УДК 517.52

М. И. Дьяченко, Е. Д. Нурсултанов

Теорема Харди–Литтлвуда для тригонометрических рядов с α-монотонными коэффициентами

Получена теорема Харди–Литтлвуда для тригонометрических рядов с α-монотонными коэффициентами. Доказаны неравенства типа Харди–Литтлвуда. Построены примеры рядов, показывающие точность полученных результатов.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: обобщенно-монотонные коэффициенты, теорема Харди–Литтлвуда.

§ 1. Введение

Для функции f, измеримой и определенной на $[0,1]$, определим невозрастающую перестановку f^* следующим образом:

$$f^*(t)=\inf\bigl\{\sigma:\mu\{x\in\Omega:|f(x)|>\sigma\}\leqslant t\bigr\}.$$

Пусть $0<p\leqslant\infty$ и $0<q\leqslant\infty$. Будем говорить, что f *принадлежит пространству Лоренца* $L_{p,q}[0,1]$, если для $0<p<\infty$ и $0<q<\infty$ имеем

$$\|f\|_{L_{p,q}}=\biggl(\int_0^1\bigl(t^{1/p}f^*(t)\bigr)^q\,\frac{dt}{t}\biggr)^{1/q}<\infty.$$

Для $0<p\leqslant\infty$, $q=\infty$ полагаем

$$\|f\|_{L_{p,\infty}}=\sup_t t^{1/p}f^*(t)<\infty.$$

При $p=q$ это пространство совпадает с пространством Лебега, которое обозначается через $L_p[0,1]$.

Хорошо известна следующая теорема Харди и Литтлвуда.

Теорема A. *Пусть* $1<p<\infty$. *Если* $a=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *монотонно невозрастающая стремящаяся к нулю последовательность, а* $f(x)$ – *функция, имеющая ряд Фурье* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos2\pi kx$, *то для того чтобы* $f\in L_p[0,1]$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось*

$$J_p(a)=\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-2}|a_k|^p\biggr)^{1/p}<\infty.$$

Исследования первого автора проводились при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00175) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2787.2008.1). Исследования второго автора проводились при финансовой поддержке ИНТАС (грант № 05-1000008-815).