Математические заметки

ТОМ 63 ВЫПУСК 2 ФЕВРАЛЬ 1998

УДК 517.518.47

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Е. Д. Нурсултанов

В работе доказаны теоремы о мультипликаторах рядов Фурье в L_p, где условия зависят от параметра p. Построен пример, показывающий существенность этих условий.
Библиография: 13 названий.

Введение. Пусть $f(x)$ – функция из $L_p(\mathbb{T}^n)$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{1}$$

– ее ряд Фурье по тригонометрической системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, A – конечное подмножество $\mathbb{Z}^n=\{k=(k_1,\dots,k_n):k_i\in\mathbb{Z},\ i=1,\dots,n\}$.

Пусть $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – последовательность комплексных чисел. Будем говорить, что $\lambda\in\mathbf{m}_p$, т.е. λ является *мультипликатором Фурье* в L_p, если для функции $f\in L_p(\mathbb{T}^n)$ с рядом Фурье (1) найдется функция $f_\lambda\in L_p(\mathbb{T}^n)$, ряд Фурье которой совпадает с рядом (1) и оператор $T_\lambda f=f_\lambda$ ограничен в $L_p(\mathbb{T}^n)$. Класс $\mathbf{m}_p$ является линейным пространством с нормой $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p}=\|T_\lambda\|_{L_p\to L_p}$.

Истоком теории мультипликаторов рядов Фурье является теорема М. Рисса [1], в которой показано, что характеристическая функция χ_I отрезка I из $\mathbb{Z}$ является мультипликатором в $L_p[0,2\pi)$, причем $\|\chi_I\|_{\mathbf{m}_p}\leqslant c$, постоянная c не зависит от выбора отрезка I.

В 1939 году Марцинкевич [2] получил следующую теорему о мультипликаторах рядов Фурье.

Теорема (Марцинкевич). *Пусть $1<p<\infty$, последовательность вещественных чисел $\lambda=\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет условию*

$$F_0(\lambda)=\sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\lambda_k-\lambda_{k+1}|+|\lambda_{-k}-\lambda_{-k-1}|\right)+\sup_{m\in\mathbb{Z}}|\lambda_m|<\infty.$$

Тогда λ – мультипликатор в $L_p[0,2\pi)$ и $\|\lambda_m\|_{L_p}\leqslant cF_0(\lambda)$.

В теореме Марцинкевича условия на последовательность λ одинаковы для всех $1<p<\infty$, т.е. не зависят от параметра p. Возникает задача о получении достаточных условий принадлежности λ пространству $\mathbf{m}_p$, существенно зависящих от параметра p. Эта проблема достаточно широко обсуждалась в книге И. Стейна [3].

В данной работе получены теоремы о мультипликаторах рядов Фурье, в которых условия зависят от p. Построен пример, показывающий точность этих теорем по параметру p.

1. Об ограниченности частичных сумм рядов Фурье. Пусть $f(x)$ – функция из $L_p(\mathbb{T}^n)$, A – конечное подмножество $\mathbb{Z}^n$. Тригонометрический многочлен

$$S_A(f) = \sum_{k\in A} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

назовем *частичной суммой ряда Фурье* функции $f(x)$, соответствующей множеству индексов A.

Если A – отрезок (т.е. параллелепипед) в $\mathbb{Z}^n$, то, как следует из теоремы М. Рисса,

$$\|S_A(f)\|_p \leqslant C\|f\|_p, \tag{2}$$

где C зависит только от параметра p. Если в качестве A берутся произвольные множества, постоянная C в (2) зависит от геометрических свойств множества A, размерности n и параметра p. Если A – многоугольник в $\mathbb{Z}^n$, исследованию константы C посвящены работы [4]–[10]. В этом пункте исследуется зависимость константы C из (2) от структурных свойств множества A, а именно, от представления множества в виде объединения некоторых "элементарных" множеств (отрезков, гармонических отрезков).

Пусть $B = \{n, n+1, \dots, n+l\}$ – отрезок в $\mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$, $d > l$. Множество вида $I = \bigcup_{k=0}^{N}[B + kd] = \bigcup_{k=0}^{N}\{m + kd : m \in B\}$ назовем *гармоническим отрезком* в $\mathbb{Z}$, а множество $J = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[B + kd]$ – *гармоническим интервалом* в $\mathbb{Z}$. Тогда множество вида $I = I_1 \times \dots \times I_n$, где I_i – гармонические отрезки в $\mathbb{Z}$, называется *гармоническим отрезком* в $\mathbb{Z}^n$, а множество $J = J_1 \times \dots \times J_n$, где J_i – гармонические интервалы в $\mathbb{Z}$, называется *гармоническим интервалом* в $\mathbb{Z}^n$.

Ясно, что всякий отрезок в $\mathbb{Z}^n$ является гармоническим отрезком в $\mathbb{Z}^n$.

