Сибирский математический журнал
Июль—август, 1995. Том 36, № 4

УДК 512.48

О ПРОДОЛЖЕНИИ АВТОМОРФИЗМОВ КОЛЕЦ МНОГОЧЛЕНОВ

У. У. Умирбаев

Пусть $C = F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — кольцо многочленов над полем F от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если $n = 2$, то все автоморфизмы кольца C ручные [1, 2]. Возможно, при $n \geqslant 3$ кольцо C имеет дикие автоморфизмы [3]. Однако до сих пор не существует удовлетворительных методов изучения автоморфизмов кольца C при $n \geqslant 3$. Возникает естественный вопрос об описании автоморфизмов кольца C, которые поднимаются до автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры. Отметим, что с автоморфизмами свободных ассоциативных алгебр дело обстоит так же, как в случае кольца многочленов [4, 5]. В настоящей работе обсуждаются некоторые связи между автоморфизмами колец многочленов и свободных метабелевых ассоциативных алгебр.

В § 1 определены частные производные элементов свободных метабелевых ассоциативных алгебр и доказан аналог гипотезы якобиана для этих алгебр (теорема 1). Напомним, что вопрос о справедливости гипотезы якобиана для колец многочленов над полем характеристики нуль до сих пор открыт. Очевидно, каждый автоморфизм свободной метабелевой ассоциативной алгебры индуцирует автоморфизм кольца многочленов. Оказывается, верно и обратное (теорема 2), т. е. каждый автоморфизм кольца многочленов индуцируется некоторым автоморфизмом свободной метабелевой ассоциативной алгебры. Предложенный метод подъема автоморфизмов связан со свойствами матриц над кольцами многочленов. В § 2 приведено доказательство теоремы 2 и обсуждаются некоторые вопросы, связанные с примитивными элементами.

Все алгебры рассматриваются над произвольным (если не оговорено противное) фиксированным полем F.

§ 1. О якобиане свободных метабелевых ассоциативных алгебр

Ассоциативная алгебра называется *метабелевой*, если она удовлетворяет тождеству

$$[x, y][z, t] = 0.$$

Пусть $A = F\langle t_1, t_2, \dots, t_n\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра с базой $t_1, t_2, \dots, t_n$. Через T обозначим коммутаторный идеал алгебры A и положим $B = A/T^2$, $C = A/T$. Если $f \in A$, то через $\bar{f}$ и $\tilde{f}$ будем обозначать образы f при естественных гомоморфизмах $A \to B$ и $A \to C$ соответственно. Тогда B является свободной метабелевой ассоциативной алгеброй с базой $y_i = \bar{t}_i$, а C — кольцом многочленов от переменных $x_i = \tilde{t}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Через A' обозначим алгебру, антиизоморфную к A. Образ элемента $f \in A$ при антиизоморфизме $A \to A'$ будем обозначать через f'.

Пусть $\lambda : A' \otimes_F A \to A$ — отображение, определенное правилом $\lambda\big(\sum\limits_i f_i' \otimes g_i\big) = \sum\limits_i f_i g_i$, и I_A — ядро этого отображения. Известно [6], что I_A является свободным A-бимодулем, т. е. свободным правым $A' \otimes_F A$-модулем с базой $t_i' \otimes 1 - 1 \otimes t_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Отображение

$$d_A : A \to I_A, \tag{1}$$

определенное правилом

$$d_A(a) = a' \otimes 1 - 1 \otimes a,$$

называется *универсальным дифференцированием алгебры* A (см. [6]).

Частные производные $\frac{\partial a}{\partial t_i} \in A' \otimes_F A$ элемента $a \in A$ однозначно определяются формулой

$$d_A(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(t_i' \otimes 1 - 1 \otimes t_i\big) \frac{\partial a}{\partial t_i}.$$

Через $\partial(a)$ обозначим вектор-столбец $\left(\frac{\partial a}{\partial t_1}, \frac{\partial a}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial a}{\partial t_n}\right)^T$, где T — транспонирование.

Все алгебры рассматриваются в сигнатуре с единицей 1, т. е. слово подалгебра означает подалгебру с единицей 1. Все рассматриваемые дифференцирования переводят единицу алгебры в нуль. Поэтому дифференцирование d будем называть взаимно однозначным, если только для элементов $a \in F$ имеет место равенство $d(a) = 0$. С этой точки зрения d_A, ∂ являются взаимно однозначными дифференцированиями алгебры A.

