ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1999, т. 227, с. 237–242

УДК 517

О мультипликаторах кратных рядов Фурье

©1999 г. **Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова**

Поступило в феврале 1999 г.

Пусть $1 < p \le q < \infty$, $\mathbb{T}^n$ — n-мерный тор. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ является мультипликатором тригонометрических рядов Фурье из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_q(\mathbb{T}^n)$, если для произвольной функции $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$ с рядом Фурье $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)e^{ikx}$ найдется функция f_λ из $L_q(\mathbb{T}^n)$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_k \hat{f}(k)e^{ikx}$. Множество всех определенных таким образом мультипликаторов $\mathbf{m}_p^q$ является линейным пространством с нормой

$$\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} = \sup_{f\neq 0} \frac{\|f_\lambda\|_{L_q(\mathbb{T}^n)}}{\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}}.$$

В настоящей работе получены нижние и верхние оценки нормы мультипликаторов кратных тригонометрических рядов Фурье. Данные неравенства позволяют выделить классы последовательностей, для которых имеет место критерий принадлежности пространству $\mathbf{m}_p^q$.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Пусть $j_1, j_2, \dots, j_n$ — произвольная перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Невозрастающую перестановку последовательности $\{|\lambda_m|\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$, взятую по переменным индексам $m_{j_1}, m_{j_2}, \dots, m_{j_n}$, назовем кратной перестановкой последовательности $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$, соответствующей вектору $* = (j_1, \dots, j_n)$, и обозначим через $\{\lambda^{*j_1\dots *j_n}_{r_1\dots r_n}\}_{r\in\mathbb{N}^n}$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $p' = p/(p-1)$, M_0 *— множество всех отрезков (параллелепипедов) в* $\mathbb{Z}^n$, $* = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ *— произвольная перестановка чисел* $1, 2, \dots, n$. *Тогда имеет место неравенство*

$$c_1 \sup_{Q\in M_0} \frac{1}{|Q|^{1/q+1/p'}} \left| \sum_{m\in Q} \lambda_m \right| \le \|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} \le c_2 \sup_{k\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{(\prod_{i=1}^n k_i)^{1/q+1/p'}} \sum_{r_1=1}^{k_1} \dots \sum_{r_n=1}^{k_n} \lambda^{*j_1\dots *j_n}_{r_1\dots r_n}, \qquad (1)$$

где $|Q|$ *— количество элементов в множестве* Q, *константы* c_1, c_2 *зависят только от параметров* p, q *и размерности* n.

Отметим, что из правого неравенства соотношения (1) следует результат Хёрмандера [1]: при $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $1/r = 1/p - 1/q$ имеет место вложение $l_{r\infty} \hookrightarrow \mathbf{m}_p^q$. Обратное утверждение неверно.

Пример 1. Последовательность $\lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$, где

$$\lambda_m = \prod_{j=1}^n (|m_j|+1)^{-(1/p-1/q)}, \qquad m \in \mathbb{Z}^n,$$

не принадлежит пространству Лоренца $l_{r\infty}$, $1/r = 1/p - 1/q$, но

$$\sup_{k\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{(\prod_{i=1}^n k_i)^{1/p'+1/q}} \sum_{s_1=1}^{k_1} \dots \sum_{s_n=1}^{k_n} \lambda^{*_1\dots *_n}_{s_1\dots s_n} < \infty.$$

Определение 2. Последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ назовем обобщенно монотонной, если найдется число $c > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{Z}^n$ имеет место

$$|a_k| \le \frac{c}{|Q_k|} \left| \sum_{r\in Q_k} a_r \right|,$$

где $Q_k = \{r \in \mathbb{Z}^n \colon 0 \le |r_j| \le |k_j|,\ j = 1,\dots,n\}$.

