Восстановление функций, интегралов и решений уравнения теплопроводности из U_2-классов Ульянова

Е.Е. Нурмолдин

УДК 517.5

Нурмолдин Е.Е. Восстановление функций, интегралов и решений уравнения теплопроводности из U_2-классов Ульянова // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2005. — Т. 8, № 4. — С. 337–351.

Изучаются задачи численного интегрирования, восстановления функций и дискретизации решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов $U_2(\beta, \theta, \alpha)$, принадлежность функций к которым определяется скоростью убывания их тригонометрических коэффициентов Фурье. Для классов $U_2((\beta_1, \beta_2), (\theta_1, \theta_2), (1, 1))$ получены точные или точные в соответствующих шкалах порядки убывания погрешностей квадратурных формул, восстановления функций и дискретизации решений уравнения теплопроводности по тригонометрическим коэффициентам Фурье в нормах L_2 и L_∞.

Ключевые слова: *оптимальная квадратурная формула, оптимальное восстановление функций, дискретизация решений уравнения теплопроводности.*

Nurmoldin Y.Y. Restoration of functions, integrals, and solutions to the heat conductivity equation from the Ulyanov U_2-classes // Siberian J. of Numer. Mathematics / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2005. — Vol. 8, № 4. — P. 337–351.

The paper dealt with a problem of numerical integration, and approximate restoration of functions and solutions to the heat conductivity equation with functions of distribution of starting temperatures from the classes $U_2(\beta, \theta, \alpha)$ defined by the rate of decreasing the trigonometric Fourier coefficients. Optimal orders of errors of the quadrature formulas, restoration, and discretization by the trigonometric Fourier coefficients in L_2 and L_∞ metrics are obtained.

Key words: *the optimal quadrature formulas, the optimal approximate restoration of functions and decisions of the heat conduction equation.*

Введение

Приведем общую постановку задачи восстановления [1].

Пусть при некотором κ ($\kappa = 1, 2, \ldots$) даны нормированные пространства $X^{(1)}, \ldots, X^{(\kappa)}$ и Y числовых функций, определенных на множествах $\Omega_{X^{(1)}}, \ldots, \Omega_{X^{(k)}}$ и Ω_Y соответственно, множества $F^{(j)} \subset X^{(j)}$ ($j = 1, \ldots, \kappa$) и $T = Tf = u(y; f) \equiv u(y; f_1, \ldots, f_\kappa)$ – отображение $F = F_1 \times \ldots \times F_\kappa$ в Y. Пусть также даны целые положительные числа $N_1, \ldots, N_\kappa$, вектор $\varepsilon^{(N)} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\kappa) \in R^N$ ($N = N_1 + \cdots + N_\kappa$), составленный из векторов $\varepsilon_j = (\varepsilon_j^{(1)}, \ldots, \varepsilon_j^{(N_j)})$ с неотрицательными компонентами $\varepsilon_j^{(i)} \geq 0$ ($j = 1, \ldots, \kappa$; $i = 1, \ldots, N_j$), набор функционалов $l(N) = (l_1, \ldots, l_\kappa)$, $l_j = (l_j^{(1)}, \ldots, l_j^{(N_j)})$, $l_j^{(i)}(\cdot) : F^{(j)} \to \mathbb{C}$ ($j = 1, \ldots, \kappa$; $i = 1, \ldots, N_j$) и функция $\varphi_N(\tau_1, \ldots, \tau_\kappa; y) : \mathbb{C}^N \times \Omega_y \to \mathbb{C}$ такая, что $\varphi_N(\tau_1, \ldots, \tau_\kappa; y)$ при всех фиксированных $\tau_j = (\tau_j^{(1)}, \ldots, \tau_j^{(N_j)})$ $(j = 1, \ldots, \kappa)$ как функция от y принадлежит пространству Y, где $\mathbb{C}$, как обычно, есть поле комплексных чисел.

Тогда для каждого $f \in F$ соответствующую функцию $Tf = u(y; f)$ будем приближать в метрике Y функцией $\varphi_N(z_1, \ldots, z_\kappa; y)$, построенной по числовой информации $(z_1, \ldots, z_\kappa)$ объема N, полученной для f посредством функционалов $l_1, \ldots, l_\kappa$ с точностью ε_N и переработанной по алгоритму φ_N до функции, зависящей от той же переменной, что и Tf. Для такой пары $(l^{(N)}, \varphi_N)$ положим

$$\delta_N\big((l^{(N)}, \varphi_N); T, F, \varepsilon^{(N)}\big)_Y = \sup_{f \in F;\, \boldsymbol{z} \in \mathcal{E}(f)} \|u(\cdot\,; f) - \varphi_N(z_1, \ldots, z_\kappa; \cdot)\|_Y, \tag{1}$$

$$\mathcal{E}(f) = \{\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_\kappa) : \; |l_j^{(i)}(f) - z_j^{(i)}| \le \varepsilon_j^{(i)}, \; j = 1, \ldots, \kappa, \; i = 1, \ldots, N_j\}.$$

Пусть $D_N \subset \{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ – некоторое подмножество множества всевозможных пар $(l^{(N)}, \varphi_N)$. Задача заключается в получении оценок сверху и снизу (желательно совпадающих с точностью до констант) для величины

$$\delta_N(D_N; T, F, \varepsilon^{(N)})_Y = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N\big((l^{(N)}, \varphi_N); T, F, \varepsilon^{(N)}\big)_Y \tag{2}$$

и в выборе функционалов $l_1(f), \ldots, l_\kappa(f)$ и функции φ_N, реализующих оценку сверху.

Различным конкретизациям общей задачи (2) посвящена обширная литература (см. напр., [1–8] и имеющуюся в ней библиографию). При $\varepsilon^{(N)} = (0, \ldots, 0) \in R^N$ задача (1), (2) есть задача восстановления по точной информации.

Если Tf есть решение какого-либо уравнения в частных производных, то вместо термина "восстановление" будем использовать термин "дискретизация", а в случае $Tf = \int_\Omega f(x)p(x)\,dx$ речь будет идти о "численном интегрировании" соответственно (см. [4]). Здесь и далее, ради упрощения записей, будем считать $\kappa = 1$.

