Математические заметки

том 75 выпуск 3 март 2004

УДК 517.51

О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Е. Д. Нурсултанов

В работе с помощью интерполяционных теорем для пространств функций многих переменных получено обобщение и уточнение в многомерном случае теоремы Хермандера о мультипликаторах преобразования Фурье из L_p в L_q и неравенства Харди–Литтлвуда–Пэли для некоторого класса кратных рядов Фурье.

Библиография: 18 названий.

Идея "многомерной" интерполяции банаховых пространств имеет своим истоком работу А. Йошикава [1], Г. Спара [2] и получила дальнейшее развитие в статьях [3]–[10].

В данной работе мы хотим показать как применение интерполяционных теорем для пространств функций многих переменных [9], [10] позволяет получать обобщение и уточнение некоторых известных результатов.

1. Пусть $\mathbf{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\mathbf{q}=(q_1,\dots,q_n)$ – векторы такие, что если $0<q_j<\infty$, то $0<p_j<\infty$, если же $q_j=\infty$, то $0<p_j\leqslant\infty$, $j=1,\dots,n$. В дальнейшем будем считать, что векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ удовлетворяют этим условиям.

Определим функционалы

$$\Phi_{\mathbf{pq}}(\varphi)=\biggl(\int_0^\infty\dots\biggl(\int_0^\infty\bigl|t_1^{\frac{1}{p_1}}\dots t_n^{\frac{1}{p_n}}\varphi(t_1,\dots,t_n)\bigr|^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\biggr)^{q_2/q_1}\dots\frac{dt_n}{t_n}\biggr)^{1/q_n},$$

$$F_{\mathbf{pq}}(a)=\biggl(\sum_{k_n=1}^\infty k_n^{\frac{q_n}{p_n}-1}\dots\biggl(\sum_{k_1=1}^\infty k_1^{\frac{q_1}{p_1}-1}|a_{k_1\dots k_n}|^{q_1}\biggr)^{q_2/q_1}\dots\biggr)^{1/q_n};$$

здесь выражения $\bigl(\int_0^\infty(G(t))^q\frac{dt}{t}\bigr)^{1/q}$ и $\bigl(\sum_{k=1}^\infty|g_k|^q\bigr)^{1/q}$ при $q=\infty$ понимаются как $\sup_{t>0}G(t)$ и $\sup_k|g_k|$ соответственно.

Пусть $\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{N}^n$, $f(x_1,\dots,x_n)$ – измеримая функция, заданная в $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}=\mathbb{R}^{m_1}\times\dots\times\mathbb{R}^{m_n}$, $*=(j_1,\dots,j_n)$ – некоторая перестановка последовательности чисел $\{1,2,\dots,n\}$. Через $f^*(t)=f^{*_{j_1},\dots,*_{j_n}}(t_1,\dots,t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным $x_{j_1}\in\mathbb{R}^{m_{j_1}},\dots,x_{j_n}\in\mathbb{R}^{m_{j_n}}$, считая остальные переменные фиксированными. Данную функцию $f^*(t)$ будем называть *невозрастающей перестановкой* функции f в $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$, соответствующей вектору $*=(j_1,\dots,j_n)$.

Пространство $L^*_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})$ определяется как множество функций, для которых

$$\|f\|_{L^*_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})} = \Phi_{\mathbf{pq}}(f^*(\cdot)) < \infty.$$

Если $* = (1, 2, \ldots, n)$, то пространство $L^*_{\mathbf{pq}}$ будем обозначать через $L_{\mathbf{pq}}$.

Пространство $L^*_{\mathbf{pq}}(\Omega)$, где $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n,\ \Omega_k \subset \mathbb{R}^{m_k}$, определяется нормой

$$\|f\|_{L^*_{\mathbf{pq}}(\Omega)} = \|f_\Omega\|_{L^*_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^{\mathbf{m}})},$$

где f_Ω – нулевое продолжение функции f с области Ω на все $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.

Аналогично определяется пространство

$$l^*_{\mathbf{pq}} = \big\{\{a_s\}_{s\in\mathbb{N}^n} : \|a\|_{l^*_{\mathbf{pq}}} = F_{\mathbf{pq}}(\{a^*_k\}) < \infty\big\},$$

где $a^*_{\mathbf{k}} = a^{*j_1\cdots *j_n}_{k_1,\ldots,k_n}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{a_s\}_{s\in\mathbb{N}^n}$, которую применили последовательно по переменным $s_{j_1}, \ldots, s_{j_n}$.

Пространства $L^*_{\mathbf{pq}}$, $l^*_{\mathbf{pq}}$ являются обобщением пространств Лоренца на анизотропный случай. В случае, когда $* = (1, 2, \ldots, n),\ \mathbf{m} = (1, \ldots, 1)$, данные пространства были рассмотрены А. П. Блозинским [7] и затем изучены некоторые их свойства. В общем случае эти свойства сохраняются (см. [9]).

а) При $\mathbf{q} \leqslant \mathbf{q_1}\ \ (q_j \leqslant q^1_j,\ j = 1, \ldots, n)$ имеют место вложения

$$L^*_{\mathbf{pq}}(\Omega) \hookrightarrow L^*_{\mathbf{pq_1}}(\Omega), \qquad l^*_{\mathbf{pq}} \hookrightarrow l^*_{\mathbf{pq_1}}.$$

б) Если $p_{j_0} < \infty$ и область $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ такая, что $m\Omega_{j_0} < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеют место вложения

$$L^*_{\mathbf{p}_\varepsilon\mathbf{q_1}}(\Omega) \hookrightarrow L^*_{\mathbf{pq}}(\Omega), \qquad l^*_{\mathbf{pq_1}} \hookrightarrow l^*_{\mathbf{p}_\varepsilon\mathbf{q}},$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n),\ \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n),\ \mathbf{p}_\varepsilon = (p_1, \ldots, p_{j_0-1}, p_{j_0} + \varepsilon, p_{j_0+1}, \ldots, p_n),\ \mathbf{q_1} = (q_1, \ldots, q_{j_0-1}, \infty, q_{j_0+1}, \ldots, q_n)$.

