Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 2 (36) . С. 56—66*

УДК 517.925.46

КРИТЕРИИ БЕЗСОПРЯЖЕННОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. Е. Кудабаева, Р. Ойнаров

Евразийский Национальный Университет им Л.Н.Гумилева
010008 Астана Мунайтпасова, 5 o_ryskul@mail.ru

Вариационным методом получены критерии безсопряженности полулинейного дифференциального уравнения $(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0$, $1 < p < \infty$, с неотрицательными коэффициентами, которые могут быть сингулярными на концах интервала.

1. Введение Пусть $I = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. На интервале I рассмотрим полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0, \tag{1}$$

где ρ, v и $\rho^{1-p'}$ – неотрицательные локально суммируемые на I функции, причем $v \ne 0$.

Функцию $y : I \to R$ назовем решением уравнения (1), если она вместе с $\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t)$ локально абсолютно непрерывная на I и удовлетворяет уравнению (1) почти всюду (п.в.) на I.

Пусть $I_0 \subseteq I$ – замкнутый, открытый или полуоткрытый интервал.

Следуя определениям из [1, с.20], уравнение (1) назовем безсопряженным на I_0, если любое нетривиальное его решение имеет не более одного нуля на I_0, в противном случае уравнение (1) называется сопряженным на I_0.

К понятиям безсопряженности, сопряженности близки следующие понятия (см. [1, с.193]).

Пусть $c \in I$. Точка β, $c < \beta < b$, называется первой правой фокусной точкой точки c по отношению к уравнению (1), если существует нетривиальное решение y уравнения (1) такое, что $y'(c) = 0 = y(\beta)$ и $y(t) \ne 0$ на $[c, \beta)$. Подобным образом, с условием $y'(c) = 0 = y(\alpha)$ и $y(t) \ne 0$ на $(\alpha, c]$, $a < \alpha < c$, определяется первая левая фокусная точка α точки c.

Уравнение (1) называется право безфокусным (лево безфокусным) на $[c, \beta)$ ($(\alpha, c]$), если не существует правой (левой) фокусной точкой точки $c \in I$ по отношению к уравнению (1) в (c, β) ((α, c)).

Качественные свойства уравнения (1), особенно вопросы осцилляторности, неосцилляторности, достаточно хорошо изучены и полученные результаты подытожены в книге [1].

Keywords: *Half-linear differential equation,conjugate points, disconjugate,variational method,Hardy inequalities*
2000 Mathematics Subject Classification: 34C10, 34C15

Однако мало исследованы вопросы сопряженности, безсопряженности уравнения (1) на заданном интервале с возможным сингулярным концом, а также существования или не существования фокусной точки для заранее заданной точки.

В данной работе на основе вариационного принципа исследования осцилляционных свойств уравнения (1) и с применением результатов по весовым неравенствам Харди даются новые критерии сопряженности, безсопряженности уравнения (1) на заданном интервале, существования или не существования для заданной точки фокусной точки по отношению к этому уравнению.

Отметим, что уравнение (1) при $p = 2$ переходит в классическое уравнение Штурма-Лиувилля:

$$(\rho(t)y'(t))' + v(t)y(t) = 0. \tag{2}$$

Хотя вопросам безсопряженности уравнения (2) посвящены многочисленные работы (см., например, [1, 2, 3]), ниже из основных результатов при $p = 2$ могут быть получены новые признаки безсопряженности для уравнения (2).

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $1 \leq p < \infty$, $L_{p,\rho} \equiv L_{p,\rho}(I)$ – пространство п.в. конечных измеримых на I функции f для которых конечна норма

$$||f||_{p,\rho} = \left(\int_a^b \rho(t)|f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Если $\rho(t) \equiv 1$, то в этом случае будем писать $L_{p,\rho}(I) \equiv L_p(I)$, $||f||_{p,\rho} \equiv ||f||_p$.

Пусть $W^1_{p,\rho} \equiv W^1_p(\rho, I)$ совокупность локально абсолютно непрерывных на I функций f для которых конечна норма

$$||f||_{W^1_{p,\rho}} = ||f'||_{p,\rho} + |f(t_0)|, \tag{3}$$

где $t_0 \in I$ некоторая фиксированная точка.

Пусть $\overset{\circ}{AC}_p(I) = \{f \in W^1_{p,\rho} : suppf \subset I\}$, а $AC_{p,l}(I)$, $AC_{p,r}(I)$ совокупность функций из $W^1_{p,\rho}$, обращающихся в нуль в некоторой (для каждой функции своей) окрестности соответственно в левом, правом конце интервала I.

