Труды Математического института РАН
1992, том 194

УДК 517.51

В. И. БУРЕНКОВ

О ТОЧНОЙ ПОСТОЯННОЙ В НЕРАВЕНСТВЕ ХАРДИ ПРИ $0<p<1$ ДЛЯ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Для функций f одной переменной, измеримых на полуоси $(0, \infty)$, рассмотрим операторы Харди H_1 и H_2, определяемые для любых $x > 0$ равенствами

$$(H_1f)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy, \quad (H_2f)(x) := \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy.$$

Известные неравенства Харди имеют следующий вид: пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$; если $\alpha < 1/p'$ (p' — показатель, сопряженный к p; $1/p + 1/p' = 1$), то для любых измеримых на $(0, \infty)$ функций f

$$\| x^\alpha (H_1f)(x) \|_{L_p(0,\infty)} \leqslant \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \| x^\alpha f(x) \|_{L_p(0,\infty)}, \tag{1}$$

а если $\alpha > 1/p'$, то для любых измеримых на $(0, \infty)$ функций f

$$\| x^\alpha (H_2f)(x) \|_{L_p(0,\infty)} \leqslant \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \| x^\alpha f(x) \|_{L_p(0,\infty)}. \tag{2}$$

Постоянные $(1/p' - \alpha)^{-1}$ в (1) и $(\alpha - 1/p')^{-1}$ в (2) являются точными (наименьшими возможными) при любых рассматриваемых α и p.

Нетрудно проверить, что при $0 < p < 1$ неравенства

$$\| x^\alpha (H_1f)(x) \|_{L_p(0,\infty)} \leqslant A_1 \| x^\alpha f(x) \|_{L_p(0,\infty)}, \tag{3}$$

$$\| x^\alpha (H_2f)(x) \|_{L_p(0,\infty)} \leqslant A_2 \| x^\alpha f(x) \|_{L_p(0,\infty)} \tag{4}$$

ни для каких α, A_1 и A_2 не имеют места для любых измеримых на $(0,\infty)$ функций f (известно, что при соответствующих α, A_1, A_2 и $f \geqslant 0$ справедливы неравенства (3) и (4) со знаком $\geqslant$ вместо $\leqslant$). В то же время при дополнительном предположении о монотонности функции f неравенство (3) при $\alpha < 1/p'$ и неравенство (4) при $\alpha > 1/p'$ имеют место. В этом нетрудно убедиться, если перейти от интегралов к суммам, учитывая, что для любых α при некоторых $c_1, c_2 > 0$

$$c_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k) \leqslant \int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx \leqslant c_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k),$$

для любых неотрицательных монотонных функций f, и воспользоваться неравенством Йенсена.

Целью настоящей статьи является нахождение точных постоянных в неравенствах (3) и (4) для монотонных функций при $0 < p < 1$ [1].

Нам понадобятся следующие леммы.

---

[1] Без доказательств приводимые ниже результаты сформулированы в [2].

Лемма 1. *Пусть* $0 < p < 1$, $\forall k \in \mathbf{N}$ $a_k \geqslant 0$ *и* $a_k \geqslant a_{k+1}$. *Тогда*

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big)^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k^p (k^p - (k-1)^p). \tag{5}$$

Замечание 1. Если для некоторого $m \in \mathbf{N}$ $a_1 = \ldots = a_m \geqslant 0$ и $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = 0$, то неравенство (5) обращается в равенство. Неравенство (5) является усилением неравенства Йенсена для случая монотонно убывающих последовательностей (нетрудно проверить, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^p \cdot (k^p - (k-1)^p) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^p$); отметим, что $k^p - (k-1)^p \sim pk^{p-1}$ при $k \to \infty$.

Доказательство. Прежде всего если $A > 0$, то при $0 \leqslant t \leqslant A$

$$(1 + t)^p \leqslant 1 + t^p\,((A^{-1} + 1)^p - A^{-p}) \tag{6}$$

(это неравенство следует из того, что функция $t^{-p}\,((1 + t)^p - 1)$ строго монотонно возрастает на $(0, A]$). Из (6) следует, что если $0 \leqslant y \leqslant Ax$, то

$$(x + y)^p < x^p + y^p\,((A^{-1} + 1)^p - A^{-p}). \tag{7}$$

Докажем теперь для $m \in \mathbf{N}$ по индукции неравенство

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k\Big)^p \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k^p (k^p - (k-1)^p). \tag{8}$$

При $m = 1$ оно очевидно (при $m = 2$ оно следует из (7)). Пусть оно справедливо для некоторого $m \in \mathbf{N}$, тогда, учитывая, что в силу монотонности $a_{m+1} \leqslant \frac{1}{m} \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$, получим согласно (7) и индуктивному предположению, что

$$\Big(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\Big)^p = \Big(\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}\Big)^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{m} a_k\Big)^p + a_{m+1}^p\,((m+1)^p - m^p) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m+1} a_k^p (k^p - (k-1)^p).$$

Наконец, переходя к пределу в (8), получим (5).

