*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1*

*УДК 517.51*

# ВЕСОВАЯ ОЦЕНКА ПРОМЕЖУТОЧНОГО ОПЕРАТОРА НА КОНУСЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Р. Ойнаров**

**Аннотация:** Рассматривается интегральный оператор

$$K_\beta f(x) = \int\limits_0^x K^\beta(x,t) f(t)\, dt, \quad x > 0,\ 0 \le \beta \le 1,\ K \equiv K_1.$$

При некотором ограничении на положительную непрерывную функцию $K(x,s)$ получены необходимые и достаточные условия на весовые функции $u$, $v$ и $\rho$, при которых справедливо неравенство $\|uK_\beta f\|_q \le C(\|\rho f\|_p + \|vKf\|_r)$, $f \ge 0$, когда $1 < p, q, r < \infty$, $q \ge \max\{p, r\}$. Библиогр. 8.

**1.** Пусть $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mu$ и $\lambda$ — неотрицательные борелевские меры на $\mathbb{R}_+$, $u, v$ и $\rho$ — весовые функции на $\mathbb{R}_+$, т. е. неотрицательные локально интегрируемые на $\mathbb{R}_+$ функции. Пусть $K$ — интегральный оператор вида

$$Kf(x) = \int\limits_0^x K(x,t) f(t)\, dt, \quad x > 0, \tag{1}$$

с непрерывным при $0 < s \le x < +\infty$ ядром $K(x,t)$, удовлетворяющим условиям:

(а) $K(x,s) > 0$ при $x > s$;

(б) существует постоянная $d \ge 1$ такая, что

$$\frac{1}{d}(K(x,t) + K(t,s)) \le K(x,s) \le d(K(x,t) + K(t,s)) \tag{2}$$

для всех $x, t, s$ таких, что $0 < s < t < x < \infty$.

Оператор вида (1) с условием (б) был введен в работе [1], а различные его свойства исследованы в работах [2, 3]. Класс операторов вида (1) с условиями (а) и (б) включает в себя почти все известные операторы дробного интегрирования, в частности, оператор Римана — Лиувилля

$$\mathscr{R}_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \quad \alpha \ge 1,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Введем «промежуточный» оператор вида

$$K_\beta f(x) = \int\limits_0^x K^\beta(x,t) f(t)\, dt, \tag{3}$$

где $0 \le \beta \le 1$, который при $\beta = 1$ сводится к оператору (1), а при $\beta = 0$ — к оператору интегрирования

$$K_0 f(x) = \int\limits_0^x f(s)\,ds.$$

Рассмотрим неравенство

$$\|K_\beta f\|_{q,\mu} \le C(\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r,\lambda}), \quad f \ge 0, \tag{4}$$

где $1 < p, q, r < \infty$, $\|\cdot\|_p$ — обычная норма пространства $L_p(\mathbb{R}_+)$,

$$\|g\|_{q,\mu} = \left(\int\limits_0^\infty |g(x)|^q\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

В случае, когда в (4) $d\mu(x) = u^q(x)\,dx$, $d\lambda(x) = v^r(x)\,dx$, $K \equiv \mathscr{R}_n$, $\beta = \frac{m-1}{n-1}$, $m = n - k$, $0 \le k \le n-1$, имеем неравенство

$$\|u\mathscr{R}_m f\|_q \le C(\|\rho f\|_p + \|v\mathscr{R}_n f\|_r), \quad f \ge 0, \tag{5}$$

которое эквивалентно весовой оценке промежуточных производных

$$\|uy^{(k)}\|_q \le C(\|\rho y^{(n)}\|_p + \|vy\|_r) \tag{6}$$

на классе функции $M = \{y : y^{(n)} \ge 0,\ y^{(i)}(0) = 0,\ i = 0, 1, \dots, n-1\}$.

Оценка вида (6) используется в различных задачах математического анализа, и проблема заключается в нахождении необходимых и достаточных условий на весовые функции $u, v$ и $\rho$ таких, что справедливо (6) для всех функций $y$, для которых конечна правая часть (6).

При $n = 1$, $p = r$ решение этой задачи дано в работах [4–6], а в общем случае вопрос остается открытым.

Неравенство (4) в случае, когда $d\mu(x) = u^q(x)\,dx$, $d\lambda(x) = v^r(x)\,dx$, $1 < p = r \le q < \infty$, исследовано в [7] при $\beta = 0$, а при $\beta = 1$ и $0 < \beta < 1$ основные результаты анонсированы соответственно в [1, 8].

