Ж.Б. Муканов, Е.Т. Оразгалиев

Об интегрируемости косинус преобразования функций двух переменных

(*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан*)

В работе приводится достаточное условие интегрируемости двойного косинус-преобразования Фурье и справедливости формулы обращения.

Для функции одной переменной $f(x)$ известно, что если $f \in L_1[0,\infty)$ и ее косинус-преобразование

$$\hat{f}_c(x) = \int_0^\infty f(t)\cos xtdt$$

также принадлежит $L_1[0,\infty)$, то имеет место формула обращения

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}_c(x)\cos xtdx.$$

Но косинус-преобразование может быть неинтегрируемой функцией. Например, косинус-преобразование характеристической функции отрезка $[0,1]$ не является интегрируемой.

Известна следующая теорема, доказанная Dang Vu Gians и Ferenc Moricz [1].

Теорема А. Пусть f абсолютно непрерывная функция, определенная на $[0,\infty)$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, и пусть для некоторого $p > 1$ выполняется условие

$$F_p \equiv \int_0^\infty \left(\frac{1}{u}\int_u^{2u} \left| f'(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} du < \infty \tag{1}$$

Тогда $\hat{f}_c \in L_1[0,\infty)$ и имеет место формула обращения

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}_c(x)\cos txdx \tag{2}$$

для дюбого $t > 0$.

В той же работе доказано, что из этой теоремы в качестве следствия можно получить следующие утверждения для одномерных косинус-рядов.

Следствие А. Пусть коэффициенты ряда

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^\infty a_k \cos kt, \tag{3}$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0,$ удовлетворяют при некотором $p > 1$ условию

$$|\Delta a_0| + \sum_{m=0}^\infty 2^m \left(2^{-m} \sum_{m=0}^{2^m-1} |\Delta a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}, k = 0,1,2,\dots$.

Тогда сумма $f(t)$ ряда (3) принадлежит $L_1[0,\pi)$ и ряд (3) является рядом Фурье функции $f(t)$. Следствие А ранее было доказано Г.А.Фоминым другим методом.

Кратный аналог теоремы Фомина для рядов по тригонометричекой системе доказан А.Кузнецовой, для рядов Уолша - Морицем и Шиппом (1991г). Такие же вопросы для рядов по мультипликативной системе Прайса рассматривались Н.Сыздыковой.

Нашей целью является доказательство двумерного аналога теоремы А. Справедлива

Теорема 1. Пусть $f(x,y)$ абсолютно непрерывная по каждой переменной функция на $[0,\infty)^2$, $\lim\limits_{max(x,y)\to\infty} f(x,y)=0$ и для некоторого $p>1$

$$F_p \equiv \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{u_1u_2} \int\limits_{u_1}^{2u_1} \int\limits_{u_2}^{2u_2} \left| f''_{t_1t_2}(t_1,t_2) \right|^p dt_1dt_2 \right)^{\frac{1}{p}} du_1du_2 < \infty$$

Тогда $\hat{f}_c \in L_1[0,\infty)^2$ и имеет место формула обращения

$$f(t_1,t_2) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \hat{f}_c(x_1x_2)\cos x_1t_1 \cos x_2t_2 dx_1dx_2$$

для каждого $t_1>0, t_2>0$.

При доказательстве теоремы А использовано следующее вспомогательное утверждение.

Лемма А.([1],стр.338). Пусть f локально L_p-интегрируемая функция на $[0,\infty)$ при некотором $p\in(1,2]$. Тогда для любого $u>0$ имеет место неравенство:

$$\int\limits_0^\infty \left| \frac{1}{u}\int\limits_u^{2u} f(t)\frac{\sin xt}{x}dt \right| dx \le C_p \left(\frac{1}{u}\int\limits_u^{2u} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

Для полноты изложения приведем краткое доказательство леммы А.

