Математические заметки

том 59 выпуск 1 январь 1996

О ТЕОРЕМЕ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

В. И. Буренков, Н. Б. Викторова

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\overline{p} = (p_1, \dots, p_n)$, где $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = \overline{1, n}$. Говорят, что функция $f \in L_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$, если f измерима на $\mathbb{R}^n$ и конечна следующая смешанная норма

$$\|f\|_{p_1,\dots,p_n} \equiv \|f\|_{L_{\overline{p}(\mathbb{R}^n)}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\dots\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,\dots,x_n)|^{p_1} \times dx_1\right)^{p_2/p_1} dx_2\right)^{p_3/p_2} \dots\right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n\right)^{1/p_n}.$$

Если некоторое $p_i = \infty$, то в этом выражении вместо интеграла по x_i понимается существенная верхняя грань по этой переменной.

Основные свойства пространства $L_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$ изложены, например, в [1], [2].

Определение 2. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $\overline{p} = (p_1, \dots, p_n)$, где $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = \overline{1, n}$. Говорят, что функция $f \in W^l_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = l$ существуют обобщенные производные $D^\alpha f$ и конечна норма

$$\|f\|_{W^l_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Определение 3. Говорят, что нормированное пространство Z_1 *вложено* в нормированное пространство Z_2 ($Z_1 \hookrightarrow Z_2$), если

1) $Z_1 \subset Z_2$;
2) существует такое $C > 0$, что для любых $f \in Z_1$

$$\|f\|_{Z_2} \leqslant C\|f\|_{Z_1}$$

(т.е. оператор вложения $I\colon Z_1 \to Z_2$ непрерывен).

Свойства пространств Соболева со смешанной нормой $W^l_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$ и теоремы вложения для них изложены в [2], [3].

Мы рассмотрим более подробно вопрос о том, при каких условиях на параметры справедлива теорема вложения

$$W^l_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{\overline{q}}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Простые примеры показывают, что для справедливости этого вложения необходимо, чтобы

$$1 \leqslant p_i \leqslant q_i \leqslant \infty, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

и чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} \right) \leqslant l. \tag{3}$$

В непредельном случае, когда $\sum_{i=1}^{n}(1/p_i - 1/q_i) < l$, в [3] доказано, что при выполнении условия (2) вложение (1) имеет место. В предельном случае, когда

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} \right) = l, \tag{4}$$

в [3] справедливость вложения (1) установлена при некоторых дополнительных предположениях, а именно доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $l \in \mathbb{N}$,

$$1 \leqslant p_i \leqslant q_i \leqslant \infty, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{5}$$

$$1 < p_n < q_n < \infty \quad \text{или} \quad 1 = p_n < q_n = \infty, \tag{6}$$

и выполнено соотношение (4), *тогда имеет место вложение* (1).

В [3] теорема вложения (1) доказывается на основе некоторого интегрального представления функции f через ее производные. Непредельный случай не вызывает особых затруднений: достаточно воспользоваться n раз обобщенным неравенством Минковского и неравенством Юнга для сверток. В предельном случае дело обстоит иначе. На первых $(n-1)$ шагах, как и в непредельном случае, применяются обобщенное неравенство Минковского и неравенство Юнга, а на последнем n-м шаге применяется неравенство Харди–Литтлвуда, что приводит к ограничению $1 < p_n < q_n < \infty$ (случай $p_n = 1$ и $q_n = \infty$ не требует дополнительных оценок).