Рассмотрим дифференцирования

$$\bar{\partial} : A \xrightarrow{\partial} [(A' \otimes_F A)^n]^T \xrightarrow{\varphi_1} [(C' \otimes_F C)^n]^T,$$
$$\tilde{\partial} : A \xrightarrow{\bar{\partial}} [(C' \otimes_F C)^n]^T \xrightarrow{\varphi_2} [C^n]^T,$$

где φ_1 — покомпонентное продолжение естественного гомоморфизма $A' \otimes_F A \to C' \otimes_F C$, а φ_2 — покомпонентное продолжение гомоморфизма $C' \otimes_F C \to C$, определенное правилом $\sum\limits_i f_i' \otimes g_i \to \sum\limits_i f_i g_i$.

Известно [7], что ядро $\bar{\partial}$ совпадает с $T^2 + F$, т. е. $\bar{\partial}$ индуцирует взаимно однозначное дифференцирование

$$\bar{\partial} : B \to [(C' \otimes_F C)^n]^T. \tag{2}$$

Легко проверить, что ядро $\tilde{\partial}$ совпадает с $T + F$ и $\tilde{\partial}$ индуцирует $\tilde{\partial} : C \to [C^n]^T$ — обычное дифференцирование кольца многочленов.

Положим

$$\bar{\partial}(\bar{f}) = \varphi_1(\partial(f)), \quad \tilde{\partial}(\tilde{f}) = \varphi_2(\bar{\partial}(\bar{f})).$$

Пусть

$$\Delta : C \to C' \otimes_F C$$

— отображение, индуцированное отображением d_A, т. е. $\Delta(\tilde{f}) = \tilde{f}' \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{f}$, $\tilde{f} \in C$. Для удобства обозначений положим $\Delta(x_i) = z_i$, $1 \otimes x_i = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $C' \otimes_F C$ становится кольцом многочленов от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Через z обозначим вектор-строку $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Согласно определениям d_A, ∂ имеем равенство

$$d_A(f) = (d_A(t_1), d_A(t_2), \ldots, d_A(t_n))\partial(f),$$

которое в $C' \otimes_F C$ индуцирует равенство

$$\Delta(\tilde{f}) = z\bar{\partial}(\bar{f}). \tag{3}$$

Превратим идеал $\overline{T}$ алгебры B в $C' \otimes_F C$-модуль, полагая $\bar{t}(1 \otimes x_i) = \bar{t}y_i$, $\bar{t}(x_i' \otimes 1) = y_i\bar{t}$, $\bar{t} \in \overline{T}$. Легко проверить, что сужение отображения $\bar{\partial}$ на $\overline{T}$ является гомоморфизмом $C' \otimes_F C$-модулей.

Лемма 1. *Пусть $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ — произвольный вектор с компонентами $u_i \in C' \otimes_F C$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда для существования элемента $\overline{w} \in \overline{T}$ с условием $\bar{\partial}(\overline{w}) = u$ необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$z_1u_1 + z_2u_2 + \cdots + z_nu_n = 0. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{w} = [y_i, y_j]\tilde{v}$, где $\tilde{v} \in C' \otimes_F C$. Тогда $\bar{\partial}\overline{w} = \bar{\partial}([y_i, y_j])\tilde{v} = (\varepsilon_j z_i - \varepsilon_i z_j)\tilde{v}$, где ε_i — вектор-столбец, у которого i-я компонента равна единице, остальные нулю. Следовательно, $z\bar{\partial}(\overline{w}) = (z_jz_i - z_iz_j)\tilde{v} = 0$. Так как равенство (4) линейно по $\overline{w}$, оно выполняется для любого $\overline{w} \in \overline{T}$.

Пусть вектор u удовлетворяет условию (4). Представим u_j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, в виде $u_j = v_j + z_nw_j$, где v_j не содержит z_n как многочлен от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Сравнивая степени по z_n в (4), имеем

$$\sum_{j=1}^{n-1} z_jv_j = 0, \quad u_n + \sum_{j=1}^{n-1} z_jw_j = 0.$$

Проводя индукцию по n, получаем, что найдется $\bar{v} \in \overline{T}$ с условием $\bar{\partial}(\bar{v}) = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, 0)^T$. Поскольку

$$\bar{\partial}\left(\sum_{j=1}^{n-1}[y_n, y_j]w_j\right) = (z_nw_1, z_nw_2, \ldots, z_nw_{n-1}, u_n)^T,$$