Пусть $\rho^{-1} \equiv \frac{1}{\rho} \in L_{p'}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и для функции $\rho^{-p'}(\cdot)\chi_{[t,z)}(\cdot)$, где $\chi_{[t,z)}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $[t, z) \subset \mathbb{R}_+$, правая часть (4) конечна. Тогда из (2) и (4) вытекают следующие необходимые условия на $\mu$ и $\lambda$:

$$\mu([t, +\infty)) \equiv \int\limits_t^{+\infty} d\mu(x) < \infty, \quad \int\limits_{[t,+\infty)} K^{\beta q}(x,t)\,d\mu(x) \equiv \int\limits_t^\infty K^{\beta q}(x,t)\,d\mu(x) < \infty,$$

$$\int\limits_t^{+\infty} d\lambda(x) < \infty, \quad \int\limits_t^\infty K^r(x,t)\,d\lambda(x) < \infty \quad \forall t > 0,$$

которые далее будем считать выполненными.

В $\mathbb{R}_+$ определим функции $\varphi(\cdot)$ и $\varphi_\beta(\cdot)$:

$$\varphi(z) = \left[\inf_{0<t<z}\left(\left(\int\limits_t^z \rho^{-p'}\,ds\right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int\limits_t^\infty K^r(x,t)\,d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{r}}\right)\right]^{-1},$$

$$\varphi_\beta(z) = [\inf_{0<t<z} (\Phi_\beta(t,z) + \Psi_\beta(t,z))]^{-1},$$

где

$$\Phi_\beta(t,z) = \inf_{t<\tau<z} \left( \left( \int\limits_t^\tau K^{\beta p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + K^{-\beta}(z,\tau) \left( \int\limits_z^\infty K^r(x,z)\,d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \right),$$

$$\Psi_\beta(t,z) = \left( \int\limits_t^z K^{(1-\beta)r}(x,t)\,d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} + K^{1-\beta}(z,t) \left( \int\limits_z^\infty d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Положим

$$A_1(z,\beta) = \varphi(z) \left( \int\limits_z^\infty K^{\beta q}(x,z)\,d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad A_2(z,\beta) = \varphi_\beta(z) \left( \int\limits_z^\infty d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_i \equiv A_i(\beta) = \sup_{z>0} A_i(z,\beta),\ i = 1,2, \quad A_\beta = \max\{A_1(\beta), A_2(\beta)\}.$$

Заметим, что при $\beta = 0$ в силу (2) $\varphi_0(z) \approx \varphi(z)$ для любых $z > 0$ и поэтому $A_0 \approx A_1(0) \approx A_2(0)$.

Здесь и далее $A << C$ означает $A \le \alpha C$ с некоторой постоянной $\alpha > 0$, а запись $A \approx C$ утверждает наличие двусторонней оценки $A << C << A$. Для удобства примем также соглашения

$$\int\limits_{[t,z)} f(x)\,d\mu(x) \equiv \int\limits_t^z f(x)\,d\mu(x).$$

**2.** Основной целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть* $1 < p,q,r < \infty$, $\max\{p,r\} \le q$, $0 \le \beta \le 1$, *функция* $K(x,s)$ *непрерывна при* $0 < s \le x$ *и удовлетворяет условиям* (а) *и* (б). *Тогда неравенство* (4) *выполнено тогда и только тогда, когда* $A_\beta < \infty$, *причем* $A_\beta \approx C$, *где* $C$ — *константа в* (4), *наименьшая из возможных.*

Доказательство. В ходе доказательства без напоминания будут использованы почти неубывание по первому аргументу ($dK(x,s) \ge K(t,s)$ при $x > t > s > 0$) и почти невозрастание по второму аргументу ($dK(x,s) \ge K(x,t)$ при $x > t > s > 0$) функции $K(x,s)$, вытекающие из левого неравенства (2).

Необходимость. Полагая $f(\cdot) = \rho^{-p'}(\cdot)\chi_{[t,z)}(\cdot)$, имеем

$$\|K_\beta f\|_{q,\mu} >> \left( \int\limits_z^\infty K^{\beta q}(x,z)\,d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \int\limits_t^z \rho^{-p'}(s)\,ds, \quad \|\rho f\|_p = \left( \int\limits_t^z \rho^{-p'}(s)\,ds \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|Kf\|_{r,\lambda} << \left( \int\limits_t^\infty K^r(x,t)\,d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \int\limits_t^z \rho^{-p'}(s)\,ds.$$

Подставив последние оценки в (4) и заметив, что после сокращения обеих частей полученного неравенства на $\int\limits_t^z \rho^{-p'}(s)\,ds$ левая часть его не зависит от $t$, $0 < t < z$, получим

$$\left(\int\limits_z^\infty K^{\beta q}(x,z)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} << C\varphi^{-1}(z) \quad \forall z > 0.$$

Следовательно, $A_1(\beta) << C < \infty$. Если $\beta \neq 0$, то введем еще функцию

$$f(\cdot) = \chi_{[t,\tau)}(\cdot) K^{\beta(p'-1)}(z,\cdot)\rho^{-p'}(\cdot), \quad 0 < t < \tau < z.$$

