УДК 517.5

Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев

Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω

В работе выясняется, насколько информативны все линейные функционалы при восстановлении функций из классов H_p^ω. Найдены оптимальные порядки восстановления функций из классов H_p^ω, которые полностью определяются теоремами вложения точно так же, как в случае функциональных классов, гладкость в которых задается числовыми параметрами.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Введение

Пусть $\omega(\delta)$ – непрерывная на $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условиям

$$0=\omega(0)\leqslant\omega(\delta)\leqslant\omega(\delta+\eta)\leqslant\omega(\delta)+\omega(\eta)\quad\text{при всех } 0\leqslant\delta\leqslant\delta+\eta\leqslant 1.$$

Такие функции называют *модулями непрерывности.*

Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$ (причем $L^\infty(0,1)\equiv C[0,1]$) и $f\in L^p(0,1)$. *Модулем непрерывности* в L^p функции f называют

$$\omega_p(\delta;f)=\begin{cases}\displaystyle\sup_{0<h\leqslant\delta}\biggl(\int_0^{1-h}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\biggr)^{1/p} & \text{при } 1\leqslant p<\infty,\\ \displaystyle\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(x)-f(y)| & \text{при } p=\infty,\end{cases}$$

где $\delta\in(0,1]$.

Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности и $1\leqslant p\leqslant\infty$. Через H_p^ω обозначают множество всех функций $f\in L^p(0,1)$ таких, что

$$\omega_p(\delta;f)\leqslant\omega(\delta)$$

при всех $\delta\in(0,1]$.

Имеются различные варианты постановок задач об оптимальном восстановлении, направленные на изучение с единых позиций задач теории приближений и вычислительной математики (см., например, монографии В. М. Тихомирова [1], К. И. Бабенко [2], В. Н. Темлякова [3], Н. П. Корнейчука [4], статьи К. Ю. Осипенко [5], К. Ю. Осипенко и К. Вилдероттера [6], С. Фишера и Ч. Митчелли [7], [8] и имеющуюся в них обширную библиографию).

Сформулируем общую задачу восстановления в редакции из [9]. Пусть даны нормированные пространства X и Y числовых функций, определенных на множествах Ω и Ω_1 соответственно. Пусть $F\subset X$ и отображение $Tf=u(y;f)$ действует из F в Y.

Для каждого целого $N\geqslant 1$ через $\big\{(l^{(N)};\varphi_N)\big\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)};\varphi_N)$, состоящих из набора N функционалов $l^{(N)}=(l_1,\dots,l_N)$, $l_j(\,\cdot\,)\colon F\mapsto C$, $j=1,\dots,N$ (в случае требования линейности l_j речь будет идти о линейности на линейной оболочке F), и функции

$$\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N;y)\colon C^N\times\Omega_1\mapsto C,$$

и пусть $D_N\subset\big\{(l^{(N)};\varphi_N)\big\}$.

Задача заключается в получении оценок сверху и оценок снизу (желательно, совпадающих с точностью до констант) для величины

$$\delta_N(D_N;T,F)_Y=\inf_{(l^{(N)};\varphi_N)\in D_N}\ \sup_{f\in F}\big\|u(\,\cdot\,;f)-\varphi_N\big(l_1(f),\dots,l_N(f);\,\cdot\,\big)\big\|_Y \tag{1}$$

и в указании пары $(l^{(N)};\varphi_N)$ из D_N, реализующей оценку сверху.

Конкретизируя в (1) пространства X и Y, классы F ($F\subset X$), операторы T и множества D_N, получаем различные постановки задач.

В частности, при $D_N=\Lambda_N\times\{\varphi_N\}$ получаем случай, согласно которому восстановление производится по данному множеству функционалов Λ_N и по всевозможным алгоритмам φ_N, и, тем самым, погрешность зависит только от Λ_N; соответствующая величина δ_N носит специальное название *информативная мощность множества функционалов* Λ_N (это определение дано в [9], см. также [10]–[12]).

В настоящей работе изучается задача вычисления информативной мощности всевозможных линейных функционалов, определенных на линейной оболочке H_p^ω, при восстановлении в метрике L^q функций из классов H_p^ω.

В случае $1\leqslant p<q\leqslant\infty$ необходимые (и достаточные) для корректности этой конкретизации общей задачи восстановления условия вложения были даны П. Л. Ульяновым в следующих теоремах фундаментального значения.

Теорема A. *Пусть даны числа $1\leqslant p<q<\infty$ и функция $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Тогда для того чтобы имело место вложение $H_p^\omega\subset L^q$, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{q/p-2}\omega^q\biggl(\frac1n\biggr)<\infty.$$

Теорема B. *Пусть даны числа $1\leqslant p<\infty$ и функция $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Тогда для того чтобы имело место вложение $H_p^\omega\subset C$, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{1/p-1}\omega\biggl(\frac1n\biggr)<\infty.$$

Первый из этих критериев был получен в [13], а второй – в [14].

Таким образом, здесь в случае

$$X = L^p, \quad Y = L^q, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant \infty, \qquad F = H_p^\omega$$

изучается задача восстановления функций, т.е. случай $Tf = f$. В качестве D_N берется множество L_N всех пар $(l^{(N)}; \varphi_N)$ таких, что $l_1(f), \dots, l_N(f)$ суть линейные функционалы на линейной оболочке H_p^ω, а φ_N – произвольная функция такая, что $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y) \in L^q$ как функция от y при любых $\tau_1, \dots, \tau_N$.

Тем самым, основной объект изучения в данной работе есть величина

$$\delta_N(D_N) = \inf_{(l^{(N)};\varphi_N)\in D_N} \sup_{f\in H_p^\omega} \big\| f(x) - \varphi_N\big(l_1(f), \dots, l_N(f); x\big)\big\|_{L^q(0,1)} \tag{2}$$

при $D_N = \{l^{(N)}\} \times \{\varphi_N\}$.

Отметим, что одними из первых изучаемую здесь конкретизацию (2) общей задачи (1) в случае, когда класс F составлен из аналитических функций, исследовали С. Фишер и Ч. Митчелли (см. [7], [8]), сама же постановка задачи (1) при $D_N = \{l^{(N)}\} \times \{\varphi_N\}$ является частным случаем общей постановки, предложенной К. Ю. Осипенко [5].