Отметим, что условие (6) не является необходимым для справедливости вложения (1), как это следует, например, из более раннего результата, полученного в [4], который на языке пространств со смешанной нормой может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2. *Пусть* $l \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $p_1 = \cdots = p_n = p$, $q_1 = \cdots = q_m = q$, $q_{m+1} = \cdots = q_n = \infty$, *причем* $1 \leqslant p < q < \infty$, *и выполняется условие* (4), *принимающее вид*

$$\frac{n}{p} - \frac{m}{q} = l. \tag{4'}$$

Тогда имеет место вложение (1), *принимающее вид*

$$W^l_{\underbrace{(p,\dots,p)}_{n}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{(\underbrace{q,\dots,q}_{m},\infty,\dots,\infty)}(\mathbb{R}^n). \tag{1'}$$

Доказательство в [4] опирается на некоторые специальные следствия из неравенства Гёльдера и теорему вложения

$$W^1_{(p,\dots,p)}(\mathbb{R}^s) \hookrightarrow L_{(\infty,\dots,\infty)}(\mathbb{R}^s)$$

со специально выбранным s. В случаях, когда $m = n$ или $m = n-1$, достаточно воспользоваться одномерным вложением $W^1_1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R})$, которое сводится к элементарному неравенству

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f'\|_1 \tag{7}$$

(постоянная $1/2$ точная). Напомним его доказательство, которое достаточно провести для функций $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. При фиксированном x для достаточно больших y $f(x) = -\int_x^y f'(\zeta)\,d\zeta$, откуда $|f(x)| \leqslant \int_x^\infty |f'|\,d\zeta$. Аналогично, $|f(x)| \leqslant \int_{-\infty}^x |f'|\,d\zeta$, откуда следует, что

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |f'|\,d\zeta.$$

Отметим еще, что равенство в (7) достигается тогда и только тогда, когда функция f эквивалентна такой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции, которая стремится к нулю на бесконечности и для некоторого x_0 монотонно возрастает (или убывает) на $(-\infty, x_0)$ и монотонно убывает (соответственно возрастает) на (x_0, ∞).

В связи с указанными соображениями возникает вопрос о том, насколько существенным является условие (6) и нельзя ли заменить его условием

$$1 \leqslant p_n \leqslant q_n \leqslant \infty.$$

Целью настоящей работы является доказательство того, что во всяком случае при $n = 2$ это сделать можно.

Отметим прежде всего, что при $n = 2$ из условий (2) и (4) следует, что $l = 1$ или $l = 2$, причем при $l = 2$, кроме того, $p_1 = p_2 = 1$ и $q_1 = q_2 = \infty$.

В последнем случае (являющемся случаем несмешанной нормы)

$$W^2_{(1,1)}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L_{(\infty,\infty)}(\mathbb{R}^2),$$

причем

$$\|f\|_{\infty,\infty} \leqslant \frac{1}{4}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right\|_{1,1} \tag{8}$$

(это неравенство следует из дважды примененного неравенства (7), постоянная $1/4$ – точная).

Таким образом, достаточно рассмотреть случай $l = 1$.

Теорема 3. *Пусть*

$$1 \leqslant p_1 \leqslant q_1 \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant p_2 \leqslant q_2 \leqslant \infty \tag{9}$$

и

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = 1, \tag{10}$$

причем при $q_1 = q_2 = \infty$ дополнительно предполагается, что $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ или $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$. Тогда

$$W^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L_{(q_1,q_2)}(\mathbb{R}^2), \tag{11}$$

причем для любых $f \in W^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2)$

$$\|f\|_{q_1,q_2} \leqslant c_1 \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{p_1,p_2}^{1/p_1 - 1/q_1} \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{p_1,p_2}^{1/p_2 - 1/q_2}, \tag{12}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1\right)^{-(1/p_1 - 1/q_1)} p_2^{1-2(1/p_1 - 1/q_1)}, \tag{13}$$

если $q_1 < \infty$ или $q_2 < \infty$, и

$$c_1 = \frac{1}{2}, \tag{14}$$

если $q_1 = q_2 = \infty$ (при этом, согласно (9) и (10) $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$ или $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$).

Замечание. Отметим, что в работе О.В. Бесова [5] было получено, в частности, вложение, совпадающее с (11) при $p_1 = p_2$.

