\varepsilon, 1-\varepsilon+b],\\ (-1)^m a, & u \in (1-\varepsilon+(2m-1)b, 1-\varepsilon+(2m+1)b], \quad m = 1,2,\dots,2k,\\ -a, & u \in (1-\varepsilon+(4k+1)b, 1]. \end{cases}$$

Тогда

$$g'_\varepsilon(u) = \begin{cases} g'_0(u+\varepsilon), & u \in [0, 1-\varepsilon],\\ a(u-1+\varepsilon), & u \in (1-\varepsilon, 1-\varepsilon+b],\\ (-1)^m a(u-1+\varepsilon-2mb), & u \in [1-\varepsilon+(2m-1)b, 1-\varepsilon+(2m+1)b], \quad m = 1,2,\dots,2k,\\ -a(u-1+\varepsilon-(4k+2)b), & u \in (1-\varepsilon+(4k+1)b, 1]. \end{cases}$$

Заметим, что $0 \le g'_\varepsilon(u) \le g'_\varepsilon(x)$, $u \in [0, 1-\varepsilon]$, и $|g'_\varepsilon(u)| \le ab$, $u \in (1-\varepsilon, 1]$. Таким образом, если $g'_\varepsilon(x) \ne 0$, то при выборе достаточно большого $k$ можно получить неравенство $|g'_\varepsilon(u)| \le g'_\varepsilon(x)$, $u \in [0,1]$.

Далее,

$$g_\varepsilon(u) = \begin{cases} -\mu_0 - g_0(\varepsilon) + g_0(u+\varepsilon), & u \in [0, 1-\varepsilon], \\ -g_0(\varepsilon) + \dfrac{a}{2}(u-1+\varepsilon)^2, & u \in [1-\varepsilon, 1-\varepsilon+b], \\ -g_0(\varepsilon) + \dfrac{ab^2}{2} - (-1)^m \left( ab[u-1+\varepsilon-(2m-1)b] - \dfrac{a}{2}[u-1+\varepsilon-(2m-1)b]^2 \right), & \\ \qquad u \in [1-\varepsilon+(2m-1)b, 1-\varepsilon+(2m+1)b], \quad m = 1, 2, \dots, 2k, & \\ -g_0(\varepsilon) + \dfrac{ab^2}{2} + ab[u-1+\varepsilon-(4k+1)b] - \dfrac{a}{2}[u-1+\varepsilon-(4k+1)b]^2, & \\ \qquad u \in [1-\varepsilon+(4k+1)b, 1], & \end{cases}$$

откуда следует, что $\forall u \in [0,1]$ $-\mu_0 \le g_\varepsilon(u) \le g_0(\varepsilon) + ab^2$. Выберем $k$ достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство $-g_0(\varepsilon) + ab^2 \le \mu_0$ (это возможно, поскольку $-g_0(\varepsilon) < \mu_0$), и доказательство достаточности условия (1.3) завершено.

Кроме этого, если $g'_\varepsilon(x) \ne 0$, то пусть $k$ столь велико, что выполняется неравенство $|g'_\varepsilon(u)| \le g'_\varepsilon(x)$, $u \in [0,1]$.

При доказательстве леммы 3.4 построено такое семейство функций $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, что $\|f_\varepsilon\|_\infty = \mu_0$, $\|f''_\varepsilon\|_1 = \mu_2$ и $|f'_\varepsilon(x)| = \mu_1$ $\forall \mu_1 \in [\widetilde{\mu}_1, 2\mu_0 + (1-x)\mu_2)$, где $\widetilde{\mu}_1 = 2\mu_0 + (1-x)\mu_2 - \frac{\varepsilon_0}{2}\mu_2$, $\varepsilon_0 = \min\{\frac{1}{2}, 2(\mu - x)\}$, откуда следует достаточность условия (1.2) для указанных $\mu_1$.

Рассмотрим функцию $f_{\varepsilon_0}$ из доказательства леммы 3.4. Если $2(\mu - x) \le \frac{1}{2}$, то $f'_{\varepsilon_0}(x+\varepsilon_0) = 0$ и доказательство достаточности условия (1.2) для оставшихся $\mu_1$ проводится так же, как и для условия (1.3).