Рассмотрим следующие конкретизации задачи (1), (2):

1. Численное интегрирование функций по точной и неточной информации: $\Omega = [0,1]^2$, $X = C[0,1]^2$, $Y \equiv \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) – множество действительных (комплексных) чисел, $T_1 f = \int_\Omega f(x)\,dx$, а D_N – множество K_N всех пар $(l^{(N)}, \varphi_N)$ таких, что $l_k(f) = f(t_k)$, $t_k \in \Omega$, $t = (t_1, \ldots, t_N)$ $(k = 1, \ldots, N)$, а $\varphi_N(\tau_1, \ldots, \tau_N; y) \equiv \varphi_N(\tau_1, \ldots, \tau_N) = \sum_{k=1}^N a_k \tau_k$, где $a = (a_1, \ldots, a_N) \in R^N$.

Здесь интеграл понимается в смысле Римана, конечная сумма

$$\Lambda(f; t, a) \equiv \varphi_N(l_1(f), \ldots, l_N(f)) = \sum_{k=1}^N a_k f(t_k) \tag{3}$$

называется *квадратурной формулой*, системы a и t – ее *весами* и *узлами* соответственно.

Интеграл $\int_\Omega f(x)\,dx$, зависящий от поведения функции $f(x)$ на континууме $\Omega = [0,1]^2$, приближается конечными объектами вида (3).

Задача приближенного интегрирования заключается в получении оценок сверху и снизу для величины (1) (желательно, совпадающих или совпадающих по порядку) и в указании узлов $\{t_k\}$ и весов $\{a_k\}$, реализующих оценку сверху.

В задаче (1), (2) осталось обсудить роль класса F, который, очевидно, должен состоять из таких функций, чтобы имело смысл выражение $f(t_k)$ в (3), т. е. в точке t_k функция f должна иметь однозначно определенное значение, например, состоять из непрерывных функций или из функций ограниченной, в том или ином смысле, вариации (см., напр., [5, с. 161–168]).

Н. Темиргалиевым в [10] на основе результатов П.Л. Ульянова [9] были определены классы $U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$, 1-периодических по каждой из s переменных и таких, что

$$|\hat{f}(m)| \le \prod_{j=1}^{s} (\overline{m}_j)^{\beta_j} \theta_j^{\overline{m}_j^{1/\alpha_j}} \psi_j(\overline{m}_j), \quad m=(m_1,\ldots,m_s)\in\mathbb{Z}^s,$$

где $\overline{m}_j=\max\{|m_j|;1\}$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_s)\in R^s$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_s)\in(0,1]^s$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$, $\alpha_j>0$ $(j=1,\ldots,s)$, $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_s)$, $\psi_j(x)$ – медленно колеблющиеся положительные функции при всех $j=1,\ldots,s$, а $\hat{f}(m)=\hat{f}(m_1,\ldots,m_s)$ – тригонометрические коэффициенты Фурье.

2. Восстановление функции из класса $\boldsymbol{F}$: $\Omega=\Omega_1=[0,1]^2$, $X=L(0,1)^2$, $Y=L_p(0,1)^2$ $(2\le p\le\infty)$, $T_2(f)=f$, а в качестве D_N будем рассматривать множество $\varPhi_N$ всех пар $(l^{(N)},\varphi_N)$ таких, что $l_j(f)=\hat{f}(m_1^{(j)},m_2^{(j)})$, $(m_1^{(j)},m_2^{(j)})\in\mathbb{Z}^2$ $(j=1,\ldots,N)$, где $\hat{f}(m_1,m_2)$ – тригонометрический коэффициент Фурье–Лебега функции f:

$$\hat{f}(m_1,m_2)=\int_{[0,1]^2} f(x_1,x_2)e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}\,dx_1\,dx_2.$$

Вместо $\delta_N(\varPhi_N;T,F)_Y$ будем писать просто $\delta_N(\varPhi_N,F)_Y$. При этом задача (1), (2) ставится немного иначе:

$$\delta_N(\varPhi_N,F)_Y=\inf_{(A_N,\varphi_N)}\sup_{f\in F}\left\|f(x_1,x_2)-\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),\ldots,\hat{f}(m^{(N)});(x_1,x_2))\right\|_Y,$$

где inf берется по всем парам (A_N,φ_N), состоящим из упорядоченного множества $A_N=\{(m_1^{(1)},m_2^{(1)}),\ldots,(m_1^{(N)},m_2^{(N)})\}\subset\mathbb{Z}^2$ и функции $\varphi_N(\tau_1,\ldots,\tau_N;(x_1,x_2))$.

В качестве класса F здесь также будем рассматривать класс $U_2(\beta,\theta,\alpha)$.

3. Дискретизация решений уравнения теплопроводности: $\Omega=[0,1]^2$, $\Omega_1=[0,\infty)\times[0,1]^2$, $X=C[0,1]^2$, $Y=L_\infty(0,\infty)\times L_p(0,1)^2$ $(2\le p\le\infty)$, $(Tf)(x)=u(t,x;f)$, где $u(t,x;f)$ – решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \qquad t\ge 0, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

с начальным условием $u(0,(x_1,x_2);f)=f(x_1,x_2)$.

В качестве D_N возьмем множество $\varPhi'_N$ всех пар $(l^{(N)},\varphi_N)$ таких, что $l_j(f)=\hat{f}\big(m_1^{(j)},m_2^{(j)}\big)$ для некоторых $(m_1^{(j)},m_2^{(j)})\in\mathbb{Z}^2$ $(j=1,\ldots,N)$. Здесь $\hat{f}(m_1,m_2)$ – тригонометрический коэффициент Фурье–Лабега функции f. При этом задача (1), (2) ставится так:

$$\sigma_N(\varPhi'_N,F)_Y=\inf_{(A_N,\varphi_N)}\sup_{f\in F}\left\|u(t,(x_1,x_2);f)-\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),\ldots,\hat{f}(m^{(N)});t,(x_1,x_2))\right\|_Y,$$

где inf берется по всем парам (A_N,φ_N), состоящим из упорядоченного множества $A_N=\{(m_1^{(1)},m_2^{(1)}),\ldots,(m_1^{(N)},m_2^{(N)})\}\subset\mathbb{Z}^2$ и функции $\varphi_N(\tau_1,\ldots,\tau_N;t,(x_1,x_2))$.

Класс F есть $U_2(\beta,\theta,\alpha)$.

Для дальнейшего изложения нам необходимо напомнить некоторые общепринятые обозначения. Через $c(\alpha, \beta, \ldots)$ будем обозначать некоторые положительные величины, разные, вообще говоря, в различных формулах и зависящие лишь от указанных в скобках параметров. Если $\{A_N\}_{N=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел и $\{B_N\}_{N=1}^{\infty}$ – числовая последовательность, то запись $B_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} A_N$ будет означать, что найдется постоянная $c(\alpha, \beta, \ldots)$, для которой при каждом целом положительном N выполнено неравенство $|B_N| \le c(\alpha, \beta, \ldots)A_N$. При положительных A_N и B_N запись $A_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\asymp} B_N$ означает $A_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} B_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} A_N$, $\mathbb{Z}_+^2 = \{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 : m_1 \ge 0, m_2 \ge 0\}$, $[\ldots]$ – целая часть.

