ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1999, т. 227, с. 92–108

УДК 517

Неравенства типа Харди для модулей непрерывности[1]

©1999 г. В. И. Буренков, М. Л. Гольдман

Поступило в апреле 1999 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению разностного аналога известного двухвесового неравенства типа Харди для производных (см., например, книгу Мазьи [1, гл. 1] для первых производных; работу Степанова [2] для высших производных). Аналог получен заменой в правой части неравенства весовой нормы k-й производной функции на весовую норму ее k-го модуля непрерывности в L_p. Неравенства такого типа (для разностей первого порядка) были впервые получены Яковлевым [3] в одномерном случае и для степенных весов (в связи с некоторыми краевыми задачами для дифференциальных операторов). Этот результат был затем обобщен в работах Куфнера, Перссона, Трибеля, Хайнига и других (см. об этих обобщениях в [4, 5]). Уточнения условий на вес в случае связанных весов в правой и левой частях неравенства были получены в работах Буренкова и Эванса [6, 7], Буренкова, Гольдмана и Эванса [8]. Далее, Буренковым и Гольдманом [9] в одномерном случае для разностей первого порядка (а также для наилучших приближений с помощью целых функций) было найдено необходимое и достаточное условие на весовую функцию для справедливости соответствующего неравенства. В работах [6, 7, 10] получены приложения этих результатов к задаче об ограниченности оператора продолжения нулем функций из пространства обобщенной гладкости для областей со сколь угодно сильным вырождением.

Цель данной работы состоит в дальнейшем развитии результатов по разностным аналогам неравенства Харди. Рассмотрена двухвесовая задача (т.е. снято априорное условие взаимосвязи весов в правой и левой частях неравенства), причем в многомерном случае и для модулей непрерывности высших порядков. Некоторые из приведенных здесь результатов были кратко изложены в нашей работе [11].

В разд. 2 установлены новые интегральные представления, дающие (в изотропном случае) определенное развитие известных интегральных представлений из работ Брудного [12, 13], из монографий Бесова, Ильина и Никольского [14], Трибеля [15]. Отличительной особенностью новых представлений является наличие в них дополнительных параметров, позволяющих более гибко использовать их в дальнейших оценках. В качестве следствий получены новые оценки функций (и их перестановок) через различные характеристики свойств гладкости этих функций: наилучшие локальные полиномиальные приближения, локальные осцилляции, локальные усредненные колебания, модули непрерывности. Отметим, что эти оценки дают широкий спектр возможностей для дальнейших применений с использованием различных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00843) и INTAS (грант 94-881).

описаний дифференциальных свойств (например, в теории пространств, определяемых с помощью локальных полиномиальных приближений или условий на средние осцилляции, см. [12, 13, 15]). В данной работе мы ограничиваемся применением оценки, связанной с модулями непрерывности.

В разд. 3 сформулированы полученные в этом направлении результаты (теоремы 3.1 и 3.2). В них установлены точные условия на весовые функции (без априорных предположений об их свойствах), при выполнении которых имеют место неравенства, оценивающие весовую L_q-норму функции в некотором шаре через весовую L_p-норму ее k-го модуля непрерывности в L_p по этому шару. В разд. 4–6 приведены обоснования полученных результатов (ввиду ограниченности объема статьи проведено доказательство одной из этих теорем).

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ

В работе использованы обозначения: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$,

$$\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \qquad \Delta_h^k f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1}) f(x) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m f(x+mh)$$

— разности k-го порядка с шагом $h \in \mathbb{R}^n$, $k = 2, 3, \dots$, C_k^m — биномиальные коэффициенты,

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n\colon\ |y-x| < r\}, \qquad B_r = B(0,r), \qquad \overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n\colon\ |y-x| \le r\},$$

$C^\infty(\Omega)$ ($C_0^\infty(\Omega)$) — пространство бесконечно дифференцируемых (финитных) функций в области Ω; $t\Omega = \{tx\colon x \in \Omega\}$, $t > 0$. Для мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ полагаем, как обычно, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, $C_\alpha^\beta = \prod_{i=1}^n C_{\alpha_i}^{\beta_i}$.

Теорема 2.1. *Пусть $K \in \mathbb{N}$, $r > 0$. Существуют функции $\nu_r, \lambda_r \in C^\infty([B_r \times (0,r] \times \mathbb{R}^n])$, удовлетворяющие при $x \in B_r$, $t \in (0,r]$ следующим условиям:*

$$\operatorname{supp} \nu_r(x,t,\cdot) \subset N_r(x,t) \equiv \frac{t}{2kr}\overline{B}(-x,r) = \overline{B}\left(-\frac{xt}{2kr}, \frac{t}{2k}\right), \tag{2.1}$$

$$|\nu_r(x,t,h)| \le c_1(n,k) t^{-n}, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{supp} \lambda_r(x,t,\cdot) \subset \Lambda_r(x,t) \equiv x + \frac{t}{2r}\overline{B}(-x,r) = \overline{B}\left(x\left(1 - \frac{t}{2r}\right), \frac{t}{2}\right) \subset B_r, \tag{2.3}$$

$$|\lambda_r(x,t,y)| \le c_2 t^{-n}, \qquad \left| t\frac{\partial \lambda_r}{\partial t}(x,t,y)\right| \le c_2 t^{-n}, \qquad c_2 = c_2(n,k), \tag{2.4}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} y^\alpha \lambda_r(x,t,y)\, dy = x^\alpha, \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n, \quad 0 \le |\alpha| \le k-1, \tag{2.5}$$

и такие, что для любой функции $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(B_r)$, любых $\delta \in (0,r]$, $x \in B_r$ справедливо интегральное представление

$$f(x) = \int\limits_{B_r} \lambda_r(x,r,y) f(y)\, dy - \int\limits_\delta^r \left(\int\limits_{B_r} \frac{\partial}{\partial t}\lambda_r(x,t,y) f(y)\, dy \right) dt + \int\limits_{N_r(x,\delta)} \nu_r(x,\delta,h) \Delta_h^k f(x)\, dh. \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. *При $t \in (0,r]$, $x \in B_r$ справедливы включения*

$$h \in N_r(x,t) \quad \Rightarrow \quad [x, x+kh] \subset \overline{B}(x/2, r/2) \subset B_r, \tag{2.7}$$

$$N_r(x,t) \subset \overline{B}_{t/k}, \tag{2.8}$$

$$\Lambda_r(x,t) \subset \overline{B}(x(1-t/2r), t/2) \subset B_r. \tag{2.9}$$

Из них следует, что все слагаемые в (2.6) определены корректно. Действительно, в первых двух слагаемых интегрирование по y фактически происходит по компакту $\Lambda_r(x,t) \subset B_r$, так что все интегралы сходятся абсолютно для любой функции $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(B_r)$ в силу оценок (2.4). Включение (2.7) показывает, что и в третьем слагаемом интеграл сходится абсолютно в силу оценки (2.2) и неравенства

$$\int\limits_{N_r(x,t)} |\Delta_h^k f(x)|\,dh \le 2^k \int\limits_{\overline{B}(x/2,r/2)} |f(y)|\,dy, \qquad t \in [\delta, r].$$

Замечание 2.2. *Обозначим через* Π_{k-1} *множество всех многочленов степени не выше* $k-1$. *Тогда представление* (2.6) *можно записать также в виде*

$$f(x) - P(x) = \int\limits_{\Lambda_r(x,t)} \lambda_r(x,r,y)[f(y)-P(y)]\,dy -$$
$$- \int\limits_{\delta}^{r} \left(\int\limits_{\Lambda_r(x,t)} \frac{\partial}{\partial t}\lambda_r(x,t,y)[f(y)-Q(y)]\,dy \right) dt + \int\limits_{N_r(x,\delta)} \nu_r(x,\delta,h)\Delta_h^k f(x)\,dh \tag{2.10}$$

для любых $P, Q \in \Pi_{k-1}$.