Если же $2(\mu - x) > \frac{1}{2}$, то $f'_{\varepsilon_0}(x+\varepsilon_0) = \mu_2(\mu - x - \frac{1}{4}) > 0$. В этом случае обозначим $h_0 = f_{\varepsilon_0}$ и построим семейство функций $\{h_\sigma\}_{\sigma\in(0,\sigma_0]}$, $\sigma_0 = \mu_2(\mu - x - \frac{1}{4})$, определяемых формулой $h_\sigma(u) = h_0(u) - \sigma u$, $u \in [0,1]$. При изменении $\sigma$ от нуля до $\sigma_0$ значение $h'_\sigma(x)$ непрерывно изменяется от $\widetilde{\mu}_1$ до $\widetilde{\mu}_1 - \sigma_0$, значение $h'_\sigma(x+\varepsilon_0)$ — от $\sigma_0$ до нуля. Далее, поскольку функции $h_0$ и $h_\sigma$ неубывающие, $h_0(0) = h_\sigma(0) = -\mu_0$, $h_0(1) = \mu_0$ и $\forall u \in [0,1]$ $h'_\sigma(u) < h'_0(u)$, то $\|h_\sigma\|_\infty = \mu_0$. Наконец, очевидно, $\|h''_\sigma\|_1 = \|h''_0\|_1 = \mu_2$ и доказана достаточность условия (1.3) $\forall \mu_1 \in [\widetilde{\mu}_1 - \sigma_0, \widetilde{\mu}_1)$.

Заметим, что $\forall \sigma \in (0, \sigma_0]$ $0 \le h'_\sigma(u) \le h'_\sigma(x)$, $u \in [0,1]$.

Теперь обозначим $g_0 = h_{\sigma_0}$. Дальнейшее доказательство для оставшихся $\mu_1$ проводится так же, как и для условия (1.3).

**Доказательство следствия 1.1.** Следствие 1.1 вытекает из теоремы 1.1 и леммы 3.1.

**Доказательство следствия 1.2.** Следствие 1.2 вытекает из того факта, что в задаче 3 $B^*_r(x, A)$ при $A \ge A^*_r(x)$ есть угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $(0, A)$ и являющейся опорной прямой к графику функции $y = \Phi(\beta)$.

**Доказательство теоремы 1.2.** Случай $\mu_0 = 0$ очевиден. Случай $\mu_0 > 0$, $\mu_2 = 0$ рассматривается так же, как и при доказательстве теоремы 1.1.

Пусть $\mu_0 > 0$, $\mu_2 > 0$. Необходимость условий (1.7)–(1.9) следует из леммы 3.5.

Из следствия 2.2 вытекает достаточность условия (1.9) для $\widetilde{\mu}_1 = 2^{-\frac{1}{2r-1}}(1-\alpha)^{\alpha-1}\mu_0^\alpha \mu_2^{1-\alpha}$, поскольку в случае $\mu \le \lambda$ неравенство (2.5) для функций (2.6б) обращается в равенство с $\widetilde{\mu}_1$ в правой части. Докажем достаточность этого условия для оставшихся $\mu_1 \in [0, \widetilde{\mu}_1)$. Рассмотрим одну из функций (2.6б) (например, неубывающую) и обозначим ее $g_0$. Заметим, что при изменении $u$ от $x$ до $z$ ($z$ из условия (2.6а), $x < z \le 1$) значение $g'_0(u)$ непрерывно изменяется от $\widetilde{\mu}_1$ до нуля. Для любого $\varepsilon \in (0, z-x]$ положим

$$g_\varepsilon(u) = -\mu_0 - g_0(\varepsilon) + \begin{cases} g_0(u+\varepsilon), & u \in [0, 1-\varepsilon], \\ g_0(u+\varepsilon-1) + 2\mu_0, & u \in [1-\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Поскольку $g_0'(0) = g_0'(1)$, то функция $g_\varepsilon'$ абсолютно непрерывна и $g_\varepsilon \in W^2(0,1)$. Далее, $\|g_\varepsilon\|_\infty = \mu_0$; $\|g_\varepsilon''\|_r = \mu_2$, так как $g_\varepsilon''$ — функция, полученная сдвигом периодически продолженной функции $g_0''$. Наконец, $g_\varepsilon'(x) = g_0'(x+\varepsilon)$, значит, $\forall \mu_1 \in [0, \widetilde{\mu}_1)$ $\exists\, \varepsilon \in (0, z-x]$ такое, что $g_\varepsilon'(x) = \mu_1$. Этим завершается доказательство достаточности условия (1.9).

