МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 43, № 1 (1988)

ОБ ОПЕРАТОРЕ УСРЕДНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p ПРИ $0 < p < 1$

Б. Е. Батыров, В. И. Буренков

Хорошо известна роль операторов усреднения по Соболеву в математическом анализе. Эти операторы определяются для любого измеримого множества $E \subset \mathbf{R}^n$, для любой функции f, интегрируемой на пересечении E с любым шаром из $\mathbf{R}^n$, и для любого $\delta > 0$ равенством

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad (A_\delta f)(x) = (\omega_\delta * \overset{0}{f})(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{E \cap B(x, \delta)} \omega\left(\frac{x-y}{\delta}\right) f(y)\, \mathrm{d}y. \qquad (1)$$

Здесь ω — ядро усреднения, имеющее вид

$$\omega(x) = c \begin{cases} e^{1/(|x|^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases} \qquad (2)$$

где постоянная c выбрана так, чтобы

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega(x)\, \mathrm{d}x = 1, \qquad (3)$$

$\omega_\delta(x) = 1/\delta^n \omega(x/\delta)$, $\overset{0}{f}$ — продолжение функции f за пределы области определения нулем (если $x \in E$, то $\overset{0}{f}(x) = f(x)$, если $x \notin E$, то $\overset{0}{f}(x) = 0$), $B(x, \delta)$ — открытый с центром в точке x радиуса δ шар.

Эти операторы обладают следующими свойствами: если $f \in L_p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то

$$A_\delta f \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \qquad (4)$$

т. е. функция $A_\delta f$ имеет непрерывные производные любого порядка,

$$\| A_\delta f \|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant \| f \|_{L_p(E)} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{5}$$

и

$$\lim_{\delta \to +0} \| A_\delta f - f \|_{L_p(E)} = 0 \qquad (1 \leqslant p < \infty), \tag{6}$$

(см., например, [1]).

Используются и другие ядра усреднения, удовлетворяющие условию (3), но для дальнейшего существенно, что ядро ω имеет специальный вид (2).

Если $f \in L_p(E)$ и $0 < p < 1$, то может существовать такая точка $x_0 \in \bar{E}$ ($\bar{E}$ — замыкание множества E), что $\forall \delta > 0$ $f \notin L_1(E \cap B(x_0, \delta))$,— в этом случае определение (1) теряет смысл для любых $\delta > 0$ и любых точек $x \in \mathbf{R}^n$ таких, что $x \in B(x_0, \delta)$.

Целью настоящей статьи является построение такого оператора $B_\delta \equiv B_{p,\delta}$, который для функций $f \in L_p(E)$ с $0 < p < 1$ обладал бы теми же свойствами (4)—(6), что и оператор усреднения Соболева.

Обозначим $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ (при этом $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$). Для $0 < p < 1$, для любого измеримого множества E, любой функции f, принадлежащей L_p на пересечении E с любым шаром из $\mathbf{R}^n$, и для любого $\delta > 0$ положим

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad (B_\delta f)(x) = (A_\delta f_+^p)^{1/p}(x) - (A_\delta f_-^p)^{1/p}(x). \tag{7}$$

ТЕОРЕМА. *Пусть $0 < p < 1$, E — измеримое множество в $\mathbf{R}^n$ и $f \in L_p(E)$ (т. е. функция f измерима на E и $\| f \|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty$). Тогда*

$$B_\delta f \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \tag{8}$$

$$\| B_\delta f \|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant 2^{1/p-1} \| f \|_{L_p(E)} \tag{9}$$

и

$$\lim_{\delta \to +0} \| B_\delta f - f \|_{L_p(E)} = 0. \tag{10}$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть функция $f \in L_1(\mathbf{R}^n)$ неотрицательна. Тогда для любого мультииндекса α ($\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$), где $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ α_j — неотрицательные* *целые числа) и для любого* $\varepsilon \in [0, 1)$ *существует положительное число* $c_{\alpha,\varepsilon}$ *такое, что*

$$\forall\delta > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \quad |D^\alpha (A_\delta f)(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{\delta^{|\alpha|+n(1-\varepsilon)}} \|f\|^{1-\varepsilon}_{L_1(\mathbf{R}^n)} (A_\delta f)^\varepsilon (x) \quad (11)$$

(при $\varepsilon = 0$ *считаем, что* $0^0 = 1$).