1. Численное интегрирование функций по точной и неточной информации

Теорема 1. *Пусть $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0,1)^2$. Тогда*

$$\inf_{\{(\xi_j,\eta_j)\}_{j=1}^N} \sup_{f\in U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))} \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N f(\xi_j,\eta_j) \right| \underset{\theta_1,\theta_2}{\asymp} \theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}}, \tag{4}$$

где оценка сверху достигается на модифицированной квадратурной формуле Шарыгина:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}\left(f\Big(\frac{j}{n_1},\frac{k}{n_2}\Big) + f\Big(\frac{j}{n_1}+\frac{1}{2n_1},\frac{k}{n_2}+\frac{1}{2n_2}\Big)\right)$$

($N = 2n_1n_2$, $n_1 = n$, $n_2 = n\log_{\theta_2}\theta_1$ – целое).

Доказательство. Сначала докажем оценку сверху в (4) в более общем случае. Именно пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in R^2$, $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0,1)^2$. Тогда справедливо соотношение

$$\sup_{f\in U_2((\beta_1,\beta_2),(\theta_1,\theta_2),(1,1))} \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(f(\xi_{j,k}) + f(\xi'_{j,k})) \right| \underset{\beta_1,\beta_2,\theta_1,\theta_2}{\ll} n_1^{\beta_1}\theta_1^{2n_1} + n_2^{\beta_2}\theta_2^{2n_2} + n_1^{\beta_1}n_2^{\beta_2}\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}, \tag{5}$$

где $N = 2n_1n_2$, $\xi_{j,k} = \Big(\frac{j}{n_1}, \frac{k}{n_2}\Big)$, $\xi'_{j,k} = \Big(\frac{j}{n_1} + \frac{1}{2n_1}, \frac{k}{n_2} + \frac{1}{2n_2}\Big)$.

Как это показано в [8], для любой функции f справедливо

$$\begin{aligned}\delta_N(f) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(f(\xi_{j,k}) + f(\xi'_{j,k})) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{+\infty}{}' \hat{f}(m_1,m_2)\delta_{n_1}(m_1)\delta_{n_2}(m_2)\Big(1 + e^{2\pi i\frac{m_1}{2n_1}}e^{2\pi i\frac{m_2}{2n_2}}\Big) \right|,\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\delta_{n_j}(m_j) = \begin{cases} 1, & m_j \equiv 0 \pmod{n_j}, \\ 0, & m_j \not\equiv 0 \pmod{n_j}, \end{cases} \qquad j = 1, 2,$$

а штрих в знаке суммы означает отсутствие члена, соответствующего $(0,0)$.

Заметим, что:

- Если m_1 делится на $2n_1$ и m_2 делится на $2n_2$, то $m_1 = 2l_1n_1 = k_1n_1$, $m_2 = 2l_2n_2 = k_2n_2$, где k_1, k_2 – четные, поэтому
$$e^{2\pi i \frac{m_j}{2n_j}} = e^{2\pi i \frac{2l_jn_j}{2n_j}} = e^{2\pi i l_j} = \cos 2\pi l_j + i \sin 2\pi l_j = 1 \quad (j = 1, 2).$$
- Если m_1 не делится на $2n_1$ и m_2 не делится на $2n_2$, то $m_1 = (2l_1 - 1)n_1 = k_1n_1$, $m_2 = (2l_2 - 1)n_2 = k_2n_2$, где k_1, k_2 – нечетные, поэтому
$$e^{2\pi i \frac{m_j}{2n_j}} = e^{2\pi i \frac{(2l_j-1)n_j}{2n_j}} = e^{2\pi i (l_j - \frac{1}{2})} = \cos(2\pi l_j - \pi) + i \sin(2\pi l_j - \pi) = -1 \quad (j = 1, 2).$$
  В этих случаях сумма в скобках в (6) равна двум.
- Если m_1 делится на $2n_1$ и m_2 не делится на $2n_2$ или m_1 не делится на $2n_1$ и m_2 делится на $2n_2$, то $e^{2\pi i \frac{m_1}{2n_1}} e^{2\pi i \frac{m_2}{2n_2}} = -1$ и сумма в скобках в (6) равна нулю.

Поэтому
$$\delta_N(f) \le 2 \sideset{}{'}\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^2} \left| \hat{f}(k_1n_1, k_2n_2)\Big(1 + e^{2\pi i \frac{k_1n_1}{2n_1}} e^{2\pi i \frac{k_2n_2}{2n_2}}\Big)\right|$$
$$= 4\Bigg(\sideset{}{'}\sum_{\substack{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^2 \\ k_1,k_2 \text{ – четные}}} |\hat{f}(k_1n_1, k_2n_2)| + \sideset{}{'}\sum_{\substack{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^2 \\ k_1,k_2 \text{ – нечетные}}} |\hat{f}(k_1n_1, k_2n_2)| \Bigg) = S_1 + S_2.$$

Оценим S_1. Так как в этом случае k_1, k_2 – четные, т. е. $k_1 = 2l_1$, $k_2 = 2l_2$, то с учетом включения $f \in U_2((\beta_1, \beta_2), (\theta_1, \theta_2), (1, 1))$, получаем
$$S_1 = 4 \sideset{}{'}\sum_{(l_1,l_2)\in\mathbb{Z}_+^2}^{\infty} \left|\hat{f}(2l_1n_1, 2l_2n_2)\right| \le 4 \sideset{}{'}\sum_{(l_1,l_2)\in\mathbb{Z}_+^2}^{\infty} (\overline{2l_1n_1})^{\beta_1} (\overline{2l_2n_2})^{\beta_2} \theta_1^{2l_1n_1} \theta_2^{2l_2n_2}$$
$$\underset{\beta_1,\beta_2,\theta_1,\theta_2}{\ll} n_1^{\beta_1} \theta_1^{2n_1} + n_2^{\beta_2} \theta_2^{2n_2}.$$

