Труды Математического института АН СССР
1988, том 181

УДК 519.614

М. О. ОТЕЛБАЕВ

О КОЭРЦИТИВНЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Содержание настоящей статьи тесно связано с результатами и методами работы [1], где для трехдиагональной матрицы, соответствующей разностному аналогу оператора Штурма—Лиувилля, была получена двусторонняя точная оценка наименьшего собственного числа. Метод работы [1] получил развитие в статье Е. Смаилова [2], который обобщил результаты работы [1] с точки зрения разностных теорем вложения и нашел интересные приложения в теории функций.

В этой работе мы для решения линейных (или нелинейных) разностных уравнений

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} + c_j(\mathrm{u})u_j = f_j, \;\; j \in \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\},$$

получаем неравенство:

$$\sum_j |u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}| + |c_j(\mathrm{u})u_j| \leqslant 3\sum_j |f_j|,$$

а в линейном случае — еще следующую оценку:

$$\sum_j |u_j| \leqslant a \sum_j |f_j|,$$

гед a эффективно выражается через $\{c_j\}$. Первая из этих оценок, очевидно, неулучшаема; доказывается, что неулучшаемой является и вторая оценка.

Важно отметить (и это является главным достоинством работы), что полученные оценки верны только при одном предположении $c_j(u) > 0$, все оценки точны по порядку и не зависят от количества узлов.

В конце работы указывается достаточно широкий класс разностных уравнений, для которых верны аналогичные оценки коэрцитивности. Оценки такого вида важны при анализе вопроса об устойчивости разностных схем, а также вопроса о сходимости решений разностных схем к решениям соответствующих дифференциальных уравнений.

Содержание данной работы обсуждалось с Р. Ойнаровым и Ш. Смагуловым. Автор благодарит их за внимание.

1. ОЦЕНКА НОРМЫ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ВЛОЖЕНИЯ

Пусть $c_j \geqslant \varepsilon > 0$ $(j \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\})$. Обозначим через l_1 и H банаховы пространства, снабженные соответственно нормами:

$$\|u\|_{l_1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j|$$

и

$$\| u \|_H = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (|\Delta u_j| + c_j |u_j|),$$

где $\Delta u_j = u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}$. В этом параграфе мы получим оценку нормы оператора вложения E: $H \to l_1$.

Введем новую последовательность чисел $\{c_j^*\}$:

$$c_j^* = \begin{cases} c_j, & c_j \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{(4n+1)^2}, \quad n = \min\left\{k: \sum\limits_{l=-2k}^{-k} c_{j+l}, \sum\limits_{l=k}^{2k} c_{j+l} \geqslant \dfrac{1}{4k+1}\right\}, & c_j < 1. \end{cases}$$

Целое неотрицательное число, для которого достигается этот min, будем обозначать через n_j. В случае $c_j \geqslant 1$ полагаем по определению: $n_j = 0$. В силу $c_j \geqslant \varepsilon > 0$ для любого j число n_j конечно. Для любых i и j $(j \geqslant 0)$ легко проверить следующие равенства:

$$u_{i+j+1} = u_i + (j+1)(u_i - u_{i-1}) + \sum_{k=0}^{j} \sum_{l=0}^{k} \Delta u_{i+l} \tag{1.1}$$

и

$$u_{i-j-1} = u_i + (j+1)(u_i - u_{i+1}) + \sum_{k=0}^{j} \sum_{l=0}^{k} \Delta u_{i-l}. \tag{1.2}$$

Лемма 1.1. *Пусть $c_j < 1$, $j \in Z$. Тогда*

$$\sum_{l=-2n_j}^{2n_j} |\Delta u_{j+l}| + \sum_{l=-2n_j}^{2n_j} c_{j+l} |u_{j+l}| \geqslant \frac{1}{8} c_j^* \sum_{l=-2n_j}^{2n_j} |u_{j+l}|.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что можно рассматривать только действительнозначные последовательности и считать, что

$$\sum_{l=-2n_j}^{2n_j} |u_{j+l}| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \max_{-2n_j \leqslant l \leqslant 2n_j} |u_{j+l}| = u_{j_0} = \frac{1}{4n_j+1}. \tag{1.3}$$