Для доказательства нам потребуется соотношение (см. [16, с. 219–220])

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_h f(x)\xi(h)\,dh = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_h^k f(x)\eta(h)\,dh, \tag{2.11}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель,

$$\xi(h) = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m m^{-n}\,\eta\left(\frac{h}{m}\right). \tag{2.12}$$

Доказательство теоремы 2.1 и замечания 2.1. 1. Введем функцию $\nu \in C_0^\infty(B_{1/2k})$ такую, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nu\,dx = (-1)^{k+1}, \tag{2.13}$$

и положим

$$\nu_r(x,t,h) = -t^{-n}\nu\left(\frac{h}{t} + \frac{x}{2kr}\right). \tag{2.14}$$

Ясно, что $\nu_r \in C^\infty[B_r \times (0,r] \times \mathbb{R}^n]$, причем для $h \in \operatorname{supp}\nu_r(x,t,\cdot)$ имеем

$$\left|\frac{h}{t} + \frac{x}{2kr}\right| \le \frac{1}{2k} \quad \Rightarrow \quad \left|h + \frac{xt}{2kr}\right| \le \frac{t}{2k} \quad \Rightarrow \quad h \in \overline{B}\left(-\frac{xt}{2kr}, \frac{t}{2k}\right),$$

что дает включение (2.1). Далее, если $t \in (0,r]$, $x \in B_r$, $h \in N_r(x,t)$, то при $\xi \in [0,k]$

$$\left|(x+\xi h) - \frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x}{2}\left(1 - \frac{\xi t}{kr}\right) + \xi\left(h + \frac{xt}{2kr}\right)\right| \le \frac{|x|}{2}\left(1 - \frac{\xi t}{kr}\right) + \frac{\xi t}{2k} \le \frac{r}{2}\left(1 - \frac{\xi t}{kr}\right) + \frac{\xi t}{2k} = \frac{r}{2},$$

т.е. имеет место первое включение (2.7). Второе следует из первого, поскольку $x \in B_r$. Аналогично доказывается включение (2.8). Очевидна также оценка (2.2) с

$$c_1 = \sup\{|\nu(x)|\colon\ x \in B_{1/2k}\} = c_1(n,k). \tag{2.15}$$

2. Положим теперь

$$\mu_r(x,t,h)=t^{-n}\sum_{m=1}^{k}(-1)^{k-m}C_k^m m^{-n}\,\nu\Big(\frac{h}{mt}+\frac{x}{2kr}\Big), \tag{2.16}$$

$$\lambda_r(x,t,y)=\mu_r(x,t,y-x). \tag{2.17}$$

Тогда

$$\operatorname{supp}\mu_r(x,t,\cdot)\subset\bigcup_{m=1}^{k}\overline{B}\left(-\frac{xmt}{2kr},\frac{mt}{2k}\right)=\overline{B}\left(-\frac{xt}{2r},\frac{t}{2}\right). \tag{2.18}$$

Отметим, что при $t\in(0,r]$, $x\in B_r$ из (2.18) следует, что

$$\operatorname{supp}\lambda_r(x,t,\cdot)\subset\overline{B}\left(x\left(1-\frac{t}{2r}\right),\frac{t}{2}\right)\subset B_r. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следуют включения (2.3) и (2.9).

3. Далее, из (2.16) и (2.15)

$$|\mu_r(x,t,h)|\le c_1\sum_{m=1}^{k}C_k^m m^{-n}t^{-n}=c_2't^{-n}, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_r(x,t,h)=\sum_{m=1}^{k}(-1)^{k-m}C_k^m m^{-n}\left[n\nu\Big(\frac{h}{mt}+\frac{x}{2kr}\Big)-\frac{1}{mt}\left(\nabla\nu\Big(\frac{h}{mt}+\frac{x}{2kr}\Big),h\right)\right]t^{-n-1}. \tag{2.21}$$

При $h\in N_r(x,t)$ имеем $|h|\le t$ (см. (2.8)), так что

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\mu_r(x,t,h)\right|\le c_2''t^{-n-1},\qquad c_2''=\sum_{m=1}^{k}C_k^m m^{-n}\left[nc_1+\frac{1}{m}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}|\nabla\nu(y)|\right]. \tag{2.22}$$

Из (2.17), (2.20) и (2.22) следует (2.4) с постоянной $c_2=c_2(n,k)=\max\{c_2',c_2''\}$.

4. Для получения равенства (2.5) вычислим сначала моменты функции μ_r. Из (2.16) следует, что

$$J_\alpha=\int_{\mathbb{R}^n}h^\alpha\mu_r(x,t,h)\,dh=\left(\sum_{m=1}^{k}(-1)^{k-m}C_k^m m^{|\alpha|}\right)t^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}y^\alpha\nu\Big(y+\frac{x}{2kr}\Big)\,dy. \tag{2.23}$$

Используя (2.13) и известные свойства биномиальных коэффициентов, имеем

$$J_0=1,\qquad J_\alpha=0,\quad 1\le|\alpha|\le k-1,\quad k>1. \tag{2.24}$$

Из (2.24) следует, что при $|\alpha|\le k-1$

$$\int_{\mathbb{R}^n}y^\alpha\lambda_r(x,t,y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}y^\alpha\mu_r(x,t,y-x)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}(h+x)^\alpha\mu_r(x,t,h)\,dh=$$
$$=\sum_{0\le\beta\le\alpha}C_\alpha^\beta x^\beta\int_{\mathbb{R}^n}h^{\alpha-\beta}\mu_r(x,t,h)\,dh=x^\alpha\int_{\mathbb{R}^n}\mu_r(x,t,h)\,dh=x^\alpha, \tag{2.25}$$

что дает (2.5).

5. Осталось получить формулу (2.6). Для функции $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(B_r)$, $t \in (0,r]$, $x \in B_r$ рассмотрим

$$A_t f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(h+x)\mu_r(x,t,h)\,dh = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\lambda_r(x,t,y)\,dy. \tag{2.26}$$

Имеем $f(x) = A_r f(x) - [A_r f(x) - A_\delta f(x)] + [f(x) - A_\delta f(x)]$ при $\delta \in (0,r]$, $x \in B_r$. Первые два слагаемых те же, что и в формуле (2.6) (см. еще замечание 2.1, с его помощью легко обосновать возможность дифференцирования под знаком интеграла во втором слагаемом). Наконец, с учетом (2.24)

$$f(x) - A_\delta f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} [f(x) - f(h+x)]\mu_r(x,\delta,h)\,dh = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_h f(x)\mu_r(x,\delta,h)\,dh.$$

Теперь применим (2.11), положив (см. (2.16))

$$\eta(h) = \nu_r(x,\delta,h) = -\delta^{-n}\nu\left(\frac{h}{\delta} + \frac{x}{2kr}\right) \quad \Rightarrow \quad \xi(h) = -\mu_r(x,\delta,h).$$

В результате получим

$$f(x) - A_\delta f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_h f(x)\xi(h)\,dh = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_h^k f(x)\eta(h)\,dh.$$

Формула (2.6) доказана.

Доказательство замечания 2.2. Для любого полинома $P \in \Pi_{k-1}$ имеем (см. (2.5))

$$\Delta_h^k P(x) \equiv 0, \qquad \int\limits_{B_r} \frac{\partial}{\partial t}\lambda_r(x,t,y)P(y)\,dy = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{B_r} \lambda_r(x,t,y)P(y)\,dy = 0. \tag{2.27}$$

Следовательно, представление (2.6) для функции $f - P$ примет вид (2.10) с $Q \equiv 0$. Осталось заметить, что в силу (2.27) второе слагаемое в правой части (2.10) не зависит от $Q \in \Pi_{k-1}$. В результате приходим к (2.10).

