Математические заметки

том 73 выпуск 6 июнь 2003

УДК 517

ОБ ИНФОРМАТИВНОЙ МОЩНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Ш. Ажгалиев, Н. Темиргалиев

В данной статье выясняется, насколько информативны линейные функционалы в задачах восстановления. Найдены точные порядки информативных мощностей всевозможных линейных функционалов в классах Бесова и Соболева W и SW.

Библиография: 14 названий.

1. Постановка задачи и основные результаты. Сформулируем общую задачу восстановления (в редакции из [1]). Пусть даны нормированные пространства X и Y комплекснозначных функций, определенных на множествах Ω и Ω_1 соответственно. Пусть $F\subset X$ и $Tf=u(y;f)$ есть отображение F в Y. Для каждого целого положительного N через $\{(l^{(N)};\varphi_N)\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)};\varphi_N)$, где $l^{(N)}=(l_1,\dots,l_N)$ есть набор функционалов $l_j(\,\cdot\,)\colon F\to\mathbb{C}$, $j=1,\dots,N$, функция $\varphi_N=\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;y)$ действует из $\mathbb{C}^N\times\Omega_1$ в $\mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – как обычно, поле комплексных чисел. Также предположим, что при произвольных фиксированных $\tau_1,\dots,\tau_N$ функция φ_N, рассматриваемая как функция от y, принадлежит Y. Положим для $(l^{(N)};\varphi_N)\in\{(l^{(N)};\varphi_N)\}$

$$\delta_N\bigl((l^{(N)};\varphi_N);T,F\bigr)_Y=\sup_{f\in F}\bigl\|u(\,\cdot\,;f)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);\,\cdot\,)\bigr\|_Y \tag{1}$$

и для $D_N\subset\{(l^{(N)};\varphi_N)\}$

$$\delta_N(D_N;T,F)_Y=\inf_{(l^{(N)};\varphi_N)\in D_N}\delta_N\bigl((l^{(N)};\varphi_N);T,F\bigr)_Y. \tag{2}$$

Задача заключается в получении оценок сверху и оценок снизу для величины (2) (желательно совпадающих с точностью до констант) и в указании пары $(l^{(N)};\varphi_N)$, реализующей оценку сверху.

Конкретизируя в (1), (2) пространства X и Y, классы F, $F\subset X$, операторы T и множества D_N, получаем различные постановки задач (см., например, [1]–[12] и имеющуюся в них библиографию). Приведем некоторые из них. Пусть $a=(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{R}^N$. Тогда, положив

$$\begin{gathered}Tf=\int_\Omega f(x)\,dx,\qquad l_k(f)=a_kf(\xi_k),\\ \varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;y)\equiv\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N)=\sum_{k=1}^N\tau_k,\end{gathered} \tag{3}$$

получаем постановку задачи приближенного интегрирования.

При $X = Y$ и $Tf = f(x)$ задача (1), (2) есть задача восстановления функций из класса F. Другой конкретизацией T в задаче (1), (2) является задача восстановления решений уравнения с частными производными, когда $Tf = u(y; f)$ есть решение этого уравнения с краевым или начальным условием или же с правой частью $f(x)$ (см., например, [2, с. 185–190], [3, с. 229–234], [1] и [12]).

Конкретизация в D_N набора функционалов $l^{(N)}$ и алгоритмов переработки числовой информации φ_N также порождает многочисленные постановки задач.

Здесь, по-видимому, наиболее изученным является случай функционалов вида $l_j(f) = f(\xi_j)$, $j = 1, \dots, N$, на языке которых ставятся задачи численного интегрирования (3) и восстановления функций по их значениям в узлах сетки, и тогда проблема заключается в построении сеток, оптимальных в том или ином смысле. К таковым относятся, например, сетки, предложенные Коробовым [2], [3], Смоляком [4] и Фроловым [5].

Шерниязовым [12] были определены сетки, являющиеся линейной комбинацией сеток Коробова; погрешности восстановления функций по их значениям в узлах таких сеток для широкого спектра классов F и метрик Y оптимальны или оптимальны в степенной шкале.

Разумеется, помимо значений функций в точках, можно привлекать и другие функционалы, например, значения коэффициентов Фурье по тем или иным ортонормированным системам: $l_k(f) = \int_\Omega f(x)\phi_k(x)\,dx$, где $\{\phi_k(x)\}$ – ортонормированная система на Ω.