Доказательство. Так как для любого мультииндекса α существует такой многочлен P_α, что при $|x| < 1$

$$(D^\alpha \omega)(x) = \frac{P_\alpha(x)}{(1-|x|^2)^{2|\alpha|}} \omega(x),$$

и для любого $\lambda > 0$ существует такое положительное число c_λ, что при $|x| < 1$

$$(1 - |x|^2)^{-1} \leqslant c_\lambda \omega^{-\lambda}(x),$$

то для любого мультииндекса α и любого $\varepsilon \in [0, 1)$ существует такое положительное число $c_{\alpha,\varepsilon}$, что

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad |(D^\alpha \omega)(x)| \leqslant c_{\alpha,\varepsilon} \omega^\varepsilon (x).$$

Отсюда следует, что

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad |(D^\alpha \omega_\delta)(x)| \leqslant \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{\delta^{|\alpha|+n(1-\varepsilon)}} \omega^\varepsilon (x).$$

Далее при $0 < \varepsilon < 1$, учитывая неотрицательность функции f, имеем

$$|D^\alpha (A_\delta f)(x)| = |D^\alpha (\omega_\delta * f)(x)| = |(D^\alpha \omega_\delta * f)(x)| \leqslant$$
$$\leqslant (|D^\alpha \omega_\delta| * f)(x) \leqslant \frac{c_{\alpha,\varepsilon}}{\delta^{|\alpha|+n(1-\varepsilon)}} (\omega_\delta^\varepsilon * f)(x).$$

Применяя неравенство Гельдера, получим, что

$$(\omega_\delta^\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \omega_\delta^\varepsilon (x-y) f^\varepsilon (y) f^{1-\varepsilon}(y)\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^n} \omega_\delta (x-y) f(y)\, dy \right)^\varepsilon \left(\int_{\mathbf{R}^n} f(y)\, dy \right)^{1-\varepsilon} = \|f\|^{1-\varepsilon}_{L_1(\mathbf{R}^n)} (A_\delta f)^\varepsilon (x),$$

откуда и следует (11) при $0 < \varepsilon < 1$.

При $\varepsilon = 0$ имеем

$$(|D^\alpha \omega_\delta| * f)(x) = \int_{B(x,\delta)} |(D^\alpha \omega_\delta)(x-y)| f(y)\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_{\alpha,0}}{\delta^{|\alpha|+n}} \|f\|_{L_1(\mathbf{R}^n)},$$

откуда и следует (11) при $\varepsilon = 0$.

Отметим следующее следствие из этой леммы, которое не будет использовано в дальнейшем, но может представить самостоятельный интерес.

Следствие 1 (дополнение к лемме о функциях типа «шапочка»). *Для любого множества* $E \subset \mathbf{R}^n$ *и любого* $\delta > 0$ *существует такая функция* $\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, *что* $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad 0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1, \quad \forall x \in E \quad \eta(x) = 1 \quad \forall x \overline{\in} E^\delta$ (E^δ — δ-*окрестность множества* E) $\eta(x) = 0$ *и для любого мультииндекса* α *и любого* $\varepsilon \in [0, 1)$ *существует положительное число* $c_{\alpha, \varepsilon, \delta}$ *такое, что*

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad |(D^\alpha \eta)(x)| \leqslant c_{\alpha, \varepsilon, \delta} \eta^\varepsilon(x). \tag{12}$$

Доказательство. Достаточно положить $\eta = A_{\delta/2} \chi_{E^{\delta/2}}$ ($\chi_{E^{\delta/2}}$ — характеристическая функция множества $E^{\delta/2}$) и воспользоваться леммой 1.

«Обычная» лемма о функциях типа «шапочки» соответствует случаю $\varepsilon = 0$. Необходимость в функциях типа «шапочки», удовлетворяющих условию (12) с $\varepsilon = 1/2$, возникает при получении неравенств априорного типа в L_2 для обобщенных решений u уравнений эллиптического или более общих типов, когда «пробная» функция v выбирается равной ηu.