в) (Неравенство Гёльдера). Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{q} < \infty,\ \mathbf{1} \leqslant \mathbf{t}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\nu} \leqslant \infty,\ \mathbf{1/p + 1/r = 1/q}$, $\mathbf{1/s + 1/t} \geqslant \mathbf{1}/\boldsymbol{\nu}\ \ (1/p_j + 1/r_j = 1/q_j,\ 1/s_j + 1/t_j \geqslant 1/\nu_j,\ j = 1, \ldots, n)$; тогда верны неравенства

$$\|fg\|_{L^*_{\mathbf{q}\boldsymbol{\nu}}(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L^*_{\mathbf{ps}}(\Omega)}\|g\|_{L^*_{\mathbf{rt}}(\Omega)}, \qquad \|ab\|_{l^*_{\mathbf{q}\boldsymbol{\nu}}} \leqslant c\|a\|_{l^*_{\mathbf{ps}}}\|b\|_{l^*_{\mathbf{rt}}}.$$

Пусть A_1 – банахово пространство, A_2 – функциональная банахова решетка. Через $A = (A_1, A_2)$ обозначим пространство A_1-значных измеримых функций таких, что $\|f(x)\|_{A_1} \in A_2$ с нормой $\|f\| = \|\|f(x)\|_{A_1}\|_{A_2}$. Пространство $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ определяется индуктивно. Назовем его *анизотропным пространством размерности n*.

Пусть $\mathbf{A}_0 = (A^0_1, \ldots, A^0_n)$, $\mathbf{A}_1 = (A^1_1, \ldots, A^1_n)$ – два анизотропных пространства, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\colon \varepsilon_j = 0$, или $\varepsilon_j = 1,\ j = 1, \ldots, n\}$ – вершины n-мерного единичного куба. Для произвольного $\varepsilon \in E$ определим пространство $\mathbf{A}_\varepsilon = (A^{\varepsilon_1}_1, \ldots, A^{\varepsilon_n}_n)$ с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = \|\ldots\|a\|_{A^{\varepsilon_1}_1}\ldots\|_{A^{\varepsilon_n}_n}.$$

Пару анизотропных пространств $\mathbf{A}_0 = (A_1^0, \dots, A_n^0)$, $\mathbf{A}_1 = (A_1^1, \dots, A_n^1)$ назовем *совместимой*, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$.

Пусть $* = (j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $(1, 2, \dots, n)$; вектору $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ сопоставим $\varepsilon^* = (\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_n}) \in E$. Определим функционал K^*:

$$K^*(t, a; \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) = \inf\biggl\{ \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} : a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, \quad a_\varepsilon \in \mathbf{A}_\varepsilon \biggr\},$$

где $t^\varepsilon = t_1^{\varepsilon_1} \dots t_n^{\varepsilon_n}$.

Пусть $\mathbf{0} < \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leqslant \infty$. Через $\mathbf{A}^*_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}} = (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)^*_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}}$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_\varepsilon$, для элементов которых верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}^*_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}}} = \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(t^{-1} K^*(t, a)) < \infty,$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{1}/(\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})$.

Лемма 1. *Пусть* $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)$ – *совместимая пара анизотропных пространств,* $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\colon \varepsilon_j = 0$ *или* $\varepsilon_j = 1$, $i = 1, \dots, n\}$. *Пусть* $* = (j_1, \dots, j_n)$, $*_1 = (r_1, \dots, r_n)$ – *некоторые перестановки последовательности* $(1, \dots, n)$; *выражение* $* \circ *_1 = (r_{j_1}, \dots, r_{j_n})$ *определяет перестановку последовательности* $(r_1, \dots, r_n)$, *соответствующую вектору* $* = (j_1, \dots, j_n)$. *Если* T – *линейный оператор такой, что* $T\colon \mathbf{A}_{\varepsilon^*} \to \mathbf{B}_\varepsilon$, *с нормой* M_ε *для любого* $\varepsilon \in E$, *то*

$$T\colon \mathbf{A}^{*\circ *_1}_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}} \to \mathbf{B}^{*_1}_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}}, \qquad \mathbf{0} < \boldsymbol{\theta} < \mathbf{1}, \qquad \mathbf{0} < \mathbf{q} \leqslant \infty,$$

с нормой $\|T\| \leqslant \max_{\varepsilon \in E} M_\varepsilon$.

Следующее утверждение является следствием теорем 1, 2 из [9].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{p_i} = (p_1^i, \dots, p_n^i)$, $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{i} = (\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i) \leqslant \infty$, $i = 0, 1$, $\mathbf{p_0} \neq \mathbf{p_1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leqslant \infty$, $\mathbf{0} < \boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1}/\mathbf{p} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})/\mathbf{p_0} + \boldsymbol{\theta}/\mathbf{p_1}$, $* = (j_1, \dots, j_n)$ – *некоторая перестановка последовательности* $\{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbf{A}^*_{\mathbf{p_0}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{0}} = \bigl(L_{p^0_{j_1}\sigma^0_{j_1}}, \dots, L_{p^0_{j_n}\sigma^0_{j_n}}\bigr)$, $\mathbf{A}^*_{\mathbf{p_1}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{1}} = \bigl(L_{p^1_{j_1}\sigma^1_{j_1}}, \dots, L_{p^1_{j_n}\sigma^1_{j_n}}\bigr)$, $\mathbf{B}^*_{\mathbf{p_0}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{0}} = \bigl(l_{p^0_{j_1}\sigma^0_{j_1}}, \dots, l_{p^0_{j_n}\sigma^0_{j_n}}\bigr)$, $\mathbf{B}^*_{\mathbf{p_1}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{1}} = \bigl(l_{p^1_{j_1}\sigma^1_{j_1}}, \dots, l_{p^1_{j_n}\sigma^1_{j_n}}\bigr)$. *Тогда*[1]

$$\begin{aligned} L^*_{\mathbf{pq}} &= (\mathbf{A}^*_{\mathbf{p_0}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{0}}, \mathbf{A}^*_{\mathbf{p_1}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{1}})^*_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}}, &\qquad l^*_{\mathbf{pq}} &= (\mathbf{B}^*_{\mathbf{p_0}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{0}}, \mathbf{B}^*_{\mathbf{p_1}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{1}})^*_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}}, \\ L^*_{\mathbf{pq}} &= (L^*_{\mathbf{p_0}\boldsymbol{\infty}}, L^*_{\mathbf{p_1}\boldsymbol{\infty}})^*_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}}, &\qquad l^*_{\mathbf{pq}} &= (l^*_{\mathbf{p_0}\boldsymbol{\infty}}, l^*_{\mathbf{p_1}\boldsymbol{\infty}})^*_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

[1] Здесь $L_{p^i_{j_s}\sigma^i_{j_s}}$, $l_{p^i_{j_s}\sigma^i_{j_s}}$ – обычные (со скалярными параметрами) пространства Лоренца.