Если последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ монотонна или квазимонотонна по каждому переменному индексу k_j, $j = 1,\dots,n$, то она является обобщенно монотонной.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $p' = p/(p-1)$. *Если последовательность* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *обобщенно монотонная, то для того, чтобы* $\lambda \in \mathbf{m}_p^q$, *необходимо и достаточно условие*

$$F(\lambda) = \sup_{m\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{\prod_{j=1}^n (|m_j|+1)^{1/p'+1/q}} \left| \sum_{k_1=-m_1}^{m_1} \dots \sum_{k_n=-m_n}^{m_n} \lambda_{k_1\dots k_n} \right| < \infty,$$

при этом $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} \sim F(\lambda)$.

Рассмотрим последовательность Шапиро [2] $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$, заданную рекуррентно: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_{2k} = \varepsilon_k$, $\varepsilon_{2k+1} = (-1)^k \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$. Данная последовательность состоит из чисел ± 1 и для нее имеет место оценка

$$\left| \sum_{m=1}^{N-1} \varepsilon_m e^{imx} \right| \le c N^{1/2}, \qquad x \in [0, 2\pi).$$

Определим кратный вариант последовательности Шапиро: $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$, где $\varepsilon_k = \varepsilon_{k_1}\varepsilon_{k_2}\dots\varepsilon_{k_n}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \le q \le 2$ *либо* $2 \le p \le q < \infty$, $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ *— последовательность Шапиро,* $* = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ *— произвольная перестановка чисел* $1, 2, \dots, n$,

$$\frac{1}{r} = \begin{cases} 1/2 + 1/q & \text{при } 2 \le p \le q < \infty, \\ 1/p' + 1/2 & \text{при } 1 < p \le q \le 2. \end{cases}$$

Тогда верны неравенства

$$c_1 \sup_{\substack{m\in\mathbb{N}^n\\ s\in\mathbb{Z}^n}} \frac{1}{(m_1\dots m_n)^{1/r}} \left| \sum_{1\le k\le m} \varepsilon_k \lambda_{k+s} \right| \le \|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} \le c_2 \sup_{m\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{(m_1\dots m_n)^{1/r}} \sum_{1\le k\le m} \lambda^{*_{j_1}\dots *_{j_n}}_{k_1\dots k_n}; \qquad (2)$$

здесь константы c_1, c_2 *зависят только от параметра* r *и размерности* n.

В теореме 2 при $2 \le p \le q < \infty$ верхние и нижние оценки не зависят от параметра p, а в случае $1 < p \le q \le 2$ от параметра q. Это означает, что при изменении упомянутых параметров в соответствующих случаях изменение класса $\mathbf{m}_p^q$ происходит в рамках соотношения (2).

Следствие 2. *Пусть* $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ — *последовательность Шапиро,* $1 < p \le q \le 2$ *либо* $2 \le p \le q < \infty$,

$$\frac{1}{r} = \begin{cases} 1/2 + 1/q & \text{при } 2 \le p \le q < \infty, \\ 1/p' + 1/2 & \text{при } 1 < p \le q \le 2. \end{cases}$$

Если последовательность $\{\varepsilon_k\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ *обобщенно монотонная*[1], *то для того, чтобы* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n} \in \mathbf{m}_p^q$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{(m_1\dots m_n)^{1/r}} \sum_{k_1=1}^{m_1} \dots \sum_{k_n=1}^{m_n} |\lambda_{k_1\dots k_n}| < \infty.$$

Заметим, что если последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}$ обобщенно монотонная, то $\lambda_\varepsilon = \{\varepsilon_k\lambda_k\}$ будет удовлетворять условию следствия 2, так как $\{\varepsilon_k^2\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$.

Пусть $E = \{\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n);\ \delta_j = 0 \text{ или } 1,\ j = 1, \dots, n\}$.