Однако для сохранения содержательности задачи восстановления, требуется наложить какие-либо ограничения на набор функционалов. А именно, если $\Omega = \Omega_1 = [0,1]^s$, классы X и Y, где $X = Y$, содержатся в пространстве Лебега $L(0,1)^s$, а D_N, $N = 1, 2, \dots$, есть множество всевозможных пар $\{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$, то $\delta_N(D_N, X)_Y = 0$. Действительно, мощность множества всех восстанавливаемых функций $X \subset L(0,1)^s$ не больше мощности континуума, поэтому можно установить взаимнооднозначное соответствие $X \ni f \leftrightarrow c_f \in \{c_f\} \subset \mathbb{R}^1$. Определим функционалы

$$l_1(f) = c_f, \qquad l_2(f) \equiv \dots \equiv l_N(f) \equiv 0$$

и функцию $\overline{\varphi}_N(\tau_1, \dots, \tau_N; x)$ тождественно равную нулю, если $\tau_1 \notin \{c_f\}$, и равную $f(x)$, если $\tau_1 = c_f$. Тогда на X выполнено

$$\|f(x) - \overline{\varphi}_N(l_1(f), 0, \dots, 0; x)\|_Y \equiv 0,$$

и задача восстановления становится тривиальной: каждая функция f класса X оптимально приближается ею же самой.

Поэтому естественно возникает новая задача об *информативной мощности* определенного класса Λ наборов функционалов $l^{(N)}$ (см. [1]):

$$\delta_N(\Lambda; T, F)_Y = \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in \Lambda \times \{\varphi_N\}} \delta_N\big((l^{(N)}; \varphi_N); T, F\big)_Y. \tag{4}$$

Здесь изучается следующая конкретизация задачи (4):

$$\Omega = \Omega_1 = [0,1]^s, \qquad Y = L^q(0,1)^s, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \qquad Tf = f,$$

а F суть классы Соболева $W^r_p(0,1)^s$, классы Никольского–Бесова $B^r_{p,\theta}(0,1)^s$ (определения этих классов см., например, в [13]) и классы Соболева с доминирующей смешанной производной $SW^r_2(0,1)^s$ (определение см., например, в [4]), а $\Lambda = L^N$, где L есть множество всех линейных функционалов на линейной оболочке F.

Нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть дано целое положительное число s.*

а) *Пусть $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ и целое $r > 0$ таковы, что*

$$\frac{r}{s} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

Тогда имеет место соотношение

$$\delta_N(L^N, W_p^r(0,1)^s)_{L^q(0,1)^s} \asymp N^{-(r/s-(1/p-1/q))}, \qquad N = 1, 2, \dots .$$

б) *Пусть $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ и $r > 0$ таковы, что*

$$\frac{r}{s} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

Тогда имеет место соотношение

$$\delta_N(L^N, B_{p,\theta}^r(0,1)^s)_{L^q(0,1)^s} \asymp N^{-(r/s-(1/p-1/q))}, \qquad N = 1, 2, \dots .$$

Теорема 2. *Пусть дано целое положительное число s.*

а) *Пусть дано действительное число $r > 1/2$. Тогда имеет место соотношение*

$$\delta_N(L^N, SW_2^r(0,1)^s)_{L^\infty(0,1)^s} \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}}, \qquad N = 2, 3, \dots .$$

б) *Пусть дано положительное число r. Тогда имеет место соотношение*

$$\delta_N(L^N, SW_2^r(0,1)^s)_{L^2(0,1)^s} \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}, \qquad N = 2, 3, \dots .$$

Теорема 3. *Пусть даны целое положительное число s, $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant 2$ и целое положительное число r. Тогда имеет место соотношение*

$$\delta_N(L^N, W_p^r(0,1)^s)_{L^q(0,1)^s} \asymp N^{-r/s}, \qquad N = 1, 2, \dots .$$

Замечание 1. Верхние оценки во всех теоремах достигаются на функционалах – тригонометрических коэффициентах Фурье (для каждого класса свой спектр коэффициентов).