Замечание. Как видно из теоремы 1, порядок расстановки (интегрирование) пространств в $\mathbf{A}^*_{\mathbf{p_i}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{i}} = \bigl(L_{p^i_{j_1}\sigma^i_{j_1}}, \dots, L_{p^i_{j_n}\sigma^i_{j_n}}\bigr)$, $i = 0,1$, предопределяет порядок невозрастающей перестановки в $L^*_{\mathbf{pq}} = (\mathbf{A}^*_{\mathbf{p_0}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{0}}, \mathbf{A}^*_{\mathbf{p_1}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{1}})^*_{\theta\mathbf{q}}$. Например, интерполировние одним и тем же методом пары пространств $\bigl(L_{p_0}(\mathbb{R}_x), L_{p_0}(\mathbb{R}_y)\bigr)$, $\bigl(L_{p_1}(\mathbb{R}_x), L_{p_1}(\mathbb{R}_y)\bigr)$ и $\bigl(L_{p_0}(\mathbb{R}_y), L_{p_0}(\mathbb{R}_x)\bigr)$, $\bigl(L_{p_1}(\mathbb{R}_y), L_{p_1}(\mathbb{R}_x)\bigr)$ дает два разных результата, хотя как линейные нормированные пространства эти пары совпадают:

$$L_{p_i}(\mathbb{R}^2) = \bigl(L_{p_i}(\mathbb{R}_x), L_{p_i}(\mathbb{R}_y)\bigr) = \bigl(L_{p_i}(\mathbb{R}_y), L_{p_i}(\mathbb{R}_x)\bigr), \qquad i = 0,1.$$

Порядок же интегрирования в $L^*_{\mathbf{pq}} = (\mathbf{A}^*_{\mathbf{p_0}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{0}}, \mathbf{A}_{\mathbf{p_1}\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{1}})^*_{\theta\mathbf{q}}$ определяется самим интерполяционным методом.

2. Пусть F, F^{-1} – прямое и обратное преобразования Фурье в $\mathbb{R}^n$. Функцию φ назовем *мультипликатором преобразования Фурье* из функционального пространства Лоренца $L_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}}(\mathbb{R}^n)$ в пространство Лоренца $L_{\mathbf{qs}}(\mathbb{R}^n)$, если оператор $T_\varphi(f) = F^{-1}\varphi F f$ является ограниченным из пространства $L_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{\mathbf{qs}}(\mathbb{R}^n)$. Совокупность всех мультипликаторов из $L_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}}$ в $L_{\mathbf{qs}}$ обозначим через $M(L_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}} \to L_{\mathbf{qs}})$. Данное множество является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\varphi\|_{M(L_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}} \to L_{\mathbf{qs}})} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|T_\varphi(f)\|_{L_{\mathbf{qs}}}}{\|f\|_{L_{\mathbf{p}\boldsymbol{\tau}}}}.$$

Теорема 2. *Пусть F – преобразование Фурье,* $\mathbf{2} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}/(\mathbf{p} - \mathbf{1})$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leqslant \infty$, $* = (j_1, \dots, j_n)$ *– некоторая перестановка последовательности* $(1, 2, \dots, n)$, $*' = (j_n, \dots, j_1)$. *Тогда*

$$\|Ff\|_{L^*_{\mathbf{pq}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|f\|_{L^{*'}_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Доказательство проведем в случае, когда $* = (1, 2, \dots, n)$. Пусть $\mathbf{p}_0 = (p^0_1, \dots, p^0_n) = (2, \dots, 2)$, $\mathbf{p}_1 = (p^1_1, \dots, p^1_n) = (\infty, \dots, \infty)$, $E = \bigl\{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\colon \varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1,\ i = 1, \dots, n\bigr\}$. Введем обозначение $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_{\varepsilon_1}, \dots, p_{\varepsilon_n}) = (p^{\varepsilon_1}_1, \dots, p^{\varepsilon_n}_n)$. Покажем, что для любого $\varepsilon \in E$ верно

$$\|Ff\|_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}} \leqslant \|\dots\|\|f\|_{L_{p'_{\varepsilon_n}}}\|_{L_{p'_{\varepsilon_{n-1}}}} \dots\|_{L_{p'_{\varepsilon_1}}}; \tag{1}$$

здесь $1/p'_{\varepsilon_j} + 1/p_{\varepsilon_j} = 1$, $j = 1, \dots, n$. Для $n = 1$ доказательство следует из равенства Парсеваля и определения преобразования Фурье. Предположим, что неравенство (1) справедливо для n. Покажем, что оно верно для значения $n+1$. Пусть $\varepsilon_{n+1} = 0$ т.е. $p_{\varepsilon_{n+1}} = 2$, $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_{\varepsilon_1}, \dots, p_{\varepsilon_n})$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Используя предположение индукции, имеем

$$\begin{aligned}
\|Ff\|^2_{L_{(\mathbf{p}_\varepsilon, p_{\varepsilon_{n+1}})}(\mathbb{R}^{n+1})} &= \int_{-\infty}^{\infty} \|Ff\|^2_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}(\mathbb{R}^n)}\, dy_{n+1} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\infty}^{\infty} f(x, x_{n+1}) e^{-iy_{n+1}x_{n+1}}\, dx_{n+1} \right) e^{-iyx}\, dx \right\|^2_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} dy_{n+1} \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left(\|\dots\| \left\| \int_{\infty}^{\infty} f(\cdot, x_{n+1}) e^{-iy_{n+1}x_{n+1}}\, dx_{n+1} \right\|_{L_{p'_{\varepsilon_n}}} \|_{L_{p'_{\varepsilon_{n-1}}}} \dots \|_{L_{p'_{\varepsilon_1}}} \right)^{2/p'_{\varepsilon_1}} dy_{n+1}.
\end{aligned}$$

Так как $p'_{\varepsilon_j} \leqslant 2,\ j = 1,\dots,n$, из неравенства Минковского получим (1). Если $\varepsilon_{n+1} = 1$, т.е. $p_{\varepsilon_{n+1}} = \infty$, то, сначала применяя неравенство Минковского, а затем предположение индукции, получим неравенство (1).