Пусть $J = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}^n}(B + md)$ – гармонический интервал, $I_k = \bigcup_{m\in Q_k}(B + md)$, $k = 1, 2, \dots,$ – последовательность гармонических отрезков, соответствующих гармоническому интервалу J и последовательности отрезков $Q_k = \{m \in \mathbb{Z}^n : 0 \leqslant |m_j| \leqslant k,$ $j = 1, \dots, n\}$. Здесь $m = (m_1, \dots, m_n)$, $d = (d_1, \dots, d_n)$, $md = (m_1d_1, \dots, m_nd_n)$.

Хорошо известно следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$D_m = \frac{1}{d}\sum_{r=0}^{d-1} e^{i2\pi rm/d} = \begin{cases} 1, & m \text{ кратно } d, \\ 0, & m \text{ не кратно } d. \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть* $B = B_1 \times \dots \times B_n$ – *отрезок в* $\mathbb{Z}^n$, $Q_k = \{m \in \mathbb{Z}^n : 0 \leqslant |m_j| \leqslant k,$ $j = 1, \dots, n\}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k = \bigcup_{r\in Q_k}(B + rd) = \bigcup_{r\in Q_k}(B_1 + r_1d_1) \times \dots \times (B_n + r_nd_n)$$

– *последовательность гармонических отрезков в* $\mathbb{Z}^n$, *сходящаяся к гармоническому интервалу* J.

Если

$$f = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m)e^{imx} \in L_p[0, 2\pi],$$

то последовательность частичных сумм

$$S_{I_k}(f) = \sum_{m\in I_k} \widehat{f}(m)e^{imx}$$

сходится в $L_p(\mathbb{T}^n)$ *к функции*

$$\begin{aligned} S_J(x) &= \frac{1}{d} \sum_{0\leqslant r\leqslant d-1} f\left(x + \frac{2\pi r}{d}\right) D_B\left(\frac{2\pi r}{d}\right) \\ &= \frac{1}{d_1}\cdots\frac{1}{d_n} \sum_{r_1=0}^{d_1-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{d_n-1} f\left(x_1 + \frac{2\pi r_1}{d_1},\dots,x_n + \frac{2\pi r_n}{d_n}\right) D_B\left(\frac{2\pi r_1}{d_1},\dots,\frac{2\pi r_n}{d_n}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $D_B(x) = \sum_{m\in B} e^{imx}$ *– ядро Дирихле, соответствующее отрезку* B *из* $\mathbb{Z}^n$.

Доказательство. Заметим, что $S_J(x)$ принадлежит пространству $L_p(\mathbb{T}^n)$, как конечная линейная комбинация функций из $L_p(\mathbb{T}^n)$. Покажем, что ее коэффициенты Фурье совпадают с коэффициентами Фурье $\widehat{f}(m)$ функции $f(x)$ при $m \in J = \bigcup_{k=1}^\infty I_k$ и равны 0 при $m \notin J$. Имеем

$$\begin{aligned} S_J(x) &= \frac{1}{d} \sum_{0\leqslant r\leqslant d-1} f\left(x + \frac{2\pi r}{d}\right) D_B\left(\frac{2\pi r}{d}\right) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{1}{d}\sum_{0\leqslant r\leqslant d-1} e^{2\pi rm/d} D_B\left(\frac{2\pi r}{d}\right)\right)\widehat{f}(m)e^{imx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} b_m\widehat{f}(m)e^{imx}. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимо показать, что

$$b_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m \in J, \\ 0 & \text{при } m \notin J. \end{cases} \tag{4}$$

Несложные вычисления дают

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{d}\sum_{0\leqslant r<d} e^{2\pi rm/d} \sum_{k\in B} e^{-i2\pi rk/d} = \sum_{k\in B}\frac{1}{d}\sum_{0\leqslant r<d} e^{i2\pi r(m-k)/d} \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{d_j}\sum_{k_j\in B_j}\sum_{r_j=0}^{d_j} e^{i2\pi r_j(m_j-k_j)/d_j}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что $m_j - k_j$ может быть кратно числу d_j лишь при одном $k_j^0 \in B_j$, так как $|B_j| < d_j$. Таким образом, если найдется $k_j^0 \in B_j$ такое, что $m_j - k_j^0$ будет кратно d_j, то по лемме 1

$$\frac{1}{d_j}\sum_{r_j=0}^{d_j} e^{i2\pi r_j(m_j-k_j^0)/d_j} = 1.$$

Но кратность $m_j - k_j^0$ числу d при $k_j^0 \in B_j$ означает представление $m_j \in k_j^0 + sd_j$, $s \in \mathbb{Z}$. Это, в свою очередь, может произойти лишь в случае $m_j \in \bigcup_{s\in\mathbb{Z}}^\infty (B_j + sd_j) = \bigcup_{k=1}^\infty I_k^j$.