Доказательство леммы А. Разобьем интеграл, стоящий в левой части равенства следующим образом

$$\left\{ \int\limits_0^{\frac{1}{u}} + \int\limits_{\frac{1}{u}}^\infty \right\} \left| \frac{1}{u}\int\limits_u^{2u} f(t)\frac{\sin xt}{x}dt \right| dx =: J_1 + J_2. \tag{5}$$

Для оценки J_1 мы используем элементарное неравенство

$$\frac{\sin xt}{ux} \le 2$$

при $0<x\le\frac{1}{u}$ и $u\le t\le 2u$.
Из него и неравенства Гельдера следует

$$J_1 \le 2\int\limits_0^{\frac{1}{u}} \int\limits_u^{2u} |f(t)|\,dtdx = \frac{2}{u}\int\limits_u^{2u} |f(t)|dt \le 2\left(\frac{1}{u}\int\limits_u^{2u} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

Для оценки J_2 мы будем использовать неравенство Гельдера.

$$J_2 \le \frac{1}{u}\left(\int\limits_{\frac{1}{u}}^\infty \frac{dx}{x^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\frac{1}{u}}^\infty \left| \int\limits_u^{2u} f(t)\sin xt dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C_p \left(\frac{1}{u}\int\limits_u^{2u} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Из неравенств (5)-(7) следует (4). Лемма доказана.

Теперь рассмотрим двумерный аналог леммы А.

Лемма 1. Пусть f локально $L_p[0,\infty)^2$-интегрируемая функция. Тогда для любых u_1 и u_2 имеет место неравенство

$$J \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{1}{u_1 u_2} \int_{u_1}^{2u_1} \int_{u_2}^{2u_2} f(t_1,t_2) \frac{\sin x_1 t_1}{x_1} \frac{\sin x_2 t_2}{x_2} dt_1 dt_2 \right| dx_1 dx_2 \leq C_p \left(\frac{1}{u_1 u_2} \int_{u_1}^{2u_1} \int_{u_2}^{2u_2} |f(t_1,t_2)|^p \, dt_1 dt_2 \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Доказательство. На основании леммы А имеет место оценка

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{u_2} \int_{u_2}^{2u_2} f(t_1,t_2) \frac{\sin x_2 t_2}{x_2} dt_2 \right| dx_2 \leq C_p \left(\frac{1}{u_2} \int_{u_2}^{2u_2} |f(t_1,t_2)|^p \, dt_2 \right)^{\frac{1}{p}}$$

при любом $u_2 > 0$ и фиксированном $t_1 > 0$.

Следовательно, применяя лемму А еще раз, получим

$$J = \int_0^\infty \frac{1}{u_1} \int_{u_1}^{2u_1} \left(\int_0^\infty \frac{1}{u_2} \int_{u_2}^{2u_2} f(t_1,t_2) \frac{\sin x_2 t_2}{x_2} dt_2 dx_2 \right) \frac{\sin x_1 t_1}{x_1} dt_1 dx_1 \leq$$

$$\leq C_p \int_0^\infty \frac{1}{u_1} \int_{u_1}^{2u_1} \left(\frac{1}{u_2} \int_{u_2}^{2u_2} |f(t_1,t_2)|^p \, dt_2 \right)^{\frac{1}{p}} \frac{\sin x_1 t_1}{x_1} dt_1 dx_1 \leq$$

$$\leq C_p \left\{ \frac{1}{u_1} \int_{u_1}^{2u_1} \left[\left(\frac{1}{u_2} \int_{u_2}^{2u_2} |f(t_1,t_2)|^p \, dt_2 \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p dt_1 \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C_p \frac{1}{u_1 u_2} \left(\int_{u_1}^{2u_1} \int_{u_2}^{2u_2} |f(t_1,t_2)|^p \, dt_2 dt_1 \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Отсюда следует требуемая оценка. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $f \in L_1[0,\infty)^2$. Тогда для любого $x > 0$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(t_1,t_2) \sin x_1 t_1 \sin x_2 t_2 dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{(\ln 2)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{u_1 u_2} \int_{u_1}^{2u_1} \int_{u_2}^{2u_2} f(t_1,t_2) \sin x_1 t_1 \sin x_2 t_2 dt_1 dt_2 du_1 du_2 .$$