Таким образом, используя интерполяционные свойства пространств $L_{\mathbf{p}}$ (теорема 1, лемма 1), получим требуемое утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $* = (n, n-1, \dots, 1)$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \mathbf{2} < \mathbf{q} < \infty$, $\mathbf{0} < \mathbf{s}, \mathbf{t} \leqslant \infty$,

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}, \qquad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{h}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}}\right)_+;$$

здесь $(x)_+ = \max(0, x)$. *Тогда*

$$L^*_{\mathbf{rh}} \hookrightarrow M(L_{\mathbf{pt}} \to L_{\mathbf{qs}}).$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2, неравенством Гёльдера, а также свойствами пространств $L^*_{\mathbf{pt}}$; получим

$$\|F^{-1}\varphi F f\|_{L_{\mathbf{qs}}} \leqslant c_1 \|\varphi F f\|_{L^*_{\mathbf{q's}}} \leqslant c_1 \|\varphi\|_{L^*_{\mathbf{rh}}} \|F f\|_{L^*_{\mathbf{p't}}} \leqslant c_2 \|\varphi\|_{L^*_{\mathbf{rh}}} \|f\|_{L_{\mathbf{pt}}},$$

что и требовалось доказать.

В изотропном случае, при $\mathbf{p} = (p, \dots, p) = \mathbf{t}$, $\mathbf{q} = (q, \dots, q) = \mathbf{s}$, $1 < p < 2 < q \leqslant \infty$, $1/r = 1/p - 1/q$ из теоремы 3 следует

$$\|\varphi\|_{M(L_p \to L_q)} \leqslant \sup_{t_j > 0} t_1^{1/r} \dots t_n^{1/r} \varphi^{*_1 \cdots *_n}(t_1, \dots, t_n) = \|\varphi\|_{L_{(r,\dots,r)(\infty,\dots,\infty)}(\mathbb{R}^n)}. \qquad (2)$$

Данное утверждение более точное, чем утверждение теоремы Хермандера [11]: при $1 < p < 2 \leqslant q \leqslant \infty$, $1/r = 1/p - 1/q$

$$\|\varphi\|_{M(L_p \to L_q)} \leqslant c \|\varphi\|_{L_{r\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Действительно, для простоты рассуждений положим $n = 2$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L_{(r,r)(\infty,\infty)}} &= \sup_{t_1>0,\, t_2>0} (t_1 t_2)^{1/r} \varphi^{*_1 *_2}(t_1, t_2) \\
&\leqslant \sup_{t_1>0,\, t_2>0} \frac{1}{t_1^{1-1/r}} \frac{1}{t_2^{1-1/r}} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \varphi^{*_1 *_2}(s_1, s_2)\, ds_1\, ds_2 \\
&\leqslant \sup_{t_1>0,\, t_2>0} \sup_{|e_2| = t_2} \frac{1}{|e_2|} \int_{e_2} \sup_{|e_1| = t_1} \frac{1}{|e_1|} \int_{e_1} |\varphi(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2.
\end{aligned}$$

Из определения точной верхней грани следует, что для произвольных фиксированных $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ найдется семейства измеримых множеств $e_2(t_2)$, $\{e_1(t_1, x_2)\}_{x_2 \in e_2(t_2)}$, что $|e_2(t_2)| = t_2$, $|e_1(t_1, x_2)| = t_1$ и

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L_{(r,r)(\infty,\infty)}} &\leqslant 4 \sup_{t_1>0,\, t_2>0} \frac{1}{|e_2(t_2)|^{1-1/r}} \int_{e_2(t_2)} \\
&\quad \times \frac{1}{|e_1(t_1, x_2)|^{1-1/r}} \int_{e_1(t_1, x_2)} |\varphi(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2 \\
&= 4 \sup_{t_1>0,\, t_2>0} \frac{1}{(t_1 t_2)^{1-1/r}} \int_{e_2(t_2)} \int_{e_1(t_1, x_2)} |\varphi(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2 \\
&\leqslant 4 \sup_{|e|>0} \frac{1}{|e|^{1-1/r}} \int_e |\varphi(x)|\, dx \sim \|\varphi\|_{L_{r\infty}}.
\end{aligned}$$

Следующий пример показывает, что пространства $L_{r\infty}(\mathbb{R}^2)$ и $L_{(r,r)(\infty,\infty)}(\mathbb{R}^2)$ различны.

Пример 1. Пусть $1 < r < \infty$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x_1, x_2) = \big(|x_1|\,|x_2|\big)^{-1/r}.$$

Очевидно, что $\sup_{t_1>0,\,t_2>0} t_1^{1/r} t_2^{1/r} \varphi^{*_1*_2}(t_1, t_2) < \infty$. Покажем, что $\|\varphi\|_{L_{r\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/r}\varphi^*(t) = \infty$. Действительно, для $\varepsilon > 0$ определим множество $e_\varepsilon = \{(x_1, x_2)\colon \varepsilon \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant \varepsilon/x_1\}$. Тогда

$$\frac{1}{|e_\varepsilon|^{1-1/r}} \int_{e_\varepsilon} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \sim |\ln\varepsilon|^{1/r} \to \infty, \qquad \varepsilon \to 0,$$

и, следовательно,

$$\|g\|_{L_{r\infty}} \sim \sup_{|e|>0} \frac{1}{|e|^{1-1/r}} \left| \int_e \varphi(x)\, dx \right| = \infty.$$

Функцию f назовем *обобщенно-монотонной* (*невозрастающей*) в $\mathbb{R}^n$, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и $x_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, имеет место

$$|f(x)| \leqslant \frac{B}{|x_1| \dots |x_n|} \left| \int_{[0,x]} f(y)\, dy \right|;$$

здесь $[0, x] = \{y \in \mathbb{R}^n\colon 0 \leqslant y_j \operatorname{sign} x_j \leqslant |x^j|, j = 1, \dots, n\}$.

