К. Н. Оспанов, М. Отелбаев УДК 517.956

ОБ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ КОШИ — РИМАНА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И. Н. Векуа [1] доказал, что у эллиптического уравнения

$$Lu \equiv \partial_{\bar z} u + a(z)\,u + b(z)\,\bar u = f(z), \tag{0.1}$$

$$\partial_{\bar z} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar z} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad z = x + iy \in \Omega,$$

при условии a, b, $f \in L_p(\Omega)$, $p > 2$, решение непрерывно в Ω, и любое решение соответствующей однородной системы представимо в виде

$$u(z) = \Phi(z)\exp[\omega(z)], \tag{0.2}$$

где $\Phi(z)$ — аналитическая, $\omega(z)$ — непрерывная в Ω функции. Тем самым была создана теория обобщенных аналитических функций. Основные утверждения этой теории звучат так же, как и в случае бесконечно дифференцируемых $a(z)$ и $b(z)$. И. Н. Векуа поставил задачу развить аналогичную теорию для a, b, f из класса, не вложенного в L_p при $p > 2$. В данной работе мы укажем подход к этой задаче, являющийся в некотором смысле наиболее общим.

Теория Векуа опирается на следующие три основных результата:

1) теорема о непрерывности решения (0.1);

2) теорема о представлении решения однородной системы в виде (0.2);

3) теорема о компактности операторов вида qT_Ω, $T_\Omega q$ (обозначения см. в § 1).

Справедливость таких теорем в некотором пространстве позволяет, почти дословно следуя схеме И. Н. Векуа, получить в этом пространстве основную часть теории обобщенных аналитических функций.

Описательно основной результат статьи состоит в следующем. Если для любых a, b, f из банахова пространства B относительно уравнения (0.1) справедливы утверждения типа 1) и 2), то такое пространство мы называем пространством Векуа (V-пространством). Очевидно, если банахово пространство B вложено в некоторое V-пространство, то оно само является V-пространством. Поэтому имеет смысл искать самое широкое V-пространство. В § 1 строится V-пространство $\boldsymbol{P}_1$ такое, что в нем верна теорема типа 3), и что любое V-пространство, удовлетворяющее некоторым разумным требованиям, вложено в $\boldsymbol{P}_1$. Полученное решение задачи И. Н. Векуа в определенном смысле окончательно. Достаточно общим следствием этого результата с легко проверяемыми условиями является

Теорема 0.1. *Симметрическое пространство является V-пространством, если и только если оно вложено в пространство Лоренца $\mathcal{L}_{2,1}$. В частности, $\mathcal{L}_{2,1}$ есть V-пространство.*

Отсюда на основании известного вложения $B^s_{p,\theta} \hookrightarrow \mathcal{L}_{2,1}$, которое выполняется в случаях (см., напр., [2]):

$$s \geqslant 2/p - 1,\ 1 < p < 2,\ \theta = 1 \ \text{или}\ s > 2/p - 1,\ p \geqslant 1,\ \theta \geqslant 1, \tag{0.3}$$

вытекает

Следствие 0.1. Пространство Никольского — Бесова $B^s_{p,\theta}$ является V-пространством при условии (0.3).

История вопроса такова. Ряд результатов, развивающих теорию обобщенных аналитических функций Векуа, был сообщен в совместном докладе Н. К. Блиева, М. Отелбаева [3] (см. также заметку [4]) на 5-м Советско-Чехословацком совещании (Алма-Ата, 1976 г.). Первый из соавторов доклада [3] интересовался переносом теории Векуа на уравнения с коэффициентами из пространства Бесова, второй занимался поисками наиболее широкого пространства, в котором справедлива теория Векуа. В дальнейшем из соображений приоритета авторы [3] опубликовали раздельные работы [5]—[7] (см. также [8]) в соответствии с их первоначальным вкладом в [3]. Указанный выше основной результат и теорема 0.1, анонсированные в [3] и принадлежащие М. Отелбаеву, доказаны в [7] в несколько меньшей общности. Теорема 4 из [3], полученная авторами [3] совместно (это отмечено в [7]), легла в основу [9]. Метод работы [7] в [10], [11] перенесен на случай эллиптических уравнений высокого порядка. В [12], [13] для уравнения (0.1) в одном модельном случае описаны все корректные краевые задачи. В [14] вне связи с (0.1) изучаются обобщения пространств, введенных в [7].

В данной работе мы обобщаем основные результаты [7], одновременно упрощая доказательства. В частности, вводится пространство W, облегчающее проверку условий. В § 3 приведены примеры, показывающие эффективность общих утверждений: доказательство того факта, что в данном пространстве справедлива теория Векуа, сводится к проверке более или менее стандартного вложения. На этом пути получается следствие 0.1, совпадающее с теоремой 4 из [3]. Наконец, дается описание всех корректных краевых задач в круге для уравнения (0.1), обобщающее [12], [13], а также отмечены нерешенные вопросы (замечания 2.3, 2.4, 3.1).