Для получения следствий из теоремы 2.1 введем следующие характеристики гладкости функции, заданной на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$e_{p,\Omega}^{k-1} f(x,t) = \inf_{P \in \Pi_{k-1}} \|f - P\|_{L_p(B(x,t)\cap\Omega)}, \qquad \operatorname{osc}_p^{k-1} f(x,t) = v_n t^{-n} e_{p,\Omega}^{k-1} f(x,t), \qquad t > 0, \tag{2.28}$$

— локальное наилучшее приближение в Ω многочленами степени не выше $k-1$ по шару $B(x,t)$ и локальная осцилляция соответственно (здесь v_n — объем шара B_1; см. [12, 15]);

$$\Delta_{h,\Omega}^k f(x) = \begin{cases} \Delta_h^k f(x), & \text{если } [x, x+kh] \subset \Omega, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{2.29}$$

— k-я разность в Ω функции f в точке x с шагом $h \in \mathbb{R}^n$;

$$\overline{\Delta}_{\delta,\Omega}^k f(x) = (v_n \delta^n)^{-1} \int\limits_{B_\delta} |\Delta_{h,\Omega}^k f(x)|\,dh \tag{2.30}$$

— среднее значение модуля k-й разности в Ω по шару $B(x,\delta)$;

$$\omega_{p,\Omega}^k(f,t) = \sup_{|h|\le t} \|\Delta_{h,\Omega}^k f\|_{L_p(\Omega)} \tag{2.31}$$

— k-й модуль непрерывности функции в $L_p(\Omega)$.

Следствие 2.1. *Пусть* $r > 0$, $\delta \in (0, r]$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p(B_r)$. *Тогда для любого полинома* $P \in \Pi_{k-1}$, $x \in B_r$ *верна оценка* ($c_3 = c_3(n,k,p) > 0$)

$$|f(x) - P(x)| \le c_3 \left\{ r^{-n/p} \|f - P\|_{L_p(B_r)} + \int\limits_\delta^r e^{k-1}_{p,B_r} f\left(x\left(1 - \frac{t}{2r}\right), \frac{t}{2}\right) t^{-n/p-1}\, dt + \overline{\Delta}^k_{\delta/k,B_r} f(x) \right\}. \tag{2.32}$$

Доказательство. Из (2.10), (2.2) и (2.4) следует, что

$$|f(x)-P(x)| \le c_2 r^{-n} \int\limits_{B_r} |f-P|\, dy + c_1 \int\limits_\delta^r t^{-n-1} \left(\int\limits_{\Lambda_r(x,t)} |f(y) - Q(y)|\, dy \right) dt + c_1 \delta^{-n} \int\limits_{N_r(x,\delta)} |\Delta^k_h f(x)|\, dh. \tag{2.33}$$

Используем теперь включение (2.9), берем нижнюю грань по $Q \in \Pi_{k-1}$ и получаем оценку второго слагаемого в (2.33) через второе слагаемое в (2.32), но с $p = 1$. Далее, включение (2.7) показывает, что

$$\Delta^k_{h,B_r} f(x) = \Delta^k_h f(x), \qquad x \in B_r, \quad h \in N_r(x,t), \quad t \in (0,\delta], \tag{2.34}$$

так что, учитывая еще (2.8), получим при $t \in [\delta, r]$

$$\int\limits_{N_r(x,t)} |\Delta^k_h f(x)|\, dh = \int\limits_{N_r(x,t)} |\Delta^k_{h,B_r} f(x)|\, dh \le \int\limits_{B_{t/k}} |\Delta^k_{h,B_r} f(x)|\, dh.$$

Подставив эти неравенства в (2.33), приходим к оценке (2.32) при $p = 1$. Если $p > 1$, то нужно сначала применить в первых двух слагаемых (2.33) неравенство Гёльдера. Переходя затем к нижней грани по $Q \in \Pi_{k-1}$, получим (2.32).

Следствие 2.2. *В условиях следствия* 2.1 *верны оценки* ($c = c(n,k,p) > 0$, $1/p + 1/p' = 1$)

$$|f(x) - P(x)| \le c \left\{ r^{-n/p} \|f - P\|_{L_p(B_r)} + \int\limits_\delta^r \operatorname{osc}^{k-1}_p f\left(x\left(1 - \frac{t}{2r}\right), \frac{t}{2}\right) t^{n/p'-1}\, dt + \overline{\Delta}^k_{\delta/k,B_r} f(x) \right\}, \tag{2.35}$$

$$|f(x) - P(x)| \le c \left\{ r^{-n/p} \|f - P\|_{L_p(B_r)} + \int\limits_\delta^r \omega^k_{p,B_r}(f,t) t^{-n/p-1}\, dt + \overline{\Delta}^k_{\delta/k,B_r} f(x) \right\}. \tag{2.36}$$

Действительно, (2.35) следует из (2.32) и обозначений (2.28). Неравенство (2.36) следует из (2.32) и известной оценки $B(x,t) \subset B_r \;\Rightarrow\; e^{k-1}_{p,B_r} f(x,t) \le c\omega^k_{p,B_r}(f,t)$, где $0 < c < \infty$ не зависит от x, t, r (см. [13]).

Замечание 2.3. С помощью замены переменной (гомотетии) теорема 2.1 и следствия из нее сводятся к их частному случаю при $r = 1$. Впрочем при $r = 1$ доказательство такое же, как в общем случае.

3. НЕРАВЕНСТВО ТИПА ХАРДИ ДЛЯ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Мы сохраняем все обозначения разд. 2. Пусть $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $r > 0$,

$$w\colon (0, r] \to \mathbb{R}_+, \qquad v\colon B_r \to \mathbb{R}_+ \tag{3.1}$$

— измеримые функции,

$$\psi(t) \equiv \psi(t; r) = \left[\int\limits_0^r \left[\frac{s}{t+s} \right]^{kp} w(s)\, ds \right]^{1/p}, \qquad t \in (0, r], \tag{3.2}$$

и при $r > 0$, $t \in (0, r]$, $p > 1$, $p' = p/(p-1)$

$$\Psi_r(t) = \left\{ [r^{n/p}\psi(r; r)]^{-p'} + \frac{np'}{p} \int\limits_t^r \left[[s^{n/p}\psi(s; r)]^{-p'} \frac{ds}{s} \right] \right\}^{1/p'}. \tag{3.3}$$

Кроме того, для измеримой функции $f\colon B_r \to \mathbb{R}_+$ определим ее функцию распределения

$$\lambda_f(\tau) = \mathrm{mes}_n\{x \in B_r\colon\ |f(x)| > \tau\}, \qquad \tau \in \mathbb{R}_+, \tag{3.4}$$

где $\mathrm{mes}_n A$ — n-мерная мера Лебега множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Введем также невозрастающую перестановку и симметричную перестановку соответственно

$$f^*(t) = \inf\{\tau \in \mathbb{R}_+\colon\ \lambda_f(\tau) \le t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \qquad f^{\#}(y) = f^*(v_n|y|^n), \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Функции f^* и $f^{\#}$ равноизмеримы с f, т.е. имеют одинаковые с f функции распределения, при этом $f^*(t)$ не возрастает, $f^{\#}(y)$ зависит только от $\rho = |y|$, $y \in \mathbb{R}^n$, и также не возрастает как функция от ρ.