Замечание 2. Оценка снизу в теореме 1а) обобщает оценку снизу, полученную Кудрявцевым [10], в том смысле, что эта оценка снизу, полученная только для функционалов, являющихся значениями функции в точках, распространена на всевозможные линейные функционалы. Отметим также, что результат теоремы 2а) позволяет обобщить и улучшить полученную в [12] оценку снизу (с $N^{-(r-1/2)}$ до приведенного ниже) при восстановлении функций из класса $SW_2^r(0,1)^s$ по их значениям в конечном числе точек: если s – целое положительное число и $r > 1/2$, то имеет место соотношение (здесь через P обозначено множество всех функционалов – значений в точках):

$$\frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}} \ll \delta_N(L^N, SW_2^r(0,1)^s)_{L^\infty(0,1)^s}$$
$$\leqslant \delta_N(P^N, SW_2^r(0,1)^s)_{L^\infty(0,1)^s} \ll \frac{\ln^{(r+1/2)(s-1)} N}{N^{r-1/2}}, \quad N = 2, 3, \dots .$$

2. Вспомогательные утверждения. Приведем обозначения и несколько утверждений, которыми мы будем пользоваться. Для 1-периодической по каждой из своих s переменных и суммируемой на кубе $[0,1]^s$ функции $f(x)$, как обычно, через $\widehat{f}(m)$, $m \in \mathbb{Z}^s$ будем обозначать ее тригонометрические коэффициенты Фурье–Лебега.

Для целого положительного ρ под $I_\rho \equiv I_\rho^{(s)}$ всюду ниже будем понимать множество $I_\rho = [-\rho, \rho]^s \cap \mathbb{Z}^s$, а под $\Gamma_\rho \equiv \Gamma_\rho^{(s)}$ – множество

$$\Gamma_\rho = \{m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s : \overline{\overline{m}} \leqslant 2^\rho\},$$

где здесь и всюду ниже для всякого $y = (y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{Z}^s$ положено

$$\overline{y}_j = \max\{1; |y_j|\}, \qquad \overline{\overline{y}} = \prod_{j=1}^{s} \overline{y}_j.$$

Для конечного множества B через $|B|$ условимся обозначать число его элементов.

Лемма A [13, с. 281]. *Пусть даны целое положительное число s, целое неотрицательное число l, положительное число r, $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$, целое положительное ρ, и пусть $T_\rho(x)$ является тригонометрическим многочленом порядка не выше ρ по каждой из своих s переменных. Тогда верны соотношения*

$$\|T_\rho\|_{W_p^l} \ll \rho^l \|T_\rho\|_{L^p}, \qquad \|T_\rho\|_{B_{p,\theta}^r} \ll \rho^r \|T_\rho\|_{L^p}.$$

Отметим, что константы в этих неравенствах не зависят от ρ.

Лемма B. *Пусть дано целое положительное число s. Тогда для каждого целого положительного N выполнено: для любой ортогональной на $[0,1]^s$ системы функций $\psi \equiv \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{N'}$ и для любого множества $G \equiv \{m^{(1)}, \dots, m^{(N')}\} \subset \mathbb{Z}^s$ таких, что $N' = |G| \geqslant 3N$ и $|G| \asymp N$, и для произвольных линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$, определенных, по крайней мере, на множестве всех многочленов по системе ψ и на множестве всех тригонометрических многочленов со спектром в G, найдутся комплексные числа $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$, удовлетворяющие условию*

$$\sum_{k=1}^{N'} |c_k| \geqslant N, \qquad \sum_{k=1}^{N'} |c_k|^2 = N;$$

причем если

$$\chi(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i (m^{(k)}, x)}, \qquad \kappa(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k \psi_k(x),$$

то

$$l_1(\chi) = \dots = l_N(\chi) = l_1(\kappa) = \dots = l_N(\kappa) = 0, \tag{5}$$

$$\|\chi\|_{L^\infty} \geqslant N, \tag{6}$$

$$\|\chi\|_{L^2} = N^{1/2}. \tag{7}$$

Доказательство. Определим комплексные числа $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$ таким образом, чтобы для функций

$$g(x)=\sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i (m^{(k)},x)}, \qquad h(x)=\sum_{k=1}^{N'} c_k\psi_k(x)$$

были выполнены равенства $l_1(g)=\dots=l_N(g)=l_1(h)=\dots=l_N(h)=0$.