В доказательстве теоремы 3 и ряда вспомогательных утверждений, на которых оно будет основываться, будут использоваться только неравенство Гёльдера, неравенство (7) и очевидные соотношения

$$\big\| |f|^{\zeta} \big\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}^{\zeta}, \tag{15}$$

и при $1 \leqslant p < \infty$

$$\big\| |f|^{\zeta} \big\|_{p} = \|f\|_{\zeta p}^{\zeta} \tag{16}$$

со специально выбираемым параметром $\zeta > 0$.

Будем говорить, что $f \in W^1_{p,r}(\mathbb{R})$, где $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, если $f \in L_p(\mathbb{R})$ и существует обобщенная производная $f' \in L_r(\mathbb{R})$.

Положим

$$\|f\|_{W^1_{p,r}(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} + \|f'\|_{L_r(\mathbb{R})}.$$

Пусть $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$. Известно, что для того чтобы

$$W^1_{p,r}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}),$$

необходимо и достаточно, чтобы $p \leqslant q$ (в наиболее общей форме подобное утверждение приведено в [6]). Для полноты изложения мы приведем элементарное доказательство этого результата, основывающееся на неравенстве (7) (которое соответствует простейшему частному случаю указанного вложения: $W^1_{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R})$), с постоянной в сопутствующем неравенстве, которая при $q = \infty$ является точной.

Лемма 1. *Пусть $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, причем $p < q$. Тогда для любых $f \in W^1_{p,r}(\mathbb{R})$*

$$\|f\|_q \leqslant c_2 \|f\|_p^{1-\alpha} \cdot \|f'\|_r, \tag{17}$$

где

$$\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r'}\right)^{-1} \tag{18}$$

(r' – показатель, сопряженный к r), а

$$c_2 = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{p}{r'}\right)\right]^{\alpha}. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть сначала $q = \infty$. Тогда для $\zeta > 0$ согласно (15), (7), неравенству Гёльдера и (16)

$$\|f\|_\infty = \big\||f|^\zeta\big\|_\infty^{1/\zeta} \leqslant \left(\frac{1}{2}\big\|(|f|^\zeta)'\big\|_1\right)^{1/\zeta}$$
$$= \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{1/\zeta} \big\||f|^{\zeta-1} f'\big\|_1^{1/\zeta} \leqslant \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{1/\zeta} \left(\|f\|_{(\zeta-1)r'}\|f'\|_r\right)^{1/\zeta}.$$

Выбирая здесь ζ так, чтобы $(\zeta-1)r' = p$, т.е. $\zeta = 1 + p/r'$, получим, что

$$\|f\|_\infty \leqslant \left(\frac{p+r'}{2r'}\right)^{r'/(p+r')} \|f\|_p^{p/(p+r')}\|f'\|_r^{r'/(p+r')}, \tag{17'}$$

что совпадает с (17) при $q = \infty$.

Если $q < \infty$, то достаточно учесть, что при $q > p$

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^{p/q}\|f\|_\infty^{1-p/q}$$

и воспользоваться неравенством (17′).

Замечание 2. При любых $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$ постоянная в неравенстве (17′) является точной. Равенство достигается, например, при $1 \leqslant r < p$ для $f(x) = (1+|x|)^{r/(r-p)}$, при $r = p$ для $f(x) = e^{-|x|}$, при $p < r < \infty$ для $f(x) = (1-|x|)_+^{r/(r-p)}$ (здесь $a_+ = a$ при $a \geqslant 0$, $a_+ = 0$ при $a < 0$), при $r = \infty$ для $f(x) = (1-|x|)_+$.

Замечание 3. Положим для $u, v > 0$

$$H(u,v) = \frac{u^u v^v}{(u+v)^{u+v}} \frac{\Gamma(1+u+v)}{\Gamma(1+u)\Gamma(1+v)},$$

где Γ – гамма-функция, и

$$H(0,v) = H(u,0) = 1$$

(отметим, что $H(u,v) \leqslant 1$). В работе [6] неравенство (17) доказано с постоянной

$$c_2 = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{p}{r'}\right) H\left(\frac{1+p/r'}{q-p}, \frac{r-1}{r}\right)\right]^\alpha,$$

которая является точной при $p = r$.