Теорема 3.1. *При введенных обозначениях пусть* $1 \le p \le q < \infty$, $k > n/p$,

$$g_0(t) = \left(\int\limits_{B_t} v\, dx \right)^{1/q}, \qquad g_1(t) = \left(\int\limits_{B_t} v^{\#}\, dy \right)^{1/q}, \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.6}$$

Тогда существуют постоянные $c_i = c_i(k, n, p, q) > 0$, $i = 1, 2$, *такие, что для величины*

$$G_r = \sup_{f \in L_p(B_r)} \left\{ \left(\int\limits_{B_r} |f|^q v\, dx \right)^{1/q} \left[\psi(r; r)^p \int\limits_{B_r} |f|^p\, dx + \int\limits_0^r \omega^k_{p, B_r}(f; s)^p w(s)\, ds \right]^{-1/p} \right\} \tag{3.7}$$

имеют место оценки

$$c_1 \sup_{t \in (0, r]} [g_0(t)\Psi_r(t)] \le G_r \le c_2 \sup_{t \in (0, r]} [g_1(t)\Psi_r(t)]. \tag{3.8}$$

Замечание 3.1. *Пусть* $p = 1$ *в условиях теоремы. Тогда*

$$c_1 \sup_{t \in (0, r]} \{g_0(t)[t^n\psi(t; r)]^{-1}\} \le G_r \le c_2 \sup_{t \in (0, r]} \{g_1(t)[t^n\psi(t; r)]^{-1}\}. \tag{3.9}$$

Замечание 3.2. В теореме 3.1 не требуется априорной связи весовых функций v и w. В ряде случаев такая связь имеется и ответ можно существенно упростить. Например, пусть

$$v(x) = \Big[|x|^{n(1/p-1/q)}\psi(|x|;r)\Big]^q \equiv V(|x|), \qquad x \in B_r, \tag{3.10}$$

причем $V(s)\downarrow$, $s \in (0,r]$. Тогда

$$g_0(t) = g_1(t) = g(t) \equiv \left[c_n \int\limits_0^t [s^{n/p}\psi(s;r)]^q s^{-1}\,ds\right]^{1/q}. \tag{3.11}$$

В этом случае имеет место двусторонняя оценка с постоянными, зависящими от k,n,p,q,

$$G_r \approx G_r^0 \equiv \sup_{t\in(0,r]} \Big\{g(t)[t^{n/p}\psi(t;r)]^{-1}\Big\}. \tag{3.12}$$

Следующий результат, который мы приведем без доказательства, показывает, что при использовании в качестве характеристики гладкости функции модуля непрерывности ее симметричной перестановки удается и в общем случае получить двустороннюю оценку.

Теорема 3.2. *В условиях теоремы* 3.1 *для величины*

$$G_r^{\#} = \sup_{f\in L_p(B_r)} \left\{ \left(\int\limits_{B_t} |f|^q v\,dx\right)^{1/q} \left[\psi(r;r)^p \int\limits_{B_r} |f|^p\,dx + \int\limits_0^r \omega_{p,B_r}^k(f^{\#};s)^p w(s)\,ds\right]^{-1/p} \right\} \tag{3.13}$$

справедлива двусторонняя оценка (*с постоянными, зависящими только от* k,n,p,q)

$$G_r^{\#} \approx \sup_{t\in(0,r]} [g_1(t)\Psi_r(t)]. \tag{3.14}$$

Замечание 3.3. Известно, что модуль непрерывности первого порядка для симметричной перестановки оценивается сверху через модуль непрерывности самой функции, а для модулей более высоких порядков это, вообще говоря, не так. В то же время сопоставление (3.14) и (3.9) показывает, что всегда $G_r \le cG_r^{\#}$. Это означает, что в интегральном смысле, заложенном в формулах (3.7) и (3.13), такое мажорирование имеет место и для модулей высших порядков. Если же $g_0(t) \approx g_1(t)$, то $G_r \approx G_r^{\#}$.

Замечание 3.4. В полученных результатах постоянные не зависят от r и можно осуществить предельный переход при $r \to \infty$. Пусть в (3.1) $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$; в (3.2) $r = \infty$. Пусть $\psi(1;\infty) < \infty$, тогда $\psi(t;\infty) < \infty$, $t \in \mathbb{R}_+$; $\psi(r,r) \to 0$, $r \to \infty$, и для

$$G = \sup_{f\in L_p(\mathbb{R}^n)} \left\{ \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^q v\,dx\right)^{1/q} \left[\int\limits_0^\infty \omega_p^k(f;y)^p w(y)\,dy\right]^{-1/p} \right\}$$

получим

$$c_1 \sup_{t\in\mathbb{R}_+} [g_0(t)\Psi(t)] \le G \le c_2 \sup_{t\in\mathbb{R}_+} [g_1(t)\Psi(t)], \qquad \Psi(t) = \left\{\int\limits_t^\infty \left[[y^{n/p}\psi(y;\infty)]^{-p'}\,\frac{dy}{y}\right]\right\}^{1/p'}.$$

Кроме того,

$$G^{\#} = \sup_{f\in L_p(\mathbb{R}^n)} \left\{ \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^q v\,dx\right)^{1/q} \left[\int\limits_0^\infty \omega_p^k(f^{\#};y)^p w(y)\,dy\right]^{-1/p} \right\} \approx \sup_{t\in\mathbb{R}_+} [g_1(t)\Psi(t)].$$

Подобным образом модифицируется и оценка (3.14).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. ОЦЕНКА СНИЗУ

Возникающие при доказательстве различные положительные постоянные, зависящие только от k, n, p, q, будем обозначать одной буквой c. Символ $\approx$ означает наличие двусторонней оценки с постоянными, зависящими только от k, n, p, q.

1. Из (3.2) следует, что
$$0 \le \psi(t) \downarrow, \qquad t^k\psi(t) \uparrow . \tag{4.1}$$
Мы проведем рассуждение, считая, что
$$\lim_{t\to+0} \psi(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to+0} t^k\psi(t) = 0 \tag{4.2}$$
(если $\psi(+0) < \infty$ и (или) $\lim_{t\to+0} t^k\psi(t) > 0$, ситуация только упрощается).

При $r > 0$ введем дискретизирующую последовательность $\{\mu_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ со свойствами
$$\mu_0 = r, \qquad 0 < \mu_{m+1} < \mu_m, \quad m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}, \qquad \lim_{m\to\infty} \mu_m = 0, \tag{4.3}$$
$$\psi(\mu_{m+1}) \ge 2\psi(\mu_m), \qquad \mu_{m+1}^k\psi(\mu_{m+1}) \le 2^{-1}\mu_m^k\psi(\mu_m), \qquad m \in \mathbb{N}_0, \tag{4.4}$$
$$\mathbb{N}_0 = M_1 \cup M_2, \qquad M_1 \cap M_2 = \varnothing,$$
$$\psi(\mu_m) \le \psi(t) \le 4\psi(\mu_m), \qquad t \in [\mu_{m+1}, \mu_m], \quad m \in M_1, \tag{4.5}$$
$$4^{-1}\mu_m^k\psi(\mu_m) \le t^k\psi(t) \le \mu_m^k\psi(\mu_m), \qquad t \in [\mu_{m+1}, \mu_m], \quad m \in M_2. \tag{4.6}$$
Подобные последовательности для функций со свойствами (4.1), (4.2) неоднократно использовались в теории функциональных пространств и теории интерполяции (см., например, [17, 18]). Важно для дальнейшего, что постоянные в неравенствах (4.4)–(4.6) не зависят от r, хотя сама последовательность $\{\mu_m\}$, конечно, зависит от r.