С позиции оценки результатов настоящей статьи важно отметить (см. [12], где величина (1) была названа *компьютерным* (*вычислительным*) *поперечником*, и [9], [15]), что линейный поперечник, поперечник Фурье (ортопоперечник), частичные суммы рядов Фурье по всевозможным ортонормированным системам (включая системы, состоящие из всплесков) и разложения по базисам, линейные методы суммирования рядов Фурье при соответствующим выборе D_N также содержатся как в данной конкретизации (2), так и в общем определении (1), причем в каждом из указанных случаев для (2) выполнено неравенство

$$\delta_N(D_N) \geqslant \delta_N\big(\{l^{(N)}\} \times \{\varphi_N\}\big). \tag{3}$$

В общем случае в саму постановку задачи восстановления вовлечены понятия и результаты из разных областей математики – теории функций и функционального анализа, вычислительной математики и информатики, теории вероятностей и т.д. Так, необходимым и достаточным условием вложения периодических классов Соболева $W_p^r(0,1)^s \subset L^q(0,1)^s$, $1 < p < q < \infty$, является условие $r/s > 1/p - 1/q$. Как нами было показано (см. [10]), оптимальная оценка восстановления в метрике $L^q(0,1)^s$ функций из классов $W_p^r(0,1)^s$ по всем линейным функционалам равна $\delta_N \asymp N^{-(r/s-(1/p+1/q))}$, тем самым, в случае классов Соболева (а также и для многих других классов, в которых гладкость определяется числовыми параметрами) именно точное условие корректности постановки задачи определяет оптимальный порядок приближения. Здесь мы показываем, что и в случае классов, гладкость в которых задается через функции, теоремы вложения определяют оптимальные погрешности восстановления.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть даны числа* $2 \leqslant p < q < \infty$ *и модуль непрерывности* $\omega(\delta)$ *такие, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q/p-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{(l^{(N)};\varphi_N)\in L_N} \sup_{f\in H_p^\omega} \left\|f(x) - \varphi_N\big(l_1(f),\dots,l_N(f);x\big)\right\|_{L^q} \asymp \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{q/p-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/q}$$

с постоянными, не зависящими от $N \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Пусть даны число* $2 \leqslant p < \infty$ *и модуль непрерывности* $\omega(\delta)$ *такие, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{(l^{(N)};\varphi_N)\in L_N} \sup_{f\in H_p^\omega} \left\|f(x) - \varphi_N\big(l_1(f),\dots,l_N(f);x\big)\right\|_{L^\infty} \asymp \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{1/p-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

с постоянными, не зависящими от $N \in \mathbb{N}$.

Оценки снизу в теоремах 1 и 2 означают, что при любом выборе N функционалов, линейных на линейной оболочке H_p^ω, и при любом выборе алгоритма φ_N, в совокупности составляющих вычислительный агрегат $\varphi_N\big(l_1(f),\dots,l_N(f)\big)$ (включая все агрегаты из (3)), восстановить всякую функцию f из класса H_p^ω лучше, чем указано в теоремах 1 и 2, нельзя.

Оценки сверху в теоремах 1 и 2 реализуются на конкретных операторах восстановления. Именно, в случае теоремы 1 роль искомых операторов восстановления выполняют частичные суммы ряда Фурье–Хаара, где числовую информацию об f поставляют ее коэффициенты Фурье–Хаара. А в случае теоремы 2 оценка сверху следует из следующей оценки погрешностей тригонометрических интерполяционных многочленов Лагранжа с равноотстоящими узлами в равномерной метрике, полученной К. И. Осколковым [16].

Пусть $1 < p < \infty$. *Если* $f \in L^p(0,1)$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1}\omega_p(1/n;f) < \infty$ (*тогда* f *эквивалентна некоторой непрерывной функции, за которой сохраним то же обозначение*), *то*

$$\left\|f(x) - \frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} f\left(\frac{k}{2N+1}\right)\frac{\sin(2N+1)\pi\big(x-\frac{k}{2N+1}\big)}{\sin\pi\big(x-\frac{k}{2N+1}\big)}\right\|_{C[0,1]} \ll \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{1/p-1}\omega_p\left(\frac{1}{n};f\right).$$

В [16] также получена оценка сверху погрешностей восстановления функций по их значениям в точках в терминах наилучших приближений тригонометрическими многочленами; точнее, сначала были получены оценки через наилучшие приближения, а затем, как следствие, и через модуль непрерывности.

Такого же сорта оценки, в их числе и двусторонние, были получены в работах [17]–[20].

§ 2. Необходимые определения и вспомогательные утверждения

Приведем вначале определение системы Хаара $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см., например, [21]); в дальнейшем вместо "ряды (коэффициенты) Фурье по системе Хаара" будем писать "ряды (коэффициенты) Фурье–Хаара".

Любое целое положительное число $n \geqslant 2$ можно однозначно представить в виде $n=2^k+j$, где $k=0,1,\dots$, а $j=1,\dots,2^k$. Система Хаара определяется следующим образом ($x\in[0,1]$): $\chi_1(x)\equiv 1$; при $n\geqslant 2$ полагают

$$\chi_n(x)=2^{k/2}, \qquad \text{если } x\in\left(\frac{2j-2}{2^{k+1}},\frac{2j-1}{2^{k+1}}\right),$$
$$\chi_n(x)=-2^{k/2}, \quad \text{если } x\in\left(\frac{2j-1}{2^{k+1}},\frac{2j}{2^{k+1}}\right);$$

во внутренних точках разрыва полагают $\chi_n(x)=\frac{1}{2}\bigl(\chi_n(x+0)+\chi_n(x-0)\bigr)$, в граничных точках отрезка $[0,1]$ функции χ_n определяются по непрерывности.