Следствие 1. *Пусть $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 \leqslant \tau \leqslant s \leqslant \infty$, φ – знакоопределенная, обобщенно-монотонная функция. Тогда для того, чтобы $\varphi \in M(L_{p\tau} \to L_{qs})$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{Q \in E_0} \frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}} \int_Q |\varphi(x)|\, dx < \infty,$$

где E_0 – множество всех параллелепипедов с гранями, параллельными декартовым плоскостям.

Замечание. Данное утверждение было сформулировано в заметке автора [12] (следствие 1). Приведенное там доказательство является верным лишь для одномерного случая ($n = 1$).

Доказательство. Пусть $1/r = 1/p - 1/q$. Из теоремы 1 работы [12] следует, что для знакоопределенной функции φ из $M(L_{p\tau} \to L_{qs})$ верна оценка

$$\sup_{Q \in E_0} \frac{1}{|Q|^{1-1/r}} \left| \int_Q \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \|\varphi\|_{M(L_{p\tau} \to L_{qs})}.$$

Зафиксируем параметр $r \in (1, \infty)$ и функцию $f \in L_{(r\dots r)(\infty\dots\infty)}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для пар (p_0, q_0), (p_1, q_1) таких, что $1/p_0 - 1/q_0 = 1/r$, из соотношения (2) имеем

$$\|T_\varphi f\|_{L_{q_i}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \|\varphi\|_{L_{(r\dots r)(\infty\dots\infty)}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_{p_i}(\mathbb{R}^n)}, \qquad i = 0, 1.$$

Применяя вещественный метод интерполяции, получим: при $\tau \leqslant s,\ 1/p-1/q=1/r$

$$\|T_\varphi f\|_{L_{qs}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\varphi\|_{L_{(r\dots r)(\infty\dots\infty)}(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L_{p\tau}(\mathbb{R}^n)},$$

т.е.

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{M(L_{p\tau}\to L_{qs})} &\leqslant c \sup_{t_1>0,\dots,t_n>0} t_1^{1/r}\dots t_n^{1/r}\varphi^{*_1\cdots *_n}(t_1\dots t_n)\\ &\leqslant c\sup_{|e_n|>0}\frac{1}{|e_n|^{1-1/r}}\biggl(\int_{e_n}\dots\sup_{|e_1|>0}\biggl(\frac{1}{|e_1|^{1-1/r}}\int_{e_1}\varphi(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\biggr)\dots dx_n\biggr).\end{aligned}$$

Из условия обобщено-монотонности функции φ следует

$$\begin{aligned}&\sup_{|e_n|>0}\frac{1}{|e_n|^{1-1/r}}\biggl(\int_{e_n}\dots\sup_{|e_1|>0}\biggl(\frac{1}{|e_1|^{1-1/r}}\int_{e_1}\varphi(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\biggr)\dots dx_n\biggr)\\ &\qquad\leqslant B\sup_{|e_n|>0}\frac{1}{|e_n|^{1-1/r}}\\ &\qquad\quad\times\biggl(\int_{e_n}\dots\sup_{|e_1|>0}\biggl(\frac{1}{|e_1|^{1-1/r}}\int_{e_1}\frac{1}{|x_1|\dots|x_n|}\int_{[0,x]}\varphi(y)\,dy\,dx_1\biggr)\dots dx_n\biggr)\\ &\qquad\leqslant B\sup_{Q\in E_0}\frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}}\int_Q\varphi(x)\,dx\\ &\qquad\quad\times\sup_{|e_n|>0}\frac{1}{|e_n|^{1-1/r}}\biggl(\int_{e_n}\dots\sup_{|e_1|>0}\biggl(\frac{1}{|e_1|^{1-1/r}}\int_{e_1}\frac{1}{(|x_1|\dots|x_n|)^{\frac1r}}\,dx_1\biggr)\dots dx_n\biggr)\\ &\qquad=Bc\sup_{Q\in E_0}\frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}}\biggl|\int_Q\varphi(x)\,dx\biggr|.\end{aligned}$$

Следствие доказано.

3. Неравенство Харди–Литтлвуда–Пэли для рядов $f=\sum_{k=1}^\infty a_k\varphi_k(x)$ по ортонормированной в $L_2[0,1]^n$ системе $\Phi=\{\varphi_k\},\ |\varphi_k(x)|\leqslant c$, имеет вид:

$$\|f\|^p_{L_p[0,1]^n}\leqslant c\sum_{i=1}^\infty i^{p-2}(a_i^*)^p \qquad \text{при } 2<p<\infty, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^\infty i^{p-2}(a_i^*)^p\leqslant c\|f\|^p_{L_p[0,1]^n} \qquad \text{при } 1<p<2, \tag{4}$$

где $\{a_i^*\}_{i=1}^\infty$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ коэффициентов Фурье функции f по системе Φ.

В одномерном случае неравенства (3) и (4) самые точные среди различных вариантов подобных неравенств (Харди–Литтлвуда, Хаусдорфа–Юнга [13], Пита [14] и др. [15], [16]). Для кратных рядов Фурье ситуация иная; например, для тригонометрических систем имеются еще независимые неравенства [15], [16]:

$$\|f\|^p_{L_p[0,1]^n}\leqslant\sum_{k_1=0}^\infty\dots\sum_{k_n=0}^\infty 2^{(\frac p2-1)(k_1+\dots+k_n)}\biggl(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\dots\sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1}|a_{m_1\dots m_n}|^2\biggr)^{\frac p2} \tag{5}$$

при $2 < p < \infty$, $f \sim \sum_{m\in\mathbb{N}^n} a_m \exp\bigl(2\pi i \sum_{r=1}^n m_r x_r\bigr)$,

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{p}{2}-1)(k_1+\cdots+k_n)}\Biggl(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\cdots\sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1}|a_{m_1\dots m_n}|^2\Biggr)^{\frac{p}{2}} \leqslant c\|f\|^p_{L_p[0,1]^n}, \quad (6)$$

при $1 < p < 2$. В этом пункте приводятся неравенства из которых следуют (3)–(6).