Лемма 2. *Если* $0 < p < 1$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$ *и функция* f *неотрицательна и монотонно убывает на* (a, b), *то*

$$\Big(\int_a^b f(x)\,dx\Big)^p \leqslant p \int_a^b (x - a)^{p-1} f^p(x)\,dx. \tag{9}$$

Замечание 2. Если для некоторого $\xi \in (a, b)$ на (a, ξ) $f(x) = 1$ и на $[\xi, b)$ $f(x) = 0$, то неравенство (9) обращается в равенство. Неравенство (9) является интегральным аналогом неравенства (5). Если $a = 0$, $b = \infty$ и $\forall k \in \mathbf{N}$ на $(k - 1, k]$ $f(x) = a_k$, то (9) переходит в (5).

Доказательство. Будем считать, что $b < \infty$ (случай $b = \infty$ получается из случая $b < \infty$ с помощью предельного перехода). Для любых $m \in \mathbf{N}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ и $x \in (a + (k - 1)(b - a)/m,\ a + k\,(b - a)/m]$ положим $f_m(x) := f(a + k\,(b - a)/m)$ (при $k = m$ считаем, что $f(b) := \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$). Так как для $x \in (a, b - (b - a)/m)$ имеем $f(x + (b - a)/m) \leqslant f_m(x) \leqslant f(x)$, то, за исключением, быть может, счетного множества на (a, b), $\lim\limits_{m \to \infty} f_m(x) = f(x)$. Согласно лемме 1

$$\Big(\int_a^b f_m(x)\,dx\Big)^p = \Big(\frac{b-a}{m} \sum_{k=1}^{m} f\Big(a + \frac{k}{m}(b - a)\Big)\Big)^p \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{b-a}{m}\right)^p \sum_{k=1}^{m} f^p\left(a+\frac{k}{m}(b-a)\right)\left(k^p-(k-1)^p\right)=$$

$$=p\sum_{k=1}^{m} f^p\left(a+\frac{k}{m}(b-a)\right)\int\limits_{a+(k-1)(b-a)/m}^{a+k(b-a)/m}(t-a)^{p-1}\,dt=$$

$$=p\int\limits_a^b (t-a)^{p-1} f_m(t)\,dt \leqslant p\int\limits_a^b (t-a)^{p-1} f(t)\,dt.$$

Отсюда, переходя к пределу при $m\to\infty$, получим (9).

Следствие. *Если $0<p<1$, $-\infty\leqslant a<b<\infty$ и функция f неотрицательна и монотонно возрастает на (a, b), то*

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)^p \leqslant p\int\limits_a^b (b-x)^{p-1} f^p(x)\,dx. \qquad (10)$$

Для доказательства достаточно при $a>-\infty$ выполнить замену переменных $y:=a+b-x$, воспользоваться неравенством (9) и выполнить обратную замену переменных. Если для некоторого $\xi\in(a, b)$ на (a, ξ) $f(x)=0$ и на (ξ, b) $f(x)=1$, то неравенство (10) обращается в равенство.

Теорема. *Пусть $0<p<1$. 1. Если $-1/p<\alpha<1/p'$, то для любых неотрицательных монотонно убывающих на $(0, \infty)$ функций f*

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leqslant \left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-1/p} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0,\infty)}; \qquad (11)$$

если $\alpha<-1/p$, то для любых неотрицательных монотонно возрастающих на $(0, \infty)$ функций f

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leqslant (pB(p, -\alpha p))^{1/p} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0,\infty)}, \qquad (12)$$

где $B(u, v)$ — бэта-функция Эйлера[1].

2. *Если $\alpha>1/p'$, то для любых неотрицательных монотонно убывающих на $(0, \infty)$ функций f*

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leqslant \left(pB\left(p, p\left(\alpha-\frac{1}{p'}\right)\right)\right)^{1/p} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0,\infty)}. \qquad (13)$$

Постоянные в неравенствах (11)—(13) *точные при всех рассматриваемых α и p.*

Замечание 3. Отметим частный случай неравенства (13): при $0<p<1$ для любых неотрицательных монотонно убывающих на $(0, \infty)$ функций f справедливо следующее неравенство с точной постоянной:

$$\left\|\frac{1}{x}\int\limits_x^\infty f(y)\,dy\right\|_{L_p(0,\infty)} \leqslant \left(\frac{\pi p}{\sin \pi p}\right)^{1/p} \|f\|_{L_p(0,\infty)}. \qquad (14)$$

Неравенство (14) следует из (13) при $\alpha=0$, так как согласно свойствам гамма-функции

$$pB(p, -p/p') = pB(p, 1-p) = p\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \pi p/\sin \pi p.$$

Доказательство. 1. Согласно (9) при $\alpha<1/p'$ для неотрицательных монотонно убывающих функций f