элемент $\overline{w} = \bar{v} + \sum\limits_{j=1}^{n-1}[y_n, y_j]w_j$ удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

Отметим, что в силу взаимной однозначности отображения $\bar{\partial}$ из (2) гомоморфизм $C' \otimes_F C$-модулей $\bar{\partial} : \overline{T} \to \bar{\partial}(\overline{T}) \subseteq [(C' \otimes_F C)^n]^T$ является изоморфизмом. Описание элементов из $\bar{\partial}(\overline{T})$, приведенное в лемме 1, может быть использовано для построения базиса $\overline{T}$. Он состоит из элементов вида

$$y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_n^{k_n}[y_i, y_{j_1}]y_{j_2}\cdots y_{j_s},$$

где $i > j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_s$, $s \geqslant 1$, $k_i \geqslant 0$. Подалгебра алгебры $B^{(-)}$, порожденная элементами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, является свободной метабелевой алгеброй Ли.

Далее нам понадобится следующий критерий обратимости эндоморфизмов кольца многочленов.

Теорема А. *Эндоморфизм φ кольца многочленов C, определенный правилом $\varphi(x_i) = \tilde{f}_i \in C$, $1 \leqslant i \leqslant n$, является автоморфизмом тогда и только тогда, когда идеалы алгебры $C' \otimes_F C$, порожденные множествами $\{\Delta(\tilde{f}_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ и $\{z_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, совпадают.*

В настоящее время имеются различные доказательства этой теоремы, и одно из них можно найти в [8].

Пусть $\varphi : B \to B$ — эндоморфизм алгебры B, определенный правилом $\varphi(y_i) = \bar{f}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Матрица $J(\varphi) = (\bar{\partial}(\bar{f}_1), \bar{\partial}(\bar{f}_2), \ldots, \bar{\partial}(\bar{f}_n))$ называется *матрицей Якоби эндоморфизма* φ. Справедлива следующая

Теорема 1. *Эндоморфизм φ свободной метабелевой ассоциативной алгебры B является автоморфизмом тогда и только тогда, когда матрица $J(\varphi)$ обратима над $C' \otimes_F C$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть матрица Якоби $J(\varphi)$ эндоморфизма φ ($\varphi(y_i) = \bar{f}_i$) обратима. Через $H = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ обозначим подалгебру алгебры A, порожденную элементами $f_1, f_2, \dots, f_n$. Из обратимости матрицы $J(\varphi)$ следует, что линейные части элементов $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$ линейно независимы. Тогда в силу однородности алгебры B алгебра $\overline{H}$ является свободной метабелевой ассоциативной алгеброй с базой $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$.

Из равенства (3) вытекает, что

$$(\Delta(\tilde{f}_1), \Delta(\tilde{f}_1), \dots, \Delta(\tilde{f}_n)) = zJ(\varphi).$$

Ввиду обратимости матрицы $J(\varphi)$ идеалы алгебры $C' \otimes_F C$, порожденные множествами $\{\Delta(\tilde{f}_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ и $\{z_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, совпадают. Тогда по теореме A эндоморфизм алгебры C, определенный правилом $x_i \to \tilde{f}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, является автоморфизмом. Следовательно, $C = \widetilde{H} = F[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n]$.

Рассмотрим дифференцирование

$$\tau : B \to [(\widetilde{H}' \otimes_F \widetilde{H})^n]^T,$$

определенное правилом $\tau(\bar{u}) = J(\varphi)^{-1}\bar{\partial}(\bar{u})$. Тогда $\tau(\bar{f}_i) = \varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Значит, сужение отображения τ на подалгебру $\overline{H}$, т. е.

$$\tau : \overline{H} \to [(\widetilde{H}' \otimes_F \widetilde{H})^n]^T,$$

обладает всеми требующимися в дальнейшем свойствами $\bar{\partial}$ из (2) с заменой y_i на $\bar{f}_i$.