В силу линейности функционалов $l_1,\dots,l_N$ эта задача сводится к системе однородных линейных уравнений с числом уравнений $2N$ и числом неизвестных $N'\geqslant 3N$:

$$\begin{aligned}0=l_j(g)&=\sum_{k=1}^{N'} c_k l_j(e^{2\pi i (m^{(k)},x)})=\sum_{k=1}^{N'} c_k l_{j,m^{(k)}}=l_j(h)\\&=\sum_{k=1}^{N'} c_k l_j(\psi_k(x))=\sum_{k=1}^{N'} c_k l_{j,\psi_k}, \quad j=1,\dots,N.\end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку матрица системы линейных однородных уравнений (8) состоит из $2N$ строк и N' столбцов, то ее ранг $r\leqslant 2N$, в то время как $N'\geqslant 3N$, поэтому фундаментальная система решений системы (8) состоит из $(N'-r)\geqslant N$ векторов, т.е. множество всевозможных решений $(c_1,\dots,c_{N'})$ образует линейное пространство размерности $(N'-r)\geqslant N$ (см., например, [14, с. 85]). Стало быть, найдутся вектора

$$(c_1^{(1)},\dots,c_{N'}^{(1)}),\ \dots,\ (c_1^{(N)},\dots,c_{N'}^{(N)}),$$

составляющие линейно независимую систему решений исходной системы (8).

Легко видеть, что функции

$$g_1(x)=\sum_{k=1}^{N'} c_k^{(1)} e^{2\pi i (m^{(k)},x)},\ \dots,\ g_N(x)=\sum_{k=1}^{N'} c_k^{(N)} e^{2\pi i (m^{(k)},x)}$$

линейно независимы на $[0,1]^s$.

В силу теоремы об ортогонализации системы независимых функций, найдутся числа $\{b_{k,j}\}_{k,j=1}^{N}$ такие, что функции $\phi_j(x)=\sum_{k=1}^{N} b_{k,j}g_k(x)$, $j=1,\dots,N$, образуют ортонормированную последовательность на $[0,1]^s$.

Далее, применяя к функции $\Phi(x)=\sum_{j=1}^{N}|\phi_j(x)|^2$ теорему о среднем, получим, что найдется точка $\xi\in[0,1]^s$ такая, что

$$N=\int_{[0,1]^s}\Phi(x)\,dx=\Phi(\xi)=\sum_{j=1}^{N}|\phi_j(\xi)|^2. \tag{9}$$

Тогда если положить

$$\chi(x)=\sum_{j=1}^{N}\overline{\phi_j(\xi)}\phi_j(x)=\sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i (m^{(k)},x)},$$

то числа $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$ искомые (для комплексного числа ω через $\overline{\omega}$, как обычно, обозначено комплексно-сопряженное к ω число). Действительно, выполнение равенств (5) очевидно. А из того, что $\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)$ образуют ортонормированную последовательность на $[0,1]^s$, и из равенства (9), получаем (7). Для доказательства неравенства (6) достаточно воспользоваться определением нормы в $L^\infty(0,1)^s$, определением функции $\chi(x)$ и равенством (9). Далее, имеем

$$\sum_{k=1}^{N'} |c_k| \geqslant \|\chi\|_{L^\infty} \geqslant N \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{N'} |c_k|^2 = \|\chi\|_{L^2}^2 = N.$$

Лемма полностью доказана.

Замечание 3. Если $\psi \equiv \{e^{2\pi i(m,x)}\}_{m\in G}$, то, как видно из доказательства леммы, можно считать, что $N' \geqslant 2N$.

3. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Поскольку верны вложения [13, с. 230]

$$W_p^r(0,1)^s \subset H_p^r(0,1)^s, \qquad B_{p,1}^r(0,1)^s \subset B_{p,\theta}^r(0,1)^s \subset B_{p,\infty}^r(0,1)^s \equiv H_p^r(0,1)^s,$$

то в обоих случаях достаточно оценку сверху доказать для класса $H_p^r(0,1)^s$, а оценку снизу в пункте б) – для класса $B_{p,1}^r(0,1)^s$.

