Построение предельно устойчивых систем управления в области канонического преобразования

М.А.Бейсенби

Введение и постановка задачи. В настоящее время уже общепризнано, что проектирование систем управления для реальных объектов связано с необходимостью решения задачи в условиях той или иной степени неопределенности. При этом неопределенность может быть обусловлена как наличием неконтролируемых возмущений, действующих на объекты управления, так и незнанием истинных значений параметров объектов управления и непредсказуемым изменением их во времени. В отличие от широко известного подхода к постановке и решению задач управления в условиях параметрической и непараметрической неопределенности [1,2], в соответствии с которым устанавливается робастная устойчивость, т.е. определяются ограничения на изменение параметров системы управления, при которых сохраняется устойчивость. В данной работе использована, в сущности, концепция предельной устойчивости, базирующаяся на результатах теории катастроф [3. 4], где классифицированы основные структурно устойчивые отображения. Излагается один из подходов к построению предельно устойчивой системы управления для линейных объектов группами вещественных простых, кратных и комплексно-сопряженных собственных значений, с нелинейным законом управления, заданным в области канонических координат системы в форме однопараметрической структурно устойчивой функции [5,6], придающим системе управления предельную устойчивость среди всех возможных структур.

Пусть стационарная система управления описывается уравнением состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad (0.1)$$

где A - квадратная матрица коэффициентов $n \times n$; B - матрица управления $m \times n$; x - n-мерный вектор состояния; u - n-мерная вектор-функция управления.

Матрица объекта управления A может быть приведена [7, 8] с помощью неособой матрицы P, столбцами которой являются собственные функции матрицы A, к блочно-диагональной форме

$$\widetilde{A} = P^{-1}AP = diag\left\{\Lambda, J_1, \ldots, J_m J_1^i, \ldots, J_k^i\right\} \qquad (0.2)$$

с диагональными квадратными блоками вида

$$\Lambda = diag\left\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\right\} \qquad (0.3)$$

$$J_i = \begin{Vmatrix} \lambda_i & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & \lambda_i \end{Vmatrix}, \qquad N_i \times N_i, \qquad i = \overline{1,m}\ ; \qquad (0.4)$$

$$J_j^i = \begin{Vmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{Vmatrix}, \qquad j = \overline{1,k}\,. \qquad (0.5)$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ - вещественные простые, λ_i - вещественные, N_i кратные, $\lambda_j = \alpha_j \pm j\beta_j$ - комплексно-сопряженные собственные значения матрицы A, причем очевидно $l + N_1 + \ldots + N_m + 2k = n$.

1. Покажем, что принятая структура (0.2) позволяет раздельное управление каноническими координатами (гармониками) системы (0.1), соответствующие любому диагональному блоку матрицы $\widetilde{A}$. Для этого подобно (0.1) запишем

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}u = \begin{Vmatrix} \Lambda & & 0 \\ & J & \\ 0 & & J^1 \end{Vmatrix} \widetilde{x} + \begin{Vmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \\ \widetilde{B}_3 \end{Vmatrix} u \qquad (1.1)$$

где

$$\tilde{x} = P^{-1}x, \qquad \tilde{A} = P^{-1}AP, \qquad \tilde{B} = P^{-1}B$$

и при этом размерности матриц $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2$ и $\tilde{B}_3$ и вектор-функции управления u соответствуют размерностям квадратных матриц Λ, J, J^i. На основании (1.1), приняв $\tilde{B}_2 = 0,\ \tilde{B}_3 = 0$ нетрудно убедиться, что можем управлять каноническими координатами (гармониками) системы (0.1), соответствующими матрице Λ, сохраняя неизменным канонические координаты (гармоники) системы (0.1), определяемые матрицами J и J^i. Аналогичные результаты можно получить относительно матрицы J или J^i, соответственно приняв $\tilde{B}_1 = 0$, $\tilde{B}_3 = 0$ или $\tilde{B}_1 = 0$, $\tilde{B}_2 = 0$. Таким образом, дальнейшая задача сводится к последовательному построению предельно устойчивых систем управления для канонических объектов

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \Lambda \tilde{x}_1 + B_1 u \tag{1.2}$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = J\tilde{x}_2 + B_2 u \tag{1.3}$$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = J^i \tilde{x}_3 + B_3 u \tag{1.4}$$

где

$$\tilde{x}_1 = \begin{Vmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_l \end{Vmatrix}, \qquad \tilde{x}_2 = \begin{Vmatrix} \tilde{x}_{l+1} \\ \tilde{x}_{l+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_{l+L} \end{Vmatrix}, \quad L = N_1 + \ldots + N_m, \qquad \tilde{x}_3 = \begin{Vmatrix} \tilde{x}_{l+L+1} \\ \tilde{x}_{l+L+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_n \end{Vmatrix},$$

с матрицами вида (0.3) - (0.5). Рассмотрим поочередно задачи (1.2), (1.3) и (1.4).