Поскольку $\widetilde{H} = C$ и ядро сюръективного эндоморфизма конечно-порожденной алгебры многочленов всегда является нулевым, коммутаторный идеал алгебры $\overline{H}$ совпадает с $\overline{H} \cap \overline{T}$. Пусть $\bar{u}$ — произвольный элемент из $\overline{T}$ и $\tau(\bar{u}) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n)^T$. Тогда $\bar{\partial}(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\partial}(\bar{f}_i)\tilde{u}_i$. По лемме 1 имеем

$$(\Delta(x_1), \Delta(x_2), \dots, \Delta(x_n))\bar{\partial}(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta(x_1), \Delta(x_2), \dots, \Delta(x_n))\bar{\partial}(\bar{f}_i)\tilde{u}_i = 0.$$

Из формулы (3) следует, что $\sum_{i=1}^{n} \Delta(\tilde{f}_i)\tilde{u}_i = 0$. Теперь, применяя лемму 1 к алгебре $\overline{H}$ с дифференцированием τ, получаем, что существует элемент $\bar{h}$ из $\overline{H} \cap \overline{T}$ такой, что $\tau(\bar{u}) = \tau(\bar{h})$. В силу взаимной однозначности τ имеем $\bar{u} = \bar{h}$, т. е. $\bar{u} \in \overline{H} \cap \overline{T}$. Следовательно, $\overline{H} = B$ и φ является эпиморфизмом.

Обратное утверждение теоремы доказывается стандартным путем (см., например, [9]). Теорема доказана.

Напомним, что система элементов свободной алгебры конечного ранга называется *примитивной*, если она дополняется до базы этой алгебры. В связи с теоремой 1 возникает

ВОПРОС 1. Будет ли система элементов $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k$ алгебры B примитивной, если матрица $(\bar{\partial}(\bar{f}_1), \bar{\partial}(\bar{f}_2), \dots, \bar{\partial}(\bar{f}_k))$ обратима слева?

Для элементов $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k$, линейных по модулю коммутаторного идеала, этот вопрос решается положительно, как и в случае метабелевых алгебр Ли [9].

§ 2. Гомоморфизм $\mathrm{Aut}(B) \to \mathrm{Aut}(C)$ является эпиморфизмом

Пусть $\varphi : B \to B$ — автоморфизм алгебры B такой, что $\varphi(y_i) = \bar{f}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда φ индуцирует автоморфизм $\tilde{\varphi} : C \to C$ ($\tilde{\varphi}(x_i) = \tilde{f}_i$) кольца многочленов C. Легко показать, что отображение

$$\sim\,: \mathrm{Aut}(B) \to \mathrm{Aut}(C)$$

является гомоморфизмом групп.

Ядро N гомоморфизма $\sim$ состоит из автоморфизмов алгебры B, тождественных по модулю $\overline{T}$. Рассмотрим сужение J на N:

$$J : N \to GL_n(C' \otimes_F C), \tag{5}$$

где $J(\varphi)$ — матрица Якоби эндоморфизма φ.

Описание группы N дает следующая

Лемма 2. *Отображение J из (5) является вложением групп. Матрица $M \in GL_n(C' \otimes_F C)$ принадлежит $J(N)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $zM = z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi, \rho \in N$ и $\theta = \varphi \circ \rho$. Положим $\varphi(y_i) = \bar{g}_i$, $\rho(y_i) = \bar{f}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $\theta(y_i) = \bar{f}_i(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n)$. Вычисление якобиана суперпозиции дает равенство

$$J(\theta) = J(\varphi)[J(\rho)\langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_n \rangle],$$

где $J(\rho)\langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_n \rangle$ получено из $J(\rho)$ подстановкой $\tilde{g}_i$ вместо x_i. Поскольку $\varphi \in N$, то $\tilde{g}_i = x_i$, т. е. $J(\rho)\langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_n \rangle = J(\rho)$. Тогда $J(\theta) = J(\varphi)J(\rho)$ и J является гомоморфизмом групп. Взаимная однозначность J следует из взаимной однозначности $\bar{\partial}$.

Имеем $\bar{g}_i = y_i + \overline{w}_i$, $\overline{w}_i \in \overline{T}$. Тогда $J(\varphi) = E + (\bar{\partial}(\overline{w}_1), \bar{\partial}(\overline{w}_2), \ldots, \bar{\partial}(\overline{w}_n))$, где E — единичная матрица порядка n. Из леммы 1 следует, что $zJ(\varphi) = z$. Обратно, пусть $M \in GL_n(C' \otimes_F C)$ и $zM = z$. Тогда $zR = 0$, где $R = M - E$. Еще раз применяя лемму 1, найдем элементы $\overline{w} \in \overline{T}$ такие, что $R = (\bar{\partial}(\overline{w}_1), \bar{\partial}(\overline{w}_2), \ldots, \bar{\partial}(\overline{w}_n))$. Рассмотрим эндоморфизм φ алгебры B, определенный правилом $\varphi(y_i) = y_i + \overline{w}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому $J(\varphi) = M$. По теореме 1 эндоморфизм φ является автоморфизмом и $\varphi \in N$. Лемма доказана.