2. Стандартные оценки, основанные на свойствах (4.1)–(4.6), приводят к соотношению
$$\Psi_r(t) \approx [t^{n/p}\psi(t)]^{-1} + \Psi_r(\mu_m), \qquad t \in [\mu_{m+1}, \mu_m], \quad m \in \mathbb{N}_0 \tag{4.7}$$
(см., например, аналог в [17, формула (3.16)]). В результате получим
$$E_r^{(i)} \equiv \sup_{t\in(0,r]} [g_i(t)\Psi_r(t)] \approx K_r^{(i)} + L_r^{(i)}, \qquad i = 0, 1, \tag{4.8}$$
где
$$K_r^{(i)} = \sup_{t\in(0,r]} \left\{g_i(t)[t^{n/p}\psi(t)]^{-1}\right\}, \qquad L_r^{(i)} = \sup_{m\in\mathbb{N}_0} \{g_i(\mu_m)\Psi_r(\mu_m)\}. \tag{4.9}$$

3. Докажем оценку снизу в (3.9). Достаточно показать, что
$$G_r \ge cK_r^{(0)}, \qquad G_r \ge cL_r^{(0)}. \tag{4.10}$$
Докажем сначала первое неравенство в (4.10). Пусть $t \in \mathbb{R}$, $0 \le F(t)$ — четная функция, убывающая на $\mathbb{R}_+$; $F(t) = 1$, $|t| \le 1$; $F \in C^k(\mathbb{R})$;
$$\int_{\mathbb{R}} |F^{(l)}(t)|^p t^{n-1}\, dt < \infty, \qquad l = 0, 1, \ldots, k. \tag{4.11}$$
Положим
$$f(x) = F(|x|), \qquad f_\nu(x) = f(x/\nu), \quad \nu > 0. \tag{4.12}$$

Тогда $0 \le f_\nu \in C^k(\mathbb{R}^n) \cap W_p^k(\mathbb{R}^n)$ и при $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $0 \le |\alpha| \le k$,

$$\|D^\alpha(f_\nu)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \nu^{-|\alpha|}\|(D^\alpha f)_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \nu^{n/p-|\alpha|}\|(D^\alpha f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.13}$$

Используя известные оценки, получим

$$\omega_p^k(f_\nu;t) \le ct^k \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha(f_\nu)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = ct^k\nu^{n/p-k} \sum_{|\alpha|=k} \|(D^\alpha f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.14}$$

$$\omega_p^k(f_\nu;t) \le 2^k\|f_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = c\nu^{n/p}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.15}$$

Далее $f_\nu(x) = 1$, $x \in B_\nu$, так что при $\nu \le r$

$$\int\limits_{B_r} f_\nu^q v\,dx \ge \int\limits_{B_r} v\,dx = g_0(\nu)^q, \qquad \int\limits_{B_r} f_\nu^p\,dx \le \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p = c\nu^n. \tag{4.16}$$

Поэтому (см. (3.8), (4.14)–(4.16))

$$G_r \ge \sup_{\nu\in(0,r]} g_0(\nu)\left[\psi(r)^p\nu^n + \int\limits_0^\infty \omega_p^k(f_\nu;t)^p w(t)\,dt\right]^{-1/p} \ge$$

$$\ge \sup_{\nu\in(0,r]} g_0(\nu)\nu^{-n/p}\left[\psi(r)^p + \nu^{-kp}\int\limits_0^\nu t^{kp}w(t)\,dt + \int\limits_\nu^\infty w(t)\,dt\right]^{-1/p}. \tag{4.17}$$

Из (3.2) следует, что

$$\psi(\nu)^p \approx \nu^{-kp}\int\limits_0^\nu t^{kp}w(t)\,dt + \int\limits_\nu^\infty w(t)\,dt. \tag{4.18}$$

Применив это неравенство в (4.17), получим

$$G_r \ge \sup_{\nu\in(0,r]} g_0(\nu)\nu^{-n/p}[\psi(r)^p + \psi(\nu)^p]^{-1/p} \ge cK_r^{(0)},$$

поскольку $\psi(r) \le \psi(\nu)$, $\nu \in (0,r]$ (см. (4.1)).

Для доказательства второго неравенства в (4.10) положим (см. (4.12) при $\nu = \mu_s$, $s \in \mathbb{N}_0$)

$$f_0(x) = \sum_{s=0}^\infty b_s f_{\mu_s}(x), \qquad b_s \ge 0, \quad s \in \mathbb{N}_0. \tag{4.19}$$

Числа b_s будут выбраны ниже. Нам понадобятся следующие оценки (см. (4.13), (4.14) при $\nu = \mu_s$):

$$\|f_0\|_{L_p(B_r)} \le \sum_{s=0}^\infty b_s\|f_{\mu_s}\|_{L_p(B_r)} = c\sum_{s=0}^\infty b_s\mu_s^{n/p} < \infty, \tag{4.20}$$

$$\omega_p^k(f_0;\mu_m) \le \sum_{s=0}^m b_s\omega_p^k(f_{\mu_s};\mu_m) + \sum_{s=m+1}^\infty b_s\omega_p^k(f_{\mu_s};\mu_m) \le c\left[\mu_m^k\sum_{s=0}^m b_s\mu_s^{n/p-k} + \sum_{s=m+1}^\infty b_s\mu_s^{n/p}\right] \tag{4.21}$$

(сходимость ряда в (4.20) есть первое условие на b_s). Поскольку, как известно,

$$\omega_p^k(f;t_1) \le \omega_p^k(f;t_2), \qquad t_2^{-k}\omega_p^k(f;t_2) \le 2^k t_1^{-k}\omega_p^k(f;t_1), \qquad 0 < t_1 < t_2, \tag{4.22}$$

для $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, то процедура дискретизации (4.3)–(4.6) интеграла на конусе функций с двойным условием монотонности вида (4.22) дает при $r > 0$

$$I_r(f)^p \equiv \int_0^r \omega_p^k(f;t)^p w(t)\,dt \approx \sum_{m=0}^{\infty} \Big[\omega_p^k(f;\mu_m)\psi(\mu_m)\Big]^p \tag{4.23}$$

(подробнее об этой процедуре см. [17, лемма 1]). Положим $f = f_0$ в (4.23) и применим (4.21). Тогда

$$I_r(f_0)^p \le c\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^{kp}\psi(\mu_m)^p \left(\sum_{s=0}^{m} b_s\mu_s^{n/p-k}\right)^p + c\sum_{m=0}^{\infty}\psi(\mu_m)^p\left(\sum_{s=m+1}^{\infty} b_s\mu_s^{n/p}\right)^p.$$

Отсюда и из (4.4), используя известную лемму (см., например, лемму 1 в [19]), получим

$$I_r(f_0) \le c\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\Big[\psi(\mu_m)^p b_m\mu_m^{n/p}\Big]^p\right\}^{1/p}. \tag{4.24}$$

Но $f_{\mu_s}(x) \ge 0$; $f_{\mu_s}(x) = 1$ при $|x| \le \mu_s$, так что $f_0(x) \ge \sum_{s=0}^m b_s$, $|x| \le \mu_m$. Поэтому

$$\int_{B_r} f_0^q v\,dx = \sum_{m=0}^{\infty}\int_{\Delta_m} f_0^q v\,dx \ge \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{m} b_s\right)^q\int_{\Delta_m} v\,dx, \tag{4.25}$$

где $\Delta_m = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \mu_{m+1} < |x| \le \mu_m\}$. В результате из (4.20), (4.24) и (4.25) следует, что

$$G_r \ge \sup_{b_m\ge 0}\left\{\left(\int_{B_r} f_0^q v\,dx\right)^{1/q}\left[\psi(r)^p\int_{B_r} f_0^p\,dx + I_r(f_0)^p\right]^{-1/p}\right\} \ge$$

$$\ge c\sup_{b_m\ge 0}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(\sum_{s=0}^{m} b_s\right)^q\int_{\Delta_m} v\,dx\right]^{1/q}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\psi(\mu_m)b_m\mu_m^{n/p}\Big)^p\right]^{-1/p}\right\} \equiv cH_r. \tag{4.26}$$