§ 1. Теорема о компактности

Пусть E — комплексная плоскость точек $z=x+iy$, Ω — ограниченное открытое множество в E. Как обычно, через $C(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных функций. Через $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ обозначим пространство, полученное пополнением бесконечно гладких в $\overline{\Omega}$ функций по норме

$$\|u\|_{\boldsymbol{P}_1(\Omega)}=\sup_{z\in\overline{\Omega}}\frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{|u(\xi)|}{|z-\xi|}\,d\xi. \tag{1.1}$$

В теории Векуа важную роль играет следующий оператор:

$$Tf\equiv(T_\Omega f)(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{f(\xi)}{z-\xi}\,d\xi. \tag{1.2}$$

Из определения нормы в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ и плотности гладких функций в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ легко вытекает следующее

Утверждение 1.1. *Оператор T_Ω непрерывен из $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$.*

Справедлива следующая

Теорема 1.1 (о компактности). *Пусть $q(z)\in\boldsymbol{P}_1(\Omega)$. Тогда:*

а) *оператор $T_\Omega q$ вполне непрерывен из $C(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$;*

б) *оператор qT_Ω вполне непрерывен из $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$.*

Доказательство. Докажем утверждение а). Для $f(z)\in C(\overline{\Omega})$ имеем

$$|(T_\Omega qf)(z)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{q(\xi)f(\xi)}{z-\xi}\,d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\|f\|_{C(\overline{\Omega})}\int_{\Omega}\frac{|q(\xi)|}{|z-\xi|}\,d\xi\leqslant\|q\|_{\boldsymbol{P}_1(\Omega)}\|f\|_{C(\overline{\Omega})}. \tag{1.3}$$

Отсюда вытекает ограниченность $T_\Omega q$ из $C(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$. Если $q\in C^\infty(\overline{\Omega})$, то $T_\Omega q$ вполне непрерывен. Если же $q(z)\notin C^\infty(\overline{\Omega})$, то в силу определения $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ найдется последовательность $\{q_n\}_{n\geqslant1}$, которая в метрике $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ сходится к q. Но тогда из неравенства

$$\|(T_\Omega q_n-T_\Omega q)f\|_{C(\overline{\Omega})}\leqslant\|f\|_{C(\overline{\Omega})}\|q_n-q\|_{\boldsymbol{P}_1(\Omega)},$$

которое доказывается, как и (1.3), вытекает, что операторы $T_\Omega q_n$ сходятся (в равномерной операторной топологии) к оператору $T_\Omega q$.

Так как для каждого n оператор $T_\Omega q_n$ вполне непрерывен, утверждение а) теоремы доказано. Утверждение б) доказывается по той же схеме.

Замечание 1.1. Если Ω — неограниченное множество, то теорема 1.1 сохраняется в случае финитных $q(\cdot)$.

§ 2. Теоремы о непрерывности и представлении решения

Предварительно рассмотрим вспомогательную краевую задачу. Пусть $G=\{z: z=x+iy\in E,\ |z|<1\}$ — круг, Γ — его граница, а S — такой проектор в $L_2(\Gamma)$, что если $u\in L_2(\Gamma)$ и $u(\varphi)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\varphi)$, то $(Su)(\varphi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \exp(in\varphi)$, $\varphi\in\Gamma$.

Обозначим через l оператор, полученный замыканием в пространстве $\boldsymbol{P}_1(G)$ дифференциального оператора $l_0 u=\partial_{\bar z} u$, определенного на $C_S^\infty(\overline{G})$ — множестве бесконечно дифференцируемых на $\overline{G}$ функций $u(z)$, для которых $(Su|_\Gamma)(\varphi)=0$.

Лемма 2.1. *Оператор l имеет ограниченный из $\boldsymbol{P}_1(G)$ в $\boldsymbol{P}_1(G)$ обратный оператор l^{-1}, который равен T_G.*

Доказательство. Легко проверить, что $u=(T_G f)(z)$ принадлежит $D(l)$ — области определения l — и удовлетворяет уравнению $lu=f$. Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать единственность решения уравнения $lu=0$.

По определению l — замыкание своего сужения на гладкие функции. Поэтому существуют гладкие u_n такие, что $u_n\to u$, $lu_n=f_n\to 0\ (n\to\infty)$, где сходимость понимается в $\boldsymbol{P}_1(G)$. Для u_n (в силу гладкости) справедливо представление [1]: $u_n=\Phi_n(z)+T_G f_n$, где $\Phi_n(z)$ — аналитические в G и непрерывные на E функции.

В силу краевого условия для u_n получаем

$$S(\Phi_n(z)|_\Gamma)(\varphi)=S(u_n|_\Gamma)(\varphi)-S((T_G f_n)|_\Gamma)(\varphi)=0.$$

Отсюда следует, что $\Phi_n(z)|_\Gamma=\sum\limits_{m=-\infty}^{-1} c_{n,m}\exp(im\varphi)$. Такая функция аналитической в G не может быть. Следовательно, $\Phi(z)=0$. Таким образом, $u_n=T_G f_n$. Из непрерывности T_G из $\boldsymbol{P}_1(G)$ в $C(\overline{G})$ получаем, что $u_n=T_G f_n\to 0$ в $C(\overline{G})$. Поэтому $u=0$. Лемма доказана.