Обозначим

$$\sum_{l=-2n_j}^{2n_j} |\Delta u_{j+l}| = A.$$

Утверждение леммы легко проверяется в силу (1.3) и определения c_j^*, если $A \geqslant \frac{1}{8}(4n_j+1)^{-2}$. Поэтому можно считать, что $A < \frac{1}{8}(4n_j+1)^{-2}$. Если $j - 2n_j < j_0 < j + 2n_j$, то $u_{j_0} - u_{j_0-1} \geqslant 0$ и $u_{j_0} - u_{j_0+1} \geqslant 0$, и поэтому из равенств (1.1) и (1.2) вытекает, что при $j - 2n_j \leqslant j_0 + i + 1 \leqslant j + 2n_j$, имеет место цепочка неравенств:

$$u_{j_0+i+1} \geqslant u_{j_0} - 4n_j \sum_{l=-2n_j}^{2n_j} |\Delta u_{j+l}| \geqslant u_{j_0} - \frac{4n_j}{8(4n_j+1)^2} >$$
$$> \frac{1}{4n_j+1} - \frac{1}{8(4n_j+1)} = \frac{7}{8(4n_j+1)}.$$

Следовательно, выполняется соотношение

$$\sum_{l=-2n_j}^{2n_j} c_{j+l} |u_{j+l}| \geqslant \frac{7}{8} \left(\frac{1}{4n_j+1} \right)^2 = \frac{7}{8} c_j^*.$$

Последнее неравенство и соотношение (1.3) доказывают лемму в случае $j - 2n_j < j_0 < j + 2n_j$. Осталось рассмотреть случай $j_0 = j - 2n_j$ или $j_0 = j + 2n_j$. Для определенности будем считать, что $j_0 = j - 2n_j$. Тогда, если $u_{i-2n_j} - u_{j-2n_j-1} \geqslant -\frac{3}{(4n_j+1)^2}$, то в силу соотношения (1.1) и условия $A \leqslant \frac{1}{8(4n_j+1)^2}$ имеем неравенство

$$u_{j-2n_j+i+1} \geqslant \frac{1}{4n_j+1} - \frac{3(i+1)}{(4n_j+1)^2} - \frac{i+1}{8(4n_j+1)^2}.$$

Отсюда, для $i + 1 \leqslant n_j$ получаем оценки

$$u_{j-2n_j+i+1} \geqslant \frac{1}{4n_j+1} - \frac{4n_j}{4(4n_j+1)^2}\left(3 + \frac{1}{8}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{4n_j+1}\left(1 - \frac{25}{35}\right) > \frac{7}{32}\frac{1}{4n_j+1} > \frac{1}{8} c_j^*(4n_j+1).$$

Поэтому, используя определение c_j^*, выводим неравенства

$$\sum_{l=-2n_j}^{2n_j} c_{j+l}\,|u_{j+l}| \geqslant \frac{1}{8} c_j^*(4n_j+1) \sum_{l=-2n_j}^{-n_j} c_{j+l} \geqslant \frac{1}{8} c_j^*.$$

Последнее неравенство и соотношение (1.3) доказывают лемму при рассматриваемом предположении. Осталось изучить случай $u_{j-2n_j} - u_{j-2n_j-1} < -3/(4n_j+1)^2$. При этом условии, в силу формулы (1.1), имеем неравенство:

$$u_{j-2n_j+i+1} \leqslant \frac{1}{4n_j+1} - 3\frac{i+1}{(4n_j+1)^2} + (4n_j+1)\frac{1}{8(4n_j+1)^2}.$$

Тогда при $i = 4n_j - 1$ получаем цепочку соотношений:

$$u_{j+2n_j} \leqslant \frac{1}{4n_j+1}\left(1 + \frac{1}{8}\right) - 3\frac{4n_j}{(4n_j+1)^2} = \frac{1}{(4n_j+1)^2}\left[\frac{9}{8}(4n_j+1-12n_j)\right] =$$
$$= \frac{1}{(4n_j+1)^2}\left(\frac{36n_j+9-96n_j}{8}\right) < -\frac{1}{4n_j+1},$$

а это противоречит формуле (1.3). Лемма полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1.1. Лемма 1.1 при $c_j \geqslant 1$, $j \in Z$ также имеет место, так как в этом случае $n_j = 0$ и утверждение леммы тривиально.