Тогда

$$\|K_\beta f\|_{q,\mu} >> \left(\int\limits_z^\infty d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \int\limits_t^\tau K^{\beta p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds, \tag{7}$$

$$\|\rho f\|_p = \left(\int\limits_t^\tau K^{\beta p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\|Kf\|_{r,\lambda} << &\left(\int\limits_t^z K^{r(1-\beta)}(x,t)\,d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{r}} \int\limits_t^\tau K^{\beta p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds \\
&+ \left(\int\limits_z^\infty \left(\int\limits_t^\tau (K(x,z)+K(z,s))K^{\beta(p'-1)}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^r d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{r}} \\
<< &\left[\left(\int\limits_t^z K^{r(1-\beta)}(x,t)\,d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{r}} + K^{-\beta}(z,\tau)\left(\int\limits_z^\infty K^r(x,z)\,d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{r}}\right. \\
&\left. + K^{1-\beta}(z,\tau)\left(\int\limits_z^\infty d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{r}}\right] \int\limits_t^\tau K^{\beta p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds.
\end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя (7), (8) и (9) в (4) и сокращая обе части полученного неравенства на $\int\limits_t^\tau K^{\beta p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds$, а затем учитывая, что левая часть этого неравенства не зависит от $\tau$, $t < \tau < z$, и от $t$, $0 < t < z$, получим

$$\left(\int\limits_z^\infty d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} << C\varphi_\beta^{-1}(z) \quad \forall z > 0.$$

Отсюда следует, что $A_2(\beta) << C < \infty$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $A_\beta < \infty$ и для функции $f \geq 0$ конечна правая часть (4). Далее рассмотрим два случая: $\beta = 0$ и $0 < \beta \leq 1$.

Случай $\beta = 0$. В этом случае $A_0 \approx A_1(0) \approx A_2(0)$ и

$$K_0 f(x) = \int\limits_0^x f(s)\,ds.$$

Следовательно, мы должны показать, что из $A_1 = A_1(0) < \infty$ вытекает

$$\|K_0 f\|_{q,\mu} \le C(\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r,\lambda}) \tag{10}$$

и $C << A_1$, где $C$ — константа в (10), наименьшая из возможных.

В силу непрерывности и монотонности функции $K_0 f(x)$ на $\mathbb{R}_+$ существует последовательность точек $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}_0} \subset \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z}$, таких, что

$$2^{k-1} = K_0 f(x_{k-1}) = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(s)\,ds \; \forall k \in \mathbb{Z}_0, \quad \mathbb{R}_+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_0} [x_k, x_{k+1}),$$

$[x_i, x_{i+1}) \cap [x_j, x_{j+1}) = \varnothing$ при $i \ne j$ и $K_0 f(x) \le 2^{k+1}$ при $x_k \le x \le x_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_0$. Тогда

$$\|K_0 f\|^q_{q,\mu} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |K_0 f(x)|^q \, d\mu(x) \le \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} 2^{(k+1)q} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x). \tag{11}$$

Из $A_1 = A_1(0) < \infty$ следует, что для любого $k \in \mathbb{Z}_0$

$$\int\limits_{x_k}^{\infty} d\mu(x) \le A_1^q \varphi^{-q}(x_k) \le A_1^q \left( \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'}\,ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{\infty} K^r(x, x_{k-1})\,d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \right)^q.$$

Поэтому из (11) имеем

$$\|K_0 f\|^q_{q,\mu} \le A_1^q \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} 2^{q(k+1)} \left( \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'}\,ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{\infty} K^r(x, x_{k-1})\,d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} \right)^q$$

$$<< A_1^q \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} 2^{q(k-1)} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'}\,ds \right)^{-\frac{q}{p'}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} 2^{q(k-2)} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{\infty} K^r(x, x_{k-1})\,d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \right)$$

$$= A_1^q (I_1 + I_2). \tag{12}$$

Учитывая, что $q \ge p$ и $q \ge r \ge 1$, получим

$$I_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(s)\,ds \right)^q \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho^{-p'}\,ds \right)^{-\frac{q}{p'}} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |\rho f|^p\,ds \right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\le \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |\rho f|^p\,ds \right)^{\frac{q}{p}} \le \|\rho f\|^q_p, \tag{13}$$

$$I_2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{\infty} \left( \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, x_{k-1}) f(s)\,ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}}$$

$$\le \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} \sum_{i\ge k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x, x_{k-1}) f(s)\,ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}}$$

$$<< \left( \sum_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sum_{k\le i} \left( \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x,s) f(s)\, ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}}$$

$$\le \left( \sum_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \sum_{k\le i} \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x,s) f(s)\, ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \le \|Kf\|_{r,\lambda}^q. \quad (14)$$

Из (12)–(14) следует (10) с оценкой $C << A_1$.