Пусть $\mathbf{m} = (m_1,\dots,m_n)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $\Phi_j = \{\varphi_k^j(x_j)\}_{k\in\mathbb{N}}$ – ортонормированные системы функций (ОНСФ) в $L_2[0,1]^{m_j}$ такие, что

$$\sup_{x_j\in[0,1]^{m_j},\, k\in\mathbb{N}} |\varphi_k^j(x_j)| \leqslant c, \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Система $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}^n}$, $x \in [0,1]^{\mathbf{m}} = [0,1]^{m_1}\times\cdots\times[0,1]^{m_n}$,

$$\psi_k(x) = \varphi_k^1(x_1)\dots\varphi_k^n(x_n), \quad (7)$$

является ОНСФ в $L_2[0,1]^{\mathbf{m}}$ и ограниченная в совокупности.

Теорема 4. *Пусть* Ψ – ОНСФ (7), $f \sim \sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k\psi_k(x)$, $* = (j_1,\dots,j_n)$ – *некоторая перестановка последовательности* $(1,2,\dots,n)$, $*' = (j_n, j_{n-1},\dots,j_1)$. *Тогда*

$$\|f\|_{L^*_{\mathbf{pq}}[0,1]^{\mathbf{m}}} \leqslant c\|a\|_{l^{*'}_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}},$$

при $\mathbf{2} < \mathbf{p} = (p_1,\dots,p_n) < \infty$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1,\dots,q_n) \leqslant \infty$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}/(\mathbf{p}-\mathbf{1})$,

$$\|a\|_{l^{*'}_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}} \leqslant c\|f\|_{L^*_{\mathbf{pq}}[0,1]^{\mathbf{m}}},$$

при $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1,\dots,p_n) < \mathbf{2}$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1,\dots,q_n) \leqslant \infty$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}/(\mathbf{p}-\mathbf{1})$.

Данные неравенства при $* = (1,2,\dots,n)$ и $\mathbf{m} = (1,1,\dots,1)$ были доказаны в работе [10]. Доказательство теоремы 4 проводится с применением интерполяционной теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 2 (см. также теорему 7 из [10]).

Отметим, что порядок невозрастающих перестановок в теоремах 2 и 4 имеет существенное значение. Так, неравенство

$$\|a\|_{l^*_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}} \leqslant c\|f\|_{L^*_{\mathbf{pq}}[0,1]^{\mathbf{m}}} \quad (8)$$

неверно (здесь в левой части неравенства вместо положенного $*'$ стоит $*$). Действительно, пусть $n = 2$, $* = (1,2)$, $1 < p_1 < p_2 < 2$, $q_2 < \infty$, $\varphi(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/p_2'}}\exp(2\pi i k x)$. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \varphi(x+y)$; ее коэффициенты Фурье

$$a_{k_1k_2} = \begin{cases} k^{-1/p_2'}, & k_1 = k_2 = k > 0,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Тогда общий член невозрастающей перестановки $\{a^{*_1*_2}_{k_1k_2}\}$ имеет вид

$$a^{*_1*_2}_{k_1k_2} = \begin{cases} k_2^{-1/p_2'}, & k_1 = 1,\\ 0, & k_1 > 1.\end{cases}$$

Поэтому $\|a\|_{l^*_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}} = \left\|\{1/k^{1/p_2'}\}\right\|_{l_{p_2'q_2}} = \infty$. С другой стороны, $f^{*_1}(t,y) = \varphi^*(t)$ и $\|f\|_{L^*_{\mathbf{pq}}} = \|\varphi\|_{L_{p_1q_1}} \sim \left\|\{1/k^{1/p_2'}\}\right\|_{l_{p_1'q_1}} < \infty$; следовательно, неравенство (8) не имеет места.

Если $\mathbf{m} = (1,\dots,1)$, $\mathbf{p} = (p,\dots,p) = \mathbf{q}$, то из теоремы 4 следуют неравенства:

$$\|f\|^p_{L_p[0,1]^n} \leqslant c \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} \bigl(a^{*_{j_1} *_{j_2} \cdots *_{j_n}}_{k_1 k_2 \dots k_n}\bigr)^p \qquad \text{при } 2 < p < \infty, \tag{9}$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} \bigl(a^{*_{j_1} *_{j_2} \cdots *_{j_n}}_{k_1 k_2 \dots k_n}\bigr)^p \leqslant c\|f\|^p_{L_p[0,1]^n} \qquad \text{при } 1 < p < 2\,. \tag{10}$$

Покажем, что данные неравенства в случае системы вида (7) более точные, чем (3) и (4). Пусть $A_r = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n \colon m_1 \cdot m_2 \dots m_n = r\}$, $r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \dots k_n^{p-2} (a^{*_1 \cdots *_n}_{k_1 \dots k_n})^p = \sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} \sum_{\mathbf{m} \in A_r} (a^{*_1 \cdots *_n}_{m_1 \dots m_n})^p. \tag{11}$$

С другой стороны,

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} (a_r^*)^p = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{m} \in A_r} \beta_{\mathbf{m}}^{p-2} (a^{*_1 \cdots *_n}_{m_1 \dots m_n})^p;$$

здесь последовательность $\{\beta_{\mathbf{m}}^{p-2}\}_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n}$ есть соответствующая перестановка последовательности $\{r^{p-2}\}_{r\in\mathbb{N}}$.

Учитывая, что $a^{*_1 \cdots *_n}_{k_1 \dots k_n} \geqslant a^{*_1 \cdots *_n}_{m_1 \dots m_n}$ для всех $1 \leqslant k_j \leqslant m_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, можно утверждать, что найдутся, по крайней мере, $m_1 \cdot m_2 \dots m_n$ членов последовательности $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n}$, которые по модулю не меньше числа $a^{*_1 \cdots *_n}_{m_1 \dots m_n}$ и, следовательно, $\beta_{m_1,\dots,m_n} > m_1 \cdot m_2 \dots m_n$. Поэтому при $2 < p$ имеем

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} (a_r^*)^p \geqslant \sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} \sum_{\mathbf{m} \in A_r} (a^{*_1 \cdots *_n}_{m_1 \dots m_n})^p,$$

а при $p < 2$

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} (a_r^*)^p \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2} \sum_{\mathbf{m} \in A_r} (a^{*_1 \cdots *_n}_{m_1 \dots m_n})^p.$$

Принимая во внимание (11), получим, что из неравенств (9), (10) следуют соответственно (3), (4).