Лемма 2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, $f \in W^1_{q,p}(\mathbb{R})$ *и* $g \in L_p(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\big\||f|^{q-1}g\big\|_1 \leqslant c_3\|f\|_q^{q-1-\beta}\|f'\|_p^{\beta}\|g\|_p, \tag{20}$$

где

$$\beta = \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)^{-1}, \tag{21}$$

а

$$c_3 = \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{q}{p'}\right)\right]^{\beta}. \tag{22}$$

Доказательство. Так как

$$\sup_{\substack{g\in L_p(\mathbb{R})\\ g\not\sim 0}} \frac{\|\,|f|^{q-1}g\|_1}{\|g\|_p} = \big\||f|^{q-1}\big\|_{p'} = \|f\|^{q-1}_{(q-1)p'},$$

то неравенство (20) с произвольными $f \in W^1_{q,p}(\mathbb{R})$ и $g \in L_p(\mathbb{R})$ эквивалентно неравенству

$$\|f\|^{q-1}_{(q-1)p'} \leqslant c_3\|f\|_q^{q-1-\beta}\|f'\|_p^{\beta} \tag{23}$$

с произвольными $f \in W^1_{q,p}(\mathbb{R})$. Таким образом, достаточно воспользоваться неравенством (17) с $(q-1)p'$ вместо q, q вместо p и p вместо r.

Лемма 3. *Пусть* $1 \leqslant p_1 \leqslant q_1 < \infty$, $1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, $f \in W^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда для почти всех* $x_2 \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\|f(\cdot,x_2)\|_{q_1}^{1+\gamma}\right)\right| \leqslant c_4\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot,x_2)\right\|_{p_1}^{\gamma}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}(\cdot,x_2)\right\|_{p_1}, \tag{24}$$

где

$$\gamma = \left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{q_1}\right)^{-1}, \tag{25}$$

а

$$c_4 = \left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{q_1}\right)^{-1}\left[\frac{q_1}{2}\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{q_1}\right)\right]^{\gamma}. \tag{26}$$

Доказательство. Согласно лемме об обобщенном дифференцировании под знаком интеграла (см., например, [6])

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,x_2)|^{q_1}dx_1 = q_1\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,x_2)|^{q_1-1}\operatorname{sign} f(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\,dx_1$$

и согласно лемме 2

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,x_2)|^{q_1}\,dx_1\right| \leqslant q_1\cdot\widetilde{c}_3\|f(\cdot,x_2)\|_{q_1}^{q_1-1-\gamma}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot,x_2)\right\|_{p_1}^{\gamma}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}(\cdot,x_2)\right\|_{p_1},$$

где $\widetilde{c}_3$ вычисляется по формуле (22) с заменой p на p_1 и q на q_1. Остается учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\|f(\cdot,x_2)\|_{q_1}^{1+\gamma}\Big) = \frac{1}{q_1}\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{q_1}\right)^{-1}\|f(\cdot,x_2)\|_{q_1}^{1+\gamma-q_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,x_2)|^{q_1}\,dx_1.$$

Лемма 4. *Пусть* $1\leqslant p_1\leqslant q_1<\infty$, $1\leqslant p_2\leqslant\infty$ *и*

$$\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p_2}=1 \tag{27}$$

или $q_1=\infty$, *и при этом* $p_1=1$, $p_2=\infty$ *или* $p_1=\infty$, $p_2=1$. *Тогда для любых* $f\in W^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2)$ *справедливо неравенство* (12), *принимающее вид*

$$\|f\|_{q_1,\infty}\leqslant c_5\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{p_1,p_2}^{1/p_2'}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{p_1,p_2}^{1/p_2}, \tag{28}$$

где

$$c_5=\frac{1}{2}q_1^{1/p_2'}p_2^{2/p_2-1}$$

при $q_1<\infty$ *и* $c_5=1/2$, *если* $q_1=\infty$.