Оценка сверху. Пусть дано целое положительное число N. Без ограничения общности можно считать, что $N = |I_{2^n}| \asymp 2^{sn}$. Определим линейные функционалы $l_1(f) = \widehat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N(f) = \widehat{f}(m^{(N)})$, где $\{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}\}$ есть некоторое упорядочение множества I_{2^n}. Функцию $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; x)$ определим таким образом, чтобы для каждой функции $g \in L^1(0,1)^s$ было выполнено равенство

$$\varphi_N(l_1(g), \dots, l_N(g); x) = V_{2^n}(g; x) = \sum_{k=0}^{n} q_k(g; x),$$

где [13, с. 295–300] $V_{2^k}(g;x)$ – средние Валле-Пуссена функции $g(x)$ порядка 2^k по каждой переменной, а $q_0 = V_{2^0}$, $q_k = V_{2^k} - V_{2^{k-1}}$, $k \geqslant 1$.

Пусть $f \in H_p^r(0,1)^s$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_N\|_{L^q} &\equiv \|f(x) - \varphi_N\big(l_1(f), \dots, l_N(f); x\big)\|_{L^q} \\ &= \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k \Big\|_{L^q} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|q_k\|_{L^q}. \end{aligned} \tag{10}$$

Применим к q_k неравенство разных метрик [13, с. 133]:

$$\|q_k\|_{L^q} \ll 2^{sk(1/p-1/q)} \|q_k\|_{L^p}. \tag{11}$$

Средние Валле-Пуссена функций из класса $H_p^r(0,1)^s$ удовлетворяют неравенству (см., например, [13, с. 305])

$$\sup_{k=0,1,\dots} 2^{kr} \|q_k\|_{L^p} \leqslant c(s,p,r). \tag{12}$$

С учетом (11) и (12) продолжим оценку (10):

$$\|f-\varphi_N\|_{L^q} \ll \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k(r-s(1/p-1/q))}.$$

Отсюда получаем требуемую оценку сверху.

Оценка снизу. Пусть дано целое положительное число N, даны N линейных функционалов $l_1,\dots,l_N$ и функция $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;x)$. Определим целое положительное число $n=n(s,N)$ из условий $|I_n|\geqslant 2N$ и $|I_n|\asymp N$.

Пусть функция $\chi(x)$ определена как в лемме B при $G=I_n$ (см. также замечание 3 к лемме B) и данных функционалах $l_1,\dots,l_N$. Оценим нормы $\|\chi\|_{W_p^r}$ и $\|\chi\|_{B_{p,1}^r}$ при $p\geqslant 2$. Для этого последовательно применим к $\chi(x)$ лемму A и неравенство разных метрик:

$$\|\chi\|_{W_p^r} \ll n^r\|\chi\|_{L^p} \ll n^r n^{s(1/2-1/p)} N^{1/2} \ll N^{r/s+1-1/p},$$
$$\|\chi\|_{B_{p,1}^r} \ll n^r\|\chi\|_{L^p} \ll n^r n^{s(1/2-1/p)} N^{1/2} \ll N^{r/s+1-1/p}.$$

Поэтому найдется такое число $c=c(s,p,r)$, что функция

$$f(x)=f_{l_1,\dots,l_N}(x)=cN^{-r/s-1+1/p}\chi(x)\in W_p^r(0,1)^s\cap B_{p,1}^r(0,1)^s.$$

Оценим снизу $\|f\|_{L^q}$ при $q\geqslant p$. Для этого применим неравенство разных метрик к $f(x)$, воспользуемся определением нормы в L^∞, определением функции $f(x)$ и свойством (6) функции $\chi(x)$:

$$\|f\|_{L^q} \gg (n^s)^{-1/q}\|f\|_{L^\infty} = n^{-s/q} cN^{-r/s-1+1/p}\|\chi\|_{L^\infty} \gg N^{-r/s+1/p-1/q}.$$

Заметим, что выполнены соотношения $l_1(f)=\dots=l_N(f)=0$. Следовательно, в силу произвольности $l_1,\dots,l_N$ и φ_N получим требуемые оценки сверху.

Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 4. Как это видно из хода доказательства, оценка сверху справедлива при всех $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$.

Доказательство теоремы 2. *Оценка сверху.* Пусть дано целое положительное число N. Без ограничения общности можно считать, что $N=|\Gamma_n|$. Отсюда следует, что $N\asymp 2^n n^{s-1}$. Определим линейные функционалы $l_1(f)=\widehat{f}(m^{(1)}),\dots,l_N(f)=\widehat{f}(m^{(N)})$, где $\{m^{(1)},\dots,m^{(N)}\}$ есть некоторое упорядочение множества Γ_n. Определим функцию $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;x)$ следующим образом:

$$\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;x)=\sum_{k=1}^{N}\tau_k e^{2\pi i(m^{(k)},x)}.$$

Пусть $f\in SW_2^r(0,1)^s$.