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|^p_{L_p(0,\infty)} = \int\limits_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\left(\int\limits_0^x f(y)\,dy\right)^p dx \leqslant$$

---

[1] $B(u, v) := \int\limits_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ $(u, v>0)$, где Γ — гамма-функция Эйлера.

$$\leqslant p\int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\Big(\int_0^x y^{p-1}f^p(y)\,dy\Big)dx = p\int_0^\infty y^{p-1}f^p(y)\Big(\int_y^\infty x^{(\alpha-1)p}\,dx\Big)dy =$$

$$= \left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-1}\int_0^\infty y^{\alpha p}f^p(y)\,dy,$$

откуда и следует (11). Ограничение $\alpha > -1/p$ в условии теоремы связано с тем, что при $\alpha \leqslant -1/p$ для любых рассматриваемых функций f (кроме $f \equiv 0$) обе части неравенства (11) бесконечны и неравенство (11) тривиально.

Если для некоторого $\xi > 0$ на $(0, \xi)$ $f(x) = 1$, а на $[\xi, \infty)$ $f(x) = 0$, то при $-1/p < \alpha < 1/p'$

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|^p_{L_p(0,\infty)} = \frac{\xi^{\alpha p+1}}{(\alpha p+1)(1/p'-\alpha)}, \quad \|x^\alpha f(x)\|^p_{L_p(0,\infty)} = \frac{\xi^{\alpha p+1}}{\alpha p+1}$$

и неравенство (11) обращается в равенство.

Пусть теперь $\alpha < -1/p$, а функция f неотрицательна и монотонно возрастает, тогда согласно (10)

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|^p_{L_p(0,\infty)} = \int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\Big(\int_0^x f(y)\,dy\Big)^p dx \leqslant$$

$$\leqslant p\int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\Big(\int_0^x (x-y)^{p-1}f^p(y)\,dy\Big)dx = p\int_0^\infty f^p(y)\Big(\int_y^\infty x^{(\alpha-1)p}(x-y)^{p-1}\,dx\Big)dy =$$

$$= \left(z := \frac{y}{x}\right) = p\int_0^\infty y^{\alpha p}f^p(y)\,dy\cdot\int_0^1 z^{-\alpha p-1}(1-z)^{p-1}\,dz,$$

откуда и следует (12).

Если для некоторого $\xi > 0$ на $(0, \xi)$ $f(x) = 0$, а на $[\xi, \infty)$ $f(x) = 1$, то при $\alpha < -1/p$

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|^p_{L_p(0,\infty)} = \int_\xi^\infty x^{(\alpha-1)p}(x-\xi)^p\,dx = \left(y := \frac{\xi}{x}\right) =$$

$$= \xi^{\alpha p+1}\int_0^1 y^{-\alpha p-2}(1-y)^p\,dy = \xi^{\alpha p+1}B(p+1, -\alpha p-1),$$

$$\|x^\alpha f(x)\|^p_{L_p(0,\infty)} = \xi^{\alpha p+1}/|\alpha p+1|$$

и неравенство (12) обращается в равенство, так как согласно свойствам бэта функций $B(p+1, -\alpha p-1) = \dfrac{p}{|\alpha p+1|}B(p, -\alpha p)$.

Отметим еще, что при $\alpha \geqslant -1/p$ неравенство (12) тривиально: обе его части бесконечны (при $f \not\equiv 0$).

2. Согласно (9) при $\alpha > 1/p'$ для неотрицательных монотонно убывающих функций f

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|^p_{L_p(0,\infty)} = \int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\Big(\int_x^\infty f(y)\,dy\Big)^p dx \leqslant p\int_0^\infty x^{(\alpha-1)p}\int_x^\infty (y-x)^{p-1}f^p(y)\,dy =$$

$$= p\int_0^\infty f^p(y)\Big(\int_0^y x^{(\alpha-1)p}(y-x)^{p-1}\,dx\Big)dy = \left(z := \frac{x}{y}\right) =$$

$$= p\int_0^\infty y^{\alpha p}f^p(y)\,dy\cdot\int_0^1 z^{(\alpha-1)p}(1-z)^{p-1}\,dz,$$

откуда и следует (13).

Если снова для некоторого $\xi > 0$ на $(0, \xi)$ $f(x) = 1$, а на $[\xi, \infty)$ $f(x) = 0$, то при $\alpha > 1/p'$ неравенство (13) обращается в равенство, что устанавливается так же, как и выше.

Отметим в заключение, что неравенства (11) и (13) могут оказаться полезными при применении техники, связанной с использованием перестановок функций в убывающем порядке, например при доказательстве интерполяционной теоремы Марцинкевича по схеме, изложенной в [1, с. 20; 2, с. 84—85].

Поступило в апреле 1989 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
2. *Буренков В. И.* Функциональные пространства. Основные интегральные неравенства, связанные с пространствами L_p. М.: Изд-во УДН, 1989.