Доказательство. Пусть сначала $q_1 < \infty$. Применяя равенство (15), неравенство (7), (24), неравенство Гёльдера и учитывая, что в силу (27) $\gamma = p_2 - 1$, получим, что

$$\begin{aligned}
\|f\|_{q_1,\infty}^{p_2} &= \big\| \|f\|_{q_1}^{p_2} \big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \|f\|_{q_1}^{p_2} \right\|_1 \\
&\leqslant \frac{c_4}{2} \left\| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1}^{p_2-1} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1} \right\|_1 \\
&\leqslant \frac{c_4}{2} \left\| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1}^{p_2-1} \right\|_{p_2'} \cdot \left\| \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1} \right\|_{p_2} \\
&= \frac{c_4}{2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1,p_2}^{p_2-1} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1,p_2},
\end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (28).

Если $p_2 = \infty$, то согласно (27) $q_1 = \infty$, $p_1 = 1$.

Пусть теперь $q_1 = \infty$. Тогда или $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ или $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$. В первом случае неравенство (28) принимает вид

$$\|f\|_{\infty,\infty} \leqslant \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{1,\infty}$$

и непосредственно следует из неравенства (7). Во втором случае оно принимает следующий вид

$$\|f\|_{\infty,\infty} \leqslant \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{\infty,1}$$

и также следует из (7).

Лемма 5. *Пусть* $1 \leqslant p_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant p_2 \leqslant q_1 < \infty$ *и*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = 1 \tag{29}$$

или $q_2 = \infty$ *и при этом* $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ *или* $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$. *Тогда для любых* $f \in W^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2)$ *справедливо неравенство* (14), *принимающее вид*

$$\|f\|_{\infty,q_2} \leqslant c_6 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1,p_2}^{1/p_1} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1,p_2}^{1/p_1'}, \tag{30}$$

где

$$c_6 = \frac{1}{2} q_2^{1/p_1} p_2^{1-2/p_1}$$

при $q_2 < \infty$ *и* $c_6 = 1/2$ *при* $q_2 = \infty$.

Доказательство. Пусть сначала $q_2 < \infty$, $p_1 > 1$. Вводя параметр $\zeta \geqslant 1$ и пользуясь соотношениями (7), (15), (16) и неравенством Гёльдера, получим, что

$$\begin{aligned}\|f\|_{\infty,q_2} &= \big\| \, \| |f|^\zeta \|_\infty^{1/\zeta} \big\|_{q_2} = \big\| \, \| |f|^\zeta \|_\infty \big\|_{q_2/\zeta}^{1/\zeta} \\ &\leqslant \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{1/\zeta} \left\| \, \left\| |f|^{\zeta-1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_1 \right\|_{q_2/\zeta}^{1/\zeta} \\ &\leqslant \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{1/\zeta} \left\| \|f\|_{(\zeta-1)p_1'}^{\zeta-1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1} \right\|_{q_2/\zeta}^{1/\zeta} \\ &\leqslant \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{1/\zeta} \|f\|_{(\zeta-1)p_1',\infty}^{(\zeta-1)/\zeta} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1,q_2/\zeta}^{1/\zeta}.\end{aligned}$$

Положим $(\zeta - 1)p_1' = q_2$, тогда

$$\zeta = 1 + \frac{q_2}{p_1'} \geqslant 1, \quad \frac{q_2}{\zeta} = p_2.$$

Учитывая еще, что число q_1, определяемое равенством (27), совпадает с q_2, определяемым равенством (29), получим, что

$$\|f\|_{\infty,q_2} \leqslant \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{1/\zeta} \|f\|_{q_1,\infty}^{p_2/p_1'} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1,p_2}^{p_2/q_1}.$$

Применяя лемму 4, получим искомое неравенство (29). Если $p_1 = 1$, то согласно (29) $p_2 = q_2$, и неравенство (30) непосредственно следует из неравенства (7).

Случай $q_2 = \infty$ совпадает со случаем $q_1 = \infty$ из леммы 4.