Приведем необходимые в дальнейшем определения.

Определение 2.1. Будем говорить, что функция u принадлежит $\boldsymbol{P}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, если для любого $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место $\psi u\in \boldsymbol{P}_1(\Omega)$.

Определение 2.2. Функция $u\in\boldsymbol{P}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется решением уравнения

$$Lu\equiv\partial_{\bar z}u+au+b\bar u=f,\quad a,\ b,\ f\in\boldsymbol{P}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{2.1}$$

если существует последовательность бесконечно гладких в Ω функций $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ такая, что для любого $\psi(\cdot)\in C_0^\infty(\Omega)$ выполнены соотношения

$$\psi Lu_n \xrightarrow{P_1(\Omega)} \psi f,\quad \psi u_n \xrightarrow{P_1(\Omega)} \psi u.$$

Теорема 2.1 (о непрерывности). *Пусть Ω — открытое подмножество E, a, b, $f\in\boldsymbol{P}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Предположим, что $u\in\boldsymbol{P}_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ — решение уравнения* (2.1). *Тогда u непрерывна в Ω.*

Доказательство. Пусть z_0 — произвольная точка в Ω. Возьмем шары Q_{z_0} и $\widetilde{Q}_{z_0}$ с центрами в z_0, радиусы которых соответственно равны ε и $\varepsilon/2$, где ε настолько мало, что $Q_{z_0}\subset\subset\Omega$. Без ограничения общности можно считать, что $z_0=0$. Пусть $u(z)$ — произвольное решение (2.1) Покажем, что $u(z)$

непрерывна в $\widetilde{Q}_0$, тем самым теорема будет доказана. Возьмем функцию $\psi(z)\in C_0^\infty(Q_0)$ такую, что $\psi(z)=1$ в $\widetilde{Q}_0$, и положим $\varphi(z)=\psi(z)\,u(z)$. Тогда $L\varphi=\psi(z)\,Lu+u\partial_{\bar z}\psi=\psi(z)\,f+u\partial_{\bar z}\psi$. Правая часть этого уравнения принадлежит $\boldsymbol{P}_1(Q_0)$, ее обозначим через g и получим уравнение

$$L\varphi\equiv\partial_{\bar z}\varphi+a\varphi+b\bar\varphi=g\in\boldsymbol{P}_1(Q_0),\quad \varphi|_\Gamma=0, \tag{2.1'}$$

где Γ — граница Q_0. Сделаем замену переменной $z=\varepsilon z_1$, тогда (2.1′) переходит в следующее выражение:

$$\begin{cases}\partial_{\bar z_1}\varphi_\varepsilon+\varepsilon a(\varepsilon z_1)\varphi_\varepsilon+\varepsilon b(\varepsilon z_1)\bar\varphi_\varepsilon=\tilde g\in\boldsymbol{P}_1(Q),\\ \varphi_\varepsilon|_{|z_1|=1}=0,\end{cases} \tag{2.1''}$$

где $Q=\{z:|z|\leqslant 1\}$. Согласно определению решения найдется последовательность $\{u_n\}_{n\geqslant1}$ такая, что для любого $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено $\psi Lu_n\to\psi f$. Так как Q_0 лежит строго внутри Ω, то из этих соотношений следует, что существует последовательность бесконечно гладких φ_n, для которых выполнено $\varphi_n\to\varphi_\varepsilon$,

$$\begin{cases}\partial_{\bar z_1}\varphi_n+\varepsilon a(\varepsilon z_1)\varphi_n+\varepsilon b(\varepsilon z_1)\bar\varphi_n=\tilde g_n\xrightarrow{\boldsymbol{P}_1(Q)}\tilde g,\\ \varphi_n|_{|z_1|=1}=0,\end{cases} \tag{2.1'''}$$

где $\tilde g$ — правая часть задачи (2.1″).

Задача (2.1‴) является переопределенной. Ее решения φ_n, очевидно, удовлетворяют

$$\partial_{\bar z_1}\varphi_n+\varepsilon a(\varepsilon z_1)\varphi_n+\varepsilon b(\varepsilon z_1)\bar\varphi_n=\tilde g_n,\quad S(\varphi_n|_{|z_1|=1})=0. \tag{2.2}$$

Обозначим $\partial_{\bar z_1}\varphi_n=v_n$. Тогда вместо (2.2) получим эквивалентные (в силу гладкости φ_n и леммы 2.1) задачи:

$$v_n+\frac{\varepsilon}{\pi}a(\varepsilon z_1)T_Qv_n+\frac{\varepsilon}{\pi}b(\varepsilon z_1)\overline{T_Qv_n}=\tilde g_n.$$