Итак, выбор чисел $b_m \ge 0$ следует провести таким образом, чтобы реализовать верхнюю грань, обозначенную через H_r (при этом ряд, стоящий в знаменателе, должен быть сходящимся, что обеспечит и сходимость ряда в (4.20)). Применим теперь результат о дискретном неравенстве типа Харди (см. [20, разд. 2]):

$$H_r \approx \sup_{m\in\mathbb{N}_0}[\Psi_m g_m], \tag{4.27}$$

$$\Psi_m = \sum_{s=0}^{m}\left\{\Big[\psi(\mu_s)\mu_s^{n/p}\Big]^{-p'}\right\}^{1/p'}, \tag{4.28}$$

$$g_m = \left(\sum_{s=m}^{\infty}\int_{\Delta_s} v\,dx\right)^{1/q} = \left(\int_{B_{\mu_m}} v\,dx\right)^{1/q} = g_0(\mu_m). \tag{4.29}$$

Свойства дискретизации (4.3)–(4.6) приводят при $k > n/p$ к следующей оценке:

$$\Psi_r(\mu_m) \approx \Psi_m, \qquad m \in \mathbb{N}_0 \tag{4.30}$$

(см. аналог при выводе оценки (25) из [18, разд. 3]). Подставив (4.29) и (4.30) в (4.27), видим, что $H_r \ge cL_r^{(0)}$, что вместе с (4.26) дает второе неравенство в (4.10). Оценка снизу в (3.9) доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. ОЦЕНКА СВЕРХУ ПРИ $p < q$

Мы сохраняем здесь все обозначения разд. 4. По известному экстремальному свойству симметричных перестановок

$$\left\{\int\limits_{B_r} |f|^q v\,dx\right\}^{1/q} \le \left\{\int\limits_{B_r} (f^{\#}(y))^q v^{\#}(y)\,dy\right\}^{1/q}. \tag{5.1}$$

Оценку перестановки $f^{\#}$ получим из неравенства, вытекающего из (2.36) при $P(x)=0$:

$$|f(x)| \le c\left[A_{r,\delta}(f) + \overline{\Delta}^k_{\delta/k,B_r} f(x)\right], \qquad r>0, \quad \delta\in(0,r], \quad x\in B_r, \tag{5.2}$$

$$A_{r,\delta}(f) = r^{-n/p}\|f\|_{L_p(B_r)} + \int\limits_{\delta}^{r} \varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt, \qquad \varphi(t)=\omega^k_{p,B_r}(f;t). \tag{5.3}$$

Перейдем в (5.2) к симметричным перестановкам и учтем, что для неотрицательной измеримой функции g и постоянной $B>0$ $(B+g)^{\#}(y) = B + g^{\#}(y)$, $y>0$.

Итак, из (5.2) следует, что при $r>0$, $\delta\in(0,r]$, $y\in B_r$

$$f^{\#}(y) \le c\left\{r^{-n/p}\|f\|_{L_p(B_r)} + \int\limits_{\delta}^{r} \varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt + (\overline{\Delta}^k_{\delta/k,B_r} f)^{\#}(y)\right\}, \tag{5.4}$$

где $c>0$ не зависит от r, y, δ. Положим в (5.4) $\delta=|y|\in(0,r]$ и учтем, что

$$(\overline{\Delta}^k_{|y|/k,B_r} f)^{\#}(y) \le c|y|^{-n/p}\|\overline{\Delta}^k_{|y|/k,B_r} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le c|y|^{-n/p}\,\varphi\left(\frac{|y|}{k}\right) \le c\int\limits_{|y|/k}^{r} \varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt$$

(см. (2.30), (2.31); последнее неравенство следует из свойств (4.22)). Итак,

$$f^{\#}(y) \le c\left\{r^{-n/p}\|f\|_{L_p(B_r)} + \int\limits_{|y|/k}^{r} \varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt\right\}. \tag{5.5}$$

Вклад первого слагаемого из правой части (5.5) в интеграл (5.1) не больше чем

$$r^{-n/p}\|f\|_{L_p(B_r)} g_1(r) = \psi(r) r^{-n/p}\|f\|_{L_p(B_r)}[g_1(r)\Psi_r(r)]. \tag{5.6}$$

Соответственно его вклад в G_r (3.8) не превосходит величины $E_r^{(1)}$ (4.8). Переходя в (5.1) к сферическим координатам, видим, что вклад второго слагаемого из (5.5) в G_r не превосходит величины

$$D_r = \sup_{\varphi\in\Omega_k^0}\left[\left(\int\limits_0^r \Phi_r(\rho)^q V(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho\right)^{1/q}\left(\int\limits_0^r \varphi(t)^p w(t)\,dt\right)^{-1/p}\right], \tag{5.7}$$

где

$$\Phi_r(\rho) = \int\limits_{\rho/k}^{r} \varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt, \qquad V(\rho) = v^{\#}(y), \qquad \rho=|y|, \tag{5.8}$$

$$\Omega_k^0 = \Big\{\varphi>0\colon\ 0<t_1<t_2\ \Rightarrow \varphi(t_1)\le\varphi(t_2),\ t_2^{-k}\varphi(t_2)\le 2^k t_1^{-k}\varphi(t_1)\Big\}. \tag{5.9}$$

Проведем дискретизацию интеграла в знаменателе (5.7) (опираясь на формулу (4.23) при $\varphi(t)=\omega_p^k(f;t)$), а также интеграла в числителе (5.7) и получим

$$D_r \approx \sup_{\varphi\in\Omega_k^0} D'_r(\varphi) + \sup_{\varphi\in\Omega_k^0} D''_r(\varphi), \tag{5.10}$$

где

$$D'_r(\varphi) = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_r(k\mu_m)^q \int\limits_{\mu_{m+1}}^{\mu_m} V\rho^{n-1}\,d\rho \right\}^{1/q} \Sigma_r(\varphi)^{-1}, \tag{5.11}$$

$$D''_r(\varphi) = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \int\limits_{\mu_{m+1}}^{\mu_m} \left(\int\limits_{\rho/k}^{\mu_m} \varphi(t) t^{-n/p-1}\,dt \right)^q V\rho^{n-1}\,d\rho \right\}^{1/q} \Sigma_r(\varphi)^{-1}, \tag{5.12}$$

$$\Sigma_r(\varphi) = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(\mu_m)^p \psi(\mu_m)^p \right\}^{1/p}. \tag{5.13}$$

Покажем, что для всех $\varphi\in\Omega_k^0$

$$D'_r(\varphi) \le cL_r^{(1)}, \quad p\le q, \qquad D''_r(\varphi)\le cK_r^{(1)}, \quad p<q. \tag{5.14}$$

Пусть

$$D_{r,i}(\varphi) = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{0\le s\le m-1}^{(i)} \int\limits_{\mu_{s+1}}^{\mu_s} \varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt \right)^q \int\limits_{\mu_{m+1}}^{\mu_m} V\rho^{n-1}\,d\rho \right\}^{1/q} \Sigma_r(\varphi)^{-1},$$

где $\sum^{(i)}$ означает суммирование по $s\in M_i$, $i=1,2$ (см. (4.5), (4.6)). Тогда

$$D'_r(\varphi) \approx D_{r,1}(\varphi) + D_{r,2}(\varphi). \tag{5.15}$$

Имеем для $\varphi\in\Omega_k^0$, $s\in\mathbb{N}_0$, $u\in(0,\mu_s]$

$$\int\limits_u^{\mu_s} \varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt \le c\varphi(\mu_s)u^{-n/p}, \qquad \int\limits_u^{\mu_s} \varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt \le c\varphi(u)u^{-k}\mu_s^{k-n/p} \tag{5.16}$$

(во второй оценке надо учесть, что $k>n/p$). Обозначим

$$\delta_s = \begin{cases} \mu_{s+1}^{-n/p}, & s\in M_1,\\ 0, & s\in M_2, \end{cases} \qquad \sigma_s = \begin{cases} \mu_s^{k-n/p}, & s\in M_2,\\ 0, & s\in M_1 \end{cases}$$