Доказательство теоремы 3. Случай $q_1 = q_2 = \infty$ (при котором или $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ или $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$) рассмотрен в лемме 4. Пусть $q_1 < \infty$ или $q_2 < \infty$, тогда $1/p_1 + 1/p_2 > 1$. Положим $r = (1/p_1 + 1/p_2 - 1)^{-1}$. Согласно (10) $1/r = 1/q_1 + 1/q_2$. Выберем $\theta = 1/q_2(1/q_1 + 1/q_2)^{-1}$. Так как

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty}, \quad \frac{1}{q_2} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{r},$$

то

$$\|f\|_{q_1,q_2} \leqslant \|f\|_{r,\infty}^{1-\theta} \|f\|_{\infty,r}^{\theta}.$$

Применяя леммы 4 и 5, получим, что

$$\begin{aligned}\|f\|_{q_1,q_2} &\leqslant c_5^{1-\theta} c_6^{\theta} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1,p_2}^{(1-\theta)/p_2' + \theta/p_1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1,p_2}^{(1-\theta)/p_2 + \theta/p_1'} \\ &= c_5^{1-\theta} c_6^{\theta} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1,p_2}^{1/p_1 - 1/q_1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1,p_2}^{1/p_2 - 1/q_2},\end{aligned}$$

откуда и следует (12) с $c_1 = c_5^{1-\theta} c_6^{\theta}$.

Замечание 4. Отметим, что пользуясь результатом работы [6], приведенным в замечании 3, и следуя изложенному доказательству, можно несколько уточнить значение постоянной c_1 в теореме 3.

Замечание 5. Дополнительные предположения в теореме 3, относящиеся к случаю $q_1 = q_2 = \infty$ (заключающиеся в том, что $p_2 = 1$ или $p_2 = \infty$) являются необходимыми. Это можно установить, рассматривая следующий контрпример. Пусть $q_1 = q_2 = \infty$ и $1 < p_2 < \infty$. Положим

$$f(x) = \big|\ln|x|\big|^{(1-1/p_2)/2}\eta(x),$$

где $\eta \in c_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1/4$, $\eta(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1/2$. Тогда $f \notin L_{(\infty,\infty)}(\mathbb{R}^2)$ и можно проверить, что $f \in W^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2)$.

Замечание 6. Объединяя приведенные в параграфе результаты, можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть* $l \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p_1, p_2, q_1, q_2 \leqslant \infty$. *Для того, чтобы* $W_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2) \subset L_{(q_1,q_2)}(\mathbb{R}^2)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $p_1 \leqslant q_1$, $p_2 \leqslant q_2$,
2) $1/p_1 - 1/q_1 + 1/p_2 - 1/q_2 \leqslant l$,
3) *если* $l = 1$, *в 2) имеет место знак равенства и* $q_1 = q_2 = \infty$, *то* $p_2 = 1$ (*при этом* $p_1 = \infty$) *или* $p_2 = \infty$ (*при этом* $p_1 = 1$).

В частности, для того, чтобы $W^l_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2) \subset L_{(\infty,\infty)}(\mathbb{R}^2)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $1/p_1 + 1/p_2 < l$ *или* $l = 2$ *и* $p_1 = p_2 = 1$, *или* $l = 1$ *и* $p_1 = 1, p_2 = \infty$ *и* $l = 1$ *и* $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$.

Российский университет
Дружбы народов

Поступило
03.11.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Benedec A., Panzone R. The space L^p with mixed norm // Duke Math. J. 1961. V. 28. №3. P. 301–324.
[2] Гудиев А. Х. Теорема вложения для следа в абстрактных функциях // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. №4. С. 764–767.
[3] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
[4] Gagliardo E. Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili // Ricerche di Mat. 1958. V. 7. №1. P. 102–137.
[5] Бесов О. В. Вложение анизотропного пространства Соболева для области с условием гибкого рога // Тр. МИАН. 1988. Т. 181. С. 3–14.
[6] Габушин В. Н. Неравенства для норм функций и ее производных в метриках L_p // Матем. заметки. 1967. Т. 1. №3. С. 291–298.