Замыкания множества $\overset{\circ}{AC}_p(I)$, $AC_{p,l}(I)$ и $AC_{p,r}(I)$ по норме (3) обозначим через $\overset{\circ}{W}(\rho, I)$, $W^1_{p,l}(\rho, I)$ и $W^1_{p,r}(\rho, I)$ соответственно.

Пусть $I_0 = (\alpha, \beta)$,$a < \alpha < \beta < b$. Тогда в силу наложенных условий на функцию ρ

$\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I_0) = \{f \in W^1_p(\rho, I_0) : f(\alpha) = f(\beta) = 0\}$, $W^1_{p,l}(\rho, I_0) = \{f \in W^1_p(\rho, I_0) : f(\alpha) = 0\}$, $W^1_{p,r}(\rho, I_0) = \{f \in W^1_p(\rho, I_0) : f(\beta) = 0\}$ и функционал $||f'||_{p,\rho,I_0}$ становится нормой эквивалентной норме (3) в этих подпространствах . Функцию $f \in W^1_p(\rho, I)$ будем считать нетривиальной и пишем $f \neq 0$, если $||f'||_{p,\rho,} \neq 0$.

Из вариационного принципа в качественной теории полулинейных дифференциальных уравнений [1, с.286] имеем:

Теорема A. *Пусть $I_0 = (\alpha, \beta) \subset I$. Уравнение (1) право (лево) безфокусно на $[\alpha, \beta)$ ($(\alpha, \beta]$) тогда и только тогда, когда*

$$F(f, \alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \left[\rho(t)|f'(t)|^p - v(t)|f(t)|^p\right] dt \geq 0 \tag{4}$$

для всех нетривиальных функций $f \in W^1_{p,l}(\rho, I_0)$ ($f \in W^1_{p,r}(\rho, I_0)$).

Теорема B. *Уравнение (1) безсопряженно на $I_0 = (\alpha, \beta) \subseteq I$ тогда и только тогда, когда $F(f, \alpha, \beta) > 0$ для всех нетривиальных $f \in \overset{\circ}{AC}_p(I_0)$.*

Пусть $I_0 = (\alpha, \beta) \subseteq I$. На множествах $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I_0)$, $W^1_{p,l}(\rho, I_0)$ и $W^1_{p,r}(\rho, I_0)$ рассмотрим весовое неравенство Харди в дифференциальной форме [2]:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} v(t)|f(t)|^p dt \leq C \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(t)|f'(t)|^p dt. \tag{5}$$

Неравенство (5) и его различные обобщения в последнее пятидесятилетие стали предметом исследования многих авторов. Историю вопроса и результаты исследований можно найти в книгах [4,5,6].

Наилучшую постоянною C в (5) на множествах $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, I_0)$, $W_{p,l}^1(\rho, I_0)$ и $W_{p,r}^1(\rho, I_0)$ соответственно обозначим $C = J_0(I_0)$, $C = J_l(I_0)$ и $C = J_r(I_0)$.

Из результатов работ, приведенных в книге [6] и в [7], имеет место

Теорема C. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\max\{A_1(\alpha,\beta),\ A_2(\alpha,\beta)\} \leq J_l(\alpha,\beta) \leq \min\{\gamma_{p,1}A_1(\alpha,\beta),\ \gamma_{p,2}A_2(\alpha,\beta)\}, \tag{6}$$

$$\max\{A_1^*(\alpha,\beta),\ A_2^*(\alpha,\beta)\} \leq J_r(\alpha,\beta) \leq \min\{\gamma_{p,1}A_1^*(\alpha,\beta),\ \gamma_{p,2}A_2^*(\alpha,\beta)\},$$

где $\gamma_{p,1} = p\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}$, $\gamma_{p,2} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$,

$$A_i(\alpha,\beta) = \sup_{\alpha<x<\beta} A_i(\alpha,\beta,x),\ A_i^*(\alpha,\beta) = \sup_{\alpha<x<\beta} A_i^*(\alpha,\beta,x),\ i = 1, 2;$$

$$A_1(\alpha,\beta,x) = \left(\int\limits_{\alpha}^{x} \rho^{1-p'} ds\right)^{p-1} \int\limits_{x}^{\beta} v(t)dt,\ A_1^*(\alpha,\beta,x) = \left(\int\limits_{x}^{\beta} \rho^{1-p'} ds\right)^{p-1} \int\limits_{\alpha}^{x} v(t)dt,$$