Коэффициенты Фурье–Хаара функции $f\in L(0,1)$ будем обозначать через

$$c_n(f)=\int_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt,$$

а N-ю частичную сумму ряда Фурье–Хаара – через

$$S_N(x)\equiv S_N(x;f)=\sum_{n=1}^{N}c_n(f)\chi_n(x).$$

Как показал С. Б. Стечкин [22], если $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, то найдется выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega_1(\delta)$ такой, что $\omega(\delta)\leqslant\omega_1(\delta)\leqslant 2\omega(\delta)$ при всех $0\leqslant\delta\leqslant 1$. Таким образом, можно считать, что модуль непрерывности является выпуклой вверх функцией; отсюда, в частности, следует, что $\omega(\delta)/\delta$ – невозрастающая функция. Этими замечаниями мы будем пользоваться в дальнейшем без каких-либо напоминаний.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть $f\in L^q(0,1)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Тогда для всякого $N\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\bigl\|f(x)-S_N(x;f)\bigr\|_q\leqslant 24\omega_q\biggl(\frac{1}{N}\,;f\biggr).$$

Эта лемма при $q=\infty$ доказана Б. Секефальви-Надем [23], а при $1\leqslant q<\infty$ – П. Л. Ульяновым в [21].

Лемма 2. *Пусть* $f \in L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < q < \infty$. *Тогда для всякого* $N \in \mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$\omega_q\left(\frac{1}{N}\,;f\right) \ll \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{q/p-2}\omega_p^q\left(\frac{1}{n}\,;f\right)\right)^{1/q},$$

$$\omega_\infty\left(\frac{1}{N}\,;f\right) \ll \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{1/p-1}\omega_p\left(\frac{1}{n}\,;f\right).$$

Первое из приведенных в лемме 2 неравенств доказано П. Л. Ульяновым [13], а второе – В. А. Андриенко [24].

Лемма 3. *Пусть даны модуль непрерывности* $\omega(\delta)$ *такой, что* $\omega(\delta)/\delta \uparrow \infty$ *при* $\delta \downarrow 0$, *числа* $\alpha \geqslant 1$, $\beta \in (1-\alpha, 1)$, *целое неотрицательное* M *такое, что* $M\omega(1/M) > 2\omega(1)$.

Тогда существуют числовая последовательность $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и последовательность целых положительных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такие, что*:

1) $B_n \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty$, $B_n \leqslant \omega(1/n)$ *при всех* $n \geqslant 1$;
2) $n_{k+1} > 2n_k$, $B_{n_{k+1}} \leqslant \frac{1}{2}B_{n_k}$ *при всех* $k \geqslant 1$;
3) $\sum_{n=1}^{N} B_n \leqslant 3N\omega(1/N)$ *при всех* $N = 1, 2, \ldots$;
4) *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{1-\beta}B_{n_k}^{\alpha} \geqslant c(\alpha,\beta,\omega)\sum_{n=M}^{\infty} n^{-\beta}\omega^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Мы будем пользоваться конструкцией С. Б. Стечкина с изменениями, предложенными В. А. Андриенко [25] и П. Л. Ульяновым [13].

Положим $n_0 = 0$, $n_1 = M$, и если $n_1 < \cdots < n_k$, $k \geqslant 1$, уже выбрали, то положим m_{k+1} равным наименьшему из чисел N, для которых $N\omega(1/N) > 2n_k\omega(1/n_k)$. Это всегда возможно, поскольку последовательность $N\omega(1/N)\uparrow\infty$ при $N \uparrow \infty$. Таким образом,

$$n\omega\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 2n_k\omega\left(\frac{1}{n_k}\right), \qquad n_k \leqslant n < m_{k+1}, \tag{4}$$

$$m_{k+1}\omega\left(\frac{1}{m_{k+1}}\right) > 2n_k\omega\left(\frac{1}{n_k}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Так как $\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, то $n\omega(1/n) \leqslant 2n_k\omega(1/n_k)$ при $n_k \leqslant n < 2n_k$, поэтому (см. (4), (5))

$$m_{k+1} > 2n_k. \tag{6}$$

Если

$$\omega\left(\frac{1}{m_{k+1}}\right) \leqslant \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{n_k}\right), \tag{7}$$

то полагаем

$$n_{k+1} = m_{k+1}. \tag{8}$$

Если же $\omega(1/m_{k+1}) > \frac{1}{2}\omega(1/n_k)$, то полагаем n_{k+1} равным наименьшему среди всех целых N, для которых $\omega(1/N) \leqslant \frac{1}{2}\omega(1/n_k)$. Очевидно, что в этом случае $n_{k+1} > m_{k+1} > 2n_k$, $\omega(1/n_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2}\omega(1/n_k)$ и

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{1}{n_k}\right), \qquad n_k \leqslant n < n_{k+1}. \tag{9}$$

Положим $B_n = \omega(1/n_k)$, $n_{k-1} < n \leqslant n_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Построенные последовательности $\{n_k\}$ и $\{B_n\}$ обладают нужными свойствами. Докажем свойство 1). Монотонность последовательности B_n следует из монотонности последовательности $\omega(1/n)$. Далее, если $n_{k-1} < n \leqslant n_k$, $k = 1, 2, \dots$, то $B_n = \omega(1/n_k) \leqslant \omega(1/n)$. Свойство 1) доказано.

Докажем свойство 2). Из построения n_k (см. (4)–(7)) следует, что $n_{k+1} \geqslant 2n_k$ при всех $k \geqslant 1$ и $B_{n_{k+1}} = \omega(1/n_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2}\omega(1/n_k) = \frac{1}{2}B_{n_k}$. Свойство 2) доказано.

Докажем свойство 3). Если $N \leqslant M$, то

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} B_n = \omega\left(\frac{1}{M}\right) \leqslant \omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

Если же $N > M$, то выберем $t \geqslant 2$ так, чтобы $n_{t-1} < N \leqslant n_t$. Тогда из определения $\{B_n\}$ следует

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} B_n &= \sum_{n=1}^{n_{t-1}} B_n + \sum_{n=n_{t-1}+1}^{N} B_n = \sum_{k=1}^{t-1}\ \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} B_n + \sum_{n=n_{t-1}+1}^{N} B_n \\
&= \sum_{k=1}^{t-1}\ \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} B_{n_k} + \sum_{n=n_{t-1}+1}^{N} \omega\left(\frac{1}{n_t}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{t-1}(n_k - n_{k-1})B_{n_k} + (N - n_{t-1})\omega\left(\frac{1}{n_t}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{t-1} n_k B_{n_k} + N\omega\left(\frac{1}{n_t}\right).
\end{aligned}$$

Заметим сначала, что $\omega(1/n_t) \leqslant \omega(1/N)$.