Теперь оценим S_2. Поскольку $f \in U_2((\beta_1, \beta_2), (\theta_1, \theta_2), (1, 1))$, а k_1 и k_2 – оба нечетные, то есть $k_1 = 2l_1 - 1$, $k_2 = 2l_2 - 1$, то
$$S_2 = 4 \sideset{}{'}\sum_{(l_1,l_2)\in\mathbb{Z}_+^2}^{\infty} \left|\hat{f}((2l_1 - 1)n_1, (2l_2 - 1)n_2)\right|$$
$$\le 4 \sum_{l_1,l_2=1}^{\infty} ((2l_1 - 1)n_1)^{\beta_1} ((2l_2 - 1)n_2)^{\beta_2} \theta_1^{(2l_1-1)n_1} \theta_2^{(2l_2-1)n_2}$$
$$\underset{\beta_1,\beta_2,\theta_1,\theta_2}{\ll} n_1^{\beta_1} n_2^{\beta_2} \theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2}.$$

В итоге
$$\delta_N(f) \underset{\beta_1,\beta_2,\theta_1,\theta_2}{\ll} n_1^{\beta_1} \theta_1^{2n_1} + n_2^{\beta_2} \theta_2^{2n_2} + n_1^{\beta_1} n_2^{\beta_2} \theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2},$$
и тем самым оценка (5) доказана.

Поскольку в условиях теоремы $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то

$$\delta_N(f) \underset{\beta_1,\beta_2,\theta_1,\theta_2}{\ll} \theta_1^{2n_1} + \theta_2^{2n_2} + \theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}.$$

Положим $n_1 = \left[\left(\frac{N}{2\log_{\theta_2}\theta_1}\right)^{1/2}\right]$ и $n_2 = \left[\left(\frac{N}{2\log_{\theta_1}\theta_2}\right)^{1/2}\right]$ ($[\ldots]$ – целая часть). Тогда

$$\begin{aligned}
\theta_1^{2n_1} &\underset{\theta_1}{\ll} \theta_1^{2\left(\frac{N}{2\log_{\theta_2}\theta_1}\right)^{1/2}} = \theta_2^{2\log_{\theta_2}\theta_1\left(\frac{N}{2\log_{\theta_2}\theta_1}\right)^{1/2}} = \theta_2^{2\left(\frac{N}{2\log_{\theta_1}\theta_2}\right)^{1/2}} = \theta_1^{(2N\log_{\theta_1}\theta_2)^{1/2}},\\
\theta_2^{2n_2} &\underset{\theta_2}{\ll} \theta_2^{2\left(\frac{N}{2\log_{\theta_1}\theta_2}\right)^{1/2}} = \theta_1^{(2N\log_{\theta_1}\theta_2)^{1/2}},\\
\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2} &\underset{\theta_1,\theta_2}{\ll} \theta_1^{\left(\frac{N}{2\log_{\theta_2}\theta_1}\right)^{1/2}}\theta_2^{\left(\frac{N}{2\log_{\theta_1}\theta_2}\right)^{1/2}} = \theta_2^{2\left(\frac{N}{2\log_{\theta_1}\theta_2}\right)^{1/2}} = \theta_2^{(2N\log_{\theta_2}\theta_1)^{1/2}} = \theta_1^{(2N\log_{\theta_1}\theta_2)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\delta_N(f) \underset{\theta_1,\theta_2}{\ll} \theta_1^{(2N\log_{\theta_1}\theta_2)^{1/2}}$. Тем самым оценка сверху доказана.

Перейдем теперь к оценке снизу. Пусть $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, $-\infty < \beta_1, \beta_2 \le 0$. Не уменьшая общности, можем считать, что $\theta_1 \ge \theta_2$. Положим $\theta_1 = e^{-h}$, $c = \log_{\theta_1}\theta_2 \ge 1$, тогда $\theta_2 = e^{-hc}$.

Пусть даны натуральное число N и N точек ξ_k $(k = 0, \ldots, N-1)$ из $[0,1]^2$. Обозначим

$$G(m) = \{m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 : \ |m_1| + c|m_2| \le M\},$$

а через $S(M)$ – количество элементов в $G(M)$.

Пусть

$$M = \sqrt{\frac{c}{2}(N + \gamma\sqrt{N})},$$

где $\gamma = \sqrt{18c} + 1$. Докажем, что $S(M) \ge N + 1$.

Воспользуемся неравенством $|S - N| < L$, где S – площадь плоского множества M, N – количество целочисленных точек этого множества, L – его периметр [11].

Оценим L – периметр ромба $G(M)$. Длина стороны ромба

$$\sqrt{\left(1 + \frac{1}{c^2}\right)M^2} < \sqrt{(1+1)M^2} = \sqrt{2}M < \frac{3}{2}M.$$

Тогда $L < 6M$. Площадь ромба $S = \frac{2M^2}{c}$.

Отсюда

$$\left|\frac{2M^2}{c} - S(M)\right| < 6M,$$

поэтому

$$S(M) > \frac{2M^2}{c} - 6M = N + \gamma\sqrt{N} - 6\sqrt{\frac{c}{2}(N + \gamma\sqrt{N})}.$$

Откуда легко получить, что $S(M) \ge N + 1$.

Следуя И.Ф. Шарыгину [8], рассмотрим тригонометрический многочлен

$$t(x_1,x_2)=\sum_{(m_1,m_2)\in G(M)} c(m_1,m_2)e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}$$

и потребуем, чтобы $t(\xi_k)=0$ $(k=0,\ldots,N-1)$. Такие ненулевые многочлены существуют, так как для определения их коэффициентов Фурье мы получаем систему линейных однородных уравнений с числом неизвестных большим, чем число уравнений. Положим теперь

$$f(x_1,x_2)=\frac{(2M)^{\beta_1}(\frac{2}{c}M)^{\beta_2}e^{-2\pi i(m_1'x_1+m_2'x_2)}}{e^{2hM}c(m_1',m_2')}t(x_1x_2),$$

где

$$|c(m_1',m_2')|=\max_{(m_1,m_2)\in G(M)}|c(m_1,m_2)|>0.$$

Поскольку для всякого $(m_1,m_2)\in G(M)$ выполнено неравенство $|m_1|+c|m_2|\le M$ и для $(m_1',m_2')\in G(M)$ выполнено неравенство $|m_1'|+c|m_2'|\le M$, то

$$|m_1-m_1'|+c|m_2-m_2'|\le|m_1|+|m_1'|+c(|m_2|+|m_2'|)\le 2M,$$

то есть $(m_1-m_1',m_2-m_2')\in G(2M)$. Это означает, что спектр многочлена $f(x_1,x_2)$ является подмножеством множества $G(2M)$, т.е. для каждого (m_1,m_2) из этого спектра имеем $|m_1|+c|m_2|\le 2M$, откуда $|m_1|\le 2M$, $c|m_2|\le 2M$.