Оператор T_Q ограничен из $\boldsymbol{P}_1(Q)$ в $C(Q)$. Поэтому

$$\|v\|^{-1}_{C(\bar Q)}\left(\|\varepsilon a(\varepsilon z_1)T_Qv\|_{\boldsymbol{P}_1(Q)}+\|\varepsilon b(\varepsilon z_1)T_Qv\|_{\boldsymbol{P}_1(Q)}\right)\leqslant c\varepsilon\sup_{z\in Q}\int_Q\frac{|a(\varepsilon\xi)|}{|z-\xi|}d\xi+$$

$$+c\varepsilon\sup_{z\in Q}\int_Q\frac{|b(\varepsilon\xi)|}{|z-\xi|}d\xi=c\left(\sup_{z\in Q_0}\int_{Q_0}\frac{|a(\xi)|}{|z-\xi|}d\xi+\sup_{z\in Q_0}\int_{Q_0}\frac{|b(\xi)|}{|z-\xi|}d\xi\right).$$

Для бесконечно гладких внутри Ω функций a и b правая часть этого неравенства при $\varepsilon\to0$ также стремится к нулю. Поэтому в силу плотности в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ множества бесконечно гладких функций правая часть этого неравенства стремится к нулю для любых a и b из $\boldsymbol{P}_{1,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $\varepsilon\to0$. Следовательно, учитывая малость ε, к уравнению (2.2) можно применить принцип сжатых отображений с коэффициентом сжатия, независящим от n. Но в таком случае $v_n=K\tilde g_n$, где K — некоторое непрерывное преобразование из $\boldsymbol{P}_1(Q)$ в $\boldsymbol{P}_1(Q)$. Отсюда и из равенства $\partial_{\bar z_1}\varphi_n=v_n$ имеем $\varphi_n=T_Qv_n=T_QK\tilde g_n$.

Оператор T_QK непрерывен из $\boldsymbol{P}_1(Q)$ в $C(Q)$. Поэтому, переходя к пределу, получаем $\varphi_\varepsilon=T_QK\tilde g$. Так как $\tilde g\in\boldsymbol{P}_1(Q)$, то функция φ_ε непрерывна на Q. Следовательно, φ непрерывна на Q_0. Но тогда u непрерывна в $\widetilde{Q}_0$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Из доказательства теоремы нетрудно извлечь, что если $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, то верна оценка

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega}')} \leqslant C(\Omega', \Omega'', \|a\|_{P_1(\Omega'')}, \|b\|_{P_1(\Omega'')})\|f\|_{P_1(\Omega'')}.$$

Здесь и в дальнейшем $\subset\subset$ означает включение с некоторой окрестностью.

Теорема 2.2 (о представлении). *Пусть* $a, b \in P_{1, \mathrm{loc}}(\Omega)$. *Предположим, что* $u(z) \in P_{1, \mathrm{loc}}(\Omega)$ — *решение уравнения*

$$\partial_{\bar z} u + au + b\bar u = 0. \tag{2.3}$$

Тогда для любой строго внутренней к Ω *области* $\widetilde{\Omega}$ *имеет место представление*

$$u(z) = \Phi(z)\exp[\omega(z)], \tag{2.4}$$

где $\Phi(z)$ *аналитична в* $\widetilde{\Omega}$, *а* $\omega(z) \in C(\overline{\widetilde{\Omega}})$.

Доказательство. Так как теорема относится к строго внутренней области, можно считать, что $a, b \in P_1(\Omega)$. Для доказательства теоремы необходима

Лемма 2.2 (см. [7]). *Если* $g(z)$ *измерима*, $|g(z)| \leqslant M$ *для всех* $z \in \overline{\Omega}$ *и* $f \in P_1(\overline{\Omega})$, *то* $(T_\Omega gf)(z) \in C(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Если $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то $(T_\Omega gf)(z)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$. Если же $f \notin C^\infty(\overline{\Omega})$, то в силу плотности в $P_1(\Omega)$ множества $C^\infty(\overline{\Omega})$ существует последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$, которая при $n\to\infty$ сходится к f в метрике $P_1(\Omega)$ и $f_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Из простой оценки

$$\|T_\Omega gf_n - T_\Omega gf_m\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C(M)\|f_n - f_m\|_{P_1(\Omega)}$$

получаем, что последовательность $\{T_\Omega gf_n\}$ фундаментальна в $C(\overline{\Omega})$. Но эта последовательность сходится в $L_1(\Omega)$ к $T_\Omega gf$. Поэтому она сходится к $T_\Omega gf$ в $C(\overline{\Omega})$. Отсюда вытекает непрерывность $(T_\Omega gf)(z)$. Лемма доказана.

Пусть $u(z)$ — решение уравнения (2.3). Введем функцию

$$\varphi(z) = \begin{cases} a(z) + b(z), & \text{если } u(z) = 0; \\ a(z) + b(z)\dfrac{\overline{u(z)}}{u(z)}, & \text{если } u(z) \neq 0. \end{cases}$$

Тогда по лемме 2.2 функция $\omega(z) = (T_\Omega\varphi)(z)$ принадлежит $C(\overline{\Omega})$. Далее, ограниченная на $\overline{\Omega}$ и непрерывная в Ω функция $\Phi(z) = u(z)\exp[-\omega(z)]$ удовлетворяет уравнению $\partial_{\bar z}\Phi(z) = 0$ (в обобщенном смысле). Поэтому $\Phi(z)$ гомоморфна. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Если в теореме 2.2 $a, b \in P_1(\Omega)$, то представление (2.4) верно и при $\widetilde{\Omega} = \Omega$.