По определению чисел n_k и B_n имеем

$$n_{k+1}B_{n_{k+1}} = n_{k+1}\omega\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) > 2n_k\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) = 2n_k B_{n_k},$$

поэтому

$$n_k B_{n_k} \leqslant \frac{1}{2}\,n_{k+1}B_{n_{k+1}} \leqslant \dots \leqslant \frac{1}{2^{t-1-k}}\,n_{t-1}B_{n_{t-1}}, \qquad k = 1, 2, \dots, t-1.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{t-1} n_k B_{n_k} \leqslant n_{t-1}B_{n_{t-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{t-2}}\right) \leqslant 2n_{t-1}B_{n_{t-1}},$$

а в силу того, что $\omega(\delta)/\delta \uparrow$ при $\delta \downarrow 0$ и $N > n_{t-1}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{t-1} n_k B_{n_k} \leqslant 2N\omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

Таким образом, $\sum_{n=1}^{N} B_n \leqslant 3N\omega(1/N)$. Свойство 3) доказано.

Перейдем теперь к доказательству свойства 4). Так как $\alpha+\beta>1$, то при $n_{k+1}=m_{k+1}$ (см. (2)) и $k\geqslant 1$

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}\left(n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha\leqslant 2^\alpha\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}\left(n_k\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\right)^\alpha$$
$$\leqslant 2^\alpha\left(n_k\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\right)^\alpha\sum_{n=n_k}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}\leqslant C_1(\alpha,\beta)n_k^{1-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n_k}\right). \tag{10}$$

Если же $n_{k+1}>m_{k+1}$ (см. (9)), то

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant\omega^\alpha\left(\frac{1}{n_k}\right)\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}n^{-\beta}\leqslant 2^\alpha\omega^\alpha\left(\frac{1}{n_{k+1}-1}\right)\sum_{n=1}^{n_{k+1}}n^{-\beta}$$
$$\leqslant C_2(\alpha,\beta)\omega^\alpha\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right)n_{k+1}^{1-\beta}, \tag{11}$$

так как $\beta<1$ и $\omega(1/(n_{k+1}-1))\leqslant\omega(2/n_{k+1})\leqslant 2\omega(1/n_{k+1})$.

Из (10) и (11) вытекает, что

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant C_3(\alpha,\beta)\left\{\omega^\alpha\left(\frac{1}{n_k}\right)n_k^{1-\beta}+\omega^\alpha\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right)n_{k+1}^{1-\beta}\right\}$$

для всех $k=1,2,\dots$. Стало быть,

$$\sum_{n=M}^{\infty} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant C(\alpha,\beta)\sum_{k=1}^{\infty}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n_k}\right)n_k^{1-\beta}.$$

Лемма 3 полностью доказана.

В лемме 4 представлен метод получения оценок снизу.

Лемма 4. *Пусть даны линейное нормированное пространство Y числовых функций, симметричный класс функций F (т.е. если $f\in F$, то $(-f)\in F$), определенных на $[0,1]$, Λ – фиксированное множество линейных функционалов, определенных на классе F. Для каждого целого положительного N через Λ_N обозначим множество пар из всевозможных наборов N функционалов $l_1,\dots,l_N\in\Lambda$ и функций $\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_N,x)\colon C^N\times[0,1]\to C$. Предположим, что для некоторой последовательности положительных чисел $\{a_N\}_{N=1}^\infty$ выполнено условие: для каждого целого положительного числа N и для каждого набора линейных функционалов $l_1,\dots,l_N\in\Lambda$ найдется функция $f=f_{l_1,\dots,l_N}\in F$ такая, что*

$$\|f\|_Y\geqslant a_N,\qquad l_1(f)=\dots=l_N(f)=0.$$

Тогда выполнено соотношение

$$\delta_N(\Lambda_N,F)_Y=\inf_{(l^{(N)},\varphi_N)\in\Lambda_N}\sup_{f\in F}\bigl\|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);x)\bigr\|_Y\geqslant a_N.$$

Доказательство основано на применении неравенства треугольника.

Лемма 4 показывает, что изучаемая здесь величина δ_N снизу оценивается значением соответствующего поперечника по Гельфанду (см., например, [6]).

Лемма 5. *Пусть* $2 < q < +\infty$, *функция* $f \in L^q(0,1)$, *последовательность* $\{n_j\}_{j=0}^{\infty}$ *такова, что для всех* j *выполнено* $n_{j+1} \geqslant 2n_j$ (*тем самым,* $\{n_j\}_{j=0}^{\infty}$ *лакунарная последовательность*) *и* $n_0 = 0$, $n_1 = 1$. *Положим*

$$\rho_j(f,x) = \sum_{|m|=n_{j-1}}^{n_j-1} \widehat{f}(m)e^{2\pi imx}, \qquad j = 1,2,\dots,$$

где $\widehat{f}(m) = \displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-2\pi imx}\,dx$ – *тригонометрические коэффициенты Фурье* f.