$$A_2(\alpha,\beta,x) = \left(\int\limits_{\alpha}^{x} \rho^{1-p'} ds\right)^{-1} \int\limits_{\alpha}^{x} v(t) \left(\int\limits_{\alpha}^{t} \rho^{1-p'} ds\right)^p dt,$$

$$A_2^*(\alpha,\beta,x) = \left(\int\limits_{x}^{\beta} \rho^{1-p'} ds\right)^{-1} \int\limits_{x}^{\beta} v(t) \left(\int\limits_{t}^{\beta} \rho^{1-p'} ds\right)^p dt, \quad \alpha < x < \beta.$$

Весовая функция ρ может вырождаться на концах интервала I, поэтому имеет место

Теорема D. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда*

(i) если $\rho^{1-p'} \in L_1(I)$, *то для любой функции* $f \in W_p^1(\rho, I)$ *существует* $\lim\limits_{t\to a+} f(t) \equiv f(a)$, $\lim\limits_{t\to b-} f(t) \equiv f(b)$ *и*

$$\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, I) = \{f \in W_p^1(\rho, I) :\ \ f(a) = f(b) = 0\};$$

(ii) если $\rho^{1-p'} \in L_1(a,c)$ *и* $\rho^{1-p'} \notin L_1(c,b)$, $c \in I$, *то для любой функции* $f \in W_p^1(\rho, I)$ *существует* $f(a)$ *и*

$$\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, I) = W_{p,l}^1(\rho, I) = \{f \in W_p^1(\rho, I) :\ f(a) = 0\};$$

(iii) если $\rho^{1-p'} \notin L_1(a,c)$ *и* $\rho^{1-p'} \in L_1(c,b)$, $c \in I$, *то для любой функции* $f \in W_p^1(\rho, I)$ *существует* $f(b)$ *и*

$$\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, I) = W_{p,r}^1(\rho, I) = \{f \in W_p^1(\rho, I) :\ f(b) = 0\};$$

(iv) если $\rho^{1-p'} \notin L_1(a,c)$ *и* $\rho^{1-p'} \notin L_1(c,b)$, $c \in I$, *то*

$$\overset{\circ}{W}{}_p^1(\rho, I) = W_{p,l}^1(\rho, I) = W_{p,r}^1(\rho, I) = W_p^1(\rho, I).$$

Утверждение теоремы D возможно известно, его можно вывести из леммы 1.6 работы [8], но мы приведем доказательство утверждения (ii), а остальные утверждения доказываются аналогичным образом.

Пусть $\rho^{1-p'} \in L_1(a,c)$ и $\rho^{1-p'} \notin L_1(c,b)$, $c \in I$. Тогда для $f \in W_p^1(\rho, I)$ имеем:

$$\int_a^c |f'(t)|dt \leq \left(\int_a^c \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b \rho |f'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Откуда следует существование $f(a)$. Положим $M = \{f \in W_p^1(\rho, I) : \, f(a) = 0\}$.

Пусть $f \in W_{p,l}^1(\rho, I)$. Тогда существует $\{f_n\} \subset AC_{p,l}(I)$ такая, что $||f - f_n||_{W^1_{p,\rho}} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \int_t^{t_0} |f'(s) - f_n'(s)|ds + |f(t_0) - f_n(t_0)|$$

при $a < t < t_0 < b$, то, применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \max\left\{1, \left(\int_a^{t_0} \rho^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\right\} ||f - f_n||_{W^1_{p,\rho}}.$$

Откуда следует $f(a) = 0$, следовательно $W_{p,l}^1(\rho, I) \subset M$. Пусть $a < \alpha < b$. Тогда

$$f(\alpha)\left(\int_a^\alpha \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \leq \left(\int_a^\alpha \rho |f'|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Пусть точка $\alpha^* = \alpha^*(a,\alpha) \in (a,\alpha)$ такова, что $\int\limits_{\alpha^*}^{\alpha} \rho^{1-p'} = \int\limits_a^{\alpha^*} \rho^{1-p'}$.