Если же $m_j \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^j$, т.е. $m_j - k_j$ не кратно d ни при каком $k_j \in B_j$, то согласно лемме 1

$$\frac{1}{d_j}\sum_{r_j=0}^{d_j} e^{i2\pi r_j(m_j-k_j^0)/d_j} = 0.$$

Это доказывает формулу (4), поскольку

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^1 \times \cdots \times \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = J.$$

Следовательно, рядом Фурье функции $S_J(x)$ является

$$\sum_{m\in J} \widehat{f}(m)e^{imx},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Оператор, определенный равенством (3), является интегральной суммой, соответствующей равномерному разбиению тора $\mathbb{T}^n$, интеграла

$$S_B(f,x) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x+y)\,D_B(y)\,dy, \tag{5}$$

являющегося, в свою очередь, частичной суммой ряда Фурье, соответствующей параллелепипеду $B \in \mathbb{Z}^n$.

Замечание 2. Нетрудно убедиться (анализируя доказательство), что в неравенствах теоремы об ограниченности частичной суммы и теоремы Литтлвуда–Пэли при $1 < p < 2$ (см. [1], [5]) соответствующие константы ограничены числом $p'C$, где $p' = p/(p-1)$, т.е. константы растут при $p \to 1$ не быстрее, чем $(p-1)^{-1}$. Этот факт используется нами в дальнейшем.

Лемма 3. *Пусть $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, J – гармонический интервал. Оператор $S_J(f)$ из леммы 2 является оператором (p,p)-сильного типа и верно неравенство*

$$\|S_J(f)\|_{L_p} \leqslant p'C\|f\|_{L_p},$$

где константа C не зависит от p, J и $f \in L_p$.

Доказательство проводится так же, как и для частичных сумм (5). Следует только следить за константами в соответствующих неравенствах (см. замечания 1 и 2).

Следствие 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, I – произвольный гармонический отрезок в $\mathbb{Z}^n$, $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$. Тогда*

$$\|S_I(f)\|_{L_p} \leqslant {p'}^2 C\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)},$$

где C не зависит от p, f и I.

Доказательство. Пусть J – гармонический интервал в $\mathbb{Z}^n$ такой, что $J \cap I = I$. Тогда найдется отрезок Q в $\mathbb{Z}^n$ такой, что $J \cap Q = I$. Следовательно, $S_I(f)(x) = S_Q\big(S_J(f)\big)(x)$. Поэтому, учитывая замечание 2, леммы 2 и 3, имеем

$$\|S_I(f)\|_{L_p} = \big\|S_Q\big(S_J(f)\big)\big\|_{L_p} \leqslant p'C_1\|S_J(f)\| \leqslant p'^2C_2\|f\|_{L_p}.$$

Следствие доказано.

Пусть $\Delta_k = \{m \in \mathbb{Z}^n : 2^{|k_j|} \leqslant m_j \operatorname{sign} k_j < 2^{|k_j|+1},\ j = 1,\dots,n\}$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Тогда $\mathbb{Z}^n$ можно представить в виде $\mathbb{Z}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^n} \Delta_k$. Это представление называется *двоичным разложением решетки* $\mathbb{Z}^n$.

Конечное множество I из $\mathbb{Z}^n$ будем называть *гармоническим отрезком типа Сидона*, если найдутся гармонический интервал J_0 и последовательность векторов $\{r_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ из $\mathbb{Z}^n$ такие, что для любого $k \in \mathbb{Z}^n$

$$I \cap \Delta_k = (J_0 - r_k) \cap \Delta_k. \tag{6}$$

Замечание 3. Так как гармонический интервал по каждому декартову направлению имеет свой период, если для $r_k = \{r_1^k,\dots,r_n^k\}$ выполнено (6), то для векторов $(r_1^k + d_1m_1,\dots,r_n^k + d_nm_n)$, $m = (m_1,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}^n$ также имеет место соотношение (6).

Замечание 4. Любой гармонический отрезок является гармоническим отрезком типа Сидона.

Замечание 5. Пусть A – множество Сидона в $\mathbb{Z}^n$, т.е. $A = \{(b_1^k,\dots,b_n^k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}^n$ таково, что

$$\left|\frac{b_j^{k+1}}{b_j^k}\right| \geqslant \alpha > 1, \qquad k = 1,2,\dots.$$

Тогда любое конечное подмножество этого множества можно представить в виде объединения гармонических отрезков типа Сидона, причем их количество зависит только от α. Так, если $\alpha \geqslant 2$, то любое конечное подмножество A есть гармонический отрезок типа Сидона.

Множество всех гармонических отрезков типа Сидона обозначим через S_0.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $I \in S_0$. Если $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$, то*

$$\|S_I(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \leqslant Cp'^4\|f\|_{L_p},$$

где константа C не зависит от p, гармонического отрезка I и функции f.