Тогда

$$\|f\|_q^q \gg \sum_{j=1}^{\infty} \|\rho_j(f)\|_\infty^q n_j^{-1}.$$

Доказательство. В силу неравенства Литтлвуда–Пэли (см., например, [26; п. 1.5.2])

$$\|f\|_q^q = \int_0^1 |f(x)|^q\,dx \asymp \int_0^1 \biggl(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_j(f,x)|^2\biggr)^{q/2} dx. \tag{12}$$

Применяя неравенство ($\theta > 1$, $b_j \geqslant 0$)

$$\biggl(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\biggr)^{\theta} \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{\theta}$$

в случае $b_j = |\rho_j(f)|^2$, $\theta = q/2 > 1$, получаем

$$\biggl(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_j(f,x)|^2\biggr)^{q/2} \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_j(f,x)|^q.$$

Интегрируя полученное неравенство, продолжим оценку (12):

$$\|f\|_q^q \gg \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 |\rho_j(f,x)|^q\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} \|\rho_j(f)\|_q^q.$$

Так как $\rho_j(f)$ является тригонометрическим многочленом порядка не выше n_j, то в силу неравенства разных метрик Никольского [26; п. 3.4.3] имеем

$$\|\rho_j(f)\|_\infty \ll n_j^{1/q}\|\rho_j(f)\|_q,$$

или

$$\|\rho_j(f)\|_q \gg \|\rho_j(f)\|_\infty n_j^{-1/q}.$$

Стало быть,

$$\|f\|_q^q \gg \sum_{j=1}^{\infty} \|\rho_j(f)\|_\infty^q n_j^{-1}.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть даны целые неотрицательные числа N, $u \geqslant 2N$ и v.*

Тогда для произвольных линейных функционалов $l_1, \ldots, l_N$, определенных по крайней мере на множестве всех тригонометрических многочленов со спектром в $[v+1, v+u]$, найдется тригонометрический многочлен $\psi(x)$ со спектром в $[v+1, v+u]$ такой, что

$$l_1(\psi) = \cdots = l_N(\psi) = 0, \qquad \|\psi\|_\infty \asymp u, \quad \|\psi\|_2^2 \asymp u.$$

Эта лемма есть частный случай леммы B из [10].

Лемма 7. *Пусть даны целое неотрицательное число N, последовательность целых чисел $\{n_j\}_{j=0}^{\infty}$ такая, что для всех $j \geqslant 1$ выполнено $n_{j+1} \geqslant 2n_j$, $n_1 \geqslant 3N$, $n_0 = 0$, последовательность $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, целое число $a > 1$.*

Тогда для произвольных линейных функционалов $l_1, \ldots, l_N$, определенных по крайней мере на множестве всех тригонометрических многочленов, найдется последовательность тригонометрических многочленов $\{\psi(x)\}_{j=1}^{a}$ со спектром в $[n_{j-1}, n_j - 1]$ таких, что

$$l_1(\psi_j) = \cdots = l_N(\psi_j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, a,$$
$$\Big\| \sum_{j=1}^{a} A_j \psi_j \Big\|_\infty \gg \sum_{j=1}^{a} A_j n_j, \qquad \|\psi_j\|_2^2 \ll n_j.$$

Замечание. Константы в неравенствах из лемм 6 и 7 не зависят от u и v, N и $l_1, \ldots, l_N$. Также в леммах 6 и 7 от функционалов требуется только линейность, непрерывность относительно какой-либо из используемых норм не обязательна.

Доказательство леммы 7. Положим $t_j = n_j - n_{j-1} - N$. Тогда $t_j \asymp n_j$.

Для каждого $j = 1, \ldots, a$ из условий

$$l_1\Big(\sum_{m=n_{j-1}}^{n_j - 1} c_m e^{2\pi i m x}\Big) = \cdots = l_N\Big(\sum_{m=n_{j-1}}^{n_j - 1} c_m e^{2\pi i m x}\Big) = 0$$

составим систему из N линейных однородных уравнений

$$\sum_{m=n_{j-1}}^{n_j - 1} c_m l_1(e^{2\pi i m x}) = \cdots = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j - 1} c_m l_N(e^{2\pi i m x}) = 0 \tag{13}$$

относительно $n_j - n_{j-1}$ неизвестных $\{c_m\}_{m=n_{j-1}}^{n_j - 1}$.

Поскольку ранг r системы (13) не больше числа N уравнений, а число неизвестных есть $n_j - n_{j-1}$, то фундаментальная система решений (13) состоит из $n_j - n_{j-1} - r \geqslant n_j - n_{j-1} - N = t_j$ решений (см., например, [27; § 12]).

Тогда соответствующие им многочлены

$$d_j^{(1)}(x) = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j - 1} c_{m,j}^{(1)} e^{2\pi i m x}, \qquad \ldots, \qquad d_j^{(t_j)}(x) = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j - 1} c_{m,j}^{(t_j)} e^{2\pi i m x}$$

также линейно независимы и

$$l_1(d_j^{(1)}) = \dots = l_N(d_j^{(1)}) = \dots = l_1(d_j^{(t_j)}) = \dots = l_N(d_j^{(t_j)}) = 0.$$

Используя метод ортогонализации Гильберта–Шмидта, получаем последовательность ортонормированных функций (тригонометрических многочленов со спектром в $[n_{j-1}, n_j - 1]$)

$$b_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{t_j} \alpha_{k,j}^{(1)} d_j^{(k)}, \qquad \dots, \qquad b_j^{(t_j)} = \sum_{k=1}^{t_j} \alpha_{k,j}^{(t_j)} d_j^{(k)}.$$

Отсюда в силу линейности функционалов $l_1, \dots, l_N$ получаем

$$l_1(b_j^{(1)}) = \dots = l_N(b_j^{(1)}) = \dots = l_1(b_j^{(t_j)}) = \dots = l_N(b_j^{(t_j)}) = 0. \tag{14}$$

Положим

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{a} A_j \bigl(|b_j^{(1)}(x)|^2 + \dots + |b_j^{(t_j)}(x)|^2\bigr).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Phi(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{a} A_j \biggl(\int_0^1 |b_j^{(1)}(x)|^2\,dx + \dots + \int_0^1 |b_j^{(t_j)}(x)|^2\,dx\biggr)\\ &= \sum_{j=1}^{a} A_j t_j \asymp \sum_{j=1}^{a} A_j n_j.\end{aligned}$$

Поэтому найдется такая точка $\xi \in [0,1]$, что $\Phi(\xi) \asymp \sum_{j=1}^{a} A_j n_j$. Положим $\psi_j(x) = \overline{b_j^{(1)}(\xi)} b_j^{(1)}(x) + \dots + \overline{b_j^{(t_j)}(\xi)} b_j^{(t_j)}(x)$ (как обычно, $\overline{z}$ есть комплексно сопряженное к $z \in C$). Тогда

$$\Bigl\| \sum_{j=1}^{a} A_j \psi_j \Bigr\|_\infty \geqslant \sum_{j=1}^{a} A_j \psi_j(\xi) = \Phi(\xi) \asymp \sum_{j=1}^{a} A_j n_j.$$

Далее, в силу ортонормированности функций $b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(t_j)}$, равенства Парсеваля и неравенства разных метрик Никольского [26; п. 3.4.3] имеем

$$\|\psi_j\|_2^2 = |b_j^{(1)}(\xi)|^2 + \dots + |b_j^{(t_j)}(\xi)|^2 = \psi_j(\xi) \leqslant \|\psi_j\|_\infty \ll n_j^{1/2} \|\psi_j\|_2,$$

откуда $\|\psi_j\|_2 \ll n_j^{1/2}$.