а) При условии $r>1/2$ имеем

$$\big\|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);x)\big\|_{L^\infty} = \bigg\|\sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus\Gamma_n}\widehat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)}\bigg\|_{L^\infty} \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus\Gamma_n}|\widehat{f}(m)|.$$

Применив неравенство Гёльдера, получим требуемую оценку сверху:

$$\big\|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);x)\big\|_{L^\infty} \ll \sqrt{\sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus\Gamma_n}\frac{1}{(\overline{\overline{m}})^{2r}}} \ll \frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1/2}}\,.$$

б) Используя определение функции $\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);x)$, в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);x)\|_{L^2} = \sqrt{\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_n}|\widehat{f}(m)|^2} \ll \frac{1}{2^{nr}}\,.$$

Отсюда и следует оценка сверху в данном случае.

Оценка снизу. Пусть дано целое положительное число N, даны N линейных функционалов $l_1,\dots,l_N$ и функция $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;x)$. Определим целое положительное число $n=n(s,N)$ из условий $|\Gamma_n|\geqslant 2N$ и $|\Gamma_n|\asymp N$.

Пусть функция $\chi(x)$ определена как в лемме B при $G=\Gamma_n$ (см. также замечание 3 к лемме B) и данных функционалах $l_1,\dots,l_N$.

Покажем, что при некотором $c=c(s,r)>0$ функция

$$f(x)=\frac{c}{2^{nr}\|\chi\|_{L^2}}\chi(x)\in SW_2^r(0,1)^s.$$

Действительно,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}|\widehat{f}(m)|^2(\overline{\overline{m}})^{2r}\leqslant 2^{2nr}\sum_{m\in\Gamma_n}|\widehat{f}(m)|^2=2^{2nr}\|f\|_{L^2}^2=c^2.$$

Далее, используя (6), имеем

$$\|f\|_{L^\infty}=\frac{c}{2^{nr}\|\chi\|_{L^2}}\|\chi\|_{L^\infty}\gg\frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1/2}}$$

и

$$\|f\|_{L^2}=\frac{c}{2^{nr}}\gg\frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^r}\,.$$

Заметим еще, что $l_1(f)=\dots=l_N(f)=0$. В итоге в силу произвольности $l_1,\dots,l_N$ и φ_N получим требуемые оценки снизу.

Доказательство теоремы 3. *Оценка сверху* очевидным образом следует из замечания 4 к доказательству теоремы 1.

Оценка снизу. Пусть дано целое положительное число N, даны N линейных функционалов $l_1,\dots,l_N$ и функция $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;x)$. Определим целое положительное число $n=n(s,N)$ из условий $3N\leqslant n^s$ и $n^s\asymp N$.

Пусть функция $\omega(z)\in C^\infty(-\infty,+\infty)$ такова, что $\operatorname{supp}\omega\subset(0,1)$. Для $k=(k_1,\dots,k_s)\in\mathbb{Z}^s$, $0\leqslant k_j\leqslant(n-1)$, $j=1,\dots,s$, положим

$$\psi_k(x)=\omega(nx_1-k_1)\cdots\omega(nx_s-k_s).$$

Применяя лемму B при данной системе $\{\psi_k\}$ и данных функционалах $l_1,\dots,l_N$ (и при произвольном множестве $G\in\mathbb{Z}^s$ для определенности можно взять $G=[0,n-1]^s\cap\mathbb{Z}^s$), получим, что существует функция

$$\kappa(x)=\sum_{0\leqslant k_j\leqslant n-1}c_k\psi_k(x)$$

такая, что

$$\sum_{0\leqslant k_j\leqslant (n-1)}|c_k|\geqslant N, \tag{13}$$

$$\sum_{0\leqslant k_j\leqslant (n-1)}|c_k|^2=N. \tag{14}$$

Для $l=0,1,\dots$, $t=1,\dots,s$ и $1\leqslant\nu<\infty$ найдем (для любой функции g полагаем $g^{(0)}\equiv g$)