Случай $0 < \beta \le 1$. Из условии (2) вытекает, что

$$K^\beta(x,s) \le d^\beta \big( K^\beta(x,t) + K^\beta(t,s) \big), \quad 0 < s < t < x. \quad (15)$$

Положим $D = d^\beta + 1$ и для любого $k \in \mathbb{Z}$ определим

$$x_k = \sup\{x > 0 : K_\beta f(x) \le D^k\}.$$

Очевидно, что $x_k \le x_{k+1}$ и в силу непрерывности функции $K_\beta f(x)$ будет $D^k = K_\beta f(x_k)$, если $x_k < \infty$. Пусть $\mathbb{Z}_\beta = \{k : D^k = K_\beta f(x_k),\ k \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $[x_i, x_{i+1}) \cap [x_j, x_{j+1}) = \varnothing$ при $i \ne j$, $i \in \mathbb{Z}_\beta$, $j \in \mathbb{Z}_\beta$ и

$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_\beta} [x_k, x_{k+1}), \quad K_\beta f(x) \le D^{k+1} \quad \text{при } x_k \le x \le x_{k+1},\ k \in \mathbb{Z}_\beta. \quad (16)$$

Для $k \in \mathbb{Z}_\beta$ в силу (15) имеем

$$D^{k-1} = D^k - d^\beta D^{k-1} = \int\limits_0^{x_k} K^\beta(x_k,s) f(s)\, ds - d^\beta \int\limits_0^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1},s)\, ds$$

$$\le \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} K^\beta(x_k,s) f(s)\, ds + d^\beta K^\beta(x_k,x_{k-1}) \int\limits_0^{x_{k-1}} f(s)\, ds$$

$$<< \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} K^\beta(x_k,s) f(s)\, ds + K^\beta(x_k,x_{k-1}) K_0 f(x_{k-1}). \quad (17)$$

Из (16) следует

$$\|K_\beta f\|_{q,\mu}^q = \sum_{k\in\mathbb{Z}_\beta} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \big(K_\beta f(x)\big)^q\, d\mu(x) \le \sum_{k\in\mathbb{Z}_\beta} D^{q(k+1)} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x)$$

$$= \Big( \sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta} + \sum_{k\in\mathbb{Z}''_\beta} \Big) D^{q(k+1)} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) = I' + I'', \quad (18)$$

где $\mathbb{Z}''_\beta = \mathbb{Z} - \mathbb{Z}'_\beta$ и $k \in \mathbb{Z}'_\beta$, если

$$\Phi_\beta(x_{k-1}, x_k) \le \Psi_\beta(x_{k-1}, x_k). \quad (19)$$

Используя (17), оценим $I'$ и $I''$ по отдельности:

$$I' = \sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta} D^{q(k+1)} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) << \sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta} D^{q(k-2)} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x)$$

$$<< \sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta}\left(\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1},s)f(s)\,ds\right)^q \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x)$$

$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta} K^{\beta q}(x_{k-1},x_{k-2})(K_0 f(x_{k-2}))^q \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) = I'_1 + I'_2. \quad (20)$$

Из условия $A_2 = A_2(\beta) < +\infty$ и из (19) выводим, что для $k \in \mathbb{Z}'_\beta$

$$\int\limits_{x_k}^{\infty} d\mu(x) \le A_2^q \varphi_\beta^{-q}(x_k) << A_2^q(\Psi_\beta(x_{k-1},x_k))^q.$$

Поэтому

$$I'_1 << A_2^q \sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta}\left(\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1},s)f(s)\,ds\right)^q \big(\Psi_\beta(x_{k-1},x_k)\big)^q$$

$$<< A_2^q \sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta}\left(\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1},s)f(s)\,ds\right)^q \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} K^{r(1-\beta)}(x_1,x_{k-1})\,d\lambda(x)\right)^{\frac{q}{r}}$$

$$+ A_2^q \sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta}\left(\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1},s)f(s)\,ds\right)^q K^{q(1-\beta)}(x_k,x_{k-1}) \left(\int\limits_{x_k}^{\infty} d\lambda(x)\right)^{\frac{q}{r}}$$

$$= A_2^q(I'_{11} + I'_{12}). \quad (21)$$

Так как $q \ge r \ge 1$, имеем

$$I'_{11} = \sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta}\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} K^{r(1-\beta)}(x,x_{k-1})\left(\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1},s)f(s)\,ds\right)^r d\lambda(x)\right)^{\frac{q}{r}}$$

$$<< \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\left(\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x,s)f(s)\,ds\right)^r d\lambda(x)\right)^{\frac{q}{r}} \le \|Kf\|^q_{r,\lambda}, \quad (22)$$

$$I'_{12} = \sum_{k\in\mathbb{Z}'_\beta}\left(\int\limits_{x_k}^{\infty}\left(\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K^\beta(x_{k-1},s)K^{(1-\beta)}(x_k,x_{k-1})f(s)\,ds\right)^r d\lambda(x)\right)^{\frac{q}{r}}$$

$$<< \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_\beta}\sum_{i\ge k}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x,s)f(s)\,ds\right)^r d\lambda(x)\right)^{\frac{q}{r}}$$

$$= \left(\sum_i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{k\le i}\left(\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x,s)f(s)\,ds\right)^r d\lambda(x)\right)^{\frac{q}{r}}$$

$$<< \left( \sum_i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \sum_{k \le i} \int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} K(x,s) f(s)\, ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} \le \|Kf\|^q_{r,\lambda}. \quad (23)$$