Доказательство. Пусть I – гармонический отрезок, $\Delta_{k_1},\dots,\Delta_{k_N}$ – элементы двоичного разбиения $\mathbb{Z}^n$, с которыми I имеет непустое пересечение. Тогда, учитывая определение гармонического отрезка типа Сидона и замечание 3, нетрудно показать, что найдутся гармонический интервал J_0, векторы с целочисленными координатами $r_1 = (r_1^1,\dots,r_n^1),\dots,r_N = (r_1^N,\dots,r_n^N)$ такие, что

1) $S_I(f_{k_j}) = S_{J_0}(e^{ir_jx}f_{k_j})$, где $S_B = \sum_{m\in B}\widehat{f}(m)e^{imx}$, $f_{k_j} = S_{\Delta_{k_j}}(f)$, $j = 1,\dots,N$;
2) множества $\Delta_{k_j} + r_j$, $j = 1,\dots,N$, являются подмножествами различных элементов двоичного разбиения пространства $\mathbb{Z}^n$.

Пусть

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{N} e^{ir_j x} f_{k_j}(x).$$

Тогда

$$\|S_I(f)\|_{L_p} = \Big\|\sum_{j=1}^{N} S_I(f_{k_j})\Big\|_{L_p} = \Big\|\sum_{j=1}^{N} S_{J_0}(e^{ir_j x} f_{k_j})\Big\|_{L_p}$$
$$= \Big\|S_{J_0}\Big(\sum_{j=1}^{N} e^{ir_j x} f_{k_j}\Big)\Big\|_{L_p} = \|S_{J_0}(f_0)\|_{L_p}.$$

Из леммы 3 следует, что

$$\|S_I(f)\|_{L_p} = \|S_{J_0}(f_0)\|_{L_p} \leqslant c{p'}^2 \|f_0\|_{L_p}.$$

Учитывая выбор векторов $r_1, \dots, r_N$, из теоремы Литтлвуда–Пэли и замечания 2 имеем

$$\|f_0\|_{L_p} \leqslant {p'}^3 c_1 \bigg\| \bigg(\sum_{j=1}^{N} |e^{ir_j x} S_{\Delta_{k_j}}(f)|^2\bigg)^{1/2} \bigg\|_{L_p}$$
$$\leqslant {p'}^3 c_2 \bigg\| \bigg(\sum_{j=1}^{N} |S_{\Delta_{k_j}}(f)|^2\bigg)^{1/2} \bigg\|_{L_p} \leqslant {p'}^4 c \|f\|_{L_p},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть оператор T представим в виде суммы линейных операторов*:

$$T = \sum_{j=1}^{N} T_j,$$

где каждый оператор удовлетворяет следующим условиям:

а) $\|T_j\|_{L_p \to L_p} \leqslant {p'}^{\alpha} D$ *при* $1 < p \leqslant 2$, *где* D *не зависит от* p;
б) $\|T\|_{L_2 \to L_2} \leqslant D$.

Тогда при $1 < p \leqslant 2$

$$\|Tf\|_{L_p} \leqslant c_p D\big(N (\ln N)^{\alpha}\big)^{|1/p - 1/p'|} \|f\|_{L_p},$$

т.е. $\|T\|_{L_p \to L_p} \leqslant c_p D\big(N (\ln N)^{\alpha}\big)^{|1/p - 1/p'|}$.

Доказательство. Пусть $1 < p_0 \leqslant 1 + 1/4$. Тогда из условий леммы имеем

$$\|Tf\|_{L_{p_0}} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \|T_j f\|_{L_p} \leqslant D{p_0'}^{\alpha} N \|f\|_{L_{p_0}}, \tag{7}$$

т.е. норма оператора $T\colon L_{p_0} \to L_{p_0}$ не больше чем $D{p_0'}^{\alpha} N$. С другой стороны, норма оператора $T\colon L_2 \to L_2$ не больше чем D. Согласно методу комплексной интерполяции получаем, что $T\colon L_p \to L_p$, где $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/2$, причем верна оценка

$$\|T\|_{L_p \to L_p} \leqslant D({p_0'}^{\alpha} N)^{1-\theta}.$$

Теперь оценим выражение $({p_0'}^{\alpha} N)^{1-\theta}$, считая $1 < p_0 < 5/4$. Имеем

$$(p_0^{\alpha} N)^{1-\theta} \leqslant 16(x^{-\alpha} N^{1+x})^{1/p-1/p'},$$

где $x = 2/(p'-2)$. Минимизируя по x из $(0,1]$, получим, что минимум достигается при $x = [(\ln N)/\alpha]^{-1}$. Поэтому

$$\|T\|_{L_p \to L_p} \leqslant c_p D[(\ln N)^{\alpha} N]^{1/p-1/p'} \quad \text{при} \ \ 1 + \frac{\alpha}{2\ln N + \alpha} \leqslant p \leqslant 2.$$