Далее нам понадобится следующая

Теорема Б. *Если идеал алгебры $C = F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, порожденный элементами $g_1, g_2, \ldots, g_k$, совпадает с идеалом, порожденным элементами $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то найдется матрица $R \in GL_k(C)$ такая, что $(g_1, g_2, \ldots, g_k) = (x_1, x_2, \ldots, x_k)R$.*

Эта теорема доказана в [10].

Теорема 2. *Любой автоморфизм кольца многочленов индуцируется некоторым автоморфизмом свободной метабелевой ассоциативной алгебры.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ — автоморфизм кольца многочленов C, $\rho(x_i) = \tilde{f}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда по теореме А идеалы алгебры $C' \otimes_F C$, порожденные множествами $\{\Delta(\tilde{f}_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ и $\{z_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, совпадают. Применяя теорему Б к кольцу многочленов $C' \otimes_F C = F[z_1, z_2, \ldots, z_n, a_1, a_2, \ldots, a_n]$, получаем матрицу $R \in GL_n(C' \otimes_F C)$, которая удовлетворяет равенству

$$(\Delta(\tilde{f}_1), \Delta(\tilde{f}_2), \ldots, \Delta(\tilde{f}_n)) = zR.$$

Положим $M = (\bar\partial(\bar f_1), \bar\partial(\bar f_2), \dots, \bar\partial(\bar f_n))$. Тогда в силу формулы (3) имеем равенство

$$(\Delta(\tilde f_1), \Delta(\tilde f_2), \dots, \Delta(\tilde f_n)) = zM.$$

т. е. $z(R - M) = 0$. По лемме 1 найдутся $\bar u_1, \bar u_2, \dots, \bar u_n \in \overline{T}$ такие, что

$$R - M = (\bar\partial(\bar u_1), \bar\partial(\bar u_2), \dots, \bar\partial(\bar u_n)).$$

Рассмотрим эндоморфизм φ алгебры B, определенный правилом $\varphi(y_i) = \bar f_i + \bar u_i$. Тогда $J(\varphi) = M + (R - M) = R \in GL_n(C' \otimes_F C)$. По теореме 1 эндоморфизм φ является автоморфизмом. Очевидно, что $\tilde\varphi = \rho$. Теорема доказана.

Следствие. $\mathrm{Aut}(C) \simeq \mathrm{Aut}(B)/N$.

По теореме 2 каждый примитивный элемент алгебры C поднимается до примитивного элемента алгебры B. Возникает

вопрос 2. Пусть $\tilde f$ — элемент алгебры C такой, что $\tilde\partial(\tilde f)$ унимодулярен. Если F — поле характеристики нуль, то существует ли элемент $\bar g \in B$ такой, что $\bar\partial(\bar g)$ унимодулярен и $\tilde g = \tilde f$?

Положительное решение вопросов 1, 2 дало бы характеризацию примитивных элементов алгебры C над полем характеристики нуль, а также доказательство гипотезы об якобиане.

В заключение автор благодарит профессора И. П. Шестакова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jung H. W. E.* Über ganze birationale Transformationen der Ebene // J. Reine Angew. Math. 1942. Bd 184. S. 161–174.
2. *Van der Kulk W.* On polinomial rings in two variables // Nieuw Arch. Wisk. 1953. N 1. S. 33–41.
3. *Smith M. K.* Stably tame automorphisms // J. Pure Appl. Algebra. 1989. V. 58. P. 209–212.
4. *Cherniakievicz A. J.* Automorphisms of free algebras of rank two. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 171. P. 309–315.
5. *Макар-Лиманов Л. Г.* Автоморфизмы свободных алгебр с двумя порождающими // Функцион. анализ и его прил. 1970. № 4. С. 107–108.
6. *Bergman G. M., Dicks W.* On universal derivations // J. Algebra. 1975. V. 36. P. 193–211.
7. *Lewin J.* A matrix representation for associative algebras. 1 // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 188. P. 293–308.
8. *Dicks W., Lewin J.* Jacobian conjecture for free associative algebras // Comm. Algebra. 1982. V. 10, N 12. P. 1285–1306.
9. *Умирбаев У. У.* Частные производные и эндоморфизмы некоторых относительно свободных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 179–188.
10. *Артамонов В. А.* Проективные метабелевы группы и алгебры Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, № 2. С. 226–236.

г. Алма-Ата *Статья поступила 20 апреля 1994 г.*