Пусть $f \in M$. Введем функцию

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & a < t \leq \alpha^*, \\ f(\alpha)\left(\int\limits_{\alpha^*}^t \rho^{1-p'}\right)\left(\int\limits_{\alpha^*}^\alpha \rho^{1-p'}\right)^{-1}, & \alpha^* \leq t \leq \alpha, \\ f(t), & \alpha \leq t < b. \end{cases}$$

Очевидно, $f_\alpha \in AC_{p,l}(I)$. С учетом (7) имеем:

$$||f - f_\alpha||_{W_p^1} = \left(\int_a^\alpha \rho |f' - f_\alpha'|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\int_a^\alpha \rho |f'|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + |f(\alpha)| \left(\int_{\alpha^*}^\alpha \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \leq \left(1 + 2^{\frac{1}{p'}}\right)\left(\int_a^\alpha \rho |f'|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда следует, что $||f - f_\alpha||_{W_p^1} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Следовательно, $f \in W_{p,l}^1(\rho, I)$ и $W_{p,l}^1(\rho, I) = \{f \in W_p^1(\rho, I) : \;\; f(a) = 0\}$.

Теперь покажем, что $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) = W^1_{p,l}(\rho, I)$. В силу $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) \subset W^1_{p,l}(\rho, I)$ достаточно показать $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) \supset W^1_{p,l}(\rho, I)$. Пусть $f \in W^1_{p,l}(\rho, I)$ и $a < \alpha < \beta < b$. В силу условия $\int\limits_\beta^b \rho^{1-p'} ds = \infty$ для каждого $\beta \in I$ найдется точка $\beta^* = \beta^*(\beta, b) \in (\beta, b)$ такая, что

$$|f(\beta)| \left(\int\limits_\beta^{\beta^*} \rho^{1-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} \leq \left(\int\limits_\beta^b \rho(t)|f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

Построим функцию $f_{\alpha,\beta} \in \overset{\circ}{AC}_p\,(I)$:

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} f_\alpha(t), & a < t \leq \beta, \\ f(\beta) \left(\int\limits_\beta^{\beta^*} \rho^{1-p'} \right)^{-1} \int\limits_t^{\beta^*} \rho^{1-p'}, & \beta \leq t \leq \beta^*, \\ 0, & \beta^* \leq t < b. \end{cases}$$

Тогда на основания (7) и (8) имеем:

$$||f - f_{\alpha,\beta}||_{W^1_{p,\rho}} \leq \left(1 + 2^{\frac{1}{p'}}\right) \left(\int\limits_a^\alpha \rho|f'|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + 2 \left(\int\limits_\beta^b \rho|f'|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда $||f - f_{\alpha,\beta}||_{W^1_{p,\rho}} \to 0$, при $\alpha \to a$, $\beta \to b$. Следовательно, $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I)$. Теорема D доказана.

3. Основные результаты На основании теорем A и C имеем:

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $(\alpha, \beta) \subset I$. *Тогда*

(i) выполнение условия

$$\max\{A_1(\alpha, \beta),\ A_2(\alpha, \beta)\} \leq 1 \tag{9}$$

необходимо, а выполнение одного из условий

$$A_1(\alpha, \beta) \leq \frac{1}{p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1}, \quad A_2(\alpha, \beta) \leq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \tag{10}$$

достаточно, чтобы уравнение (1) было лево безфокусно на $(\alpha, \beta]$;

(ii) выполнение условия

$$\max\{A^*_1(\alpha, \beta),\ A^*_2(\alpha, \beta)\} \leq 1$$

необходимо, а выполнение одного из условий

$$A^*_1(\alpha, \beta) \leq \frac{1}{p} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1}, \quad A^*_2(\alpha, \beta) \leq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p$$

достаточно, чтобы уравнение (1) было право безфокусно на $[\alpha, \beta)$.

Доказательство Теоремы 1. Докажем часть (i), а часть (ii) доказывается аналогичным образом. На основании теоремы A уравнение (1) лево безфокусно на $(\alpha, \beta]$, если и только, если выполнено (4) для всех нетривиальных $f \in W^1_{p,l}(\rho, (\alpha, \beta))$, что эквивалентно условию $J_l(\alpha, \beta) \leq 1$. Поэтому, если уравнение (1) лево безфокусно на $(\alpha, \beta]$, то $J_l(\alpha, \beta) \leq 1$. Откуда, в силу левой части оценки (6) имеем (9).

Обратно, если выполнено (10), то из правой оценки (6) имеем $J_l(\alpha,\beta) \le 1$, то есть уравнение (1) лево безфокусно на $(\alpha,\beta]$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие теоремы 1. Если выполнено условие*

$$\max\{A_1(\alpha,\beta),\ A_2(\alpha,\beta)\} > 1 \quad (\max\{A_1^*(\alpha,\beta),\ A_2^*(\alpha,\beta)\} > 1)\,,$$

то на полуинтервале $(\alpha,\beta]$ ($[\alpha,\beta)$) по отношению к уравнению (1) существует левая (правая) фокусная точка точки β (α).