Определим разность для вектора $\delta \in E$ и последовательности комплексных чисел $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$

$$\Delta_\delta a_k = \Delta_{\delta_1}(\Delta_{\delta_2}\dots(\Delta_{\delta_n} a_{k_1\dots k_n})),$$

где

$$\Delta_{\delta_j} b_k = \begin{cases} b_k & \text{для } \delta_j = 0, \\ b_{k_1\dots k_{j-1}, k_j+1, k_{j+1}\dots k_n} - b_k & \text{для } \delta_j = 1. \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $* = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ — *произвольная перестановка чисел* $1, 2, \dots, n$. *Если последовательность вещественных чисел* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ *удовлетворяет условиям*

$$\inf_{\lambda=\mu+\nu} \sup_{k\in\mathbb{N}^n} \sup_{\delta\in E} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} \left(\Delta_\delta \mu_m + (m_1\dots m_n)^{|\frac12 - \frac1p| - 1} \nu_{m_1\dots m_n}^{*j_1\dots *j_n} \right) \right) < \infty,$$

$$\sup_k |\lambda_k| < \infty,$$

то $\lambda \in \mathbf{m}_p = \mathbf{m}_p^p$.

Данная теорема является обобщением теоремы 6 из [3] и, так же как она, является точной относительно параметра p.

Теоремы 2 и 3 для кратных тригонометрических рядов Фурье решают задачу о мультипликаторах (см. [4, с. 130]), а именно получены достаточные условия, существенно зависящие от параметра p, для принадлежности пространству мультипликаторов $\mathbf{m}_p$.

Пример 2. Пусть $2 < p < \infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ — последовательность Шапиро и $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$, где

$$\lambda_k = \prod_{j=1}^n \varepsilon_{k_j} k_j^{1/p-1/2}, \qquad k \in \mathbb{N}^n.$$

Последовательность λ удовлетворяет условиям теоремы 3, а также достаточной части теоремы 2, поэтому $\lambda \in \mathbf{m}_p$. С другой стороны (см. теорему 2 или следствие 2), $\lambda \notin \mathbf{m}_{p+\delta}$ для любого $\delta > 0$.

[1] Здесь и далее считаем, что соответствующая последовательность продолжена на все $\mathbb{Z}^n$ нулем.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для доказательства теорем нам понадобятся некоторые утверждения из работ [5] и [3], которые сформулируем в виде одной теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $f(x) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{imx}$, $* = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ *— произвольная перестановка чисел* $1, 2, \dots, n$, M_0 *— множество всех отрезков (параллелепипедов)* $Q = Q_1 \times \dots \times Q_n$ *из* $\mathbb{Z}^n$, $\{\bar{a}_k(M_0)\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ *— последовательность, где*

$$\bar{a}_k(M_0) = \sup_{\substack{Q\in M_0\\ |Q_j|\ge k_j}} \frac{1}{|Q|}\left|\sum_{m\in Q} a_m\right|,$$

и $|Q_j|$ *— количество элементов в отрезке* Q_j *из* $\mathbb{Z}$. *Тогда*

а) *если* $2 < p < \infty$, *то верны неравенства*

$$c_1 \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} \bar{a}_{k_1\dots k_n}^p(M_0) \le \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}^p \le c_2 \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} (a_{k_1\dots k_n}^{*_{j_1}\dots *_{j_n}})^p;$$

б) *если* $1 < p < 2$, *то*

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} (a_{k_1\dots k_n}^{*_{j_1}\dots *_{j_n}})^p \le c\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}^p.$$

Здесь константы c_1, c_2, c *зависят только от параметра* p *и размерности* n.

Доказательство теоремы 1. Пусть $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $f(x) \in L_p(\mathbb{T}^n)$ и $f(x) \sim \sim \sum a_m e^{imx}$. Из теоремы 4 следует

$$\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \lambda_m a_m e^{imx}\right\|_{L_q} \le c_1 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{q-2} \dots k_n^{q-2} \left((\lambda a)_{k_1\dots k_n}^{*_{j_1}\dots *_{j_n}}\right)^q\right)^{1/q}.$$