Далее, поскольку $\beta_1\le 0$, $\beta_2\le 0$, то

$$(2M)^{\beta_1}\le\left|m_1\right|^{\beta_1},\qquad\left(\frac{2M}{c}\right)^{\beta_2}\le|m_2|^{\beta_2}.$$

Тогда при любых $(m_1,m_2)\in G(2M)$

$$|\hat f(m_1,m_2)|\le(2M)^{\beta_1}\left(\frac{2M}{c}\right)^{\beta_2}e^{-2hM}\le\overline{m}_1^{\beta_1}\overline{m}_2^{\beta_2}e^{-h|m_1|}e^{-hc|m_2|}=\overline{m}_1^{\beta_1}\overline{m}_2^{\beta_2}\theta_1^{|m_1|}\theta_2^{|m_2|}$$

и $\hat f(m_1,m_2)=0$ при $(m_1,m_2)\notin G(2M)$. Таким образом, $f(\xi_k)=0$ $(k=0,\ldots N-1)$ и $f\in U_2((\beta_1,\beta_2),(\theta_1,\theta_2),(1,1))$.

Оценим теперь $\delta_N(f)$:

$$\delta_N(f)=\left|\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2-\sum_{k=0}^{N-1}a_kf(\xi_k)\right|=\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$$
$$=(2M)^{\beta_1}\left(\frac{2M}{c}\right)^{\beta_2}e^{-2hM}.$$

С учетом определения $M=\sqrt{\frac{c}{2}(N+\gamma\sqrt{N})}$, имеем

$$\begin{aligned}\delta_N(f)&=(2M)^{\beta_1}\left(\frac{2M}{c}\right)^{\beta_2}e^{-2hM}\\&=\left(2\sqrt{\frac{c}{2}(N+\gamma\sqrt{N})}\right)^{\beta_1}\left(2\sqrt{\frac{c}{2c^2}(N+\gamma\sqrt{N})}\right)^{\beta_2}e^{-h\sqrt{2c(N+\gamma\sqrt{N})}}\\&\underset{\beta_1,\beta_2,}{\gg}N^{\beta_1/2}N^{\beta_2/2}e^{-h\sqrt{2cN}}e^{-\frac{h\gamma}{\sqrt2}}\underset{\beta_1,\beta_2,\theta_1,\theta_2}{\gg}N^{(\beta_1+\beta_2)/2}\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}}.\end{aligned}\tag{7}$$

Так как в данном случае $\beta_1=\beta_2=0$, то $\delta_N(f)\underset{\theta_1,\theta_2}{\gg}\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}}$. □

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{\beta}=(\beta,\beta)$, $\beta<0$, $\boldsymbol{\theta}=(\theta,\theta)$, $0<\theta<1$. *Тогда*

$$N^{\beta}\theta^{\sqrt{2N}} \underset{\beta,\theta}{\ll} \inf_{\{(\xi_j,\eta_j)\}_{j=1}^N} \sup_{f\in U_2((\beta,\beta),(\theta,\theta),(1,1))} \left|\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N f(\xi_j,\eta_j)\right| \underset{\beta,\theta}{\ll} N^{\frac{\beta}{2}}\theta^{\sqrt{2N}},$$

где оценка сверху достигается на квадратурной формуле Шарыгина

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\Big(\frac{j}{n},\frac{k}{n}\Big)+f\Big(\frac{j}{n}+\frac{1}{2n},\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\Big)\right)$$

при $N=2n^2$.

Доказательство. *Оценка сверху.* Если $f\in U_2((\beta_1,\beta_2),(\theta_1,\theta_2),(1,1))$, то, по доказанному выше утверждению (5), имеем

$$\delta_N(f)\underset{\beta_1,\beta_2,\theta_1,\theta_2}{\ll} n_1^{\beta_1}\theta_1^{2n_1}+n_2^{\beta_2}\theta_2^{2n_2}+n_1^{\beta_1}n_2^{\beta_2}\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}=n_1^{\beta}\theta^{2n_1}+n_2^{\beta}\theta^{2n_2}+(n_1n_2)^{\beta}\theta^{n_1+n_2}.$$

Далее, при $n_1=n_2=n\sqrt{N/2}$ следует $\delta_N(f)\underset{\beta,\theta}{\ll}n^{\beta}\theta^{2n}$ или $\delta_N(f)\underset{\beta,\theta}{\ll}N^{\beta/2}\theta^{\sqrt{2}N}$.

Оценка снизу. В силу (7), существует функция $f\in U_2((\beta_1,\beta_2),(\theta_1,\theta_2),(1,1))$ такая, что $\delta_N(f)\underset{\beta_1,\beta_2,\theta_1,\theta_2}{\gg}N^{(\beta_1+\beta_2)/2}\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}}$. Отсюда $\delta_N(f)\underset{\beta,\theta}{\gg}N^{\beta}\theta^{\sqrt{2N}}$. □

Замечание. В случае $\beta_1=\ldots=\beta_s=0$, $\theta_1=\ldots=\theta_s=e^{-h}$, $h>0$, класс $U_s(\beta,\theta,\alpha)$ сводится к классу $A_s(h)$ из [8], для которого И.Ф. Шарыгин при $s=2$ получил точный порядок убывания погрешности квадратурных формул $\delta_N(A_s(h))\asymp e^{-h\sqrt{2N}}$ $(N=1,2,\ldots)$. Ясно, что этот результат следует из теоремы 1 при $\theta_1=\theta_2=e^{-h}$.

Теорема 3. *Пусть дано* $\theta=(\theta_1,\theta_2)\in(0,1)^2$. *Тогда выполнено неравенство*

$$d_1\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}}\le\sup_{f\in F;\,(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}')\in\mathcal{E}(f)}\left|\int_{[0,1]^2}f(x)\,dx-\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(z_{j,k}+z'_{j,k})\right|\le 3d_2\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}},$$

где

$$F=U_2((\beta_1,\beta_2),(\theta_1,\theta_2),(1,1)),$$
$$\mathcal{E}(f)=\Big\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}'):\ |f(\xi_{j,k})-z_{j,k}|\le d_2\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}},\ |f(\xi'_{j,k})-z'_{j,k}|\le d_2\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}}\Big\};$$

$\xi_{j,k}=\left(\frac{j}{n_1},\frac{k}{n_2}\right)$; $\xi'_{j,k}=\left(\frac{j}{n_1}+\frac{1}{2n_1},\frac{k}{n_2}+\frac{1}{2n_2}\right)$; d_1, d_2 *– положительные постоянные, зависящие лишь от* θ_1, θ_2; $N=2n_1n_2$.