2. Предположим, что преобразованная матрица управления B и соответственно $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$ и $\tilde{B}_3$ в (1.2), (1.3) и (1.4) диагональные. Тогда для полной управляемости канонического объекта (1.2) необходимо и достаточно, чтобы все диагональные элементы матрицы $\tilde{B}_1$ были ненулевыми. Наличие нулевых

элементов $\tilde{b}_{ii} = 0$ означает, что соответствующие канонические координаты $\tilde{x}_i$ неуправляемы.

Систему (1.2) можем записать в развернутой форме

$$\dot{\tilde{x}}_i = \lambda_i \tilde{x}_i + b_{ii} u_i, \qquad i = \overline{1,l} \qquad (2.1)$$

Компоненты вектора-функции управления *u*, для $i = \overline{1,l}$ выберем в виде однопараметрической структурно устойчивой функции, описывающийся уравнением

$$u_i = \gamma_i (-\tilde{x}_i^3 + k_i \tilde{x}_i), \qquad i = \overline{1,l} \qquad (2.2)$$

где γ_i - выберем из условий $b_{ii}\gamma_i = 1$.

Отсюда следует, что с учетом (2.1) и (2.2) систему (1.2) в развернутой форме можем представить в виде

$$\dot{\tilde{x}}_i = -\tilde{x}_i^3 + (\lambda_i + k_i)\tilde{x}_i, \qquad i = \overline{1,l} \qquad (2.3)$$

Стационарные (установившиеся) состояния системы (2.3) будут описываться уравнениями

$$-\tilde{x}_{is}^3 + (\lambda_i + k_i)\tilde{x}_{is} = 0, \qquad i = \overline{1,l} \qquad (2.4)$$

Из (2.4) находим стационарные состояния канонических координат системы (2.2).

$$\tilde{x}_{1is} = 0, \qquad i = \overline{1,l} \qquad (2.5)$$

Другие стационарные состояния будут определяться решениями уравнений

$$-\tilde{x}_{is}^2 + \lambda_i + k_i = 0, \qquad i = \overline{1,l}, \qquad (2.6)$$

При отрицательном $\lambda_i + k_i$ это уравнение (2.6) имеет мнимое решение, что не может соответствовать какой-либо реальной ситуации. Таким образом, при $\lambda_i + k_i > 0$ уравнение (2.6) допускает следующие пары решений

$$\tilde{x}_{is}^{2,3} = \pm\sqrt{\lambda_i + k_i}, \qquad i = \overline{1,l} \qquad (2.7),$$

т.е. появляются в системе (2.3) пары дополнительных стационарных состояний.

Устойчивость стационарных состояний (2.5) и (2.7) системы (2.3) определим по линейному принципу устойчивости [9, 10].

$$\dot{\tilde{x}}_i = \left[-3(\tilde{x}_{is})^2 + \lambda_i + k_i\right]\tilde{x}_i, \qquad i = \overline{1,l} \tag{2.8}$$

Отсюда стационарные состояния канонических координат (2.5) системы (2.8) или (2.3) глобально асимптотически устойчивы, если $\boxed{\qquad\quad}$, $i = \overline{1,l}$, а дополнительные стационарные состояния (2.7), появляющиеся при $\lambda_i + k_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, также будут неглобально асимптотически устойчивыми.

3. Для полной управляемости канонического объекта (1.3.) необходимо и достаточно, по крайней мере, чтобы все последние диагональные элементы матрицы $\tilde{B}_2$, соответствующие N_i- кратным собственным значениям матрицы J при $i = \overline{1,m}$, были отличны от нуля. Исходя из практической целесообразности, далее предположим, что все диагональные элементы матрицы $\tilde{B}_2$ отличены от нуля, т.е. предполагаем, что все канонические координаты $\tilde{x}_i$, $i = \overline{l,l+L}$ непосредственно управляемые.

Подобно (2.1) запишем систему (1.3) в развернутой форме.

$$\dot{\tilde{x}}_i = \lambda_j \tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1} + b_{ii} u_i, \qquad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{l+1,l+L}, \tag{3.1}$$

Компоненты вектора-функции управления u, для $i = \overline{l+1,l+L}$ задаются

$$u_i = \gamma_i(-\tilde{x}_i^3 + k_i\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1}), \qquad i = \overline{l+1,l+L}, \tag{3.2}$$

где γ_i выбираем из условий $b_{ii}\lambda_i = 1$.