Замечание 2.3. Пространство $P_1(\Omega)$ естественным образом связано с оператором T_Ω. Если рассмотреть T_Ω из $L_1(\Omega)$ в $C(\Omega)$, то $P_1(\Omega)$ является частью $D(T_\Omega)$ — области определения $T_\Omega: L_1(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$. Тогда можно $D(T_\Omega)$ превратить в банахово пространство. Верны ли доказанные нами три теоремы, если заменить $P_1(\Omega)$ на $D(T_\Omega)$?

Замечание 2.4. Пространство $P_1(\Omega)$ по определению есть пополнение бесконечно гладких функций; что касается решений уравнений, то они допускают приближения гладкими. Эти факты мы использовали существенно. Можно ли получить доказанные три теоремы типа Векуа, определив P_1 как пространство всех функций, для которых норма $\|\cdot\|_{P_1(\Omega)}$ конечна, и за решения уравнений принимая обобщенные решения?

§ 3. Точность результатов

Ниже мы определим пространства Векуа (V-пространства).

Определение 3.1. Пусть Ω — открытое множество, $B(\Omega)$ — вложенное в $L_1(\Omega)$ пространство функций, в котором плотны бесконечно гладкие функции. Пространство $B(\Omega)$ назовем пространством Векуа (V-пространством), если выполнены следующие условия:

а) любое решение $u(z)$ уравнения (2.1) из $B_{\text{loc}}(\Omega)$, в котором $a, b, f \in B_{\text{loc}}(\Omega)$, принадлежит $C_{\text{loc}}(\Omega)$;

б) любое решение $u(z) \in B_{\text{loc}}(\Omega)$ уравнения (2.1), в котором $f \equiv 0$, $a, b \in B_{\text{loc}}(\Omega)$ в любой строго внутренней подобласти Ω' области Ω, представимо в виде $u(z) = \Phi(z) \exp[\omega(z)]$, где $\Phi(z)$ аналитична на $\bar{\Omega}'$, $\omega(z)$ непрерывна на Ω'.

Из определения V-пространств вытекает

Утверждение 3.1. *Если $B_1(\Omega) \subset\!\!\!\rightarrow B_2(\Omega)$ и $B_2(\Omega)$ является V-пространством, то $B_1(\Omega)$ есть пространство Векуа.*

Пусть

$$E_{1,1} = \{z \in E : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}, \quad E_{1,2} = \{z : x \geqslant 0,\ y \leqslant 0\},$$

$$E_{2,1} = \{z : x \leqslant 0,\ y \geqslant 0\}, \quad E_{2,2} = \{z : x \leqslant 0,\ y \leqslant 0\}.$$

Обозначим через $\chi_{k,l}(z)$ характеристическую функцию $E_{k,l}$ $(k, l = 1,2)$. Предположим, что на $C_0^\infty(E)$ определена некоторая норма $\|\cdot\|_{B(\Omega)}$. Пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по этой норме обозначим через $B(\Omega)$. Будем считать, что начало координат содержится в Ω.

Определение 3.2. Пространство $B(\Omega)$ назовем пространством типа W, если выполнены следующие условия:

$\text{w}_\text{а}$) для любой точки $z_0 \in \Omega$ оператор $R_{k,l}(z_0)$ умножения на $\chi_{k,l}(z - z_0)$ ограничен из $B(\Omega)$ в $B(\Omega)$ и $\|R_{k,l}(z_0)\| \leqslant C$, где C зависит только от расстояния z_0 до границы Ω;

$\text{w}_\text{б}$) если $f \in B(\Omega)$, то $|f| \in B(\Omega)$ и $\||f|\|_{B(\Omega)} \leqslant C \|f\|_{B(\Omega)}$, где C не зависит от $f \in B(\Omega)$;

$\text{w}_\text{в}$) если $f \in B(\Omega)$ и положительное число a таково, что $\{az : z \in \Omega\} \subset\subset \Omega$, то $f(az) \in B(\Omega)$;

$\text{w}_\text{г}$) интегральный оператор T_Ω ограничен из $B(\Omega)$ в $B(\Omega)$.

Теорема 3.1. *Пусть $B(\Omega)$ — пространство типа W, $B(\Omega) \subset\!\!\!\rightarrow L_1(\Omega)$. Тогда $B(\Omega)$ является V-пространством, если и только если $B(\Omega) \subset\!\!\!\rightarrow \boldsymbol{P}_1(\Omega)$. В частности, $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ есть пространство Векуа.*

Доказательство. В силу утверждения 3.1 и результатов предыдущих параграфов достаточность очевидна и при этом не используется, что $B(\Omega)$ является пространством типа W.