Доказательство. *Оценка сверху.*

$$\left|\int\limits_{[0,1]^2} f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(z_{j,k}+z'_{j,k})\right|$$
$$\leq \left|\int\limits_{[0,1]^2} f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(f(\xi_{j,k})+f(\xi'_{j,k})) + \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(f(\xi_{j,k})+f(\xi'_{j,k})-(z_{j,k}+z'_{j,k}))\right|$$
$$\leq \left|\int\limits_{[0,1]^2} f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(f(\xi_{j,k})+f(\xi'_{j,k}))\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(f(\xi_{j,k})+f(\xi'_{j,k})-(z_{j,k}+z'_{j,k}))\right|$$
$$= I_1 + I_2.$$

Ясно, что I_1 – оценка сверху при интегрировании по точной информации (см. теорему 1), то есть $I_1 \leq d_2\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}}$.

Оценим I_2:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left|\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(f(\xi_{j,k})-z_{j,k}) + \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(f(\xi'_{j,k})-z'_{j,k})\right| \\
&\leq \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}|(f(\xi_{j,k})-z_{j,k})| + \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}|(f(\xi'_{j,k})-z'_{j,k})| \\
&\leq \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1} d_2\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}} + \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1} d_2\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}} \\
&= \frac{1}{N}n_1n_2d_2\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}} + \frac{1}{N}n_1n_2d_2\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}} = 2d_2\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\left|\int\limits_{[0,1]^2} f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}(z_{j,k}+z'_{j,k})\right| \leq 3d_2\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}}.$$

Оценка сверху доказана.

Перейдем теперь к оценке снизу. В силу (7), получаем

$$\left|\int\limits_{[0,1]^2} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N} a_k f(t_k)\right| \geq d_1\theta_1^{\sqrt{2N\log_{\theta_1}\theta_2}}. \qquad \square$$

Теорема 4. *Пусть даны* $\boldsymbol{\beta} = (\beta,\beta)$, $\beta < 0$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta,\theta)$, $0 < \theta < 1$. *Тогда выполнено неравенство*

$$d_3N^{\beta}\theta^{\sqrt{2N}} \leq \sup_{f\in F;\,(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}')\in\mathcal{E}(f)}\left|\int_{[0,1]^2} f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(z_{j,k}+z'_{j,k})\right| \leq 3d_4N^{\beta/2}\theta^{\sqrt{2N}},$$

где

$$F = U_2((\beta,\beta),(\theta,\theta),(1,1)),$$
$$\mathcal{E}(f) = \left\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}'):\ |f(\xi_{j,k})-z_{j,k}| \leq d_4N^{\beta/2}\theta^{\sqrt{2N}},\ |f(\xi'_{j,k})-z'_{j,k}| \leq d_4N^{\beta/2}\theta^{\sqrt{2N}}\right\};$$

$\xi_{j,k} = \left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)$, $\xi'_{j,k} = \left(\frac{j}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}\right)$; d_3, d_4 – *положительные постоянные, зависящие лишь от* θ *и* β; $N = 2n^2$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

2. Восстановление функции из класса $U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))$

Теорема 5. *Пусть* $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. *Положим*

$$\delta(\Phi_N, F)_Y = \inf_{\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 \in \mathbb{Z}^N} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))} \left\| f(x_1,x_2) - \varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \ldots, \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}); (x_1,x_2)) \right\|_Y.$$

Тогда выполнены соотношения:

а) *восстановление функций в метрике* L_∞:

$$\delta(\Phi_N, F)_{L_\infty} \underset{\theta_1,\theta_2}{\asymp} N^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}};$$

б) *восстановление функций в метрике* L_2:

$$\delta(\Phi_N, F)_{L_2} \underset{\theta_1,\theta_2}{\asymp} N^{\frac{1}{4}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}};$$

с) *восстановление функций в метрике* L_p $(2 < p < \infty)$:

$$N^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}} \underset{\theta_1,\theta_2}{\ll} \delta(\Phi_N, F)_{L_p} \underset{\theta_1,\theta_2}{\ll} N^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}}.$$

Доказательство. Докажем сначала оценки сверху в каждом пункте.

Пусть $\theta_1 \le \theta_2$. Тогда существует число $h > 0$, такое, что $\theta_1 = e^{-h}$, $\theta_2 = e^{-hc}$ и $c = \log_{\theta_1} \theta_2 \ge 1$. Для целого положительного ρ зададим

$$E_\rho = \left\{ m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 : \ e^{-h(\overline{m}_1 + c\overline{m}_2)} \ge e^{-h\rho} \right\} \equiv \left\{ m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 : \ \overline{m}_1 + c\overline{m}_2 \le \rho \right\}.$$

Пусть дано целое положительное число N. Положим

$$n = \left[\sqrt{\frac{1}{2} cN + \frac{9c^2}{4}} - \frac{3c}{2} \right], \tag{8}$$

где $[\ldots]$ – целая часть числа. Тогда в силу того, что для всех целых положительных чисел ρ верно соотношение

$$\frac{2\rho^2}{c} - 6\rho < |E_\rho| < \frac{2\rho^2}{c} + 6\rho, \tag{9}$$

где $\left|E_\rho\right|$ – количество точек в E_ρ, выполняется

$$N' \equiv |E_n| < \frac{2n^2}{c} + 6n \le \frac{2}{c} \left(\sqrt{\frac{1}{2} cN + \frac{9c^2}{4}} - \frac{3c}{2} \right)^2 + 6 \left(\sqrt{\frac{1}{2} cN + \frac{9c^2}{4}} - \frac{3c}{2} \right) = N.$$

Определим линейные функционалы

$$l_j(f) = \hat{f}(m_1^{(j)}, m_2^{(j)}), \quad j = 1, \ldots, N', \qquad l_j(f) = 0, \quad j = N' + 1, \ldots, N.$$

где $\{(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \ldots, (m_1^{(N')}, m_2^{(N')})\}$ – некоторое упорядочение точек множества E_n.