ЛЕММА 2. *Пусть функция* $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ *неотрицательна, причем для любого мультииндекса* α *и любого* $\varepsilon \in (0, 1)$ *существует положительное число* $c_{\alpha, \varepsilon}$ *такое, что*

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad |(D^\alpha \psi)(x)| \leqslant c_{\alpha, \varepsilon} \psi^\varepsilon(x). \tag{13}$$

Тогда для любого $\gamma > 0 \quad \psi^\gamma \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Если $x \in \mathbf{R}^n$ и $\psi(x) > 0$, то для любого мультииндекса α существует производная $D^\alpha(\psi^\gamma)(x)$, вычисляемая по формуле

$$D^\alpha(\psi^\gamma)(x) = \sum_{m=1}^{|\alpha|} \psi^{\gamma-m}(x) \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_m=\alpha} b^{(\alpha)}_{\beta_1,\ldots\beta_m} (D^{\beta_1}\psi)(x) \ldots \ldots (D^{\beta_m}\psi)(x) \tag{14}$$

(здесь $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — мультииндексы, $b^{(\alpha)}_{\beta_1,\ldots,\beta_m}$ — некоторые действительные числа, не зависящие от ψ и x). Рассмотрим теперь такие точки x_0 из $\mathbf{R}^n$, что $\psi(x_0) = 0$ и в любой окрестности точки x_0 есть точки x, для которых $\psi(x) > 0$. Согласно (13) для мультииндекса α $(D^\alpha \psi)(x_0) = 0$ и из формулы Тейлора следует, что

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \psi(x) = o(|x - x_0|^k), \quad x \to x_0. \tag{15}$$

Поскольку в (13) число ε можно брать сколь угодно близким к 1, то из (14) следует, что существуют положительные числа A и μ такие, что $\forall x \in \mathbf{R}^n$, для которых $\psi(x) > 0$,

$$|D^\alpha(\psi^\gamma)(x)| \leqslant A\psi^\mu(x)$$

и, следовательно, для указанных x

$$\forall k \in \mathbf{N}\ D^\alpha(\psi^\gamma)(x) = o(|x - x_0|^k), x \to x_0. \tag{16}$$

Из определения производной и из (15) следует, что для любых рассматриваемых точек x_0 $\frac{\partial_i(\psi^\gamma)}{\partial x_j}(x_0) = 0$. Далее, по индукции, используя (16), получим, что для любого мультииндекса α $D^\alpha(\psi^\gamma)(x) = 0$. Таким образом, в любой точке $x \in \mathbf{R}^n$ у функции ψ^γ существуют производные любого порядка, причем согласно (14) и (16) они являются непрерывными на $\mathbf{R}^n$ функциями, т. е. $\psi^\gamma \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство теоремы. 1. Так как функции $\overset{0}{f}{}^p_\pm \in L_1(\mathbf{R}^n)$ и неотрицательны, то функции $A_\delta f^p_\pm = A_\delta \overset{0}{f}{}^p_\pm \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, неотрицательны и согласно лемме 1 удовлетворяют условиям леммы 2; значит,

$$(A_\delta f^p_\pm)^{1/p} \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \text{ и } B_\delta f \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

2. Так как при $0 < p < 1$ для $f, g \in L_p(E)$

$$\|f + g\|_{L_p(E)} \leqslant 2^{1/p-1}(\|f\|_{L_p(E)} + \|g\|_{L_p(E)}), \tag{17}$$

то, используя (5) и числовое неравенство $x^\alpha + y^\alpha \leqslant (x + y)^\alpha$, справедливое для $x, y \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 1$, имеем

$$\begin{aligned}\|B_\delta f\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} &= \|(A_\delta f^p_+)^{1/p} - (A_\delta f^p_-)^{1/p}\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant \\ &\leqslant 2^{1/p-1}(\|A_\delta f^p_+\|^{1/p}_{L_1(\mathbf{R}^n)} + \|A_\delta f^p_-\|^{1/p}_{L_1(\mathbf{R}^n)}) \leqslant \\ &\leqslant 2^{1/p-1}(\|f^p_+\|^{1/p}_{L_1(E)} + \|f^p_-\|^{1/p}_{L_1(E)} \leqslant \\ &\leqslant 2^{1/p-1}(\|f^p_+\|_{L_1(E)} + \|f^p\|_{L_1(E)})^{1/p} = 2^{1/p-1}\|f\|_{L_p(E)},\end{aligned}$$

и мы получим (9).