Пусть теперь $1 < p \leqslant 1 + \alpha/(2\ln N + \alpha)$, следовательно, $p' \geqslant 1 + (2\ln N)/\alpha \geqslant (2\ln N)/\alpha$. Из неравенства (7) имеем

$$\begin{aligned} \|T\|_{L_p \to L_p} &\leqslant p' N D = p' N^{1/p-1/p'} N^{2/p'} D \leqslant p' N^{1/p-1/p'} e^{\alpha} D \\ &\leqslant p' N^{1/p-1/p'} (e \ln N)^{\alpha(1/p-1/p')} D. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть A – конечное подмножество $\mathbb{Z}^n$. Его всегда можно представить в виде конечного объединения непересекающихся отрезков из S:

$$A = \bigcup_{j=1}^{l} I_j, \tag{8}$$

причем не единственным образом. Через $[A]$ обозначим наименьшее число гармонических отрезков типа Сидона, входящих в представление (8), т.е.

$$[A] = \min\biggl\{ l : A = \bigcup_{j=1}^{l} I_j,\ I_j \cap I_i = \varnothing \text{ при } i \neq j,\ I_j \in S \biggr\}.$$

Здесь минимум берется по всевозможным представлениям вида (8).

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, A – конечное подмножество $\mathbb{Z}^n$. Тогда имеет место оценка*

$$\|S_A(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \leqslant c\bigl([A](\ln[A])^4\bigr)^{|1/p-1/p'|} \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)},$$

где c зависит только от параметра p.

Доказательство. Пусть $I_1,\dots,I_{[A]}$ – последовательность отрезков из S таких, что

$$A=\bigcup_{j=1}^{[A]} I_j,$$

т.е. $I_1,\dots,I_{[A]}$ определяют оптимальное представление вида (8) множества A.

Из теоремы 1 следует, что существует константа c, не зависящая от функции f и от чисел j и p, такая, что для частичных сумм $S_{I_j}(f)$ имеет место неравенство

$$\|S_{I_j}(f)\|_{L_p}\leqslant {p'}^4 c\|f\|_{L_p}.$$

Из равенства Парсеваля вытекает неравенство

$$\|S_A(f)\|_{L_2}\leqslant \|f\|_{L_2}.$$

Следовательно, операторы $T_j=S_{I_j}(f)$, $j=1,\dots,[A]$, и $T=\sum_{j=1}^{[A]}T_j$ удовлетворяют условиям леммы 4. Отсюда следует утверждение теоремы при $1<p<2$. Оставшийся случай $2<p<\infty$ вытекает из свойств симметрии оператора взятия частичной суммы.

2. Мультипликаторы рядов Фурье.

Теорема 3. *Пусть $1<p<\infty$ и для вещественной последовательности $\lambda=\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ выполнено*

$$F_p^1(\lambda)=\sup_k\sum_{r=1}^{|Q_k|}(\lambda_r^*-\lambda_{r+1}^*)\big([A_r](\ln[A_r])^4\big)^{|1/p-1/p'|}+\big|\lambda^*_{|Q_k|}\big|<\infty,$$

где $Q_k=\{m\in\mathbb{Z}^n:0\leqslant|m_j|\leqslant k,\ j=1,\dots,n\}$, $\{\lambda_r^*\}_{r=1}^{|Q_k|}$ – невозрастающая перестановка (учитывающая знак) последовательности $\{\lambda_m\}_{m\in Q_k}$, $A_r=\{m\in Q_k:\lambda_m>\lambda_r^*\}$. Тогда $\lambda\in\mathbf{m}_p$ и $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p}\leqslant c_pF_p^1(\lambda)$.

Доказательство. Применим преобразование Абеля и неравенство Минковского:

$$\Big\|\sum_{m\in Q_k}\lambda_m a_m e^{imx}\Big\|_{L_p}\leqslant\sum_{r=1}^{|Q_k|}(\lambda_r^*-\lambda_{r+1}^*)\|S_{A_r}(f)\|_{L_p}+\lambda^*_{|Q_k|}\|S_{Q_k}(f)\|_{L_p},$$

где $S_{A_r}(f)=\sum_{m\in A_r}a_me^{imx}$.

Используя теорему 2, получим

$$\Big\|\sum_{m\in Q_k}\lambda_m a_m e^{imx}\Big\|_{L_p}\leqslant c_p\bigg(\sum_{r=1}^{|Q_k|}(\lambda_r^*-\lambda_{r+1}^*)\big([A_r](\ln[A_r])^4\big)^{|1/p-1/p'|}+\big|\lambda_{|Q_k|}\big|\bigg)\|f\|_p.$$

Теорема доказана.