Из (21)–(23) следует, что

$$I_1' << A_2^q \|Kf\|^q_{r,\lambda}. \quad (24)$$

Переходим к оценке $I_2'$:

$$I_2' = \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} K^{\beta q}(x_{k-1}, x_{k-2}) (K_0 f(x_{k-2}))^q \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) \le \int\limits_0^\infty |K_0 f(s)|^q \, d\mu_0(s), \quad (25)$$

где

$$d\mu_0(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}'_\beta} K^{\beta q}(x_{k-1}, x_{k-2}) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) \delta_{x_{k-2}}(s)\, ds, \quad (26)$$

$\delta_{x_{k-2}}(s)$ — дельта-функция Дирака в точке $x_{k-2} \in \mathbb{R}_+$. Как мы уже показали, имеет место оценка в виде (10)

$$\int\limits_0^\infty |K_0 f(s)|^q \, d\mu_0(s) << \widehat{A}_0^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r,\lambda})^q, \quad (27)$$

где

$$\widehat{A}_0 = \sup_{z>0} \left( \int\limits_z^\infty d\mu_0(s) \right)^{\frac{1}{q}} \varphi(z).$$

В силу (26)

$$\int\limits_z^\infty d\mu_0(s) = \sum_{x_{k-2} \ge z} K^{\beta q}(x_{k-1}, x_{k-2}) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x)$$

$$<< \sum_{x_{k-2} \ge z} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} K^{\beta q}(x, x_{k-2})\, d\mu(x) << \int\limits_z^\infty K^{\beta q}(x,z)\, d\mu(x).$$

Значит,

$$\widehat{A}_0 << \sup_{z>0} \varphi(z) \left( \int\limits_z^\infty K^{\beta q}(x,z)\, d\mu(x) \right) = A_1(\beta) \equiv A_1$$

и из (25), (27) следует, что

$$I_2' << A_1^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r,\lambda})^q. \quad (28)$$

Из (20), (24) и (28) имеем

$$I' << A_\beta^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r,\lambda})^q. \quad (29)$$

Теперь оценим $I''$. Ввиду (17)

$$I'' = D^{2q} \sum_{k \in \mathbb{Z}''_\beta} D^{q(k-1)} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) << \sum_{k \in \mathbb{Z}''_\beta} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} K^\beta(x_k, s) f(s)\, ds \right)^q$$

$$\times \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}''_\beta} K^{\beta q}(x_k,x_{k-1}) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} d\mu(x)(K_0 f(x_{k-2}))^q = I''_1 + I''_2. \quad (30)$$

Выражение $I''_2$ оценивается точно так же, как и $I'_2$, т. е.

$$I''_2 << A_1^q(\|\rho f\|_p + \|Kf\|_{r,\lambda})^q. \quad (31)$$

Так как $\Phi_\beta(x_{k-1},x_k) > \Psi_\beta(x_{k-1},x_k)$ при $k\in\mathbb{Z}''_\beta$, поступая так же, как при оценке $I'_1$, имеем

$$I''_1 << A_2^q \sum_{k\in\mathbb{Z}''_\beta} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} K^\beta(x_k,s)f(s)\,ds \right)^q (\Phi_\beta(x_{k-1},x_k))^q.$$

Выберем $\tau=\tau_k\in(x_{k-1},x_k)$ так, чтобы

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{\tau_k} K^\beta(x_k,s)f(s)\,ds = \int\limits_{\tau_k}^{x_k} K^\beta(x_k,s)f(s)\,ds.$$

Тогда

$$\Phi_\beta(x_{k-1},x_k) \le \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{\tau_k} K^{\beta p'}(x_k,s)\rho^{-p'}(s)\,ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + K^{-\beta}(x_k,\tau_k) \left( \int\limits_{x_k}^{\infty} K^r(x,x_k)\,d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}}$$