Следующий пример показывает, что неравенства (9) и (3) не эквивалентны.

Пример 2. Пусть $p > 3,\ 0 < \varepsilon < p-3,\ p' = p/(p-1)$,

$$a_{k_1k_2} = (k_1k_2)^{-1/p'}(\ln(k_1k_2+1))^{-(2+\varepsilon)/p}, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} k_1^{p-2}k_2^{p-2}(a_{k_1k_2}^{*_1*_2})^p < \infty.$$

Пусть $A_r = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^2 \colon m_1m_2 = r\},\ r \in \mathbb{N}$. Как и ранее,

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2}(a_r^*)^p = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{m}\in A_r} \beta_{m_1m_2}^{p-2}(a_{m_1,m_2}^{*_1*_2})^p.$$

Так как $(a_{k_1k_2}^{*_1*_2}) > (a_{m_1m_2}^{*_1*_2})$ при $k_1 \cdot k_2 < m_1 \cdot m_2$, то $\beta_{m_1m_2} > \sum_{s=1}^{r-1}|A_s|$ при $m_1 \cdot m_2 > r$; следовательно,

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2}(a_r^*)^p \geqslant \sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{r-1}|A_s|\right)^{p-2}|A_r|\frac{1}{r^{p-1}(\ln r+1)^{2+\varepsilon}}.$$

Количество элементов $|A_r|$ во множестве A_r не меньше количества различных делителей числа r. Известно, что сумма всех различных делителей чисел от 1 до r асимптотически равна $r\ln r$. Поэтому

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^{p-2}(a_r^*)^p \geqslant c\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|A_r|}{r(\ln r+1)^{4-p+\varepsilon}} \geqslant c\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(\ln r+1)^{4-p+\varepsilon}} = \infty.$$

Покажем теперь, что из неравенства (9) следует (5).

Пусть $2 < p < \infty$. Заметим, что для любого h: $1 \leqslant h \leqslant \infty$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2}\ldots k_n^{p-2}(a_{k_1\ldots k_n}^{*_1\cdots *_n})^p$$

$$\sim \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{1}{p'}-\frac{1}{h})p(k_1+\cdots+k_n)}\left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\cdots\sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1}(a_{m_1\ldots m_n}^{*_1\cdots *_n})^h\right)^{p/h}.$$

Взяв $h=2$, получим

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2}\ldots k_n^{p-2}(a_{k_1\ldots k_n}^{*_1\cdots *_n})^p$$

$$\sim \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2})p(k_1+\cdots+k_n)}\left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\cdots\sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1}(a_{m_1\ldots m_n}^{*_1\cdots *_n})^2\right)^{p/2}$$

$$\leqslant \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p(k_1+\cdots+k_n)}\left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=2^{k_n}}^{\infty}(a_{m_1\ldots m_n}^{*_1\cdots *_n})^2\right)^{p/2}$$

$$\leqslant \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{p}{2}-1)(k_1+\cdots+k_n)}\left(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=2^{k_n}}^{\infty}|a_{m_1\ldots m_n}|^2\right)^{p/2}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} 2^{(\frac{p}{2}-1)(k_1+\cdots+k_n)}\left(\sum_{\nu_1=k_1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_n=k_n}^{\infty}\sum_{m_1=2^{\nu_1}}^{2^{\nu_1+1}-1}\cdots\sum_{m_n=2^{\nu_n}}^{2^{\nu_n+1}-1}|a_{m_1\ldots m_n}|^2\right)^{p/2}.$$

Далее, применяя одно из обобщений неравенства Харди (см. [17]), последнее выражение оцениваем через

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}2^{(\frac{p}{2}-1)(k_1+\dots+k_n)}\biggl(\sum_{m_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\cdots\sum_{m_n=2^{k_n}}^{2^{k_n+1}-1}|a_{m_1\dots m_n}|^2\biggr)^{p/2},$$

что и требовалось.

Я. С. Бугров в работе [18] для тригонометрических рядов получил неравенство: при $1<p_n\leqslant p_{n-1}\leqslant\dots\leqslant p_1<2$, $f\sim\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}a_m\exp(2\pi i\sum_{r=1}^n m_rx_r)$, $f\in L_{\mathbf{p}}[0,1]^n$ верно

$$\biggl(\sum_{m_1\in\mathbb{Z}}(|m_1|+1)^{p_1-2}\biggl(\dots\biggl(\sum_{m_n\in\mathbb{N}}(|m_n|+1)^{p_n-2}|a_{m_1\dots m_n}|^{p_n}\biggr)^{p_{n-1}/p_n}\dots\biggr)^{p_1/p_2}\biggr)^{1/p_1}$$
$$\leqslant c\biggl(\int_0^1\biggl(\dots\biggl(\int_0^1|f(x_1,\dots,x_n)|^{p_1}\,dx_1\biggr)^{p_2/p_1}\dots\biggr)^{p_n/p_{n-1}}dx_n\biggr)^{1/p_n}. \tag{12}$$

