Литература

1. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras. Encyclopaedia Math. Sci., Vol. 73, Algebra 8, Springer-Verlag, N.Y., 1992. **2.** *Басс Х.* Алгебраическая K-теория. Мир, М., 1973. **3.** *Gabriel P., Nazarova L. A., Roiter A. V., Sergeichuk V. V., Vossieck D.* Укр. матем. ж., **45**, № 3, 313–352 (1993). **4.** *Белоусов К. И., Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В.* Укр. матем. ж., **47**, № 11, 5–31 (1995). **5.** *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Зап. науч. семинаров ЛОМИ, **28**, 5–31 (1972). **6.** *Клейнер М. М.* Зап. науч. семинаров ЛОМИ, **28**, 32–41 (1972). **7.** *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления биинволютивных частично упорядоченных множеств. Препринт 91.34., Киев, Ин-т математики АН УССР, 1991. **8.** *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления биинволютивных частично упорядоченных множеств, II. Препринт 94.2, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1994. **9.** *Roiter A. V., Belousov K. I., Nazarova L. A.* Proceedings of ICRA VIII, Canadian Math. Society Conference Proc., vol. 24, 1998, pp. 61–77. **10.** *Белоусов К. И., Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Алгебра и анализ, **9**, вып. 4, 3–27 (1997).

Институт математики НАН Украины

Поступило в редакцию
11 сентября 1998 г.

УДК 517.51

Нижние и верхние оценки нормы мультипликаторов кратных тригонометрических рядов Фурье в пространствах Лебега

© 2000. Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова

Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$ и $\mathbb{T}^n$ есть n-мерный тор. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ является мультипликатором тригонометрических рядов Фурье из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_q(\mathbb{T}^n)$, если для произвольной функции $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$ с рядом Фурье $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)e^{ikx}$ найдется функция f_λ из $L_q(\mathbb{T}^n)$, такая, что ее ряд Фурье совпадает с рядом $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_k \hat{f}(k)e^{ikx}$ и оператор T_λ, $T_\lambda f = f_\lambda$, является ограниченным оператором из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_q(\mathbb{T}^n)$. Множество $\mathbf{m}_p^q$ всех определенных таким образом мультипликаторов является линейным пространством с нормой

$$\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} = \|T_\lambda\|_{L_p\to L_q}.$$

В данной работе получены нижние и верхние оценки для нормы мультипликаторов из $\mathbf{m}_p^q$. Методы доказательства опираются на результаты работ [1, 2], где доказаны новые неравенства, отражающие зависимость метрических свойств функции и свойств суммируемости ее коэффициентов Фурье по тригонометрической системе.

Хорошо известен следующий результат Хёрмандера [3]: при $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ и $1/r = 1/p - 1/q$ имеет место вложение $l_{r\infty}(\mathbb{Z}^n) \hookrightarrow \mathbf{m}_p^q$, т. е.

$$\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} \leqslant c \sup_{e\in E} \frac{1}{|e|^{1-1/r}} \biggl|\sum_{m\in e} \lambda_m\biggr|.$$

Здесь $l_{r\infty}(\mathbb{Z}^n)$ — дискретное пространство Лоренца, E — множество всех конечных подмножеств из $\mathbb{Z}^n$ и $|e|$ — количество элементов в множестве e.

Следующее утверждение в случае кратных рядов ($n \geqslant 2$) является уточнением теоремы Хёрмандера.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$, $p' = p/(p-1)$ *и* $(j_1, \ldots, j_n)$ — *произвольная перестановка последовательности* $1, \ldots, n$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} \leqslant C \sup_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(\prod_{i=1}^n k_i)^{1/q+1/p'}} \sum_{m_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{m_n=1}^{k_n} \lambda_{m_1 \ldots m_n}^{*j_1 \ldots *j_n},$$

где $\{\lambda_{m_1 \ldots m_n}^{*j_1 \ldots *j_n}\}_{m \in \mathbb{N}^n}$ — *невозрастающая перестановка последовательности* $\{|\lambda_r|\}_{r \in \mathbb{Z}^n}$, *взятая последовательно по переменным индексам* $r_{j_1}, \ldots, r_{j_n}$, *а* C — *константа, зависящая только от параметров* p, q *и размерности* n.

Пусть $B = \{m_0, m_0+1, \ldots, m_0+l\}$ — отрезок в $\mathbb{Z}$, а $d \in \mathbb{N}$, $d > l$. Множество вида $I = \bigcup_{k=0}^N [B + kd] = \bigcup_{k=0}^N \{m + kd : m \in B\}$ назовем гармоническим отрезком в $\mathbb{Z}$. Тогда множество вида $I = I_1 \times \cdots \times I_n$, где I_i — гармонические отрезки в $\mathbb{Z}$, называется гармоническим отрезком в $\mathbb{Z}^n$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$, $p' = p/(p-1)$ *и* M_0 — *множество всех гармонических отрезков в* $\mathbb{Z}^n$. *Если* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n} \in \mathbf{m}_p^q$, *то имеет место неравенство*

$$\sup_{Q \in M_0} \frac{1}{|Q|^{1/q+1/p'}} \left| \sum_{m \in Q} \lambda_m \right| \leqslant C \|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q}.$$

Определение. Последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ назовем *обобщенно монотонной*, если найдется число $c > 0$, такое, что для любого $k \in \mathbb{Z}^n$ имеет место неравенство

$$|a_k| \leqslant \frac{c}{|Q_k|} \left| \sum_{r \in Q_k} a_r \right|,$$

где $Q_k = \{r \in \mathbb{Z}^n : 0 \leqslant |r_j| \leqslant |k_j|,\ j = 1, \ldots, n\}$.