Теперь исследуем вопрос безсопряженности уравнения (1) на интервале I.

Пусть

$$\int_a^b \rho^{1-p'}(s)ds < \infty. \tag{11}$$

Точку $c_i \in I$, $i = 1,2$, назовем серединной точкой для (A_i, A_i^*), если $A_i(a,c_i) = A_i^*(c_i,b) \equiv T_i(a,b) < \infty$, $i = 1,2$.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (11). Если уравнение (1) безсопряженно на I, то существует серединная точка для (A_i, A_i^*) и $T_i(a,b) \le 1$, $i = 1,2$. Обратно, если существует серединная точка для (A_i, A_i^*) и $T_i(a,b) < \gamma_{p,i}^{-1}$, $i = 1,2$, то уравнение (1) безсопряженно на I.*

Теорема 2 следует из следующей теоремы, имеющей самостоятельное значение.

Теорема 3. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (11). Величина $J_0(a,b) < \infty$ тогда и только тогда, когда существует серединная точка для (A_i, A_i^*), $i = 1,2$, и при этом имеет место оценка:*

$$\max\{T_1(a,b),\ T_2(a,b)\} \le J_0(a,b) \le \min\{\gamma_{p,1}T_1(a,b),\ \gamma_{p,2}T_2(a,b)\}. \tag{12}$$

Сначала из теоремы 3 выведем утверждение теоремы 2.

Доказательство Теоремы 2. Пусть уравнение (1) безсопряженно на I. Тогда по теореме В $F(f,a,b) > 0$ или

$$\int_a^b v(t)|f(t)|^p dt < \int_a^b \rho(t)|f'(t)|^p dt$$

для $0 \ne f \in \overset{\circ}{AC}_p\,(I)$, следовательно,

$$\int_a^b v(t)|f(t)|^p dt \le \int_a^b \rho(t)|f'(t)|^p dt$$

для $0 \ne f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I)$ и $J_0(a,b) \le 1$. Откуда в силу теоремы 3 $T_i(a,b) \le 1$, $i = 1,2$.

Обратно, пусть существует серединная точка для (A_i, A_i^*). Тогда по теореме 3 выполнено (12). Откуда, если $T_i(a,b) < \gamma_{p,i}^{-1}$, $i = 1,2$, то $J_0(a,b) < 1$, из которого вытекает $F(f,a,b) > 0$ для $0 \ne f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I)$ и, в частности, для $0 \ne f \in \overset{\circ}{AC}_p\,(I)$. Тогда по теореме В уравнение (1) безсопряженно на I. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть выполнено условие теоремы 2 и существует серединная точка для $(A_{i_0}, A_{i_0}^*)$, $1 \le i_0 \le 2$. Если $T_{i_0}(a,b) > \gamma_{p,i_0}^{-1}$, тогда уравнение (1) лево безфокусно на $(a, c_{i_0}]$; право безфокусно на $[c_{i_0}, b)$ и любые нетривиальные его решения с условием $y'(c_{i_0}) = 0$, $y(c_{i_0}) \ne 0$ не обращается в нуль на I.*

Следствие 3. *Пусть выполнено условие теоремы 2 и существует серединная точка для $(A_{i_0}, A_{i_0}^*)$, $1 \le i_0 \le 2$. Если $T_{i_0}(a,b) > 1$, тогда уравнение (1) сопряженно на интервале I.*

В доказательстве теоремы 3 используется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (10). Тогда серединная точка для (A_i, A_i^*), $i = 1, 2$, существует тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x\to a}\sup A_i(a,c,x) < \infty,\ \lim_{x\to b}\sup A_i^*(c,b,x) < \infty,\ c \in I. \tag{13}$$

Доказательство Леммы 1. Пусть существует серединная точка для (A_i, A_i^*), $i = 1, 2$. Так как функции $A_i(a,c), A_i^*(c,b)$, $i = 1, 2$, непрерывны по c и первая неубывает, а вторая невозрастает по c, то $A_i(a,c) \le A_i^*(c_i,b)$, при $a < c < c_i$ и $A_i(a,c_i) \ge A_i^*(c,b)$, при $c_i < c < b$. Откуда следует (13). Обратно из условия (13) следует, что

$$\lim_{c\to a} A_i(a,c) < \infty, \quad \lim_{c\to b} A_i^*(c,b) < \infty,\ \ i = 1, 2.$$