Достаточность условия (1.8) для $\widetilde{\mu}_1 = \frac{1}{z}(2\mu_0 + (\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}}])^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mu_2)$, где $z$ из условия (2.7а), $x < z \le 1$, вытекает из следствия 2.2. Рассмотрим одну из функций (2.7б) (например, неубывающую) и обозначим ее $g_0$. При изменении $u$ от $x$ до $z$ значение $g_0'(u)$ непрерывно изменяется от $\widetilde{\mu}_1$ до нуля. Семейство функций $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$, $\varepsilon_0 = z - x$, с помощью которых доказывается достаточность условия (1.8), $\forall \mu_1 \in [0, \widetilde{\mu}_1)$ строится так же, как и при доказательстве достаточности условия (1.2) в теореме 1.1. Чтобы выполнялось условие $\|g_\varepsilon''\|_r = \mu_2$, следует положить

$$a = [x^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}}]\mu_2 \begin{cases} \varepsilon^{\frac{1}{r-1}}, & \varepsilon \in (0, x], \\ \left(\dfrac{x^{\frac{1}{\alpha}} + (z-x)^{\frac{1}{\alpha}} - (z-\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{r}}, & \varepsilon \in [x, z-x]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Наконец, из следствия 2.2 вытекает достаточность условия (1.7) для $\widetilde{\mu}_1 = 2\mu_0 + (\alpha[x^{\frac{1}{\alpha}} + (1-x)^{\frac{1}{\alpha}}])^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mu_2$. Рассмотрим одну из функций (2.8б) (например, возрастающую) и обозначим ее $h_0$. При изменении $u$ от $x$ до 1 значение $h_0'(u)$ непрерывно изменяется от $\widetilde{\mu}_1$ до $2\mu_0 - \mu_2\nu \ge 0$. Семейства функций $\{h_\sigma\}_{\sigma \in (0,\sigma_0]}$, $\sigma_0 = 2\mu_0 - \mu_2\nu$, и $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]}$, $\varepsilon_0 = 1 - x$, с помощью которых доказывается достаточность условия (1.7), $\forall \mu_1 \in [\widetilde{\mu}_1 - \sigma_0, \widetilde{\mu}_1)$ и $\forall \mu_1 \in [0, \widetilde{\mu}_1 - \sigma_0)$ соответственно строятся так же, как и при доказательстве достаточности условия (1.2) в теореме 1.1 (чтобы выполнялось требование $\|g_\varepsilon''\|_r = \mu_2$, следует взять $a$ из (4.1) при $z = 1$).

**Доказательство следствия 1.3.** Следствие 1.3 вытекает из теоремы 1.2, следствия 2.2 и леммы 3.1.

**Доказательство следствия 1.4.** Случаи $\mu_0 = 0$, а также $\mu_0 > 0$, $\mu_1 = 0$ очевидны. Случай $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$ рассматривается так же, как и случай $\mu_0 > 0$, $\mu_2 = 0$ в теореме 1.1.

Пусть $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$. Необходимость условий (1.11) и (1.12) вытекает из следствия 3.2. Для доказательства достаточности этих условий рассмотрим функции, с помощью которых доказывалась достаточность условий (1.7) и (1.8) в теореме 1.2 для $x = 0$ (за исключением тех функций, производные которых в нуле равны нулю). Все они отличаются тем свойством (это отмечалось при доказательстве теоремы 1.1), что их производные достигают своего максимума по модулю в точке $x = 0$. Отсюда вытекает достаточность условий (1.11) и (1.12).

**Доказательство следствия 1.5.** Следствие 1.5 вытекает из следствия 1.4 и его доказательства, а также из леммы 3.1.

**Доказательство следствия 1.6.** Случаи $\mu_0 = 0$, а также $\mu_0 > 0$, $\mu_1 = 0$ очевидны.

Пусть $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$. Покажем необходимость условия $\mu_2 > 0$. Допустим, что существует такая функция $f \in W^2(0, \infty)$, что

$$\|f\|_{L_\infty(0,\infty)} = \mu_0, \qquad \|f'\|_{L_\infty(0,\infty)} = \mu_1, \qquad \|f''\|_{L_r(0,\infty)} = 0.$$

Тогда $f(u) = \pm\mu_1 u + \mathrm{const}$, $u \in [0, \infty)$, и, следовательно, $\|f\|_{L_\infty(0,\infty)} \ne \mu_0$.