и

$$I''_1 << A_2^q \sum_{k\in\mathbb{Z}''_\beta} K^{-\beta q}(x_k,\tau_k) \left( \int\limits_{\tau_k}^{x_k} K^\beta(x_k,s)f(s)\,ds \right)^q \left( \int\limits_{x_k}^{\infty} K^r(x,x_k)\,d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}}$$
$$+ A_2^q \sum_{k\in\mathbb{Z}''_\beta} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{\tau_k} K^\beta(x,s)f(s)\,ds \right)^q \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{\tau_k} K^{\beta p'}(x_k,s)\rho^{-p'}(s)\,ds \right)^{-\frac{q}{p'}}$$
$$<< A_2^q \sum_{k\in\mathbb{Z}''_\beta} \left( \int\limits_{x_k}^{\infty} K^r(x,x_k) \left( \int\limits_{\tau_k}^{x_k} f(s)\,ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} + A_2^q \sum_{k\in\mathbb{Z}''_\beta} \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{\tau_k} |\rho f|^p\,ds \right)^{\frac{q}{p}}$$
$$<< A_2^q \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}''_\beta} \sum_{i\ge k} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \int\limits_{\tau_k}^{x_k} K(x,s)f(s)\,ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}} + A_2^q \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}''_\beta} \int\limits_{x_{k-1}}^{\tau_k} |\rho f|^p\,ds \right)^{\frac{q}{p}}$$
$$<< A_2^q \left( \sum_i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \sum_{k\le i} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} K(x,s)f(s)\,ds \right)^r d\lambda(x) \right)^{\frac{q}{r}}$$

$$+ A_2^q \left( \sum_k \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |\, \rho f \,|^p \; ds \right)^{\frac{q}{p}} << A_2^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_r)^q.$$

Отсюда и из (31), (30) следует, что

$$I'' << A_\beta^q (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_r)^q.$$

Это неравенство вместе с (29) и (18) приводит к соотношению

$$\|K_\beta f\|_{q,\mu} << A_\beta (\|\rho f\|_p + \|Kf\|_r)^q.$$

Следовательно, и в случае $0 < \beta \le 1$ доказана справедливость (4) с оценкой $A_\beta >> C$. Теорема 1 доказана.

Так как функции $A_i(z, \beta)$, $i = 1, 2$, суть произведения двух локально ограниченных функций, конечность $A_\beta$ зависит от поведения функции $A_i(z, \beta)$ на концах интервала $\mathbb{R}_+$. Поэтому справедлива

**Теорема 1$'$.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда неравенство* (4) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\lim_{z \to 0}} A_i(z, \beta) < \infty, \quad i = 1, 2, \tag{32}$$

$$\overline{\lim_{z \to \infty}} A_i(z, \beta) < \infty, \quad i = 1, 2. \tag{33}$$

**3.** В качестве примера рассмотрим неравенство

$$\|\mathscr{R}_m f\|_{q,\mu} \le C\big(\|f\|_{p,\gamma} + \|\mathscr{R}_n f\|_{r,\lambda}\big), \quad f \ge 0, \tag{34}$$

где $m = n - k$, $n \ge 1$, $0 \le k \le n-1$, $d\mu(x) = x^{\mu q}\, dx$, $d\gamma(x) = x^{\gamma p}\, dx$, $d\lambda(x) = x^{\lambda r}\, dx$, $\mu, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$, которое эквивалентно неравенству

$$\|y^{(k)}\|_{q,\mu} \le C(\|y^{(n)}\|_{p,\gamma} + \|y\|_{r,\lambda}), \quad y \in M. \tag{35}$$

**Утверждение.** *Пусть* $1 < p, q, r < \infty$, $q \ge \max\{p, r\}$, $m = n - k$, $n \ge 1$, $0 \le k \le n-1$. *Тогда неравенство* (34) (*соответственно* (35)) *выполнено для всех функций* $f \ge 0$, $f \not\equiv 0$ ($y \in M$, $y \not\equiv 0$), *для которых конечна правая часть* (34) ((35)), *тогда и только тогда, когда*

$$\mu + m - 1 + 1/q < 0, \quad \lambda + n - 1 + 1/r < 0, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &\max\{\gamma - 1 + 1/p, \lambda + n - 1 + 1/r\} \ge \mu + m - 1 + 1/q \\ &\qquad \ge \min\{\gamma - 1 + 1/p, \lambda + n - 1 + 1/r\} \quad \textit{при } \gamma < 1 - 1/p, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\lambda + n - 1 + 1/r \le \mu + m - 1 + 1/q \quad \textit{при } \gamma \ge 1 - 1/p. \tag{38}$$

Доказательство. Условие (36) эквивалентно существованию хотя бы одной функции $f \ge 0$, $f \not\equiv 0$, для которой имеет место (34). Функции $\varphi$ и $\varphi_\beta \equiv \varphi_m$ имеют вид

$$\varphi(z) = \inf_{0<t<z} \left[ \left( \int\limits_t^z x^{-\gamma p'}\, dx \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left( \int\limits_t^\infty x^{\lambda r} (x - t)^{r(n-1)}\, dx \right)^{\frac{1}{r}} \right]^{-1},$$

$$\varphi_m(z) = [\inf_{0<t<z}(\Phi_m(t,z) + \Psi_k(t,z))]^{-1},$$

где $\Phi_m(t,z) = \inf\limits_{t<\tau<z} g(t,\tau,z)$,

$$g(t,\tau,z)=\left(\int_t^\tau x^{-\gamma p'}(z-x)^{p'(m-1)}\,dx\right)^{-\frac{1}{p'}}+(z-\tau)^{-m+1}\left(\int_z^\infty x^{\lambda r}(x-z)^{r(n-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\Psi_k(t,z) = \left(\int_t^z x^{\lambda r}(x-t)^{rk}\,dx\right)^{\frac{1}{r}} + (z-t)^k\left(\int_z^\infty x^{\lambda r}\,dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Произведем необходимые оценки функции $\varphi$ и $\varphi_m$. Учитывая, что $\varphi_1 \approx \varphi$, в основном оцениваем функцию $\varphi_m$.