Выполнение равенств

$$l_1(\psi_j) = \dots = l_N(\psi_j) = 0, \qquad j = 1, \dots, a,$$

следует из (14), линейности функционалов $l_1, \dots, l_N$ и определения функций ψ_j.

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Если последовательность функций*

$$f_j(x) = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} a_m \cos 2\pi m x$$

удовлетворяет условиям $\|f_j\|_2 \asymp n_j^{1/2}$, $\|f_j\|_\infty \asymp n_j$, *то при* $2 \leqslant p \leqslant \infty$ *имеют место неравенства* $\|f_j\|_p \asymp n_j^{1-1/p}$.

Доказательство. Воспользуемся два раза неравенством разных метрик Никольского [26; п. 3.4.3]:

$$\|f_j\|_p \ll n_j^{1/2-1/p}\|f_j\|_2 \asymp n_j^{1/2-1/p} n_j^{1/2} = n_j^{1-1/p}, \qquad n_j \asymp \|f_j\|_\infty \ll n_j^{1/p}\|f_j\|_p.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть даны модуль непрерывности* $\omega(\delta)$, *числа* α *и* β. *Тогда имеет место двусторонняя оценка*

$$\sum_{n=T+1}^{\infty} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \asymp \sum_{n=8T+1}^{\infty} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right)$$

с постоянными, не зависящими от $T \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{n=T+1}^{8T} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \asymp T^{1-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{T}\right) \asymp \sum_{n=8T+1}^{9T} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{n=T+1}^{\infty} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=T+1}^{9T} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=9T+1}^{\infty} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\asymp \sum_{n=8T+1}^{9T} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=9T+1}^{\infty} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=8T+1}^{\infty} n^{-\beta}\omega^\alpha\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательства основных результатов

3.1. Оценка сверху. Пусть дано целое положительное число N. Определим функционалы $l_1(f) = c_1(f)$, …, $l_N(f) = c_N(f)$ – коэффициенты Фурье–Хаара и функцию $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; x) = \sum_{n=1}^N z_n \chi_n(x)$ – многочлен по системе Хаара. Тогда

$$\varphi_N\bigl(l_1(f), \dots, l_N(f); x\bigr) = \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\chi_n(x) = S_N(f; x)$$

– частичная сумма ряда Фурье–Хаара функции f.

Поэтому для $f \in H_p^\omega$ в силу лемм 1 и 2 получаем

$$\big\|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\big\|_q \ll \omega_q\left(\frac{1}{n}\,; f\right) \ll \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{q/p-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/q},$$

$$\big\|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\big\|_\infty \ll \omega_\infty\left(\frac{1}{n}\,; f\right) \ll \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{1/p-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

В силу произвольности функции $f \in H_p^\omega$, для которой по определению класса выполнено неравенство $\omega_p(\delta; f) \leqslant \omega(\delta)$, получаем оценки сверху в теоремах 1 и 2.

3.2. Оценка снизу. Рассмотрим сначала случай, когда $\omega(\delta)/\delta$ ограничена, т.е. когда $\omega(\delta) \asymp \delta$. В этом случае класс H_p^ω содержит пространство Соболева $W_p^1[0,1]$. Для $W_p^1[0,1]$ в [10] нами был найден точный порядок при $2 \leqslant p < q \leqslant \infty$:

$$\delta_N(L_N, Tf = f, W_p^1)_{L^q} \asymp N^{-1+1/p-1/q}.$$

Легко проверить, что при $\omega(\delta) \asymp \delta$ имеют место соотношения

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{q/p-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/q} \asymp N^{-1+1/p-1/q}$$

в случае $2 \leqslant p < q < \infty$, а в случае $q = \infty$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{1/p-1}\omega\left(\frac{1}{n}\right) \asymp N^{-1+1/p}.$$

Тем самым, в случае, когда $\omega(\delta)/\delta$ ограничена, оценки снизу в теоремах 1 и 2 доказаны.

Перейдем теперь к случаю, когда $\omega(\delta)/\delta$ не ограничена.

Пусть даны число N и N линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$.

Докажем сначала оценку снизу в теореме 1. Пусть число n такое, что $2^{n-1} < N \leqslant 2^n$. Положим $M = 2^{n+2} \in [4N, 8N]$.

Пусть числа $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(n_0 = 0)$ и $\{B_n\}$ найдены по лемме 3 в случае $\alpha = q$, $\beta = 2 - q/p$. Определим целое число $a > 1$ так, что

$$\sum_{j=1}^{a} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q,$$

если ряд $\sum_{j=1}^{a} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q$ сходится, и

$$\sum_{j=1}^{a} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q \geqslant \sum_{j=M}^{\infty} n^{q/p-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right)$$

в противном случае.

В силу леммы 6, примененной при $u = n_j - n_{j-1}$, $v = n_{j-1} - 1$, если $j \geqslant 2$, и $v = 1$, если $j = 1$, найдутся функции ($n_1 = M$)

$$\psi_1(x) = \sum_{m=2}^{n_1-1} a_m \cos 2\pi m x, \qquad \psi_j(x) = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} a_m \cos 2\pi m x, \quad j = 2, \dots, a,$$

такие, что $\|\psi_j\|_2^2 \asymp \|\psi_j\|_\infty \asymp n_j$ и $l_1(\psi_j) = \dots = l_N(\psi_j) = 0$.