Т е о р е м а 1.1. *Для* $\|E\|$ (*нормы оператора вложения* $E: H \to l_1$) *справедливы оценки*:

$$k^{-1}(\inf_{\{j\}} c_j^*)^{-1} \leqslant \|E\| \leqslant 16(\inf_{\{j\}} c_j^*)^{-1}. \tag{1.4}$$

Здесь постоянная k *не зависит от последовательности* $\{c_j\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\omega_j = [j - 2n_j,\ j + 2n_j]$ — множество целых точек отрезка $[j - 2n_j,\ j + 2n_j]$. Согласно теореме типа Безиковича [3] [1] числовую ось можно покрыть отрезками V_{j_k}:

$$V_{j_k} = [j_k - 2n_{j_k},\ j_k + 2n_{j_k}],\quad k \in Z,$$

которые таковы, что $V_{j_{k_1}} \cap V_{j_{k_2}} = \phi$, если $|k_1 - k_2| > 1$. Поэтому выполняется неравенство

$$\|u\|_H = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta u_j| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j|u_j| \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\ \sum_{l=j_k-2n_{j_k}}^{j_k+2n_{j_k}} (|\Delta u_l| + c_l|u_l|).$$

[1] В рассматриваемом нами случае такое утверждение можно легко доказать элементарными средствами.

Теперь, пользуясь леммой 1.1 и замечанием 1.1, получаем цепочку оценок:

$$\|u\|_H \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c^*_{j_k} \sum_{l=j_k-2n_{j_k}}^{j_k+2n_{j_k}} |u_l| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{16}(\inf_{\{j\}} c^*_j) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j| = \frac{1}{16}(\inf_{\{j\}} c^*_j)\,\|u\|_{l_1}.$$

Итак, правое неравенство (1.4) доказано. Докажем левое неравенство теоремы. Обозначим $a = \inf\limits_{\{j\}} c^*_j$. Если $a \geqslant 1$, то все c_j, $j \in Z$ не меньше 1, и поэтому $c^*_j = c_j \geqslant a$ для всех $j \in Z$. Пусть $u_{j_0} = 1$, $u_j = 0$ при $j \neq j_0$. Тогда

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta u_j| = 4, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j |u_j| = c_{j_0}, \quad \|u\|_H = 4 + c_{j_0}, \quad \|u\|_{l_1} = 1.$$

Отсюда, так как j_0 — произвольно, следуют оценки:

$$\|u\|_H^{-1}\|u\|_{l_1} \geqslant \frac{1}{4+c_j} \geqslant \frac{1}{5} c_{j_0}^{-1}, \quad \|u\|_H^{-1}\|u\|_{l_1} \geqslant \frac{1}{5} a^{-1}.$$

Последнее неравенство доказывает левое неравенство теоремы в случае $a \geqslant 1$.

Пусть теперь $a < 1$. Тогда найдется j_0 такое, что $c^*_{j_0} < 2a$, $n_{j_0} \geqslant 1$, $c_{j_0} < 1$. Если $n_{j_0} \leqslant 2$, то берем за пробную последовательность ту же самую последовательность, которую брали выше и получим неравенства:

$$\|u\|_H^{-1}\|u\|_{l_1} \geqslant \frac{1}{4+c_{j_0}} > \frac{1}{5}. \tag{1.5}$$

В силу $n_{j_0} \leqslant 2$ имеем $c^*_{j_0} \geqslant \left(\frac{1}{4\cdot 2+1}\right)^2 = \frac{1}{81}$. Поэтому из (1.5) получаем цепочку оценок:

$$\|u\|_H^{-1}\|u\|_{l_1} > \frac{1}{5}\cdot 81^{-1}(c^*_{j_0})^{-1} = \frac{1}{5\cdot 81}(c^*_{j_0})^{-1} \geqslant \frac{1}{810} a^{-1}.$$