Пусть $1 < r < \infty$. Необходимость условия (1.13) вытекает из следствия 3.3. Чтобы показать достаточность, следует функции, с помощью которых была доказана достаточность условия (1.8) в теореме 1.2 для $x = 0$, продолжить вправо константой по непрерывности. Полученные функции принадлежат пространству $W^2(0,\infty)$, поскольку производные исходных функций при $u = 1$ равнялись нулю. Например, для достижения равенства в (1.13) следует рассмотреть функцию

$$f(u) = \begin{cases} \mu_0\Big[1 - 2\Big(1 - \dfrac{u}{z}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big], & u \in [0,z], \\ \mu_0, & u \in [z,\infty), \end{cases} \tag{4.2}$$

где $z = \frac{1}{\alpha}\big(\frac{2(1-\alpha)\mu_0}{\mu_2}\big)^{1-\alpha}$.

Пусть $r = 1$. В этом случае неравенство (1.13) принимает вид $\mu_1 \le \mu_2$. Докажем необходимость этого условия. Поскольку $\forall f \in W^2(0,\infty)$ и $\forall u,t \in [0,\infty)$

$$f'(u) = f'(t) + \int\limits_t^u f''(\xi)\,d\xi, \tag{4.3}$$

то существует конечный $\lim_{t\to+\infty} f'(t)$, причем этот предел равен нулю (иначе $f \notin L_\infty(0,\infty)$). Из (4.3) также следует, что

$$|f'(u)| \le |f'(t)| + \int\limits_0^\infty |f''(\xi)|\,d\xi, \qquad u,t \in [0,\infty).$$

Устремляя в этом неравенстве $t \to +\infty$, получим $|f'(u)| \le \|f''\|_{L_1(0,\infty)}$, $u \in [0,\infty)$, и, следовательно, $\|f'\|_{L_\infty(0,\infty)} \le \|f''\|_{L_1(0,\infty)}$.

Достаточность условия (1.13) при $r = 1$ и $\mu_1 = \mu_2$ проверяется по любой такой функции $f \in W^2(0,\infty)$, что

$$f(0) = \mu_0, \qquad f'(0) = -\mu_2, \qquad \lim_{u\to+\infty} f'(u) = 0,$$
$$f(u) > 0, \qquad f'(u) < 0, \qquad f''(u) > 0, \qquad u \in [0,\infty).$$

В качестве примера можно рассмотреть функцию

$$f(u) = \mu_0 e^{-\frac{\mu_2}{\mu_0}u}, \qquad u \in [0,\infty). \tag{4.4}$$

Для доказательства достаточности (1.13) в случае $r = 1$, $\mu_1 < \mu_2$ следует воспользоваться процедурой, сходной с проведенной при доказательстве теорем 1.1 и 1.2.

**Доказательство следствия 1.7.** Следствие 1.7 вытекает из следствия 1.6 и его доказательства.

**Доказательство следствия 1.8.** Случаи $\mu_0 = 0$, а также $\mu_0 > 0$, $\mu_1 = 0$ очевидны.

Пусть $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$. Необходимость условия $\mu_2 > 0$ показывается так же, как и при доказательстве следствия 1.6.

Пусть $1 < r < \infty$. Необходимость условия (1.14) вытекает из следствия 3.4. Чтобы показать достаточность, следует функции, с помощью которых была доказана достаточность условия (1.9) в теореме 1.2 для $x = \frac{1}{2}$, продолжить влево и вправо соответствующими константами по непрерывности. Полученные функции принадлежат пространству $W^2(-\infty,\infty)$, поскольку производные исходных функций при $u = 0$ и $u = 1$ равнялись нулю. Например, для достижения равенства в (1.14) следует рассмотреть функцию

$$f(u) = \mu_0 \begin{cases} -1, & u \in (-\infty, y], \\ -1 + \left(\dfrac{u-y}{\frac{1}{2}-y}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & u \in \left[y, \dfrac{1}{2}\right], \\ 1 - \left(\dfrac{z-u}{z-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & u \in \left[\dfrac{1}{2}, z\right], \\ 1, & u \in [z, \infty), \end{cases} \tag{4.5}$$

где $y$, $z$ из условия (2.6a) при $x = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{2\mu_0}{\mu_2}$.