Покажем, что

$$\lim_{c\to b} A_i(a,c) > \lim_{c\to b} A_i^*(c,b),\ i = 1, 2. \tag{14}$$

Действительно, если

$$\lim_{c\to b} A_i(a,c) \le \lim_{c\to b} A_i^*(c,b) < \infty, \tag{15}$$

то из $A_1(a,c) < \infty$ имеем

$$\int_c^b v(t)dt < \infty,\ c \in I.$$

Тогда в силу (11)

$$\lim_{c\to b} A_i^*(c,b) = 0,\ i = 1, 2. \tag{16}$$

При $i = 1$ это очевидно, а при $i = 2$ оно следует из неравенства:

$$\left(\int_c^b \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int_c^b v(t) \left(\int_c^b \rho^{1-p'}\right)^p dt \le \left(\int_c^b \rho^{1-p'}\right)^{p-1} \int_c^b v(t)dt.$$

Так как $A_i(a,c)$ неотрицательная, неубывающая и непрерывная функция по $c \in I$, то из (15) и (16) следует $A_i(a,b) = 0$, $i = 1, 2$. Тогда $v(t) \equiv 0$ на I, что противоречит условиям наложенным на v. Следовательно, имеет место (14). Точно также устанавливаем

$$\lim_{c\to a} A_i^*(c,b) > \lim_{c\to a} A_i(a,c),\ i = 1, 2. \tag{17}$$

Из (14) и (17) в силу непрерывности и монотонности $A_i(a,c)$, $A_i^*(c,b)$ по $c \in I$, следует существование точек $c_i \in I$ таких, что $A_i(a,c_i) = A_i^*(c_i,b)$, $i = 1, 2$. Лемма 1 доказана.

Из теоремы 2 и из леммы 1 вытекает

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Если не выполнено хотя бы одно из условий (13), то уравнение (1)сопряженно на I .*

Доказательство Теоремы 3. Пусть $J_0(a,b) < \infty$ и $a < c^- < c^+ < b$. Положим:

$$f_0(t) = \begin{cases} \left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int_a^t \rho^{1-p'}, & a < t \le c^-, \\ 1, & c^- \le t \le c^+, \\ \left(\int_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int_t^b \rho^{1-p'}, & c^+ \le t < b. \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, что $f_0 \in \mathring{W}_p^1(\rho, I)$. Непосредственные вычисления дают:

$$\int_a^b \rho(t)|f_0'(t)|^p dt = \left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}, \tag{19}$$

$$\int_a^b v(t)|f_0(t)|^p dt = \left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int_a^{c^-} v(t)\left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^p dt+$$

$$+\int_{c^-}^{c^+} v(t)dt + \left(\int_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int_{c^+}^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{1-p'}\right)^p dt. \tag{20}$$

Из (19) и (20) имеем:

$$J_0(a,b) \ge \frac{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int\limits_a^{c^-} v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^p dt + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int\limits_{c^+}^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^p dt}{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}}, \tag{21}$$

$$J_0(a,b) \ge \frac{\int\limits_{c^-}^{c} v(t)dt + \int\limits_{c}^{c^+} v(t)dt}{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}}, \quad c \in (c^-, c^+). \tag{22}$$

Умножая числитель и знаменатель правой части (21) и (22) на $\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1}$ и переходя в полученном выражении к пределу при $c^- \to a$, имеем:

$$J_0(a,b) \ge \limsup_{c^- \to a} \left(\int_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int_a^{c^-} v(t)\left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^p dt =$$

$$= \limsup_{x \to a} A_1(a,c,x), \tag{23}$$

$$J_0(a,b) \ge \limsup_{x \to b} A_2(c,b,x). \tag{24}$$

Теперь, умножая числитель и знаменатель правой части (21) и (22) на $\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{p-1}$ и переходя к пределу при $c^+ \to b$, получим:

$$J_0(a,b) \ge \limsup_{x \to b} A_i^*(c,b,x), \; i = 1,2. \tag{25}$$

В силу леммы 1 из (23), (24), и (25) следует существование серединной точки $c_i \in I$ для (A_i, A_i^*), то есть $A_i(a,c_i) = A_i^*(c_i,b) \equiv T_i(a,b)$, $i = 1,2$.