Доказательство. На основании теоремы Фубини, меняя пределы интегрирования, получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{u_1 u_2} \int_{u_1}^{2u_1} \int_{u_2}^{2u_2} f(t_1,t_2) \sin x_1 t_1 \sin x_2 t_2 dt_1 dt_2 du_1 du_2 =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t_1,t_2) \sin x_1 t_1 \sin x_2 t_2 dt_1 dt_2 \left(\int_{\frac{t_1}{2}}^{t_1} \frac{1}{u_1} du_1 \right) \left(\int_{\frac{t_2}{2}}^{t_2} \frac{1}{u_2} du_2 \right) =$$

$$= (\ln 2)^2 \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f(t_1, t_2) \sin x_1 t_1 \sin x_2 t_2 dt_1 dt_2.$$

Отсюда следует условие леммы 2.

Доказательство теоремы 1. Докажем, что $\hat{f}_c(x_1, x_2) \in L_1[0, \infty)^2$. Для этого проинтегрируем внутренний интеграл.

$$\hat{f}_c(x_1, x_2) \equiv \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f(t_1, t_2) \cos x_1 t_1 \cos x_2 t_2 dt_1 dt_2 =$$

$$= \int\limits_0^\infty \cos x_2 t_2 dt_2 \left[\frac{1}{x_1} f(t_1, t_2) \sin x_1 t_1 |_0^\infty - \frac{1}{x_1} \int\limits_0^\infty \sin x_1 t_1 \cdot f'_{t_1}(t_1, t_2) dt_1 \right] =$$

$$= \int\limits_0^\infty \cos x_2 t_2 \left[-\frac{1}{x_1} \int\limits_0^\infty f'_{t_1}(t_1, t_2) \sin x_1 t_1 dt_1 \right] dt_2 = I.$$

Далее, интегрируя по частям интеграл I, получим

$$I = -\frac{1}{x_1} \left\{ \left(\int\limits_0^\infty f'_{t_1}(t_1, t_2) \sin x_1 t_1 dt_1 \right) \frac{1}{x_2} \sin x_2 t_2 |_0^\infty - \frac{1}{x_2} \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty f'_{t_1}(t_1, t_2) \sin x_1 t_1 dt_1 \right) \frac{1}{x_2} \sin x_2 t_2 dt_2 \right\}.$$

Учитывая, что первое слагаемое в I обращается в нуль, имеем

$$\hat{f}_c(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f''_{t_1 t_2}(t_1, t_2) \sin x_1 t_1 \sin x_2 t_2 dt_1 dt_2.$$

Далее, проинтегрировав это равенство, на основании лемм 1 и 2 получим

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left| \hat{f}_c(x_1, x_2) \right| dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left| \frac{1}{x_1 x_2 (\ln 2)^2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{1}{u_1 u_2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f''_{t_1 t_2}(t_1, t_2) \sin x_1 t_1 \sin x_2 t_2 du_1 du_2 dt_1 dt_2 \right| dx_1 dx_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\ln 2)^2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{1}{x_1 x_2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left| \frac{1}{u_1 u_2} \int\limits_{u_1}^{2u_1} \int\limits_{u_2}^{2u_2} f''_{t_1 t_2}(t_1, t_2) \sin x_1 t_1 \sin x_2 t_2 dt_1 dt_2 \right| dx_1 dx_2 du_1 du_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\ln 2)^2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{u_1 u_2} \int\limits_{u_1}^{2u_1} \int\limits_{u_2}^{2u_2} \left| f''_{t_1 t_2}(t_1, t_2) \right|^p dt_1 dt_2 \right)^{\frac{1}{p}} du_1 du_2 < \infty.$$

Следовательно, $\hat{f}_c(x_1, x_2) \in L_1[0, \infty)^2$. Теорема 1 доказана.

В следующей теореме ответим на вопрос L_p-интегрируемости с весом косинус-преобразования монотонно убывающей функции.