Следовательно, левое неравенство теоремы в случае $n_{j_0} \leqslant 2$ доказано. Если же $n_{j_0} > 2$, то в силу определения $c^*_{j_0}$ имеем соотношения:

$$\sum_{j=j_0-2n_{j_0}+2}^{j_0-n_{j_0}+1} c_j < \frac{1}{4n_{j_0}-3} \quad \text{или} \quad \sum_{j=j_0+n_{j_0}-1}^{j_0+2n_{j_0}-2} c_j < \frac{1}{4n_{j_0}-3}.$$

Допустим для определенности, что выполнено первое из этих неравенств. За пробную последовательность $\{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ возьмем следующую:

$$u_j = \begin{cases} \frac{1}{2}(j-j_0+2n_{j_0}-1)(j-j_0+n_{j_0}-2), & \text{при } j_0-2n_{j_0}+1 \leqslant j \leqslant j_0-2n_{j_0}+2, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда непосредственным вычислением получаем неравенства

$$\|u\|_H \leqslant a_1 n_{j_0},$$

$$\|u\|_{l_1} \geqslant a_2 n_{j_0}^3.$$

Из этих неравенств следуют оценки:

$$\|u\|_H^{-1}\|u\|_{l_1} \geqslant a_3 n_{j_0}^2 \geqslant a_4 (c^*_{j_0})^{-1} \geqslant a_5 a^{-1}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1.2. Следует отметить, что важным моментом в формулировке теоремы 1.1 является независимость постоянной k от положительной последовательности $\{c_j\}$, а также ее нижней грани. Изменяя, при необходимости, определение «усредненной» последовательности c_j^*, можно уточнить и сблизить границы оценок (1.4). Мы в этой работе такой задачей не занимаемся, хотя сознаем, что улучшение границ оценок в (1.4) имеет важное значение.

2. О ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Рассмотрим разностное уравнение:

$$-\Delta u_j + c_j u_j = c_j^{\alpha} f_j, \quad j \in Z, \tag{2.1}$$

где $\Delta u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$, $1 > \alpha > 0$, $c_j \geqslant \varepsilon > 0$. Умножим уравнение (2.1) на $u_j\,(u_j^2)^{\gamma/2}$, $(\gamma > -1)$ и просуммируем по всем j; получим:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(-\Delta u_j u_j (u_j^2)^{\gamma/2} + c_j u_j^2 (u_j^2)^{\gamma/2}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^{\alpha} f_j u_j (u_j^2)^{\gamma/2}; \tag{2.2}$$

Легко проверить следующие соотношения:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \Delta u_j u_j (u_j^2)^{\gamma/2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(u_{j+1} - u_j) - (u_j - u_{j-1})]\, u_j (u_j^2)^{\gamma/2} =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_{j+1} - u_j)\, u_j (u_j^2)^{\gamma/2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_{j+1} - u_j)\, u_{j+1} (u_{j+1}^2)^{\gamma/2} =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_{j+1} - u_j)\, [u_j (u_j^2)^{\gamma/2} - u_{j+1} (u_{j+1}^2)^{\gamma/2}].$$

Очевидно, что каждое слагаемое суммы в правой части последнего равенства неположительно. Поэтому из соотношения (2.2) следует оценка:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j |u_j|^{2+\gamma} \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^{\alpha} |u_j|^{1+\gamma} |f_j| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^{p\alpha} |u_j|^{(1+\gamma)p}\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^{p'}\Big)^{1/p'}, \quad (1/p + 1/p' = 1,\ 1 < p < \infty).$$

Возьмем p, α, γ, удовлетворяющие условиям: $p\alpha = 1$, $(1 + \gamma)\, p = 2 + \gamma$, $p = 1/\alpha$, $\gamma = (2 - p)/(p - 1)$. Тогда выполняются неравенства: $1 < p < \infty$, $\gamma > -1$,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j |u_j|^{2+(2-p)/(p-1)} \leqslant \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j |u_j|^{2+(2-p)/(p-1)}\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^{p'}\Big)^{1/p'}.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j |u_j|^{p'}\Big)^{1/p'} \leqslant \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^{p'}\Big)^{1/p'}, \quad (\alpha + 1/p' = 1). \tag{2.3}$$

Пусть $\{f_j\}$ — финитная последовательность. Тогда уравнение (2.1), в силу условия $c_j \geqslant \varepsilon > 0$ в l_2 имеет решение $\{u_j\}$. Используя неравенство (2.3), нетрудно убедиться, что это решение принадлежит $l_{p'}$ при $1/p' + \alpha = 1$. Устремляя α к 0 или 1 получаем, что сказанное выше верно и при $\alpha \in [0, 1]$, причем выполняется неравенство (2.3).