Докажем необходимость. Оператор J, сопоставляющий элементу $f \in B(\Omega)$ его самого в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$, замкнутый. Это следует из вложения $B(\Omega) \subset\!\!\!\rightarrow L_1(\Omega)$. Поэтому если $B(\Omega)$ не вложено в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$, то существует функция $f(z) \in B(\Omega)$ такая, что $f(z) \notin \boldsymbol{P}_1(\Omega)$. Действительно, если такая функция не существует, то в силу замкнутости J и теоремы Банаха получили бы, что J ограничен. Согласно условию теоремы и определению пространства типа W можно считать, что $f(z)$ — действительная неотрицательная функция. Так как начало координат содержится в Ω, то можно найти такое $a > 0$, что носитель функции $f_a(z) = f(az)$ будет лежать в некоторой малой окрестности $\Omega_\delta = \{z : |z| < \delta\}$ $(\delta > 0)$ нуля такой, что расстояние от Ω_δ до границы Ω больше, чем $3\delta > 0$. Непосредственным вычислением легко проверить, что из $f(z) \notin \boldsymbol{P}_1(\Omega)$ вытекает $f(az) \notin \boldsymbol{P}_1(\Omega)$. Так как $f_a(z) \notin \boldsymbol{P}_1(\Omega)$, найдутся точки $z_n \in \Omega$ такие, что

$$u_\delta(z_n) = \frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{|f_a(\xi)|}{|z_n - \xi|} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{f_a(\xi)}{|z_n - \xi|} d\xi \geqslant n. \tag{3.1}$$

Так как $f_a(z)\in B(\Omega)\subset\!\!\to L_1(\Omega)$, точки z_n для $n\geqslant n_0$ ($n_0=n_0(\delta)$ достаточно велико) лежат в $\Omega_{2\delta}=\{z:|z|<2\delta\}$, так что z_n при $n\geqslant n_0$ удален от границы Ω на расстояние, большее чем δ.

Функцию $f_a(z)$ можно представить в виде

$$f_a(z)=\sum_{k,l=1}^{2}\chi_{k,l}(z-z_0)\,f_a(z)=\sum_{k,l=1}^{2}f_{k,l}(z). \tag{3.2}$$

Согласно условию $\mathrm{w_a}$) имеем $f_{k,l}(z)\in B(\Omega)$ и

$$\sum_{k,l=1}^{2}\|f_{k,l}(z)\|_{B(\Omega)}\leqslant C(\delta)\,\|f_a(z)\|_{B(\Omega)}. \tag{3.3}$$

Из (3.1) вытекает, что по крайней мере для одной из четырех функций $f_{k,l}(z)$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{f_{\tilde k,\tilde l}(\xi)}{|z_n-\xi|}\,d\xi\geqslant\frac{n}{4}. \tag{3.4}$$

На носителе функции $f_{\tilde k,\tilde l}(\xi)$ мнимые и действительные части $(z_n-\xi)^{-1}$ не меняют своих знаков, а $f_{k,l}(\xi)$ неотрицательна. Поэтому из (3.4) получаем

$$|u_{\tilde k,\tilde l}(z_n)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{f_{\tilde k,\tilde l}(\xi)}{z_n-\xi}\,d\xi\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{f_{\tilde k,\tilde l}(\xi)}{z_n-\xi}\,d\xi\right|\geqslant\frac{n}{8}. \tag{3.5}$$

Заметим теперь, что функция

$$u_{\tilde k,\tilde l}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{f_{\tilde k,\tilde l}(\xi)}{z-\xi}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{f_{\tilde k,\tilde l}(\xi)}{z-\xi}\,d\xi$$

является решением уравнения $\partial_{\bar z}u=f_{\tilde k,\tilde l}(z)$ в области Ω. В силу (3.3) и условия $\mathrm{w_r}$) видим, что $u_{\tilde k,\tilde l}(z)$ принадлежит $B(\Omega)$.

По предположению $B(\Omega)$ — пространство Векуа, следовательно, функция $u_{\tilde k,\tilde l}(z)$ должна быть непрерывной в строго внутренней области. Так как в (3.5) все z_n при $n\geqslant n_0$ отстоят от границы Ω на расстояние большее, чем δ, получаем противоречие. Следовательно, $B(\Omega)\subset\!\!\to \boldsymbol{P}_1(\Omega)$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Ограничения $\mathrm{w_a}$) — $\mathrm{w_r}$), которые выделяют пространства типа W, являются естественными для пространств негладких функций. Что касается пространств гладких функций, то для них такие ограничения неестественны. Но такой пробел восполняется утверждением 3.1. Конечно, возможны другие варианты ограничений (см., напр., [7]). Было бы интересным уменьшить количество этих ограничений или заменить их еще более простыми.

Функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, определенные в Ω, называются равноизмеримыми, если для любого λ имеют место равенства

$$\mu\{z\in\Omega:\operatorname{Re}f_1(z)\geqslant\lambda\}=\mu\{z\in\Omega:\operatorname{Re}f_2(z)\geqslant\lambda\},$$

$$\mu\{z\in\Omega:\operatorname{Im}f_1(z)\geqslant\lambda\}=\mu\{z\in\Omega,\ \operatorname{Im}f_2(z)\geqslant\lambda\}.$$

Теорема 3.2. *Пусть в пространстве $B(\Omega)$, вложенном в $L_1(\Omega)$, бесконечно гладкие функции плотны. Допустим, что если $f(z)\in B(\Omega)$, то $|f(z)|\in B(\Omega)$, и любая равноизмеримая с $f(z)$ функция $g(z)$ также принадлежит $B(\Omega)$, причем*

$$\||f|\|_{B(\Omega)}+\|g\|_{B(\Omega)}\leqslant C_0\|f\|_{B(\Omega)},$$

где C_0 не зависит от f и g. Предположим еще, что оператор умножения на характеристическую функцию любого измеримого множества $\Omega'\subset\subset\Omega$ ог-

раничен по норме числом C, не зависящим от Ω'. Тогда $B(\Omega)$ является пространством Векуа, если и только если $B(\Omega) \subset\to \mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$, где $\mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$ — пространство Лоренца. В частности, $\mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$ является пространством Векуа.

Напомним определение нормы в пространстве Лоренца:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{2,1}(\Omega)} = \int_0^\infty \frac{1}{t^{3/2}} \left(\int_0^t f^*(\lambda)\, d\lambda \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty f^*(\lambda)\, \lambda^{-1/2}\, d\lambda,$$

где $f^*(\lambda) = \inf \{\sigma : \mu(\{x \in \overline{\Omega} : |f(x)| \geqslant \sigma\}) \leqslant \lambda\}$ (μ — мера Лебега).

Аналогичная теорема имеется в [7], тем не менее приведем схему доказательства. Нетрудно проверить, что $\mathcal{L}_{2,1}(\Omega) \subset\to \boldsymbol{P}_1(\Omega)$. Отсюда и из теоремы 3.1 в силу утверждения 3.1 вытекает, что любое пространство, вложенное в $\mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$, является V-пространством. А это доказывает теорему в достаточную сторону.

Пусть $B(\Omega)$ не вложено в $\mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$. Тогда найдется функция $\varphi(z) \in B(\Omega)$ такая, что $\varphi(z) \notin \mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$. Пусть z_0 — некоторая внутренняя точка Ω, $\delta > 0$ — достаточно малое число такое, что $\{z : |z - z_0| \leqslant \delta\} \subset\subset \Omega$. Для функции $\varphi(z)$ можно найти такую неотрицательную равноизмеримую функцию $g(z)$, что:

1) $g(z) = \omega(|z - z_0|)$ при $|z - z_0| \leqslant \delta$, где $\omega(t)$ — монотонно невозрастающая функция на $(0, \infty)$;

2) $g(z) \leqslant \omega(\delta/2)$ при $|z - z_0| > \delta$.

Эта функция согласно условию теоремы принадлежит $B(\Omega)$. Но из определения нормы пространства Лоренца вытекает, что она не может принадлежать $\mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$, т. к. не принадлежит $\mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$ ее равноизмеримая функция $\varphi(z)$. Теперь, оценивая норму в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ этой специального вида функции, легко убедиться, что в силу $g(z) \notin \mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$ ее норма в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ равна ∞.

Далее, представляя эту функцию в виде (3.2) суммы четырех функций, доказательство теоремы можно закончить, как и доказательство теоремы 3.1.

Из теоремы 3.1 вытекает теорема 0.1 из введения. Из теорем 3.1 и 3.2 и утверждения 3.1 получаем

Утверждение 3.2. *Любое пространство, вложенное в $\mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$ или в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$, есть V-пространство.*

Приведем примеры.

Пример 1. Пространство С. Л. Соболева $W_p^s(\Omega)$ ($1 \leqslant p < \infty$, $s > 0$) является V-пространством, если $s > 2/p - 1$. Это вытекает из утверждения 3.2 и того, что имеет место вложение $W_p^s(\Omega) \subset\to \mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$, если $s > 2/p - 1$.

Пример 2. Пространство $L_p(\Omega)$ есть пространство Векуа, если и только если $p > 2$.

Пример 3. В качестве последнего примера отметим результат следствия, приведенного в введении.

Доказательства утверждений, приведенных в этих примерах, получаются проверкой вложения в $\mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$. Соответствующие теоремы вложения имеются, напр., в работе [2] Ю. А. Брудного.

Замечание 3.2. Определяя пространства Векуа, мы потребовали только справедливость двух главных теорем типа Векуа — теоремы о непрерывности и теоремы о представлении. Что касается третьей важной теоремы — теоремы о компактности, то она верна в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$, которое будучи само V-пространством, в некотором смысле является всеобъемлющим. Поэтому в определении V-пространств не обязательно требовать справедливости теоремы о компактности.