и для $u=\mu_{s+1}$ применим при $s\in M_1$ первую оценку (5.16), а при $s\in M_2$ вторую. Тогда

$$D_{r,1}(\varphi) \le c\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{0\le s\le m-1} \varphi(\mu_s)\delta_s \right)^q \int\limits_{\mu_{m+1}}^{\mu_m} V\rho^{n-1}\,d\rho \right\}^{1/q} \Sigma_r(\varphi)^{-1},$$

$$D_{r,2}(\varphi) \le c\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{0\le s\le m-1} \varphi(\mu_{s+1})\mu_{s+1}^{-k}\sigma_s \right)^q \int\limits_{\mu_{m+1}}^{\mu_m} V\rho^{n-1}\,d\rho \right\}^{1/q} \Sigma_r(\varphi)^{-1}.$$

Используем теперь дискретное неравенство Харди [20] (см. аналог в (4.27)–(4.29)) и при $i=1$ получим, учитывая еще (3.7), (4.5) и обозначение (4.28),

$$D_{r,i}(\varphi) \le c \sup_{m\in\mathbb{N}_0} [\hat{g}_m \Psi_{m,i}], \tag{5.17}$$

$$\hat{g}_m = \sum_{s=m-1}^{\infty} \int\limits_{\mu_{s+1}}^{\mu_s} V\rho^{n-1}\,d\rho = \int\limits_0^{\mu_{m-1}} V\rho^{n-1}\,d\rho = cg_1(\mu_{m-1}) \le cg_1(\mu_m),$$

$$\Psi_{m,1} = \left\{\sum_{s=0}^{m-1} [\delta_s \psi(\mu_s)^{-1}]^{p'}\right\}^{1/p'} \le 4\left\{\sum_{s=0}^{m-1} [\mu_{s+1}^{-n/p}\psi(\mu_{s+1})^{-1}]^{p'}\right\}^{1/p'} \le 4\Psi_m.$$

Аналогично с учетом (4.6) имеет место (5.17) при $i=2$, где

$$\Psi_{m,2} = \left\{\sum_{s=0}^{m-1} [\sigma_s \mu_{s+1}^{-k}\psi(\mu_{s+1})^{-1}]^{p'}\right\}^{1/p'} \le 4\left\{\sum_{s=0}^{m-1} [\mu_s^{-n/p}\psi(\mu_s)^{-1}]^{p'}\right\}^{1/p'} \le 4\Psi_m.$$

Таким образом, из (5.17) и (5.15) следует с учетом (4.30), что

$$D'_r(\varphi) \le c \sup_{m\in\mathbb{N}_0} [g_1(\mu_m)\Psi_m] \approx \sup_{m\in\mathbb{N}_0} [g_1(\mu_m)\Psi_r(\mu_m)] = L_r^{(1)},$$

и мы получим первое неравенство в (5.14). Для доказательства второго используем в (5.12) при $m\in M_1$ первое неравенство (5.16) (с $s=m$), а при $m\in M_2$ второе. В результате

$$D''_r(\varphi) \le c[d_{r,1}(\varphi) + d_{r,2}(\varphi)], \tag{5.18}$$

$$d_{r,1}(\varphi) = \left\{\sum_{m\in M_1} \varphi(\mu_m)^q \int\limits_{\mu_{m+1}}^{\mu_m} V\rho^{-nq/p+n-1}\,d\rho\right\}^{1/q} \Sigma_r(\varphi)^{-1}, \tag{5.19}$$

$$d_{r,2}(\varphi) = \left\{\sum_{m\in M_2} \mu_m^{(k-n/p)q}[\varphi(\mu_{m+1})\mu_{m+1}^{-k}]^q \int\limits_{\mu_{m+1}}^{\mu_m} V\rho^{n-1}\,d\rho\right\}^{1/q} \Sigma_r(\varphi)^{-1}. \tag{5.20}$$

В $d_{r,1}(\varphi)$ используем убывание $V(\rho)$ и условие $p<q$. Тогда

$$\begin{aligned} d_{r,1}(\varphi) &\le c\left\{\sum_{m\in M_1} \varphi(\mu_m)^q V(\mu_{m+1})\mu_{m+1}^{-nq/p+n}\right\}^{1/q} \Sigma_r(\varphi)^{-1} \le \\ &\le c\left\{\sum_{m\in M_1} \varphi(\mu_m)^q g_1(\mu_{m+1})^q \mu_{m+1}^{-nq/p}\right\}^{1/q} \Sigma_r(\varphi)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Далее применим неравенство Йенсена и получим

$$d_{r,1}(\varphi) \le c \sup_{m\in M_1} \left[g_1(\mu_{m+1})\mu_{m+1}^{-n/p}\psi(\mu_m)^{-1}\right] \le c \sup_{m\in\mathbb{N}_0} \to \sup \left[g_1(\mu_{m+1})\mu_{m+1}^{-n/p}\psi(\mu_m)^{-1}\right] \le cK_r^{(1)}.$$

В $d_{r,2}(\varphi)$ при $p \le q$ имеем согласно (3.7) и неравенству Йенсена

$$d_{r,2}(\varphi) \le c\left\{\sum_{m\in M_2} \mu_m^{(k-n/p)q}[\varphi(\mu_{m+1})\mu_{m+1}^{-k}]^q g_1(\mu_m)^q\right\}^{1/q} \Sigma_r(\varphi)^{-1} \le$$

$$\le c \sup_{m\in\mathbb{N}_0}\left[\frac{g_1(\mu_m)\mu_m^{-n/p}}{\psi(\mu_m)}\right]\left\{\sum_{m\in M_2}\left[\mu_m^k\psi(\mu_m)\varphi(\mu_{m+1})\mu_{m+1}^{-k}\right]^p\right\}^{1/p} \Sigma_r(\varphi)^{-1} \le cK_r^{(1)}.$$

В конце мы учли (3.9) и (4.6). Из этих оценок и (5.18)–(5.20) следует второе неравенство в (5.14).

Итак,

$$D_r \le c[L_r^{(1)} + K_r^{(1)}] \le cE_r^{(1)} \tag{5.22}$$

(см. еще (4.8)), что доказывает при $p < q$ правое неравенство в (3.9).

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. ОЦЕНКА СВЕРХУ ПРИ $p = q$

Мы сохраняем все обозначения из разд. 4 и 5. При $p = q$ схема, приведенная в разд. 5, не проходит, поскольку нет аналога неравенства (5.21) и соответственно нет второй оценки в (5.14). По существу это связано с тем, что при $p = q$ неравенство (5.5) оказывается недостаточно точным для некоторых значений $y \in B_r$. Сейчас мы будем выбирать δ в (5.4) более деликатным способом. Именно при $y \in \Delta_m = [\mu_{m+1}, \mu_m]$, $m \in M_1$, мы будем использовать неравенство

$$f^{\#}(y) \le c\left\{r^{-n/p}\|f\|_{L_p(B_r)} + \int\limits_{\mu_m}^{r}\varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt + \psi_m(f;y)\right\}, \tag{6.1}$$

а при $y \in \Delta_m$, $m \in M_2$, — неравенство (5.5), которое запишем в виде

$$f^{\#}(y) \le c\left\{r^{-n/p}\|f\|_{L_p(B_r)} + \int\limits_{\mu_m}^{r}\varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt + \int\limits_{|y|/k}^{\mu_m}\varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt\right\}. \tag{6.2}$$

Здесь

$$0 \le \psi_m(f;y), \qquad \operatorname{supp}\psi_m(f) \subset B_r, \qquad \|\psi_m(f)\|_{L_p} \le \varphi(\mu_m). \tag{6.3}$$

Оценка (6.1) получается из (5.4), если при $y \in \Delta_m$ положить $\delta = \mu_m$; при этом

$$\psi_m(f;y) \equiv (\overline{\Delta}^k_{\mu_m/k,B_r}f)^{\#}(y), \qquad \|\psi_m(f)\|_{L_p} = \|\overline{\Delta}^k_{\mu_m/k,B_r}f\|_{L_p} \le \varphi(\mu_m)$$