Так как $A_i(a,c_i,x)$, $A_i^*(c_i,b,x)$ непрерывны по x на $(a,c_i]$, $[c_i,b)$ соответственно и $A_i(a,c_i) \geq \limsup\limits_{x\to a} A_i(a,c_i,x)$, $A_i^*(c_i,b) \geq \limsup\limits_{x\to b} A_i^*(c_i,b,x)$, то существуют точки c_i^-, c_i^+: $a < c_i^- \leq c_i$, $c_i \leq c_i^+ < b$ такие, что $A_i(a,c_i) = A_i(a,c_i,c_i^-)$, $A_i^*(c_i,b) = A_i^*(c_i,b,c_i^+)$, причем $c_1^- \neq c_1$, $c_1^+ \neq c_1$.

Пусть в (21) $c^- = c_2^-$, $c^+ = c_2^+$, а в (21) $c = c_1$, $c^- = c_1^-$, $c^+ = c_2^+$.

Тогда из (21) имеем:

$$J_0(a,b) \geq \frac{A_2(a,c_2,c_2^-)\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1} + A_2^*(c_2,b,c_2^+)\left(\int\limits_{a}^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}}{\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1} + \left(\int\limits_{a}^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}} =$$

$$= A_2(a,c_2) = A_2^*(c_2,b) \equiv T_2(a,b) \tag{26}$$

Аналогично из (22) имеем:

$$J_0(a,b) \geq A_1(a,c_1) = A_1^*(c_1,b) \equiv T_1(a,b). \tag{27}$$

Из (26) и (27) следует левая оценка(12).

Пусть существует серединная точка $c_i \in (c,b)$ для (A_i, A_i^*), $i = 1,2$. Тогда в силу теоремы C для $f \in \mathring{W}_p^1(\rho, I)$ получим:

$$\int\limits_a^b v(t)|f(t)|^p dt = \int\limits_a^{c_i} v(t)|f(t)|^p dt + \int\limits_{c_i}^b v(t)|f(t)|^p dt$$

$$\leq \gamma_{p,i} A_i(a,c_i) \int\limits_a^{c_i} \rho(t)|f'(t)|^p dt + \gamma_{p,i} A_i^*(a,c_i) \int\limits_{c_i}^b \rho(t)|f'(t)|^p dt$$

$$\leq \gamma_{p,i} T_i(a,b) \int\limits_a^b \rho(t)|f'(t)|^p dt.$$

Откуда следует правая оценка(12). Теорема 3 доказана.

Теорема 3 расширяет разные оценки величины $J_0(a,b)$ данные в книге [5]. Например, в теореме 8.8 [5] в предположении $A_1(a,a) = A_1^*(b,b) = 0$ получено $\frac{1}{2}A \leq J_0(a,b) \leq \gamma_{p,1} A$, где $A = \inf\limits_{a<c<b} \max\{A_1(a,c), A_1^*(c,b)\}$. В указанных предположениях легко установить, что $A = T_1(a,b)$.

Пусть $c \in I$ и

$$\int\limits_a^c \rho^{1-p'}(s)ds = \infty, \quad \int\limits_c^b \rho^{1-p'}(s)ds < \infty. \tag{28}$$

Теорема 4. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (28). Тогда условие*

$$\max\{A_1(a,b), A_2(a,b)\} \leq 1 \tag{29}$$

необходимо, а выполнение одного из условий

$$A_1(a,b) < \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}, \quad A_2(a,b) < \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \tag{30}$$

достаточно для безсопряженности уравнения (1) на I.

Доказательство Теоремы 4. Пусть уравнение (1) безсопряженно на I. Тогда по теореме B $J_0(a,b) \le 1$. В силу теоремы D из условия (28) следует $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) = W^1_{p,l}(\rho, I)$. Следовательно, $J_0(a,b) = J_l(a,b) \le 1$. Тогда из нижней оценки (6) имеем (29).

Обратно, пусть выполнено по крайней мере одно из условий из (30). Тогда из верхней оценки (6) $J_0(a,b) = J_l(a,b) < 1$. Откуда $F(f,a,b) > 0$ для всех $0 \ne f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I)$ и, в частности, для всех $0 \ne f \in \overset{\circ}{AC}_p(I)$, следовательно, по теореме B уравнение (1) безсопряженно на I. Теорема 4 доказана.