Замечание 3.3. При доказательстве вложенности V-пространства в $\boldsymbol{P}_1(\Omega)$ (или в $\mathcal{L}_{2,1}(\Omega)$) мы не использовали теорему о представлении. Поэтому теорема о представлении в V-пространствах типа W есть следствие теоремы о непрерывности.

Пусть A — аддитивный оператор из банахова пространства B в себя такой, что $R(A) = B$ ($R(A)$ — область значений). Говорят, что оператор A_1 является корректным сужением оператора A, если $A_1 \subset A$ и существует непрерывный обратный A_1^{-1}, определенный на всем B. Пусть S — оператор, введенный в начале § 2. Справедлива

Теорема 3.3. *Пусть* K — *непрерывный оператор из* $\boldsymbol{P}_1(G)$ *в* $D(L)$, *где* $D(L)=\{u(z): \partial_{\bar z} u \in \boldsymbol{P}_1(G),\ u(z)\in C(\overline{G})\}$, $G=\{z: |z|<1\}$. *Тогда*:

а) *задача*

$$Lu \equiv \partial_{\bar z} u + a(z)u + b(z)\overline{u} = f(z),$$

$$S(u|_\Gamma)(\varphi) = S((KLu)|_\Gamma)(\varphi) \quad (a, b \in \boldsymbol{P}_1(G))$$

для любой правой части имеет единственное решение $u \in D(L)$;

б) *обратно, любое корректное сужение оператора* $\partial_{\bar z} u + au + b\bar u$ *с областью определения* $D(L)$ *может быть записано в виде приведенной в* ***п.*** а) *задачи.*

Эта теорема в случае a, $b \in L_p (p>2)$ была доказана в работе А. Шыныбекова [12] на основе результатов И. Н. Векуа. В случае a, $b \in \boldsymbol{P}_1(G)$ теорема 3.3 доказывается аналогично. Некоторые результаты этой работы без доказательства изложены в [15].

В заключение авторы благодарят П. И. Лизоркина за обстоятельное обсуждение результатов и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.— М.: Физматгиз, 1959.— 628 с.

2. Брудный Ю. А. О шкале пространств $L_p^{\lambda,\theta}$ и точных теоремах вложения // Теоремы вложения и их прилож.— Алма-Ата, 1976.— С. 23—27.

3. Блиев Н. К., Отелбаев М. К теории обобщенных аналитических функций И. Н. Векуа // Тр. 5-го Сов.-Чехословац. совещ. по применению методов теории функций и функц. анализа к задачам матем. физ., Алма-Ата, 1976. Тр. совещ.— Новосибирск, 1979.— С. 32—36.

4. Блиев Н. К., Отелбаев М. К теории обобщенных аналитических функций И. Н. Векуа // Сообщ. АН ГрузССР.— 1978.— Т. 90.— № 2.— С. 297—300.

5. Блиев Н. К. К теории обобщенных аналитических функций в дробных пространствах // Вестн. АН КазССР.—1976.— № 12.— С. 33—42.

6. Блиев Н. К. Обобщенные в смысле И. Н. Векуа аналитические функции и краевые задачи в дробных пространствах // Дифференц. уравнения.— 1978.— Т. XIV.— № 1.— С. 3—11.

7. Отелбаев М. К теории обобщенных аналитических функций И. Н. Векуа // Примен. методов функц. анализа к задачам матем. физ. и вычисл. матем.— Новосибирск, 1979.— С. 80—99.

8. Otelbaev M. O. A contribution to the Theory of Vekua's Generalized Analytic Functions// Amer. Math. Soc. Transl.— 1984.— V. 122.— № 2.— P. 105—117.

9. Блиев Н. К. Эллиптические системы дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости в дробных пространствах и краевые задачи:) Дис... докт. физ.-матем. наук.— М., 1980.— 187 с.

10. Оспанов К. Н. О свойствах решений уравнения типа стационарного уравнения Шрёдингера // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем.— 1982.— № 3.— С. 60—62.

11. Оспанов К. Н. Самосопряженность операторов типа Шрёдингера и свойства решений порожденных ими дифференциальных уравнений:) Дис... канд. физ.-матем. наук.— Алма-Ата, 1982.— 95 с.

12. Шыныбеков А. Н. О корректных сужениях обобщенной системы Коши — Римана // Краев. задачи для дифференц. уравнений и их прилож. в механ. и техн.— Алма-Ата, 1983.— С. 135—138.

13. Шыныбеков А. Н. О регулярных краевых задачах для системы Коши — Римана // Краев. задачи для дифференц. уравнений и их прилож. в механ. и техн.— Алма-Ата, 1983.— С. 138—141.

14. Мирошин Н. В. О максимальном пространстве Векуа и близких к нему пространствах // Тр. Матем. ин-та АН СССР.— 1988.— Т. 181.— С. 187—199.

15. Оспанов К. Н., Отелбаев М. Краевые задачи для обобщенной системы Коши—Римана с негладкими коэффициентами // ДАН СССР.— 1985.— Т. 283.— № 1.— С. 46—49.

г. Джезказган
г. Джамбул

Поступили
первый вариант 11.04.1985
окончательный вариант 01.03.1988