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^l\kappa}{\partial x_t^l}\right\|_{L^\nu}^\nu&=n^{l\nu}\int_{[0,1]^s}\left|\sum_{0\leqslant k_j\leqslant (n-1)}c_k\omega(nx_1-k_1)\cdots\omega^{(l)}(nx_t-k_t)\cdots\omega(nx_s-k_s)\right|^\nu dx\\
&=n^{l\nu}\sum_{0\leqslant m_j\leqslant (n-1)}\int_{\left[\frac{m_1}{n},\frac{m_1+1}{n}\right]\times\dots\times\left[\frac{m_s}{n},\frac{m_s+1}{n}\right]}\\
&\qquad\left|\sum_{0\leqslant k_j\leqslant (n-1)}c_k\omega(nx_1-k_1)\cdots\omega^{(l)}(nx_t-k_t)\cdots\omega(nx_s-k_s)\right|^\nu dx\\
&=n^{l\nu}\sum_{0\leqslant m_j\leqslant (n-1)}\int_{\left[\frac{m_1}{n},\frac{m_1+1}{n}\right]\times\dots\times\left[\frac{m_s}{n},\frac{m_s+1}{n}\right]}\\
&\qquad\left|c_m\omega(nx_1-m_1)\cdots\omega^{(l)}(nx_t-m_t)\cdots\omega(nx_s-m_s)\right|^\nu dx\\
&=n^{l\nu}\sum_{0\leqslant m_j\leqslant (n-1)}|c_m|^\nu\prod_{j=1}^s\int_{m_j/n}^{(m_j+1)/n}|\omega^{(\lambda_j)}(nx_j-m_j)|^\nu\,dx_j,\end{aligned}$$

где $\lambda_j=0$, если $j\neq t$, и $\lambda_j=l$, если $j=t$.

Подсчитаем отдельно

$$\int_{m_j/n}^{(m_j+1)/n}|\omega^{(\lambda_j)}(nx_j-m_j)|^\nu\,dx_j=n^{-1}\int_0^1|\omega^{(\lambda_j)}(z)|^\nu\,dz=n^{-1}c_1(\lambda_j,\nu,\omega).$$

Стало быть,

$$\left\|\frac{\partial^l\kappa}{\partial x_t^l}\right\|_{L^\nu}=c_2(s,l,\nu,\omega)n^{l-s/\nu}\biggl(\sum_{0\leqslant m_j\leqslant n-1}|c_m|^\nu\biggr)^{1/\nu}. \tag{15}$$

Следовательно, при некотором $c=c(s,r,\omega)$ функция

$$f(x)=\frac{cn^{-r+s/2}}{\bigl(\sum_{0\leqslant m_j\leqslant (n-1)}|c_m|^2\bigr)^{1/2}}\kappa(x)\in W_2^r(0,1)^s\subset W_p^r(0,1)^s.$$

С другой стороны, используя соотношение (15) при $l=0$ и $\nu=1$, с учетом (13) и (14) получим, что

$$\|f\|_{L^q}\geqslant\|f\|_{L^1}\asymp n^{-r-s/2}N^{1/2}\asymp N^{-r/s}.$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема 3, доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразование рядов Фурье // Вестн. Евразийского университета. 1997. №3. С. 90–144.

[2] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

[3] Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

[4] Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. №5. С. 1042–1045.

[5] Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. №4. С. 818–821.

[6] Hua Loo Keng, Wang Yang. Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1981.

[7] Темляков В. Н. Приближенное восстановление функций многих переменных // Матем. сб. 1985. Т. 228. №2. С. 256–268.

[8] Скриганов М. М. О решетках в полях алгебраических чисел // Докл. АН СССР. 1980. Т. 306. №3. С. 353–355.

[9] Воронин С. М. Об интерполяционных формулах для класса полиномов Фурье // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. №4. С. 19–35.

[10] Кудрявцев С. Н. Наилучшая точность восстановления функций конечной гладкости по их значениям в заданном числе точек // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. №1. С. 21–58.

[11] Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к приближенному восстановлению и интегрированию периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. №5. С. 1050–1054.

[12] Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Алматы: КазГУ им. аль-Фараби, 1998.

[13] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

[14] Курош С. В. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1978.

Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилева, г. Астана, Республика Казахстан
E-mail: ntmath@mail.ru (Н. Темиргалиев)

Поступило
19.02.2001
Исправленный вариант
20.01.2003