Заметим, что

$$\left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{q-2} \dots k_n^{q-2} \left((\lambda a)_{k_1\dots k_n}^{*_{j_1}\dots *_{j_n}}\right)^q\right)^{1/q} \sim$$

$$\sim \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} \left((\lambda a)_{m_1\dots m_n}^{*_{j_1}\dots *_{j_n}}\right)^{q'}\right)^{q/q'}\right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} \left(\lambda_{m_1\dots m_n}^{*_{j_1}\dots *_{j_n}} a_{m_1\dots m_n}^{*_{j_1}\dots *_{j_n}}\right)^{q'}\right)^{q/q'}\right)^{1/q}.$$

Пусть $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Далее, применяя неравенство Гёльдера и теорему 4, получим

$$\left\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \lambda_m a_m e^{imx} \right\|_{L_q(\mathbb{T}^n)} \le$$

$$\le c_1 \sup_k \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} \left(\lambda_{m_1\dots m_n}^{*j_1\dots *j_n} \right)^\tau \right)^{1/\tau} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} \left(a_{m_1\dots m_n}^{*j_1\dots *j_n} \right)^{p'} \right)^{q/p'} \right)^{1/q} \le$$

$$\le c_2 \sup_{k\ge 0} \left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1} \dots \sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1} \left(\lambda_{m_1\dots m_n}^{*j_1\dots *j_n} \right)^\tau \right)^{1/\tau} \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \sim$$

$$\sim \sup_{k\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{(\prod_{i=1}^n k_i)^{1/q+1/p'}} \left(\sum_{m_1=1}^{k_1} \dots \sum_{m_n=1}^{k_n} \lambda_{m_1\dots m_n}^{*j_1\dots *j_n} \right) \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}.$$

Правое неравенство соотношения (1) доказано. Покажем теперь истинность левого неравенства из (1). Пусть $\varphi \in \mathbf{m}_p^q$, $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n$ — произвольный отрезок в $\mathbb{Z}^n$, $f_0 = \sum_{m\in Q} e^{imx}$, следовательно, $\|f_0\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \sim (|Q_1| \dots |Q_n|)^{1/p'}$. Тогда из теоремы 4 следует

$$\|\varphi\|_{\mathbf{m}_p^q} = \sup_{f\neq 0} \frac{\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \lambda_m a_m e^{imx} \|_{L_q(\mathbb{T}^n)}}{\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}} \ge$$

$$\ge c_1 \frac{\| \sum_{m\in Q} \lambda_m e^{imx} \|_{L_q(\mathbb{T}^n)}}{(|Q_1| \dots |Q_n|)^{1/p'}} \ge$$

$$\ge c_2 \frac{1}{(|Q_1| \dots |Q_n|)^{1/p'}} \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{q-2} \dots k_n^{q-2} \left(\sup_{\substack{|G_i|\ge k_i \\ G\in M_0}} \frac{1}{|G|} \left| \sum_{m\in Q\cap G} \lambda_m \right| \right)^q \right)^{1/q} \ge$$

$$\ge c_3 \frac{1}{(|Q_1| \dots |Q_n|)^{1/p'}} \sup_{G\in M_0} \frac{1}{(|G_1| \dots |G_n|)^{1/q}} \left| \sum_{m\in G\cap Q} \lambda_m \right| \ge$$

$$\ge c_3 \frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}} \left| \sum_{m\in Q} \lambda_m \right|.$$

В силу произвольности выбора отрезка Q получим

$$\|\varphi\|_{\mathbf{m}_p^q} \ge c \sup_{Q\in M_0} \frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}} \left| \sum_{m\in Q} \lambda_m \right|.$$

Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 2. Пусть $2 \le p \le q < \infty$, $1/r = 1/2 + 1/q$. Из теоремы 1 следует

$$\|\lambda\|_{\mathbf{m}_2^q} \le c \sup_{m\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{(m_1 \dots m_n)^{1/r}} \sum_{1\le k\le m} \lambda_{k_1\dots k_n}^{*j_1\dots *j_n},$$