Оценим снизу функцию $\varphi_m^{-1}(z)$ :

$$\Phi_m(t,z) \geq z^{-m+1}\left[\left(\int_t^z x^{-\gamma p'}\,dx\right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\int_z^\infty x^{\lambda r}(x-z)^{r(n-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\right],$$

$$\Psi_k(t,z) = z^{-m+1}\left[\left(\int_t^z x^{r\lambda}z^{r(m-1)}(x-t)^{rk}\,dx\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_z^\infty x^{r\lambda}[z^{m-1}(z-t)^k]^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

$$\geq z^{-m+1}\left[\left(\int_t^z x^{r\lambda}(x-t)^{r(n-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_z^\infty x^{r\lambda}(z-t)^{r(n-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\right].$$

Следовательно,

$$\varphi_m^{-1}(z) >> z^{-m+1}\varphi^{-1}(z). \tag{39}$$

Если $\gamma < \frac{1}{p'}$, то

$$\varphi^{-1}(z) >> \max\{z^{\gamma-\frac{1}{p'}}, z^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}\}. \tag{40}$$

При $\gamma \geq \frac{1}{p'}$ рассмотрим два случая: $z < 1$ и $z > 1$.

В случае $z < 1$

$$\varphi^{-1}(z) >> z^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}. \tag{41}$$

Пусть $\gamma > \frac{1}{p'}$ и $z > 1$. Тогда

$$\varphi^{-1}(z) >> \inf_{0<t<z}(t^{\gamma-\frac{1}{p'}} + t^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}) \geq \inf_{0<t<\infty}(t^{\gamma-\frac{1}{p'}} + t^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}) >> 1. \tag{42}$$

В случае $\gamma = \frac{1}{p'}$ и $z > 1$ имеем

$$\varphi^{-1}(z) >> \min\left\{\inf_{0<t<1} t^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}, \inf_{1<t<z}\left(\int_t^z \frac{dx}{x}\right)^{-\frac{1}{p'}}\right\}$$
$$= \min\{1, |\ln z|^{-\frac{1}{p'}}\} = |\ln z|^{-\frac{1}{p'}}. \tag{43}$$

Оценим сверху функцию $\varphi_m^{-1}(z)$:

$$\varphi_m^{-1}(z) \leq \Phi_m\left(\frac{1}{3}z, z\right) + \Psi_k\left(\frac{1}{3}z, z\right) << g\left(\frac{1}{3}z, \frac{1}{2}z, z\right) + z^{-m+\lambda+n+\frac{1}{r}}$$
$$<< z^{-m+1}\max\{z^{\gamma-\frac{1}{p'}}, z^{\lambda+n-1+\frac{1}{r}}\}. \tag{44}$$

Из (39), (40) и (44) следует, что при $\gamma < \frac{1}{p'}$

$$\varphi_m(z) \approx z^{m-1} \min\{z^{\frac{1}{p'}-\gamma}, z^{-(\lambda+n-1+\frac{1}{r})}\}. \tag{45}$$

Если $\gamma \geq \frac{1}{p'}$ и $z < 1$, то из (39), (41) и (44) получим

$$\varphi_m(z) \approx z^{m-(\lambda+n+\frac{1}{r})}. \tag{46}$$

А в случае $z > 1$ из (39), (42) и (43) следует, что

$$\varphi_m(z) << z^{m-1} \quad \text{при } \gamma > 1/p', \tag{47}$$

$$\varphi_m(z) << z^{m-1}|\ln z|^{\frac{1}{p'}} \quad \text{при } \gamma = 1/p'. \tag{48}$$

На основании теоремы $1'$ неравенство (34) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\varlimsup_{z\to 0} A_i(z,m) < \infty, \quad i = 1,2, \tag{49}$$

$$\varlimsup_{z\to \infty} A_i(z,m) < \infty, \quad i = 1,2, \tag{50}$$

где

$$A_1(z,m) = \varphi(z)\left(\int_z^\infty x^{(\mu-1)q}(x-z)^{\mu q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \approx \varphi(z) z^{\mu+m+\frac{1}{q}-1},$$

$$A_2(z,m) = \varphi_m(z)\left(\int_z^\infty x^{\mu q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \approx \varphi_m(z) z^{\mu+\frac{1}{q}}.$$

Из (36), (47) и (48) следует, что при $\gamma \geq \frac{1}{p'}$ условие (50) всегда имеет место, а из (46) вытекает, что (49) выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda - \mu \leq \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - k$. Если $\gamma < \frac{1}{p'}$, то ввиду (36), (45) условия (49), (50) эквивалентны соответственно правому и левому неравенствам (37). Утверждение доказано.