Пусть $r = 1$. В этом случае неравенство (1.14) принимает вид $\mu_1 \leq \frac{1}{2}\mu_2$. Докажем необходимость этого условия. Действительно, поскольку $\forall f \in W^2(-\infty, \infty)$ и $\forall u, t \in (-\infty, \infty)$ имеет место (4.3), то существуют конечные $\lim_{t\to-\infty} f'(t)$ и $\lim_{t\to+\infty} f'(t)$, причем эти пределы равны нулю (иначе $f \notin L_\infty(-\infty, \infty)$). Устремляя в (4.3) $t$ сначала к $-\infty$, а затем к $+\infty$, получим

$$f'(u) = \int_{-\infty}^{u} f''(\xi)\, d\xi \qquad \text{и} \qquad f'(u) = \int_{u}^{\infty} f''(\xi)\, d\xi, \qquad u \in (-\infty, \infty).$$

Следовательно,

$$|f'(u)| \leq \int_{-\infty}^{u} |f''(\xi)|\, d\xi, \qquad |f'(u)| \leq \int_{u}^{\infty} |f''(\xi)|\, d\xi, \qquad u \in (-\infty, \infty),$$

и $\|f'\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} \leq \frac{1}{2}\|f''\|_{L_1(-\infty,\infty)}$.

Достаточность условия (1.14) при $r = 1$, $\mu_1 = \frac{1}{2}\mu_2$ можно проверить с помощью функции

$$f(u) = \mu_0 - \mu_1 \int_{-\infty}^{u} e^{-\gamma\xi^2}\, d\xi, \qquad u \in (-\infty, \infty), \tag{4.6}$$

при $\gamma$ достаточно большом, чтобы выполнялось неравенство $f(u) > 0$, $u \in (-\infty, \infty)$. Действительно,

$$\|f\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} = \mu_0, \qquad \|f'\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} = \mu_1, \qquad \|f''\|_{L_1(-\infty,\infty)} = 2 \operatorname*{Var}_{u\in(-\infty,\infty)} f'(u) = 2\mu_1,$$

поскольку $f'(u)$ монотонно убывает от нуля до $-\mu_1$ на $(-\infty, 0]$ и монотонно возрастает от $-\mu_1$ до нуля на $[0, \infty)$.

Для доказательства достаточности условия (1.14) при $r = 1$, $\mu_1 < \frac{1}{2}\mu_2$ следует воспользоваться процедурой, сходной с проведенной при доказательстве теорем 1.1 и 1.2.

**Доказательство следствия 1.9.** Следствие 1.9 вытекает из следствия 1.8 и его доказательства.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Landau E.* Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. 1913. V. 13. P. 43–49.
2. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et des ses dérivées // C. r. Acad. sci. Paris. 1914. V. 41. P. 68–72.
3. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений // ДАН СССР. 1965. Т. 160, №4. С. 774–777.

4. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
5. *Karlin S.* Oscillatory perfect splines and related extremal problems // Studies in spline functions and approximation theory. New York: Acad. Press, 1976. P. 371–460.
6. *Буренков В.И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Тр. МИАН. 1980. Т. 156. С. 22–29.
7. *Буренков В.И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. II // Тр. МИАН. 1986. Т. 173. С. 38–49.
8. *Звягинцев А.И., Лепин А.Я.* О неравенствах Колмогорова между верхними гранями производных функций для $n = 3$ // Латв. мат. ежегодник. 1982. Вып. 26. С. 176–181.
9. *Sato M.* The Landau inequality for bounded intervals with $\|f^{(3)}\|$ finite // J. Approx. Theory. 1982. V. 34, N 2. P. 159–166.
10. *Звягинцев А.И.* Некоторые оценки для норм функций и производных на конечном интервале // Латв. мат. ежегодник. 1985. Вып. 29. С. 198–210.
11. *Kallioniemi H.* The Landau problem on compact intervals and optimal numerical differentiation // J. Approx. Theory. 1990. V. 63, N 1. P. 72–91.
12. *Шадрин А.Ю.* О точных постоянных в неравенствах между $L_\infty$-нормами производных на конечном отрезке // Докл. РАН. 1992. Т. 326, №1. С. 50–53.
13. *Арестов В.В.* О точных неравенствах между нормами функций и их производных // Acta sci. math. 1972. V. 33, N 3/4. P. 243–267.
14. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб. 1997. Т. 188, №12. С. 73–106.
15. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000; 2-е изд., 2003. 176 с.
16. *Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E.* Sharp multidimensional multiplicative inequalities for weighted $L_p$ spaces with homogeneous weights: Res. rept. 1997-11. Dept. Math. Luleå Univ., 1997. 18 p.
17. *Буренков В.И., Гусаков В.А.* О точных постоянных в неравенстве для модуля производной и о наилучших приближениях функционала дифференцирования в точке отрезка // Докл. РАН. 1997. Т. 356, №3. С. 295–296.