Положим теперь

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{a} n_j^{1/p-1} B_{n_j} \psi_j(x);$$

тогда $l_1(\psi) = \dots = l_N(\psi) = 0$.

Пусть, как обычно, через $E_k(\psi)_p$ обозначено наилучшее приближение функции ψ в метрике L^p тригонометрическими многочленами порядка не выше k. Оценим сверху $E_k(\psi)_p$.

Очевидно, что для целого k найдется целое r такое, что $n_r \leqslant k < n_{r+1}$.

Если $r \geqslant 1$, то, заметив, что $\sum_{j=1}^{r} n_j^{1/p-1} B_{n_j} \psi_j(x)$ есть тригонометрический многочлен порядка не выше $n_r - 1$, получаем

$$\begin{aligned} E_k(\psi)_p &\leqslant E_{n_r-1}(\psi)_p \leqslant \bigg\| \sum_{j=1}^{a} n_j^{1/p-1} B_{n_j} \psi_j(x) - \sum_{j=1}^{r} n_j^{1/p-1} B_{n_j} \psi_j(x) \bigg\|_p \\ &\leqslant \sum_{j=r+1}^{a} n_j^{1/p-1} B_{n_j} \|\psi_j\|_p \ll \sum_{j=r+1}^{a} n_j^{1/p-1} B_{n_j} n_j^{1-1/p} \\ &= \sum_{j=r+1}^{a} B_{n_j} \leqslant 2 B_{n_{r+1}} \leqslant 2 B_k. \end{aligned}$$

Если же $r < 1$, т.е. $r = 0$, то аналогично получаем

$$E_k(\psi)_p \leqslant \|\psi\|_p \ll B_{n_1} \ll B_k.$$

Таким образом, $E_k(\psi)_p \ll B_k$ для всех k.

Отсюда в силу обратной теоремы теории приближений (см. [28; п. 6.1]) и п. 3) леммы 3 имеем

$$\omega_p\left(\frac{1}{m}, \psi\right) = O\left(m^{-1} \sum_{k=1}^{m} B_k\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right),$$

т.е. $c \cdot \psi \in H_p^\omega$ для некоторого числа c.

Если ряд $\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q$ сходится, то, применяя последовательно леммы 5 и 3, получаем

$$\begin{aligned} \|\psi\|_q^q &\gg \sum_{j=1}^{a} n_j^{q/p-q} B_{n_j}^q \|\psi_j\|_\infty^q n_j^{-1} \gg \sum_{j=1}^{a} n_j^{q/p-q+q-1} B_{n_j}^q \\ &= \sum_{j=1}^{a} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q \gg \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q \gg \sum_{n=M}^{\infty} n^{q/p-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Если же ряд $\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q$ расходится, то, применяя лемму 5, получаем

$$\|\psi\|_q^q \gg \sum_{j=1}^{a} n_j^{q/p-q} B_{n_j}^q \|\psi_j\|_\infty^q n_j^{-1} \gg \sum_{j=1}^{a} n_j^{q/p-q+q-1} B_{n_j}^q$$
$$= \sum_{j=1}^{a} n_j^{q/p-1} B_{n_j}^q \geqslant \sum_{n=M}^{\infty} n^{q/p-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, в любом случае

$$\|\psi\|_q^q \gg \sum_{n=M}^{\infty} n^{q/p-2} \omega^q\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далее, применяя лемму 9, затем лемму 4, получаем оценку снизу в теореме 1.

Перейдем теперь к оценке снизу в теореме 2. Пусть числа $\{n_k\}$, $\{B_n\}$ найдены по лемме 3 в случае $\alpha = 1$, $\beta = 1 - 1/p$. Определим целое число $a > 1$ так, что

$$\sum_{j=1}^{a} n_j^{1/p} B_{n_j} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{1/p} B_{n_j},$$

если ряд $\sum_{j=1}^{a} n_j^{1/p} B_{n_j}$ сходится, и

$$\sum_{j=1}^{a} n_j^{1/p} B_{n_j} \geqslant \sum_{j=M}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

в противном случае.

В силу леммы 7, примененной в случае $A_j = n_j^{1/p-1} B_{n_j}$, найдутся функции ψ_j,

$$\psi_j(x) = \sum_{m=n_{j-1}}^{n_j-1} a_m \cos 2\pi m x, \qquad j = 1, \dots, a,$$

такие, что $\|\psi_j\|_2^2 \ll n_j$ и $l_1(\psi_j) = \dots = l_N(\psi_j) = 0$.

Положим

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{a} n_j^{1/p-1} B_{n_j} \psi_j(x).$$

Тогда $l_1(\psi) = \dots = l_N(\psi) = 0$.

Так как

$$\|\psi\|_p \ll (n_j)^{1/2-1/p} \|\psi\|_2 \ll (n_j)^{1-1/p},$$

то аналогично теореме 1 получаем, что $c \cdot \psi \in H_p^\omega$ для некоторого числа c.

Далее, в случае сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{1/p} B_{n_j}$, последовательно применяя леммы 3 и 7, получаем

$$\|\psi\|_\infty \geqslant \sum_{j=1}^{a} n_j^{1/p-1} B_{n_j} n_j = \sum_{j=1}^{a} n_j^{1/p} B_{n_j} \gg \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{1/p} B_{n_j} \gg \sum_{n=M}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если же ряд $\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{1/p} B_{n_j}$ расходится, то, применяя лемму 7, имеем

$$\|\psi\|_\infty \geqslant \sum_{j=1}^{a} n_j^{1/p-1} B_{n_j} n_j = \sum_{j=1}^{a} n_j^{1/p} B_{n_j} \geqslant \sum_{n=M}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, в любом случае

$$\|\psi\|_\infty \gg \sum_{n=M}^{\infty} n^{1/p-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далее, применяя сначала лемму 9, затем лемму 4, получаем оценку снизу в теореме 2.