Лемма 5. *Пусть $1<p<\infty$ и $\lambda=\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ – последовательность комплексных чисел из ℓ_r, где $1/r=|1/2-1/p|$. Тогда $\lambda\in\mathbf{m}_p$.*

Доказательство. Пусть сначала $2 < p < \infty$. Применим последовательно неравенство Харди–Литтлвуда и неравенство Гёльдера:

$$\Big\|\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k a_k e^{ikx}\Big\|_{L_p} \leqslant c\|\lambda a\|_{\ell_{p'}} \leqslant c\|a\|_{\ell_2}\cdot\|\lambda\|_{\ell_r} \leqslant c\|f\|_{L_2}\cdot\|\lambda\|_{\ell_r} \leqslant c_p\|f\|_{L_p}\cdot\|\lambda\|_{\ell_r}.$$

Случай $1 < p \leqslant 2$ следует из соотношения $\mathbf{m}_p = \mathbf{m}_{p'}$.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/r = |1/p - 1/2|$. *Если последовательность комплексных чисел* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такова, что*

$$F_p^2(\lambda) = \inf_{\mu=\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}}\sup_m\Bigg(|\mu_{2^{m+1}}| + \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\mu_k - \mu_{k+1}| + |\lambda_k - \mu_k|k^{1/r-1}\Bigg) < \infty,$$

то $\lambda \in \mathbf{m}_p$ *и* $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p} \leqslant c_p F_p^2(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $\{\mu_k\}$ – произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$\sup_m\Bigg(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\mu_k - \mu_{k+1}| + |\mu_{2^{m+1}}|\Bigg) < \infty. \tag{9}$$

Для этой последовательности выполняется условие теоремы Марцинкевича о мультипликаторах, поэтому $\mu \in \mathbf{m}_p$. Так как пространство $\mathbf{m}_p$ линейно, $\lambda \in \mathbf{m}_p$ тогда и только тогда, когда $\lambda - \mu \in \mathbf{m}_p$. Из леммы 5 следует, что если $\lambda - \mu \in \ell_r$, $1/r = |1/p - 1/2|$, то $\lambda - \mu \in \mathbf{m}_p$, откуда

$$\sup_m\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\lambda_k - \mu_k|\,k^{1/r-1} < \infty.$$

Из условия теоремы следует, что существует последовательность μ^0, удовлетворяющая (9), такая, что

$$\sup_m\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\lambda_k - \mu_k^0|\,k^{1/r-1} < \infty,$$

т.е. $\lambda - \mu^0 \in \mathbf{m}_p$. Поэтому $\lambda \in \mathbf{m}_p$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/r = |1/p - 1/2|$. *Если последовательность действительных чисел* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такова, что*

$$F_p^3(\lambda) = \inf_{\mu}\Bigg(\sup_N\sum_{k=1}^{N}(\mu_k^* - \mu_{k+1}^*)\big([A_k](\ln[A_k])^4\big)^{|1/p-1/p'|} + \sup_k(|\lambda_k - \mu_k^*|)\,k^{1/r}\Bigg) < \infty,$$

где $A_k = \{m : \mu_m \geqslant \mu_k^*\}$, *то* $\lambda \in \mathbf{m}_p$ *и* $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p} \leqslant c_p F_p^3(\lambda)$.

Доказательство проводится с использованием теоремы 2 и леммы 5, аналогично доказательству теоремы 4.

Покажем, что условия на параметры в теоремах 2–5 точны.

Лемма 6. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Существует последовательность* $\lambda_N = \{\lambda_k^N\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $N = 2, 3, \dots$, *такая, что*

а) $\|\lambda_N\|_{\mathbf{m}_p} \geqslant c_p N^{|1/2-1/p|}$;

б) $F_p^1(\lambda_N) \leqslant c_p N^{|1/2-1/p|}(\ln N)^{4|1/p-1/p'|}$;

в) $F_p^2(\lambda_N) \leqslant c_p N^{|1/2-1/p|}$;

г) $F_p^3(\lambda_N) \leqslant c_p N^{|1/2-1/p|}$,

где F_p^1, F_p^2, F_p^3 – *функционалы из теорем 3–5 соответственно.*

Доказательство. Пусть $2 < p < \infty$. Случай $1 < p < 2$ следует из $F_p^1 = F_{p'}^1$, $F_p^2 = F_{p'}^2$, $F_p^3 = F_{p'}^3$ и $\mathbf{m}_p = \mathbf{m}_{p'}$, где $p' = p/(p-1)$.

Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\}$, заданную рекуррентно: $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{2k} = \varepsilon_k$, $\varepsilon_{2k+1} = (-1)^k\varepsilon_k$.

Дж. Брилхарт и Л. Карлитц [11] показали, что для этой последовательности имеет место оценка

$$\left|\sum_{m=0}^{N-1}\varepsilon_m e^{imx}\right| \leqslant cN^{1/2}, \qquad x \in [0, 2\pi). \tag{10}$$

Для построения λ_N воспользуемся леммой, доказанной М.И. Дьяченко [12].