Если теперь $\{f_j\}$ принадлежит $l_{p'}$ $(1 \leqslant p' \leqslant \infty)$, но не является финитной последовательностью, то, приближая $\{f_j\}$ в $l_{p'}$ финитными последовательностями, получаем, что уравнение (2.1) имеет решение, удовлетворяющее неравенству (2.3).

Рассуждения и выкладки, данные выше, приводят к лемме 2.1.

Лемма 2.1. *Пусть $c_j \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда уравнение* (2.1) *при* $1 \geqslant \alpha \geqslant 0$ *для любой правой части* $f = \{f_j\} \in l_{p'}$ $(\alpha + 1/p' = 1)$ *имеет решение, удовлетворяющее неравенству* (2.3).

Следствие 2.1. Пусть $c_j \geqslant \varepsilon > 0$. Обозначим через L^{-1} оператор в пространстве последовательностей, сопоставляющий каждой последовательности $\{f_j\}$ решение $\{u_j\}$ разностных уравнений:

$$-\Delta u_j + c_j u_j = f_j, \quad j \in Z. \tag{2.4}$$

Тогда, если $1 \geqslant \alpha \geqslant 0$ и $\alpha + 1/p' = 1$, то оператор A_α, первоначально оп ределенный на финитных последовательностях равенством

$$A_\alpha f = \{c_j^{1-\alpha} L^{-1} c_j^\alpha f_j\},$$

допускает ограниченное продолжение из $l_{p'}$ в $l_{p'}$.

Теорема 2.1. *Разностное уравнение* (2.4) *для любой последовательности* $\{f_j\} \in l_1$ *имеет решение* $\{u_j\}$ *такое, что выполняются неравенства*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta u_j| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j |u_j| \leqslant 3 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j| \tag{2.5}$$

и

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j| \leqslant 48 (\inf_{\{j\}} c_j^*)^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|. \tag{2.6}$$

Доказательство. В силу следствия 2.1, в котором берем $\alpha = 0$, получаем, что уравнение (2.4) имеет решение $\{u_j\}$, удовлетворяющее оценке

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j |u_j| \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|.$$

Отсюда и из самого уравнения (2.4) получаем неравенство:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta u_j| \leqslant 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|.$$

Эти два неравенства доказывают оценку (2.5). Из неравенства (2.5) и теоремы 1.1 вытекает неравенство (2.6). Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Из уравнения (2.4) и неравенства треугольника для нормы следуют оценки:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j| \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta u_j| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j |u_j|.$$

Эти неравенства вместе с неравенством (2.5) в силу теоремы 1.1 показывают что оценка (2.6) не улучшаема по порядку, точнее:

$$k_1 (\inf_{\{j\}} c_j^*)^{-1} \leqslant \| L^{-1} \|_{l_1 \to l_1} \leqslant k_2 (\inf_{\{j\}} c_j^*)^{-1},$$

где k_1 и k_2 — абсолютные постоянные.

Замечание 2.2. К разностным уравнениям вида (2.4) автоматически приводятся разностные уравнения вида

$$-\frac{\Delta u_j}{h^2} + c_j u_j = f_j, \quad j \in Z,$$

возникающие при конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения

$$-y''(x) + q(x)\, y = f(x),$$

где J — любое открытое подмножество прямой.