С учетом (3.1) и (3.2) систему (1.3) в развернутой форме представим в виде

$$\dot{\tilde{x}}_i = -\tilde{x}_i^3 + (\lambda_j + k_i)\tilde{x}_i, \qquad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{l+1,l+L} \tag{3.3}$$

Стационарные состояния системы (3.3) определяем из уравнений

$$-\tilde{x}_{is}^3 + (\lambda_j + k_i)\tilde{x}_{is} = 0, \qquad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{l+1,l+L} \tag{3.4}$$

Система (3.4) имеет решение

$$\tilde{x}_{is}^{1} = 0, \qquad i = \overline{l+1, l+L} \qquad (3.5)$$

и

$$\tilde{x}_{is}^{2,3} = \pm\sqrt{\lambda_j + k_i}\ , \quad j = \overline{1,m}, \qquad i = \overline{l+1, l+L} \qquad (3.6)$$

Устойчивость стационарных состояний канонических координат (3.5) и (3.6) системы (3.3) определим аналогично как в разделе 2 по линейному принципу устойчивости.

Стационарные состояния канонических координат (3.5) системы (3.3) будут глобально асимптотически устойчивыми, если $\lambda_j + k_i < 0$, $j = \overline{1,n}$, $i = \overline{l+1, l+L}$, а дополнительные стационарные состояния (3.6), появляющиеся при $\lambda_j + k_i > 0$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{j+1, l+L}$, также являются асимптотическим устойчивыми, но не глобально.

4. Для полной управляемости канонического объекта (1.4) с матрицей J^i вида (0.5) необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из парных диагональных элементов b_{ii}, $b_{i+1,i+1}$, $i = \overline{1,2k}$ матрицы $\tilde{B}_3$, соответствующие комплексно-сопряженным собственным значениям матрицы J^i, был отличен от нуля. Справедливость этого утверждения очевидна, но для общности мы предполагаем, что все канонические переменные в системе (1.4) непосредственно управляемы, т.е. предполагаем, что все диагональные элементы матрицы $\tilde{B}_3$ отличены от нуля.

Полученный указанным ранее путем закон управления придает каноническому объекту управления (1.4) предельную устойчивость, и уравнения состояния и стационарные состояния канонических координат соответственно определяются :

$$u_i = \gamma_i(-\tilde{x}_i^3 + k_i\tilde{x}_i + \beta_j\tilde{x}_{i+1}), \qquad j = \overline{1,k}, \qquad i = \overline{j+L+1, n}$$

или

$$u_i = \gamma_i(-\tilde{x}_i^3 + k_i\tilde{x}_i - \beta_j\tilde{x}_{i-1}), \qquad j = 1,k, \qquad i = \overline{l+L+1,n}$$

$$\dot{\tilde{x}}_i = -\tilde{x}_i^3 + (\alpha_j + k_i)\tilde{x}_i, \qquad j = 1,k, \qquad i = \overline{l+L+1,n} \tag{4.1}$$

$$-\tilde{x}_{is}^3 + (\alpha_j + k_i)\tilde{x}_{is} = 0, \qquad j = 1,k, \qquad i = \overline{l+L+1,n}$$

$$\tilde{x}_{is}^1 = 0, \qquad i = \overline{l+L+1,n} \tag{4.2}$$

и

$$\tilde{x}_{is}^{2,3} = \pm\sqrt{\alpha_j + k_i}, \qquad j = 1,k, \qquad i = \overline{l+L+1,n} \tag{4.3}$$

Стационарное состояние (4.2) системы (4.1) будет глобально асимптотическим устойчивым, если $\alpha_j + k_i < 0$, $j = \overline{1,k}$; $i = \overline{l+L+1,n}$, а дополнительные стационарные состояния (4.3), появляющиеся при $\alpha_j + k_i > 0$, $j = \overline{1,k}$; $i = \overline{l+L+1,n}$, будут также асимптотически устойчивыми, но не глобально.

Таким образом, путем выбора закона управления в области канонических переменных в надлежащем виде, в зависимости от собственных значений матрицы объекта управления A, можем придать исходной системе (0.1) свойства предельной устойчивости, т.е. система становится устойчивой при любом изменении параметров.

5. **Пример**. Пусть в уравнении объекта (0.1.)