Определим функцию $\varphi_N(\tau_1, \ldots, \tau_N; (x_1, x_2))$:

$$\varphi_N(\tau_1, \ldots, \tau_N; (x_1, x_2)) = \sum_{k=1}^{N'} \tau_k e^{2\pi i (m_1^{(k)} x_1 + m_2^{(k)} x_2)}.$$

Таким образом, для каждой функции $f \in L(0,1)^2$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}
&\varphi_N(l_1(f), \ldots, l_N(f); (x_1, x_2)) \\
&\qquad = \varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \ldots, \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}); (x_1, x_2)) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{N'} \hat{f}(m_1^{(k)}, m_2^{(k)}) e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)} = \sum_{(m_1, m_2) \in E_n} \hat{f}(m_1, m_2) e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)}.
\end{aligned}$$

Пусть функция f принадлежит классу $U_2((0,0), (\theta_1, \theta_2), (1,1))$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
(f - \varphi_N)(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2) - \varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \ldots, \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}); (x_1, x_2)) \\
&= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(m_1, m_2) e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)} - \sum_{(m_1, m_2) \in E_n} \hat{f}(m_1, m_2) e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)} \\
&= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus E_n} \hat{f}(m_1, m_2) e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Теперь, оценивая разность (10) в норме L_∞, получим

$$\|f - \varphi_N\|_{L_\infty} \leq \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus E_n} \left| \hat{f}(m_1, m_2) \right|.$$

Учитывая определение класса $U_2((0,0), (\theta_1, \theta_2), (1,1))$, продолжим последнее неравенство

$$\|f - \varphi_N\|_{L_\infty} \leq \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus E_n} e^{-h(\overline{m}_1 + c\overline{m}_2)} = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{(m_1, m_2) \in E_{k+1} \setminus E_k} e^{-h(\overline{m}_1 + c\overline{m}_2)}.$$

Для каждого $(m_1, m_2) \in E_{k+1} \setminus E_k$, в силу определения множеств E_ρ, при $\rho = k$ выполнено неравенство

$$k + 1 \geq \overline{m}_1 + c\overline{m}_2 > k. \tag{11}$$

Заметим еще, что

$$|E_{k+1} \setminus E_k| \ll k. \tag{12}$$

Поэтому (см. (8))

$$\begin{aligned}
\|f - \varphi_N\|_{L_\infty} &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{(m_1, m_2) \in E_{k+1} \setminus E_k} e^{-hk} = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-hk} \sum_{(m_1, m_2) \in E_{k+1} \setminus E_k} 1 \\
&\underset{h}{\ll} \sum_{k=n}^{\infty} e^{-hk} k \underset{h}{\ll} n e^{-hn} \underset{\theta_1, \theta_2}{\ll} N^{1/2} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Откуда, в силу произвольности функции f из класса $U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))$,

$$\sup_{f\in U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))}\|f-\varphi_N\|_{L_\infty}\underset{\theta_1,\theta_2}{\ll} N^{1/2}\theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2}N\log_{\theta_1}\theta_2}}.$$

Перейдем теперь к пункту б). Для этого оценим (10) в L_2-норме. В силу равенства Парсеваля, имеем

$$\|f-\varphi_N\|_{L_2}^2=\sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus E_n}\left|\hat f(m_1,m_2)\right|^2.$$

По определению класса $U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))$,

$$\|f-\varphi_N\|_{L_2}^2\le\sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus E_n}e^{-2h(\overline{m}_1+c\overline{m}_2)}=\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{(m_1,m_2)\in E_{k+1}\setminus E_k}e^{-2h(\overline{m}_1+c\overline{m}_2)}.$$

Далее, в силу соотношений (8), (11) и (12), получим

$$\begin{aligned}\|f-\varphi_N\|_{L_2}^2&\le\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{(m_1,m_2)\in E_{k+1}\setminus E_k}e^{-2hk}=\sum_{k=n}^{\infty}e^{-2hk}\sum_{(m_1,m_2)\in E_{k+1}\setminus E_k}1\\&\underset{h}{\ll}\sum_{k=n}^{\infty}e^{-2hk}k\underset{h}{\ll}ne^{-2hn}\underset{\theta_1,\theta_2}{\ll}N^{\frac14}\theta_1^{\sqrt{\frac12N\log_{\theta_1}\theta_2}}.\end{aligned}\tag{14}$$

Итак, в силу произвольности функции f из класса $U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))$,

$$\sup_{f\in U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))}\|f-\varphi_N\|_{L_2}\underset{\theta_1,\theta_2}{\ll}N^{\frac14}\theta_1^{\sqrt{\frac12N\log_{\theta_1}\theta_2}}.$$

Для доказательства оценки сверху в пункте с) оценим (10) в L_p-норме. В силу очевидного неравенства

$$\|g\|_{L_p}\le\|g\|_{L_\infty}^{1-2/p}\|g\|_{L_2}^{2/p},$$

где $2\le p<\infty$ и $g\in C[0,1]^2$, получим (см. также (13) и (14))

$$\|f-\varphi_N\|_{L_p}\underset{\theta_1,\theta_2}{\ll}N^{\frac12(1-\frac2p)}\theta_1^{(1-\frac2p)\sqrt{\frac12N\log_{\theta_1}\theta_2}}N^{\frac14\frac2p}\theta_1^{\frac2p\sqrt{\frac12N\log_{\theta_1}\theta_2}}=N^{\frac12-\frac1{2p}}\theta_1^{\sqrt{\frac12N\log_{\theta_1}\theta_2}}.$$

Оценки сверху доказаны.

Докажем оценки снизу. Пусть даны целое положительное число N и пара (A_N,φ_N), состоящая из множества $A_N\subset\mathbb{Z}^2$ мощности N и функция $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;(x_1,x_2))$.

Положим $n=\min\left\{l\in\mathbb{Z}_+:\ \frac{2l^2}{c}-6l\ge N\right\}$, т. е.

$$\frac{2(n-1)^2}{c}-6(n-1)<N\le\frac{2n^2}{c}-6n.\tag{15}$$

Поэтому $n=\sqrt{cN/2}+O(1)$.

Определим множество $B = E_{n+1} \setminus A_N$. Тогда, в силу равенства $|A_N| = N$, имеем

$$|B| \geq |E_{n+1}| - N > \frac{2(n+1)^2}{c} - 6(n+1) - \frac{2n^2}{c} + 6n = \frac{4n+2}{c} \asymp \sqrt{N}. \tag{16}$$

Определим функцию

$$f(x_1, x_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in B} \frac{e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}}{e^{h(n+1)}}.$$

В силу определений функции f и множества B, для каждого $(m_1, m_2) \in A_N$ выполнено равенство $\hat{f}(m_1, m_2) = 0$.