3. О НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ. ОБОБЩЕНИЯ

Рассмотрим теперь следующую нелинейную разностную схему (р. с.):

$$\begin{cases} -\Delta u_j + c_j(u)\,u_j = f_j, \quad j = -N, -N+1, \ldots, 0, 1, \ldots, N, \\ u_{-N-1} - u_{-N} = u_{N+1} - u_N = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $N < \infty$, $u = (u_{-N-1}, \ldots, u_{N+1})$, $\Delta u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$. Будем предполагать, что c_j непрерывны и $c_j(\cdot) \geqslant \varepsilon > 0$. Наряду с р. с. (3.1) рассмотрим вспомогательную р. с.

$$\begin{cases} -\Delta u_j + c_j(u)\,u_j = c_j^{\alpha}(u)\,f_j, \\ u_{-N-1} - u_{-N} = u_{N+1} - u_N. \end{cases} \tag{3.2}$$

Умножим равенство (3.2) на $(u_j^2)^{\gamma/2}u_j$ и просуммируем полученное по всем j; в результате получим равенство

$$\sum_{j=-N}^{N} \left(-\Delta u_j u_j (u_j^2)^{\gamma/2} + c_j(u)\,u_j^2 (u_j^2)^{\gamma/2}\right) = \sum_{j=-N}^{N} c_j^{\alpha}(u)\,u_j (u_j^2)^{\gamma/2} f_j. \tag{3.3}$$

Преобразуем слагаемые левой части равенства (3.3), содержащие разность Δ_j:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N} -\Delta u_j u_j (u_j^2)^{\gamma/2} &= \sum_{j=-N}^{N} [(u_{j+1} - u_j) - (u_j - u_{j-1})]\,u_j (u_j^2)^{\gamma/2} = \\ &= \sum_{j=-N}^{N} (u_{j+1} - u_j)\,u_j (u_j^2)^{\gamma/2} + \sum_{j=-N}^{N} (u_j - u_{j-1})\,u_j (u_j^2)^{\gamma/2} = \\ &= \sum_{j=-N}^{N} (u_{j+1} - u_j)\,u_j (u_j^2)^{\gamma/2} + \sum_{j=-N}^{N} (u_j - u_{j-1})\,u_j (u_j^2)^{\gamma/2} = \\ &= -\sum_{j=-N}^{N-1} (u_{j+1} - u_j)\,u_j (u_j^2)^{\gamma/2} + \sum_{j=-N}^{N-1} (u_{j+1} - u_j)\,u_{j+1} (u_{j+1}^2)^{\gamma/2} = \\ &= -\sum_{j=-N}^{N-1} (u_{j+1} - u_j)\,(u_j (u_j^2)^{\gamma/2} - u_{j+1} (u_{j+1})^{\gamma/2}). \end{aligned}$$

Каждое слагаемое, входящее в последнюю сумму, неотрицательно. Поэтому из (3.3) получаем неравенство

$$\sum_{j=-N}^{N} c_j(u)\,u_j (u_j^2)^{\gamma/2} \leqslant \sum_{j=-N}^{N} c_j^{\alpha}(u)\,u_j (u_j^2)^{\gamma/2} f_j.$$

Отсюда, применяя методы, употребленные в разделе 2 и аналогичные рассуждения, получаем оценку

$$\Big(\sum_{j=-N}^{N} c_j(u)\,|u_j|^{p'}\Big)^{1/p'} \leqslant \Big(\sum_{j=-N}^{N} |f_j|^{p'}\Big)^{1/p'}, \quad \alpha + 1/p' = 1.$$

Тогда, устремляя α к нулю, получаем оценку

$$\sum_{j=-N}^{N} c_j(u)\,|u_j| \leqslant \sum_{j=-N}^{N} |f_j|.$$

Из последнего неравенства в комбинации с уравнением (3.1) выводим оценку

$$\sum_{j=-N}^{N} (|\Delta u_j| + c_j(u)\,|u_j|) \leqslant 3 \sum_{j=-N}^{N} |f_j|. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4) верно также и в случае, когда коэффициенты $c_j(u)$ не зависят от u.