(последнее неравенство имеет место в силу (2.30), (2.31), (4.22)). Вклады первых двух слагаемых из (6.1) и (6.2) в G_r (3.8) уже были оценены в разд. 5 при $p \le q$. Они не превосходят $cE_r^{(1)}$ (см. (4.8), (3.9)). Вклады в интеграл, стоящий в правой части (5.1), третьих слагаемых из (6.1) и (6.2) оцениваются сверху величинами (соответственно)

$$G_r^{(1)}(f) = \left\{\sum_{m\in M_1}\int\limits_{\Delta_m}\psi_m(f;y)^p v^{\#}(y)\,dy\right\}^{1/p}, \tag{6.4}$$

$$G_r^{(2)}(f) = \left\{\sum_{m\in M_2}\left(\int\limits_{\mu_{m+1}/k}^{\mu_m}\varphi(t)t^{-n/p-1}\,dt\right)^p\int\limits_{\Delta_m}v^{\#}(y)\,dy\right\}^{1/p}. \tag{6.5}$$

В силу (6.8) при $y \in \Delta_m$ имеем $v^{\#}(y) = V(|y|) \le V(\mu_{m+1})$ и из (6.4), (6.3) следует

$$G_r^{(1)}(f) \le \left\{ \sum_{m\in M_1} V(\mu_{m+1}) \int\limits_{B_r} \psi_m(f;y)^p\,dy \right\}^{1/p} \le \left\{ \sum_{m\in M_1} V(\mu_{m+1})\varphi(\mu_m)^p \right\}^{1/p}.$$

Убывание $V(\rho)$ дает оценку (см. (3.7) при $q = p$)

$$g_1(t) = c\int\limits_0^t V(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho \ge cV(t)t^n, \qquad t\in(0,r],$$

так что с учетом обозначений (4.9)

$$G_r^{(1)}(f) \le c\left\{ \sum_{m\in M_1} g_1(\mu_{m+1})^p \mu_{m+1}^{-n}\varphi(\mu_m)^p \right\}^{1/p} \le cK_r^{(1)} \left\{ \sum_{m\in M_1} \psi(\mu_{m+1})^p\varphi(\mu_m)^p \right\}^{1/p}.$$

Но $\psi(\mu_{m+1}) \approx \psi(\mu_m)$, $m \in M_1$, следовательно (см. (4.23)), при $i = 1$ верна оценка

$$G_r^{(i)}(f) \le cK_r^{(1)} \left\{ \sum_{m\in \mathbb{N}_0} \psi(\mu_m)^p\varphi(\mu_m)^p \right\}^{1/p} \approx K_r^{(1)} I_r(f). \tag{6.6}$$

Далее, из (3.7) при $q = p$ и из почти убывания $\varphi(t)t^{-k}$ (см. (5.9)) следует

$$G_r^{(2)}(f) \le c\left\{ \sum_{m\in M_2} \left[\varphi\Big(\frac{\mu_{m+1}}{k}\Big)\Big(\frac{\mu_{m+1}^{-k}}{k}\Big)\right]^p \left(\int\limits_{\mu_{m+1}/k}^{\mu_m} t^{k-n/p-1}\,dt \right)^p g_1(\mu_m)^p \right\}^{1/p} \le$$
$$\le c\left\{ \sum_{m\in M_2} [\varphi(\mu_{m+1})\mu_{m+1}^{-k}]^p[\mu_m^{k-n/p}g_1(\mu_m)]^p \right\}^{1/p}$$

(в конце мы учли, что $k > n/p$). Итак (см. еще (4.9), (4.6)),

$$G_r^{(2)}(f) \le cK_r^{(1)} \left\{ \sum_{m\in M_2} [\varphi(\mu_{m+1})\mu_{m+1}^{-k}]^p\,[\mu_m^k\psi(\mu_m)]^p \right\}^{1/p} \approx$$
$$\approx K_r^{(1)} \left\{ \sum_{m\in M_2} [\varphi(\mu_{m+1})\psi(\mu_{m+1})]^p \right\}^{1/p},$$

так что неравенство (6.6) верно и при $i = 2$. Из (6.6) следует, что вклад в G_r третьих слагаемых из (6.1) и (6.2) оценивается сверху через $cK_r^{(1)}$, т.е. он не больше чем $cE_r^{(1)}$ (4.8). В результате мы получаем неравенство (3.9) при $p = q$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
2. *Степанов В.Д.* Весовые неравенства Харди для производных высших порядков // Тр. МИАН. 1990. Т. 187. С. 205–220.
3. *Яковлев Г.Н.* Граничные свойства функций класса W_p^l на областях с угловыми точками // ДАН СССР. 1961. Т. 140, №1. С. 73–76.
4. *Kufner A., Triebel H.* Generalizations of Hardy's inequality // Conf. Sem. Mat. Univ. Bari. 1978. V. 156. 21 p.
5. *Heinig H.P., Kufner A., Persson L.-E.* On some fractional order Hardy inequalities // J. Inequal. and Appl. 1997. V. 1. P. 25–46.
6. *Буренков В.И., Эванс В.Д.* Весовое неравенство Харди для разностей и полная непрерывность вложения пространств Соболева для областей со сколь угодно сильным вырождением // Докл. РАН. 1997. Т. 355, №5. С. 583–585.
7. *Burenkov V.I., Evans W.D.* Weighted Hardy-type inequalities for differences and the extension problem for spaces with generalized smoothness // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1998. V. 57. P. 209–230.
8. *Burenkov V.I., Evans W.D., Goldman M.L.* On weighted Hardy- and Poincaré-type inequaliteis for differences // J. Inequal. and Appl. 1997. V. 1. P. 1–10.
9. *Буренков В.И., Гольдман М.Л.* О точных аналогах неравенства Харди для разностей в случае связанных весов // Докл. РАН. 1999. Т. 366, №2. С. 155–157.
10. *Буренков В.И., Вердиев Т.В.* Продолжение нулем функций из пространств с обобщенной гладкостью для вырождающихся областей // Наст. изд. С. 78–91.
11. *Буренков В.И., Гольдман М.Л.* Критерий справедливости двухвесового неравенства типа Харди для модулей непрерывности // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: Тез. докл. Междунар. конф., посвященной 75-летию чл.-корр. РАН проф. Л.Д. Кудрявцева. М.: Изд-во РУДН, 1998. С. 16.
12. *Брудный Ю.А.* Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. Т. 24. С. 70–132.
13. *Брудный Ю.А.* Многомерный аналог одной теоремы Уитни // Мат. сб. 1970. Т. 72, №1. С. 175–191.
14. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
15. *Triebel H.* Theory of function spaces. II. Basel; Boston: Birkhäuser, 1992. (Monogr. Math.; V. 84).
16. *Burenkov V.I.* Sobolev spaces on domains. Stuttgart; Leipzig: Teubner, 1998.
17. *Гольдман М.Л.* О вложении обобщенных пространств Никольского–Бесова в пространства Лоренца // Тр. МИАН. 1985. Т. 172. С. 128–139.
18. *Гольдман М.Л.* Критерий вложения разных метрик для изотропных пространств Бесова с произвольными модулями непрерывности // Тр. МИАН. 1992. Т. 201. С. 166–186.
19. *Гольдман М.Л.* Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского–Бесова с модулями непрерывности общего вида // Тр. МИАН. 1984. Т. 170. С. 86–104.
20. *Goldman M.L.* Hardy type inequalities on the cone of quasimonotone functions: Res. Rept 98/31. Khabarovsk: Russ. Acad. Sci. Far-East Branch Comput. Center, 1998. 70 p.