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 1 \end{Vmatrix}; \qquad B = \begin{Vmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix};$$

Находим корни характеристического уравнения матрицы A

$$|\lambda I - \mathrm{A}| = \lambda^4 + 7\lambda^3 + 21\lambda^2 + 37\lambda + 30$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta = -1 \pm j2, \qquad \lambda_3 = -2, \qquad \lambda_4 = -3;$$

$$P = \begin{Vmatrix} -2 & 6 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{Vmatrix} 0,25 & -0,5 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1,5 & 2,5 & -1 \end{Vmatrix}$$

Преобразованные уравнения состояния записываются в виде

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = -1\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + 0 \cdot u_1$$

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dt} = 2\tilde{x}_1 - 1 \cdot \tilde{x}_2 + 1 \cdot u_2$$

$$\frac{d\tilde{x}_3}{dt} = -2\tilde{x}_3 - 2 \cdot u_3$$

$$\frac{d\tilde{x}_4}{dt} = -3\tilde{x}_4 + 0 \cdot u_4$$

Здесь

$$\tilde{x} = P^{-1}x, \qquad \tilde{A} = P^{-1}AP \quad = \begin{Vmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix}; \qquad \tilde{B} = P^{-1}B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Следовательно, канонические координаты (гармоники) $\tilde{x}_2$ и $\tilde{x}_3$- непосредственно управляемые, а $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_4$ - непосредственно неуправляемые.

Выберем

$$u_1 = u_4 = 0$$
$$u_2 = \gamma_2\left[-\tilde{x}_2^3 + k_2\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_1\right]$$
$$u_3 = \gamma_3(-\tilde{x}_3^3 + k_3\tilde{x}_3)$$

Из условий $\tilde{b}_2\gamma_2 = 1$ и $\tilde{b}_3\gamma_3 = 1$ находим, что $\gamma_2 = 1$ и $\gamma_3 = -\frac{1}{2}$;

Тогда уравнения состояния системы с нелинейным законом управления, заданным в форме структурно устойчивой функции, примет вид

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = -\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2$$
$$\frac{d\tilde{x}_2}{dt} = -\tilde{x}_2^3 + (k_2 - 1)\tilde{x}_2$$
$$\frac{d\tilde{x}_3}{dt} = -\tilde{x}_3^3 + (k_3 - 2)\tilde{x}_3$$
$$\frac{d\tilde{x}_4}{dt} = -2\tilde{x}_4$$

Установившиеся состояния канонических объектов описываются уравнением

$$\begin{cases} -\tilde{x}_{1s} - 2\tilde{x}_{2s} = 0 \\ -\tilde{x}_{2s}^3 + (k_2 - 1)\tilde{x}_{2s} = 0 \\ -\tilde{x}_{3s}^3 + (k_3 - 2)\tilde{x}_{3s} = 0 \\ -2\tilde{x}_{4s} = 0 \end{cases}$$

Отсюда находим стационарные состояния системы

$$\tilde{x}_{1s}^1 = \tilde{x}_{2s}^1 = \tilde{x}_{3s}^1 = \tilde{x}_{4s}^1 = 0$$

$$\tilde{x}_{2s}^{2,3} = \pm\sqrt{k_2 - 1}, \qquad \tilde{x}_{3s}^{2,3} = \pm\sqrt{k_3 - 2}$$

$$\tilde{x}_{1s}^{2,3} = \pm\sqrt{k_2 - 1}, \qquad \tilde{x}_{4s}^{2,3} = 0$$

Стационарные состояния системы $\tilde{x}_{1s}^1 = \tilde{x}_{2s}^1 = \tilde{x}_{3s}^1 = 0$ будет асимптотически устойчивыми при значении коэффициентов усиления $-1 + k_2 < 0$ и $-2 + k_2 < 0$, т.е. при любых значениях $k_2 < 1$ и $k_3 < 2$.

При нарушении этих условий в системе появляются пары устойчивых состояний при $-1 + k_2 > 0$ и $-2 + k_3 > 0$, т.е. при $k_2 > 1$ и .

Список литературы

1. Siliak D.D. Parameter Space Method for Robust Control Design: A Guided Tour // IEEE Trans. On Automatic Control. 1989/ AC -34. N 7.
2. Vidyasagar M. Control System Synthesis: A Factorisation Approach.: The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1985.
3. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения .- М.: Мир, 1980.
4. Томпсон Дж., Майкл Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. - М.: Мир, 1985.
5. Бейсембин М.А. Робастно устойчивые нелинейные системы первого и второго порядка. Труды Института проблем информатики и управления. Алматы, 1996.
6. Бейсенби М.А. Об одном подходе к построению робастной устойчивой системы управления. Материалы Международной научно-практической

конференции. Современные проблемы информатики, управления и создания информационных технологий и систем. Алматы, 1997.

7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
8. Директор С., Рорер. Введение в теорию систем. М.: Мир, 1974.
9. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного.- М.: Мир, 1990.
10. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. /Под ред. В.В.Солодовникова.- М.: Машиностроение. Кн. 1.- 1967.