Покажем, что функция $f(x_1, x_2) \in U_2((0,0), (\theta_1, \theta_2), (1,1))$. Если $(m_1, m_2) \in B$, то $(m_1, m_2) \in E_{n+1}$, т. е. спектр тригонометрического многочлена $f(x_1, x_2)$ лежит в E_{n+1}. В силу определения множества E_ρ, для каждого $(m_1, m_2) \in E_{n+1}$ выполнено неравенство $\overline{m}_1 + c\overline{m}_2 \leq n + 1$. Отсюда при $(m_1, m_2) \in B \subset E_{n+1}$

$$\left|\hat{f}(m_1, m_2)\right| = e^{-h(n+1)} \leq e^{-h(\overline{m}_1 + c\overline{m}_2)} = \theta_1^{\overline{m}_1} \theta_2^{\overline{m}_2},$$

а при $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus E_{n+1}$ имеем $\hat{f}(m_1, m_2) = 0$. Итак, в силу определения, функция $f(x_1, x_2) \in U_2((0,0), (\theta_1, \theta_2), (1,1))$.

Оценим снизу $\|f\|_{L_\infty}$ и $\|f\|_{L_2}$. Для этого воспользуемся определением нормы в L_∞, равенством Парсеваля, условиями (15), (16) и определением функции $f(x)$:

$$\begin{aligned}
\|f(x_1, x_2)\|_{L_\infty} &= \sup_{(x_1, x_2) \in [0,1]^2} |f(x_1, x_2)| \geq |f(0,0)| = e^{-h(n+1)} \sum_{(m_1, m_2) \in B} 1 \\
&\underset{\theta_1, \theta_2}{\gg} N^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}}, \qquad\qquad (17) \\
\|f(x_1, x_2)\|_{L_2}^2 &= e^{-2h(n+1)} \sum_{(m_1, m_2) \in B} 1 \underset{\theta_1, \theta_2}{\gg} N^{\frac{1}{2}} e^{-2h\sqrt{\frac{1}{2} cN}}, \\
\|f(x_1, x_2)\|_{L_2} &\underset{\theta_1, \theta_2}{\gg} N^{\frac{1}{4}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}}.
\end{aligned}$$

Теперь оценим снизу $\|f\|_{L_p}$ при $2 < p < \infty$. Так как функция $f(x_1, x_2)$ является тригонометрическим многочленом порядка n по x_1, n/c по x_2, то к ней можно применить неравенство разных метрик [12, с. 133]

$$\|f\|_{L_\infty} \ll n^{2/p} \|f\|_{L_p}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|f\|_{L_p} \gg n^{-2/p} \|f\|_{L_\infty}.$$

Применяя теперь оценку (17) и условие (15), окончательно получаем

$$\|f\|_{L_p} \underset{\theta_1, \theta_2}{\gg} N^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}} N^{-\frac{1}{p}} = N^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}}. \qquad \square$$

3. Дискретизация решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов $U_2(\beta,\theta,\alpha)$

Теорема 6. *Пусть* $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$, $2<p<\infty$. *Положим*

$$\sigma(\Phi'_N,F)_Y=\inf_{(A_N,\varphi_N)}\sup_{f\in U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))}$$
$$\|u(t,(x_1,x_2);f)-\varphi_N(\hat f(m_1^{(1)},m_2^{(1)}),\ldots,\hat f(m_1^{(N)},m_2^{(N)});t,(x_1,x_2))\|_Y.$$

Тогда выполнены соотношения:

$$\sigma(\Phi'_N,F)_{L_\infty[0,\infty)\times[0,1]^2}\underset{\theta_1,\theta_2}{\asymp}N^{\frac12}\theta_1^{\sqrt{\frac12 N\log_{\theta_1}\theta_2}},$$

$$\sigma(\Phi'_N,F)_{L_2[0,\infty)\times[0,1]^2}\underset{\theta_1,\theta_2}{\asymp}N^{\frac14}\theta_1^{\sqrt{\frac12 N\log_{\theta_1}\theta_2}},$$

$$N^{\frac12-\frac1p}\theta_1^{\sqrt{\frac12 N\log_{\theta_1}\theta_2}}\underset{\theta_1,\theta_2}{\ll}\sigma(\Phi'_N,F)_{L_p[0,\infty)\times[0,1]^2}\underset{\theta_1,\theta_2}{\ll}N^{\frac12-\frac1{2p}}\theta_1^{\sqrt{\frac12 N\log_{\theta_1}\theta_2}}.$$

Доказательство основывается на полученном в [7] представлении решений уравнения теплопроводности и аналогично доказательству теоремы 5.

В заключение выражаю благодарность своему научному руководителю Н. Темиргалиеву за постановку задач, а также Е.А. Баилову и Ш.У. Ажгалиеву за оказанную помощь при их решении.

Список литературы

[1] **Темиргалиев Н.** О задаче восстановления по неточной информации // Вестник Евразийского национального университета. — 2004. — № 1. — С. 202–209.

[2] **Локуциевский О.В., Гавриков М.Б.** Начала численного анализа. — М.: ТОО "Янус", 1995.

[3] **Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** Выпуклый анализ и его приложения. — Изд. 2-е, исправл. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

[4] **Темиргалиев Н.** Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа // Вестник ЕНУ. — 1997. — № 3. — С. 90–144; Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестник ЕНУ. — 2002. — № 3–4. — С. 222–272.

[5] **Кейперс Л., Нидеррейтер Г.** Равномерное распределение последовательностей. — М.: Наука, 1985.

[6] **Коробов Н.М.** Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. — М.: Физматгиз, 1963.

[7] **Hua Loo Keng, Wang Yuan.** Application of Number Theory to Numerical Analysis. — Berlin etc.: Springer, 1981.

[8] **Шарыгин И.Ф.** Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1963. — Т. 3. — С. 370–376.

[9] **Ульянов П.Л.** О классах бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сборник.— 1990.— Т. 181, № 5.— С. 589–609.

[10] **Темиргалиев Н.** Классы $U_s(\beta, \theta,\ \alpha, \psi)$ и квадратурные формулы // Докл. РАН.— 2003.— Т. 393, № 5.— С. 605–608.

[11] **Котляр Б.Д.** О числе целых точек в плоском множестве // Квант.— 1989.— № 10.— С. 37.

[12] **Никольский С.М.** Приближение функции многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.

Евразийский национальный университет
им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова, 5,
Астана, 473021,
Республика Казахстан
E-mail: ntmath@mail.ru

Статья поступила
11 апреля 2005 г.
Переработанный вариант
26 мая 2005 г.