Лемма 7 [12]. *Пусть* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *возрастающая последовательность тех натуральных чисел, для которых* $\varepsilon_{m_k} = -1$. *Тогда* $m_{k+1} - m_k \leqslant 5$ *при* $k = 1, \dots, n$.

Пусть последовательность $\{m_k\}$ из леммы, т.е. $\varepsilon_{m_k} = -1$. Рассмотрим последовательность $\lambda_N = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где

$$\lambda_k = \begin{cases} -1 & \text{при } k \in \{m_j : 1 \leqslant m_j \leqslant N,\ j = 1, \dots, N\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Согласно лемме 7

$$n \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varepsilon_k\right| = \left|\sum_{1\leqslant m_k\leqslant n}\varepsilon_{m_k}\right| \geqslant \frac{n}{5}, \qquad n = 1, \dots, N,$$

следовательно,

$$5^{-1} \leqslant n^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varepsilon_k\right|. \tag{11}$$

Тогда при $p \geqslant 2$ из [13, теорема 3] следует

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varepsilon_k e^{im_kx}\right\|_p^p \geqslant c\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}\overline{a}_n^p, \qquad \text{где } \ \overline{a}_n = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varepsilon_k,$$

следовательно,

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varepsilon_k e^{ikx}\right\|_p \geqslant 5^{-1}cN^{1/p'}.$$

Поэтому, принимая во внимание (11),

$$\|\lambda_N\|_{\mathbf{m}_p} \geqslant \frac{\left\|\sum_{k=1}^N \lambda_k \varepsilon_k e^{ikx}\right\|_p}{\left\|\sum_{k=1}^N \varepsilon_k e^{ikx}\right\|_p} \geqslant cN^{|1/2-1/p|}.$$

б) Пусть $B_N = \{m_j : 1 \leqslant m_j \leqslant N\}$. Так как любое множество натуральных чисел из отрезка $[1, N]$ можно представить в виде объединения не более чем $2N^{1/2}$ конечных арифметических прогрессий, имеем $[B_N] \leqslant 2N^{1/2}$. Тогда

$$F_p^1(\lambda) = \sum_{r=1}^N |\lambda_r^* - \lambda_{r+1}^*| \big([A_r](\ln[A_r])^4\big)^{|1/p-1/p'|} \leqslant \big([B_N](\ln[B_N])^4\big)^{|1/p-1/p'|}$$
$$\leqslant c_1\big(N^{1/2}(\ln N)^4\big)^{|1/p-1/p'|} = c_1 N^{|1/2-1/p|}(\ln N)^{4|1/p-1/p'|}.$$

в) Из определения функционала $F_p^2(\lambda)$ следует

$$F_p^2(\lambda) \leqslant \sup_m \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\lambda_k|\, k^{1/r-1} \leqslant \sum_{k=1}^N |\lambda_k|\, k^{1/r-1} \leqslant cN^{|1/2-1/p|}.$$

г) Как и в предыдущем неравенстве, имеем

$$F_p^3(\lambda) \leqslant \sup_m \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\lambda_k|\, k^{1/r-1} \leqslant cN^{|1/2-1/p|}.$$

Теорема 6. *Пусть $2 < p < \infty$. Существует последовательность $\lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что*

а) $\lambda \in \mathbf{m}_p$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ $\lambda \notin \mathbf{m}_{p+\varepsilon}$;
б) $F_p^1(\lambda) < \infty$;
в) $F_p^2(\lambda) < \infty$;
г) $F_p^3(\lambda) < \infty$;
д) $F_0(\lambda) = \infty$.

Здесь F_p^1, F_p^2, F_p^3 – функционалы из теорем 3–5, а F_0 – функционал из теоремы Марцинкевича.

Доказательство. Пусть $\lambda_N = \{\lambda_k^N\}_{k=1}^\infty$, $N = 2, 3, \dots,$ – последовательности из леммы 6. Положим

$$\lambda = \sum_{N=2}^\infty \lambda_N \big(N^{3/2-1/p}(\ln N)^{10}\big)^{-1}.$$

Тогда из леммы 6 с учетом полуаддитивности функционалов F_p^1, F_p^2, F_p^3 имеем

$$F_p^1(\lambda) \leqslant \sum_{N=2}^\infty F_p^1(\lambda_N)\big(N^{3/2-1/p}(\ln N)^{10}\big)^{-1} \leqslant \sum_{N=2}^\infty \frac{1}{N(\ln N)^{10}} < \infty,$$

$$F_p^2(\lambda) \leqslant \sum_{N=2}^\infty \frac{1}{N(\ln N)^{10}} < \infty, \qquad F_p^3(\lambda) \leqslant \sum_{N=2}^\infty \frac{1}{N(\ln N)^{10}} < \infty,$$

$$\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p} \leqslant \sum_{N=2}^\infty \frac{1}{N(\ln N)^{10}} < \infty.$$