**4.** Рассмотрим неравенство

$$\|K_\beta^* g\|_{q\mu} \leq C\big(\|\rho g\|_p + \|K^* g\|_{r,\lambda}\big), \quad g \geq 0, \tag{51}$$

где

$$K^* g(s) = \int_s^\infty K(x,s) g(x)\,dx, \quad K_\beta^* g(s) = \int_s^\infty K^\beta(x,s) g(x)\,dx,$$

$0 \leq \beta \leq 1$, функция $K(x,s)$ непрерывна при $x \geq s > 0$ и удовлетворяет условиям (а) и (б). Предположим, что весовая функция $\rho$ и неотрицательные борелевские меры $\mu$, $\lambda$ удовлетворяют условиям

$$\rho^{-1} \in L_{p'}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+), \quad \int_0^t d\mu(s) < \infty, \quad \int_0^t K^{\beta q}(t,s)\,d\mu(s) < \infty,$$

$$\int_0^t d\lambda(s) < \infty, \quad \int_0^t K^r(t,s)\,d\lambda(s) < \infty \quad \forall t > 0.$$

Положим

$$\varphi^*(z) = \left( \inf_{z<t<\infty} \left[ \left( \int\limits_z^t \rho^{-p'}\, ds \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left( \int\limits_0^t K^r(t,s)\, d\lambda(s) \right)^{\frac{1}{r}} \right] \right)^{-1},$$

$$\varphi^*_\beta(z) = [\inf_{z<t<\infty} (\Phi_\beta(z,t) + \Psi_\beta(z,t))]^{-1},$$

где

$$\Phi^*_\beta(z,t) = \inf_{z<\tau<t} \left[ \left( \int\limits_\tau^t \rho^{-p'}(x) K^{\beta p'}(x,z)\, dx \right)^{-\frac{1}{p'}} + K^{-\beta}(\tau,z) \left( \int\limits_0^z K^r(z,s)\, d\lambda(s) \right)^{\frac{1}{r}} \right],$$

$$\Psi^*_\beta(z,t) = \left( \int\limits_z^t K^{(1-\beta)r}(x,z)\, d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}} + K^{1-\beta}(t,z) \left( \int\limits_0^z d\lambda(s) \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$A^*_1(z,\beta) = \varphi^*(z) \left( \int\limits_0^z K^{\beta q}(z,s)\, d\mu(s) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad A^*_2(z,\beta) = \varphi^*_\beta(z) \left( \int\limits_0^z d\mu(s) \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A^*_\beta = \max\{\sup_{z>0} A^*_i(z,\beta),\ i=1,2\}.$$

Аналогично теореме 1 доказывается

**Теорема 2.** *Пусть* $1 < p, q, r < \infty$, $q \geq \max\{p, r\}$, $0 \leq \beta \leq 1$. *Пусть также функция* $K(x,s)$ *непрерывна при* $0 \leq s \leq x$ *и удовлетворяет условиям* (а) *и* (б). *Тогда неравенство* (51) *выполнено в том и только в том случае, когда* $A^*_\beta < \infty$, *причем* $A^*_\beta \approx C$, *где* $C$ — *константа в* (51), *наименьшая из возможных.*

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Ойнаров Р.* Весовые неравенства для одного класса интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 5. С. 1076–1076.
2. *Ойнаров Р.* Двусторонние оценки норм некоторых классов интегральных операторов // Тр. МИ РАН. 1993. Т. 204. С. 240–250.
3. *Stepanov V. D.* Weighted norm inequalities for integral operators and related topics // Nonlinear analysis, function spaces and applications: Proc. Spring School held in Prague, May 23-28, 1994. Prague, 1994. V. 5. P. 139–175.
4. *Ойнаров Р., Отелбаев М.* Критерии дискретности спектра общего оператора Штурма — Лиувилля и теоремы вложения, связанные с ними // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 4. С. 584–591.
5. *Oinarov R.* On weighted norm inequalities with three weights // J. London Math. Soc. 1993. V. 48, N 1. P. 137–151.
6. *Ойнаров Р.* Об одном трехвесовом неравенстве // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1992. № 1. С. 47–51.
7. *Ойнаров Р.* Об одном трехвесовом обобщении неравенства Харди // Мат. заметки. 1993. Т. 54, № 2. С. 56–62.
8. *Ойнаров Р., Чагиров А. А.* Трехвесовое неравенство с интегральным оператором // Докл. НАН РК. 1993. № 2. С. 13–16.


*Статья поступила 12 октября 2000 г.*

*Ойнаров Рыскул*
*Институт математики МОиН Республики Казахстан*
*ул. Пушкина, 125, Алматы 480100, Казахстан*
oinarov@math.kz