Теорема 2. Пусть $f(x) > 0$ - четная, монотонно убывающая функция, $1 < p < 2$, $\alpha > -1$. Тогда, если

$$\int_0^\infty f(x) x^{p-\alpha-2} dx < \infty.$$

то

$$x^{\frac{\alpha}{p}} \hat{f}_c(x) \in L_p([0, \infty)).$$

Для доказательства данной теоремы нам понадобится следующая

Лемма Б.(Неравенство Харди [2]). Пусть $q \le 0$, $r > 0$ и g-неотрицательная функция, определенная на $(0, \infty)$. Тогда

$$\left(\int_0^\infty \left[\int_0^t g(u) du \right]^q t^{-r-1} \right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty [u g(u)]^q t^{-r-1} du \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство теоремы 2. Так как $f(x)$ не возрастает и $f(\infty) = 0$, то интеграл

$$\hat{f}_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y) \cos xy dy$$

сходится для любого $x > 0$. Разобьем данный интеграл на две части следующим образом

$$\hat{f}_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{1}{x}} f(y) \cos xy dy + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{1}{x}}^\infty f(y) \cos xy dy =: I_1(x) + I_2(x).$$

По второй теореме о среднем значении

$$I_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{x}\right) \int_{\frac{1}{x}}^{\xi} \cos xy dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\sin x\xi - \sin 1}{x}.$$

Поэтому

$$|I_2(x)| \le 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

и

$$\int_0^\infty |I_2(x)|^p dx < A \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \right]^p dx = A \int_0^\infty [f(t)]^p t^{p-2} dt.$$

Далее, так как $f(x)$ не возрастает и $f(\infty) = 0$, то интеграл

$$\int_0^\infty x^\alpha (F_\alpha(x))^p dx = C \int_0^\infty x^\alpha \left(\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^p dx =: I$$

Выполним замену в интеграле I: $\frac{1}{x} = t$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Тогда последний интеграл запишется в виде

$$I = C\int\limits_0^\infty \frac{1}{t^\alpha}[tf(t)]^p\frac{1}{t^2}dt = C\int\limits_0^\infty [f(t)]^p t^{p-\alpha-2}dt.$$

Теперь проверим, что

$$C\int\limits_0^\infty x^\alpha (F_\alpha(x))^p dx < \infty.$$

Для доказательства последнего неравенства выполним замену в интеграле $\frac{1}{x} = t$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ и применим к преобразованному интегралу лемму Б.

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{t^\alpha}\left(\int\limits_0^t f(y)dy\right)^p \frac{dt}{t^2} = \int\limits_0^\infty t^{-\alpha-2}\left(\int\limits_0^t f(y)dy\right)^p dt =$$

$$\int\limits_0^\infty [uf(u)]^p u^{(-\alpha-1)-1}du = \int\limits_0^\infty [f(u)]^p u^{p-\alpha-2}du < \infty.$$

Теорема доказана.

Отметим, что при $\alpha = 0$ из теоремы 2 вытекает соответствующая теорема из ([3] стр. 150).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dang Vu Giang, Moricz F. Lebesgue integrability of Fourier transforms //Acta Sci. Math. - 1995. - V.60, №1-2. - P. 329-343.

2. Харди Г.Г., Литлвуд Дж.И., Полиа Г. Неравенства.-М.:Издательство ЛКИ, 2008.-456с.

3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье.-М.:Гостехиздат, 1948.-479с.

Мұқанов Ж.Б., Оразғалиев Е.Т.

Екі айнымалы функциялардың косинус түрлендіруінің интегралдануы туралы

Жұмыста екі еселі Фурье косинус түрлендіруінің интегралдануының және айналдыру формуласының орындалатындығының жеткілікті шарты келтірілген.

Mukanov Zh.B., Orazgaliev E.T.

On the integrability of cosine transformation of functions of two variables

In work the sufficient condition of integrability of double Fourier cosine transformation and recovery of the formula of the reference is resulted.

Поступила в редакцию 15.01.11

Рекомендована к печати 29.01.11