Если последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ монотонна или квазимонотонна по каждому переменному индексу, то она является обобщенно монотонной.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ *и* $p' = p/(p-1)$. *Если последовательность* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ *обобщенно монотонная, то для того, чтобы* $\lambda \in \mathbf{m}_p^q$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$F(\lambda) = \sup_{m \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(m_1 \cdots m_n)^{1/q+1/p'}} \left| \sum_{k_1=-m_1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=-m_n}^{m_n} \lambda_{k_1 \ldots k_n} \right| < \infty,$$

причем $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} \sim F(\lambda)$.

Рассмотрим последовательность Шапиро $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ (см. [4]), заданную рекуррентно: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_{2k} = \varepsilon_k$, $\varepsilon_{2k+1} = (-1)^k \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$. Данная последовательность состоит из чисел ± 1 и для нее имеет место оценка

$$\left| \sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon_m e^{imx} \right| \leqslant c N^{1/2}, \qquad x \in [0, 2\pi).$$

Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$, где $\varepsilon_k = \varepsilon_{k_1}\cdots\varepsilon_{k_n}$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ *либо* $2 \leqslant p \leqslant q < \infty$, $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ — *последовательность Шапиро,* $(j_1,\dots,j_n)$ — *произвольная перестановка последовательности* $1,\dots,n$ *и*

$$\frac{1}{r} = \begin{cases} 1/2 + 1/q & \text{при } 2 \leqslant p \leqslant q < \infty, \\ 1/p' + 1/2 & \text{при } 1 < p \leqslant q \leqslant 2. \end{cases}$$

Тогда выполняются неравенства

$$C^{-1}(r,n) \sup_{\substack{r\in\mathbb{Z}^n \\ m\in\mathbb{N}^n}} \frac{1}{(m_1\cdots m_n)^{1/r}} \left| \sum_{1\leqslant k\leqslant m} \varepsilon_k \lambda_{k+r} \right| \leqslant \|\lambda\|_{\mathbf{m}_p^q} \leqslant C(r,n) \sup_{m\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{(m_1\cdots m_n)^{1/r}} \sum_{1\leqslant k\leqslant m} \lambda_{k_1\dots k_n}^{*j_1\dots *j_n}. \quad (1)$$

В теореме 3 верхние и нижние оценки не зависят от параметра p при $2 \leqslant p \leqslant q < \infty$, а при $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ — от параметра q. Это означает, что при изменении упомянутых параметров изменения класса $\mathbf{m}_p^q$ происходит в рамках соотношения (1).

Данное утверждение решает задачу о получении достаточных условий для принадлежности пространству мультипликаторов $\mathbf{m}_p = \mathbf{m}_p^p$, которые существенно зависят от параметра p. Отметим в связи с этим, что в книге [5] указывалось на некоторую неестественность классических теорем о мультипликаторах, ибо в них достаточные условия обычно не зависят от параметра p.

Следствие 2. *Пусть* $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ — *последовательность Шапиро и либо* $1 < p \leqslant q \leqslant 2$, *либо* $2 \leqslant p \leqslant q < \infty$. *Если последовательность* $\{\varepsilon_k\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ *обобщенно монотонная, то для того, чтобы выполнялось включение* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n} \in \mathbf{m}_p^q$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{(m_1\cdots m_n)^{1/r}} \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} |\lambda_{k_1\dots k_n}| < \infty,$$

где число $1/r$ *определено в теореме* 3.

Последовательностей, удовлетворяющих условиям следствия, также «много» («мало»), как и обобщенно монотонных. Так, если $\lambda = \{\lambda_k\}$ — обобщенно монотонная последовательность, то $\lambda_\varepsilon = \{\varepsilon_k\lambda_k\}$ будет удовлетворять условию следствия, поскольку $\{\varepsilon_k^2\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$.

Литература

1. *Нурсултанов Е. Д.* Матем. сб., **189**, № 3, 83–102 (1998). **2.** *Нурсултанов Е. Д.* East J. App., No. 3, 243–275 (1998). **3.** *Hörmander L.* Acta. Math., **104**, 93–140 (1960). **4.** *Brillhart J., Carlitz L.* Proc. Amer. Math. Soc., **25**, 114–118 (1970). **5.** *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, М., 1973.

Карагандинский государственный университет
e-mail: nurs@ph_math.kargu.krg.kz

Поступило в редакцию
18 мая 1998 г.