Если

$$\int\limits_a^c \rho^{1-p'}(s)ds < \infty, \quad \int\limits_c^b \rho^{1-p'}(s)ds = \infty, \tag{31}$$

то по аналогии с теоремой 4 на основании теорем B,C и D имеет место

Теорема 5. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (31). Тогда условие $\max\{A_1^*(a,b), A_2^*(a,b)\} \le 1$ необходимо, а выполнение одного из условий $A_1^*(a,b) < \gamma_{p,1}^{-1}$, $A_2^*(a,b) < \gamma_{p,2}^{-1}$ достаточно для безсопряженности уравнения (1) на I.*

Пусть

$$\int\limits_a^c \rho^{1-p'}(s)ds = \infty, \quad \int\limits_c^b \rho^{1-p'}(s)ds = \infty. \tag{32}$$

В этом случае на основании теоремы D $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) = W^1_p(\rho, I)$. Так как постоянная функция $f(t) \equiv 1 \in W^1_p(\rho, I)$, то $J_0(a,b) = \infty$, следовательно, существует нетривиальная функция $\tilde{f} \in \overset{\circ}{AC}_p(I)$ такая, что $F(\tilde{f},a,b) < 0$. Действительно, пусть $a < \alpha < \alpha + h < \beta - h < \beta < b$, $h > 0$, и в определении функции (18) положим $a = \alpha$, $c^- = \alpha + h$, $c^+ = \beta - h$, $b = \beta$ и обозначим её через $\tilde{f}_0$.

Положим $\tilde{f}_{\alpha,\beta}(t) = \tilde{f}_0(t)$ при $\alpha \le t \le \beta$ и $\tilde{f}(t) = 0$ при $t \in I \setminus (\alpha, \beta)$. Тогда $\tilde{f}_{\alpha,\beta} \in \overset{\circ}{AC}_p(I)$. В силу (32), (19) и (20) при $\alpha \to a$ и $\beta \to b$ $\int\limits_a^b \rho(t)|\tilde{f}'_{\alpha,\beta}(t)|^p dt \to 0$, а $\int\limits_a^b v(t)|\tilde{f}_{\alpha,\beta}(t)|^p dt$ оставаясь положительным растет, поэтому $F(\tilde{f}_{\alpha,\beta},a,b) < 0$, когда α, β достаточно близко к a и b соответственно. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (32). Тогда уравнение (1) на интервале I имеет сопряженные точки.*

Рассмотрим уравнение (1) с параметром $\lambda \in R$:

$$(\rho(t)|y'(t)|^{p-2}y'(t))' + \lambda v(t)|y(t)|^{p-2}y(t) = 0. \tag{33}$$

Совокупность значений $\lambda \in R$ при которых уравнение (33) является безсопряженным на I называется областью безсопряженности уравнения (33). В [1, с.219] показано, что если уравнение (33) безсопряженно для всех $\lambda \in R$, то $v(t) \equiv 0$, а в случае $v(t) \ne 0$ существует $\lambda_0 \in R$ такое, что при $\lambda < \lambda_0$ уравнение (33) безсопряженно, а при $\lambda > \lambda_0$ уравнение (33) имеет сопряженные точки на I.

Из теоремы 2 имеем следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (11). Тогда при*

$$\lambda < [\min\{\lambda_{p,1}T_1(a,b),\ \lambda_{p,2}T_2(a,b)\}]^{-1}$$

уравнение (33) безсопряженно на I, а при

$$\lambda > [\max\{T_1(a,b),\ T_2(a,b)\}]^{-1}$$

уравнение (33) имеет сопряженные точки на I.

Аналогичные утверждения вытекают из теорем 4 и 5.

Из теоремы 6 имеем следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (32). Тогда уравнение (33) при всех $\lambda > 0$ сопряженно на I.*

Цитированная литература

1. **Dosly O., Rehark P.** Half-linear differential equations. North-Holland, Math.studies 202, 2005.

2. **Coppel W.A.** Disconjugacy. Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

3. **Mingarelli A.B., Halvorsen S.G.** Non–Oscillation Domains of Differential Equations with Two Parametrs. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1988.

4. **Харди Г.Г., Литлвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. Изд. 2-е, М., 2006.

5. **Opic B., Kufner A.** Hardy-type inequalities. Longman Scientific and Technikal. 1990.

6. **Kufner A., Malegranda L., Persson L.E.** The Hardy Inequality. About its History and some related results. Pilsen, 2007.

7. **Wedestig A.** Weighted Inequalities of Hardy Type and their Limiting Inequalities. Ph.D. Thesis Lulea University of Technology, 2003.

8. **Oinarov R.** //J.London Math. Soc. 1993. V. 48, № 2. P. 103–116.

Поступила в редакцию 10.03.2010г.