а так как $\mathbf{m}_2^q \hookrightarrow \mathbf{m}_p^q$, то верно правое неравенство соотношения (2). Докажем левое неравенство. Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ — последовательность Шапиро. Тогда

$$\left|\sum_{k_1=1}^{m_1}\ldots\sum_{k_n=1}^{m_n}\varepsilon_k e^{ikx}\right|\le c m_1^{1/2}\ldots m_n^{1/2}.$$

Рассмотрим функцию $f_0(x)=\sum_{1\le k\le m}\varepsilon_k e^{i(k+s)x}$, $s\in\mathbb{Z}^n$, $m\in\mathbb{N}^n$. Имеем

$$\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q}\ge\frac{\|\sum_{1\le k\le m}\varepsilon_k\lambda_{k+s}e^{i(k+s)x}\|_{L_q(\mathbb{T}^n)}}{\|f_0\|_{L_p(\mathbb{T}^n)}}\ge c_1\frac{\|\sum_{1\le k\le m}\varepsilon_k\lambda_{k+s}e^{i(k+s)x}\|_{L_q(\mathbb{T}^n)}}{m_1^{1/2}\ldots m_n^{1/2}}\ge$$

$$\ge c_2\frac{1}{(m_1\ldots m_n)^{1/2}}\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}k_1^{q-2}\ldots k_n^{q-2}\left(\sup_{\substack{|Q_i|\ge k_i\\ Q\in M_0}}\frac{1}{|Q|}\left|\sum_{l\in Q\cap[1,m]}\varepsilon_l\lambda_{l+s}\right|\right)^q\right)^{1/q}\ge$$

$$\ge c_3\frac{1}{(m_1\ldots m_n)^{1/2}}\sup_{Q\in M_0}\frac{1}{|Q|^{1/q}}\left|\sum_{l\in Q\cap[1,m]}\varepsilon_l\lambda_{l+s}\right|\ge$$

$$\ge c_3\frac{1}{m_1^{1/r}\ldots m_n^{1/r}}\left|\sum_{1\le k\le m}\varepsilon_k\lambda_{k+s}\right|.$$

Теорема доказана при $2\le p\le q<\infty$. Случай $1<p\le q\le 2$ следует из того, что $\mathbf{m}_p^q=\mathbf{m}_{q'}^{p'}$.

Доказательство теоремы 3. Это утверждение является сочетанием классической теоремы Марцинкевича для кратных тригонометрических рядов [6] и теоремы 2. Действительно, из условия теоремы 3 следует, что найдется представление $\lambda=\mu+\nu$, где последовательность μ удовлетворяет условиям теоремы Марцинкевича, а для ν верно

$$\sup_{k\in\mathbb{N}^n}\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}}\ldots\sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1}\nu_{m_1\ldots m_n}^{*j_1\ldots *j_n}(m_1\ldots m_n)^{|\frac12-\frac1p|-1}<\infty,$$

или

$$\sup_{m\in\mathbb{N}^n}\frac{1}{(m_1\ldots m_n)^{1/r}}\sum_{1\le k\le m}\nu_{k_1\ldots k_n}^{*j_1\ldots *j_n}<\infty,$$

где

$$\frac1r=\begin{cases}1/2+1/p & \text{при } 2\le p<\infty,\\ 1/p'+1/2 & \text{при } 1<p\le 2.\end{cases}$$

Таким образом ν согласно теореме 2 принадлежит пространству $\mathbf{m}_p$, а следовательно, и $\lambda\in\mathbf{m}_p$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hörmander L.* Estimates for translation invariant operators in L_p spaces // Acta math. 1960. V. 104. P. 93–140.
2. *Brillhart J., Carlitz L.* Note on the Shapiro polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 25. P. 114–118.
3. *Нурсултанов Е.Д.* О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // Мат. заметки. 1998. Т. 63, №2. С. 235–248.
4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
5. *Нурсултанов Е.Д.* Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy–Littlewood type inequalities // East J. Approx. 1998. V. 4, N 2. P. 243–275.
6. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.