Теперь покажем разрешимость задачи (3.1). Для любого вектора $v = (v_{-N}, v_{-N+1}, \ldots, v_0, \ldots, v_N)$ уравнение

$$\begin{cases} -\Delta u_j + c_j(v) u_j = f_j, & j = -N, -N+1, \ldots, 0, \ldots, N, \\ u_{-N-1} - u_{-N} = u_{N+1} - u_N = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

разрешимо. Это является следствием условия: $c_j(v) \geqslant \varepsilon > 0$. Для решения u_v уравнения выполнена оценка (3.4). Поэтому, в силу $c_j(v) \geqslant \varepsilon > 0$ имеем неравенство

$$\sum_{j=-N}^{N} |(u_v)_j| \leqslant \frac{3}{\varepsilon} \sum_{j=-N}^{N} |f_j| = \frac{3}{\varepsilon} \| f \|_1. \tag{3.6}$$

Обозначим через A оператор, сопоставляющий вектору v решение u_v уравнения (3.5) при фиксированном $f = (f_{-N}, \ldots, f_0 \ldots, f_N)$. Если v таково, что $\| v \| \leqslant {}^4/_3 \| f \|_1$, то для Av согласно (3.6) имеем

$$\| Av \|_1 = \| u_v \|_1 \leqslant \frac{3}{\varepsilon} \| f \|_1.$$

Следовательно, оператор A переводит шар радиуса $\frac{4}{\varepsilon} \| f \|_1$ в шар радиуса $\frac{3}{\varepsilon} \| f \|_1$. По предположению $c_j(v)$ — непрерывно зависит от v. Отсюда легко вытекает непрерывная зависимость Av от v. Теперь, пользуясь принципом существования неподвижной точки Шаудера ([4, с. 409]), получаем, что A имеет неподвижную точку $Av = v$ в шаре радиуса $\frac{3}{\varepsilon} \| f \|_1$. Но тогда v удовлетворяет уравнению (3.1), т. е. уравнение (3.1) имеет решение $u = v$. Очевидно, для этого решения выполнено неравенство (3.4). Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *Разностное уравнение (3.1) имеет решение, удовлетворяющее оценке:*

$$\sum_{j=-N}^{N} (| \Delta u_j | + c_j(u) | u_j |) \leqslant 3 \sum_{-N}^{N} | f_j |. \tag{3.7}$$

Здесь весьма важно, что правая часть неравенства (3.7) *не зависит от* $\{c_j(\cdot)\}$.

Замечание 3.1. Теорема 3.1 обобщается на разностные аналоги следующих операторов:

а) эллиптического оператора второго порядка:

$$Lu_j = -\sum_{i=1}^{n} \Delta_i a_{ij} \Delta_i u_j + q_j(u) u_j,$$

где $\Delta_i u_j = \dfrac{u_{j_1, \ldots, j_{i+1}, \ldots, j_n} - u_{j_1, \ldots, j_i, \ldots, j_n}}{h}$, $a_{ij}(u), q_j(u)$ положительны;

б) операторы типа теплопроводности:

$$Lu_j^{\tau} = \frac{u_\tau - u_{\tau+1}}{t} - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i a_{ij}(u) \Delta_i u_j^{\tau} + q_j(u) u_j,$$

с нулевым начальным условием[2], где $a_i(u)$, $q_j(u)$ положительны.

Замечание 3.2. Непрерывный аналог теоремы 3.1 в многомерном случае в более общей ситуации принадлежит Ойнарову Р., а одномерный аналог доказан в работе [5].

---

[2] По пространственным переменным, например, можно взять нулевые.

З а м е ч а н и е 3.3. Для каждого оператора, упомянутого в замечании 3.1, предельным переходом может быть получен непрерывный аналог теоремы 3.1 при некоторых предположениях на коэффициенты.

З а м е ч а н и е 3.4. Результаты, аналогичные теореме 2.1, для разностных схем, соответствующих многомерным операторам типа Шредингера, не получены.

З а м е ч а н и е 3.5. С точки зрения приложения, более интересным является получение оценок коэрцитивности в l_p, $p > 1$, нежели полученные нами оценки коэрцитивности в l_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муслимов Б.*, *Отелбаев М. О.* Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма—Лиувилля // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21, № 6. С. 1430—1434.
2. *Смаилов Е. С.* Разностные теоремы вложения для пространства Соболева с весом и их приложения // ДАН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 52—55.
3. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в R^n. М.: Мир, 1978.
4. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
5. *Гриншпун Э. З.*, *Отелбаев М. О.* Гладкость решения уравнения Штурма—Лиувилля в $L_1(-\infty, \infty)$ // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1984. № 5. С. 26—29.