Замечание 1. Отметим, что необходимую часть теорем 1 и 2 нельзя получить прямым применением леммы 12 из работы [13] (а также аналогичных лемм из [24] и [25]), поскольку в ней последовательность $\{n_k\}$ может расти очень быстро, и потому не всегда возможно гарантированно получить искомую оценку снизу: может оказаться, что до некоторого номера n_k имеющейся информации не достаточно для построения крайней функции класса H_p^ω (см. лемму 4), а после номера n_k получаем слишком маленькую сумму.

Замечание 2. Теоремы вложения типа теорем A и B были доказаны и для других, нежели H_p^ω, классов функций одного и многих переменных. Не исключено, что связи, аналогичные установленным в настоящей статье, между теоремами вложения и порядками соответствующих компьютерных (вычислительных) поперечников (1) имеют место и в этих случаях.

Список литературы

[1] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976.

[2] К. И. Бабенко, *Основы численного анализа*, Наука, М., 1986.

[3] В. Н. Темляков, *Приближения функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. МИАН, **178**, Наука, М., 1986; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Approximation of functions with bounded mixed derivative”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **178**:1 (1989).

[4] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: N. Korneĭchuk, *Exact constants in approximation theory*, Encyclopedia Math. Appl., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[5] К. Ю. Осипенко, “Об n-поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 55–79; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, “On n-widths, optimal quadrature formulas, and optimal recovery of functions analytic in a strip”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **45**:1 (1995), 55–78.

[6] K. Yu. Osipenko, K. Wilderotter, “Optimal information for approximating periodic analytic functions”, *Math. Comp.*, **66**:220 (1997), 1579–1592.

[7] S. D. Fisher, Ch. A. Micchelli, “Optimal sampling of holomorphic functions”, *Amer. J. Math.*, **106**:3 (1984), 593–609.

[8] S. D. Fisher, Ch. A. Micchelli, “Optimal sampling of holomorphic functions. II”, *Math. Ann.*, **273**:1 (1985), 131–147.

[9] Н. Темиргалиев, “Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье”, *Вестн. Евраз. ун-та*, 1997, № 3, 90–144.

[10] Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, “Об информативной мощности линейных функционалов”, *Матем. заметки*, **73**:6 (2003), 803–812; англ. пер.: Sh. Azhgaliev, N. Temirgaliev, “Informativeness of linear functionals”, *Math. Notes*, **73**:5–6 (2003), 759–768.

[11] Н. Темиргалиев, “Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье (Продолжение 1)”, *Вестн. Евраз. нац. ун-та*, **3–4** (2002), 222–272.

[12] Н. Темиргалиев, “Проблемы теории функций и вычислительные методы (доклад, представленный на Всемирный Конгресс математиков 2006 года в Мадриде)”, *Вестн. Евраз. нац. ун-та*, **2** (2007), 19–51.

[13] П. Л. Ульянов, “Вложение некоторых классов функций H_p^ω”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:3 (1968), 649–686; англ. пер.: P. L. Ul'janov, “The imbedding of certain function classes H_p^ω”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:3 (1968), 601–637.

[14] П. Л. Ульянов, “Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье”, *Матем. сб.*, **72(114)**:2 (1967), 193–225; англ. пер.: P. L. Ul'yanov, “Absolute and uniform convergence of Fourier series”, *Math. USSR-Sb.*, **1** (1967), 169–197.

[15] *Теория функций и вычислительные методы*, Материалы Международной конф., посвященной 60-летию со дня рождения проф. Н. Темиргалиева (Астана, 2007), Изд-во ЕНУ, Астана, 2007.

[16] K. I. Oskolkov, “Inequalities of the “large sieve” type and applications to problems of trigonometric approximation”, *Anal. Math.*, **12**:2 (1986), 143–166.

[17] В. Н. Темляков, “Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных”, *Матем. сб.*, **128(170)**:2(10) (1985), 256–268; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Approximate recovery of periodic functions of several variables”, *Math. USSR-Sb.*, **56**:1 (1987), 249–261.

[18] В. Х. Христов, “О сходимости некоторых интерполяционных процессов в интегральных и дискретных нормах”, *Конструктивная теория функций* (Варна, 1981), Изд-во АН Болгарии, София, 1983, 185–188.

[19] K. G. Ivanov, “On the rates of convergence of two moduli of functions”, *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, **5** (1983), 97–104.

[20] С. Н. Кудрявцев, “Некоторые задачи теории приближений для одного класса функций конечной гладкости”, *Матем. сб.*, **183**:2 (1992), 3–20; англ. пер.: S. N. Kudryavtsev, “Some problems in approximation theory for a class of functions of finite smoothness”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75**:1 (1993), 145–164.

[21] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.

[22] А. В. Ефимов, “Линейные методы приближения непрерывных периодических функций”, *Матем. сб.*, **54(96)**:1 (1961), 51–90.

[23] B. Szökefalvi-Nagy, “Approximation properties of orthogonal expansion”, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **15**:1 (1953), 31–37.

[24] В. А. Андриенко, “Вложение некоторых классов функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:6 (1967), 1311–1326; англ. пер.: V. A. Andrienko, “The imbedding of certain classes of functions”, *Math. USSR-Izv.*, **1**:6 (1967), 1255–1270.

[25] В. А. Андриенко, “О необходимых условиях вложения классов функций H_p^ω”, *Матем. сб.*, **78(120)**:2 (1969), 280–300; англ. пер.: V. A. Andrienko, “Necessary conditions for imbedding the function classes H_p^ω”, *Math. USSR-Sb.*, **7**:2 (1969), 273–292.

[26] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969; англ. пер.: S. M. Nikol'skiĭ, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.

[27] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Наука, М., 1978; англ. пер.: A. Kurosh, *Higher algebra*, Mir, Moscow, 1988.

[28] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматлит, М., 1960; англ. пер.: A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, Pergamon, New York, 1963.

Ш. У. Ажгалиев (Sh. Azhgaliyev)
Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилёва
Республика Казахстан, г. Астана
E-mail: nepash@mail.ru

Поступила в редакцию
14.11.2005 и 04.05.2007

Н. Темиргалиев (N. Temirgaliyev)
Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилёва
Республика Казахстан, г. Астана
E-mail: ntmath@mail.ru