3. Из (17) следует, что

$$\begin{aligned}\|B_\delta f - f\|_{L_p(E)} &= \|(A_\delta f^p_+)^{1/p} - (A_\delta f^p_-)^{1/p} - f_+ + f_-\|_{L_p(E)} \leqslant \\ &\leqslant 2^{1/p-1}(\|(A_\delta f^p_+)^{1/p} - f_+\|_{L_p(E)} + \|(A_\delta f^p_-)^{1/p} - f_-\|_{L_p(E)})\end{aligned} \tag{18}$$

Далее из числового неравенства

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leqslant \alpha |x-y| (|x|^{\alpha-1} + |y|^{\alpha-1}),$$

справедливого для x, y, $\alpha \geqslant 0$ (при $0 \leqslant \alpha < 1$, x, $y > 0$), и (17) вытекает, что

$$\|(A_\delta f_+^p)^{1/p} - f_+\|_{L_p(E)} = \|(A_\delta f_+^p)^{1/p} - (f_+^p)^{1/p}\|_{L_p(E)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \| |A_\delta f_+^p - f_+^p| ((A_\delta f_+^p)^{1/p-1} + (f_+^p)^{1/p-1}) \|_{L_p(E)} =$$

$$= \frac{1}{p} \| |A_\delta f_+^p - f_+^p| (A_\delta f^p)^{1-p/p} + |A_\delta f_+^p - f_+^p| f_+^{1-p} \|_{L_p(E)} \leqslant$$

$$\leqslant c_p (\| |A_\delta f_+^p - f_+^p| (A_\delta f_+^p)^{(1-p)/p} \|_{L_p(E)} + \| |A_\delta f_+^p - f_+^p| f_+^{1-p} \|_{L_p(E)}),$$

где

$$c_p = \frac{1}{p} \cdot 2^{1/p-1}.$$

Применяя теперь неравенство

$$\| gh \|_{L_p(E)} \leqslant \| g \|_{L_1(E)} \| h \|_{L_{p/(1-p)}(E)} \qquad (0 < p < 1)$$

(являющееся следствием неравенства Гёльдера) и неравенство (5), получим, что

$$\|(A_\delta f_+^p)^{1/p} - f_+\|_{L_p(E)} \leqslant$$

$$\leqslant c_p \| A_\delta f_+^p - f_+^p \|_{L_1(E)} (\| A_\delta f_+^p \|_{L_1(E)}^{1-p/p} + \| f_+^p \|_{L_1(E)}^{1-p/p}) \leqslant$$

$$\leqslant 2c_p \| f_+ \|_{L_p(E)}^{1-p} \| A_\delta f_+^p - f_+^p \|_{L_1(E)} \to 0$$

при $\delta \to +0$ согласно (6), поскольку $f_+^p \in L_1(E)$.

Аналогично доказывается, что второе слагаемое в (18) стремится к нулю при $\delta \to +0$, и мы получаем (10).

Следствие 2. *Пусть* $0 < p < 1$, *E-измеримое множество в* $\mathbf{R}^n$. *Тогда множество* $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ *плотно в* $L_p(E)$. *Если* Ω — *открытое множество в* $\mathbf{R}^n$, *то множество* $C_0^\infty(\Omega)$ *плотно в* $L_p(\Omega)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из (8) и (10), второе доказывается стандартным образом с помощью умножения на срезывающую функцию.

Университет дружбы народов
им. П. Лумумбы

Поступило
04.04.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л. Изд-во ЛГУ, 1950 (Новосибирск: Изд-во НГУ, 1962).