Покажем, что из теоремы 4 следует (12). Не уменьшая общности, можно считать, что $n=2$. Принимая во внимание, что $p_j<2$, а следовательно, последовательности $\{(|m_j|+1)^{p_j-2}\}$, $j=1,2$, симметрично убывающие, получим

$$I=\biggl(\sum_{m_1\in\mathbb{Z}}(|m_1|+1)^{p_1-2}\biggl(\biggl(\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}(|m_2|+1)^{p_2-2}|a_{m_1m_2}|^{p_2}\biggr)^{\frac{1}{p_2}}\biggr)^{p_1}\biggr)^{\frac{1}{p_1}}$$
$$\leqslant 4\biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1^{p_1-2}\biggl(\biggl[\biggl(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2^{p_2-2}|a^{*_2}_{m_1k_2}|^{p_2}\biggr)^{\frac{1}{p_2}}\biggr]^{*_1}_{k_1}\biggr)^{p_1}\biggr)^{\frac{1}{p_1}}$$
$$\leqslant 4\biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1^{p_1-2}\sup_{\substack{|e|=k_1\\ e\subset\mathbb{Z}}}\biggl(\frac{1}{|e|}\sum_{m_1\in e}\biggl(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2^{p_2-2}|a^{*_2}_{m_1k_2}|^{p_2}\biggr)^{\frac{2}{p_2}}\biggr)^{\frac{p_1}{2}}\biggr)^{\frac{1}{p_1}}$$
$$\leqslant 4\biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1^{p_1-2}\biggl(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2^{p_2-2}\sup_{\substack{|e|=k_1\\ e\subset\mathbb{Z}}}\biggl(\frac{1}{|e|}\sum_{m_1\in e}|a^{*_2}_{m_1k_2}|^2\biggr)^{\frac{p_2}{2}}\biggr)^{\frac{p_1}{p_2}}\biggr)^{\frac{1}{p_1}}$$
$$=4\biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1^{p_1-2}\biggl(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2^{p_2-2}\biggl(\frac{1}{k_1}\sum_{r_1=1}^{k_1}(a^{*_2*_1}_{r_1k_2})^2\biggr)^{\frac{p_2}{2}}\biggr)^{\frac{p_1}{p_2}}\biggr)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Так как $\bigl(\frac{1}{k}\sum_{r=1}^k(b_r^*)^2\bigr)^{\frac12}\leqslant c\frac{1}{k^{\frac12}}\sum_{r=1}^k r^{-\frac12}b_r^*$, где c не зависит от k и последовательности $\{b_r\}$, то

$$I\leqslant c_1\biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1^{p_1-2}\biggl(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2^{p_2-2}\biggl(\frac{1}{k_1^{\frac12}}\sum_{r=1}^{k_1}r_1^{-\frac12}a^{*_2*_1}_{r_1k_2}\biggr)^{p_2}\biggr)^{\frac{p_1}{p_2}}\biggr)^{\frac{1}{p_1}}$$
$$\leqslant c_1\biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1^{p_1-2}\biggl(\frac{1}{k_1^{\frac12}}\sum_{r_1=1}^{k_1}r_1^{-\frac12}\biggl(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2^{p_2-2}(a^{*_2*_1}_{r_1k_2})^{p_2}\biggr)^{\frac{1}{p_2}}\biggr)^{p_1}\biggr)^{\frac{1}{p_1}}$$
$$\leqslant c_2\biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1^{p_1-2}\biggl(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2^{p_2-2}(a^{*_2*_1}_{k_1k_2})^{p_2}\biggr)^{\frac{p_1}{p_2}}\biggr)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Теперь воспользуемся теоремой 4:

$$\begin{aligned} I &\leqslant c_3\biggl(\int_0^1\biggl(\int_0^1 \bigl(f^{*_1,*_2}(t_1,t_2)\bigr)^{p_2}\,dt_2\biggr)^{\frac{p_1}{p_2}}dt_1\biggr)^{\frac{1}{p_1}} \\ &= c_3\biggl(\int_0^1\biggl(\int_0^1 \bigl(f^{*_1}(t_1,x_2)\bigr)^{p_2}\,dx_2\biggr)^{\frac{p_1}{p_2}}dt_1\biggr)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leqslant c_3\biggl(\int_0^1\biggl(\int_0^1 |f(x_1,x_2)|^{p_1}\,dx_1\biggr)^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\biggr)^{\frac{1}{p_2}}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Yoshikawa F. Remarks on the theory of interpolation spaces // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1968. Sec. I. V. 15. P. 209–251.

[2] Sparr G. Interpolation of several Banach spaces // Annali Mat. Pura Appl. 1974. V. 99. P. 247–316.

[3] Fernandez D. L. Lorentz spaces, with mixed norms // J. Funct. Anal. 1977. V. 25. №2. P. 128–146.

[4] Fernandez D. L. Interpolation of 2^n Banach spaces // Studia Math. (PRL). 1979. V. 65. №2. P. 175–201.

[5] Cobus F., Peetre J. Interpolation compact operators: The multidimensional case // Proc. London Math. Soc. 1991. V. 63. №2. P. 371–400.

[6] Крепкогорский В. Л. Контрпримеры к теории операторов в пространствах со смешанной нормой // Деп. ВИНИТИ № 2963-80. Казань, 1980.

[7] Blozinski A. P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 263. №1. P. 149–167.

[8] Asekritova I., Krugljak N. On equivalence of K-end J-methods for $(n+1)$-tuples of Banach spaces // Stud. Math. 1997. V. 122. №2. P. 99–116.

[9] Nursultanov E. D. Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy–Littlewood type inequalities // East J. Approx. 1998. V. 4. №2. P. 243–275.

[10] Нурсултанов Е. Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p пространств // Изв. РАН. 2000. Т. 64. №1. С. 95–122.

[11] Hörmander L. Estimates for translation-invariant operators in L_p spaces // Acta. Math. 1960. V. 104. P. 93–140.

[12] Нурсултанов Е. Д. О нижней оценке мультипликаторов Фурье из M_p^q // Матем. заметки. 1997. Т. 62. №6. С. 945–950.

[13] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.

[14] Pitt H. R. Theorems on Fourier series and Lower series // Duke Math. J. 1937. №3. P. 747–755.

[15] Темляков В. Н. Приближение функции с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.

[16] Смаилов Е. С. Мультипликаторы Фурье, теоремы вложения и смежные с ними вопросы. Дисс. ... д.ф.-м.н.. Алматы, 1997.

[17] Потапов М. К. Теоремы Харди–Литтлвуда, Марцинкевича, Литтлвуда–Пэли, приближение углом и вложение некоторых классов функций // Matematika. 1972. Т. 14. №2. С. 339–362.

[18] Бугров Я. С. Абсолютная сходимость преобразования Фурье и абсолютная сходимость кратных рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. №5. С. 1033–1035.

Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова,
г. Караганда
E-mail: nurs@kargu.krg.kz
er-nurs@yandex.ru

Поступило
18.11.1998
Исправленный вариант
02.04.2003