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_{p+\varepsilon}} = \infty$. Пусть $\varepsilon_N = \{\varepsilon_k^N\}_{k=1}^\infty$, где ε_k^N при $k \leqslant N$ совпадают с элементами последовательности Шапиро и равны 0 при $k > N$. Рассмотрим последовательность

$$a = \sum_{N=2}^\infty \varepsilon_N \bigl(N^{3/2}(\ln N)^{10}\bigr)^{-1} = \biggl\{\varepsilon_k \sum_{N=k+1}^\infty \bigl(N^{3/2}(\ln N)^{10}\bigr)^{-1}\biggr\}_{k=1}^\infty$$

и соответствующую функцию

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{k=1}^\infty a_k e^{ikx} = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k \sum_{N=k+1}^\infty \bigl(N^{3/2}(\ln N)^{10}\bigr)^{-1} e^{ikx} \\ &= \sum_{N=2}^\infty \bigl(N^{3/2}(\ln N)^{10}\bigr)^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_k e^{ikx}. \end{aligned}$$

Тогда из неравенства (10) следует, что

$$\|f_0\|_{L_p} \leqslant \sum_{N=2}^\infty \bigl(N^{3/2}(\ln N)^{10}\bigr)^{-1} \biggl\|\sum_{k=1}^N \varepsilon_k e^{ikx}\biggr\|_{L_p} \leqslant c \sum_{N=2}^\infty \frac{1}{N(\ln N)^{10}} < \infty.$$

С другой стороны,

$$f_\lambda = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k a_k e^{ikx} = \sum_{k=1}^\infty \sum_{N=m_k}^\infty \bigl(N^{3/2-1/p}(\ln N)^{10}\bigr)^{-1} \sum_{N=m_k}^\infty \bigl(N^{3/2}(\ln N)^{10}\bigr)^{-1} e^{im_k x}.$$

Из [13, теорема 3] имеем

$$\|f_\lambda\|_{p+\varepsilon}^{p+\varepsilon} \geqslant \sum_{k=1}^\infty k^{p+\varepsilon-2}\, \overline{a}_k^{p+\varepsilon},$$

где

$$\begin{aligned} \overline{a}_k &= \frac{1}{k} \sum_{1\leqslant m_k\leqslant k} \sum_{N=m_k}^\infty \bigl(N^{3/2-1/p}(\ln N)^{10}\bigr)^{-1} \sum_{N=m_k}^\infty \bigl(N^{3/2}(\ln N)^{10}\bigr)^{-1} \\ &\sim \frac{1}{k}\biggl|\sum_{1\leqslant m_k\leqslant k} \frac{1}{m_k^{1-1/p}(\ln m_k)^{20}}\biggr|. \end{aligned}$$

Из леммы 7 следует

$$\overline{a}_k \sim \frac{k^{1/p}}{k(\ln k)^{20}} = \frac{1}{k^{1-1/p}(\ln k)^{20}}, \qquad k \geqslant 2,$$

откуда следует расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^\infty k^{p+\varepsilon-2}\, \overline{a}_k^{p+\varepsilon} \sim \sum_{k=2}^\infty \frac{k^{\varepsilon/p-1}}{(\ln k)^{20(p+\varepsilon)}} = \infty,$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
[2] Marcinkiewicz J. Sur les multiplicateurs des séries de Fourier // Studia Math. 1939. V. 8. P. 78–91.
[3] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
[4] Бабенко К. И. О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних. Препринт № 52. М.: ИПМ АН СССР, 1971.
[5] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. 1 // УМН. 1976. Т. 31. №6. С. 28–83.
[6] Митягин Б. С. О мультипликаторах-идемпотентах в симметрических функциональных пространствах // Функцион. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. №3. С. 81–82.
[7] Митягин Б. С., Никишин Е. М. О расходимости спектральных разложений в среднем и почти всюду // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. №3. С. 551–552.
[8] Cordoba A. Geometric Fourier Analysis // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1982. V. 32. P. 215–226.
[9] Юдин В. А. Сферические суммы рядов Фурье в L_p // Матем. заметки. 1989. Т. 46. №2. С. 145–146.
[10] Дьяченко М. И. Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p // Матем. сб. 1993. Т. 184. №3. С. 3–20.
[11] Brillhart J., Carlitz L. Note on the Shapiro polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 25. P. 114–118.
[12] Дьяченко М. И. О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Матем. сб. 1986. Т. 129. №1. С. 55–72.
[13] Нурсултанов Е. Д. Сетевые пространства и оценки коэффициентов Фурье по тригонометрической системе // Сборник “Теория приближений и вложений функциональных пространств”. Караганда, 1994. С. 121–127.

Институт прикладной математики Республики Казахстан, г. Караганда
E-mail: `nursult@ipm.karaganda.su`

Поступило
26.04.96
Исправленный вариант
15.04.97