Б.Н. Бияров

О вольтерровых задачах

(*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана*)

Известный французский ученый Ж.Адамар построил знаменитый пример, иллюстрирующий некорректность задачи Коши для уравнений эллиптического типа. С тех пор возникает вопрос: Существует ли вольтерровая задача для уравнений эллиптического типа? В данной работе доказывается теорема для широкого класса корректных сужений максимального оператора и корректных расширений минимального оператора , порожденных оператором Лапласа, о том, что они не могут быть вольтерровыми.

В $L_2(S)$, где $S \subset R^2$ единичный круг, рассмотрим минимальный операторL_0, порожденный оператором Лапласа

$$\hat{L}u \equiv -\Delta u = f(x,y) \tag{1}$$

Тогда максимальным оператором является $\hat{L} = L_0^*$, с областью определения

$$D(\hat{L}) = \{u \in L_2(S) : \hat{L}u \equiv \Delta u \in L_2(S)\}.$$

Обозначим через L_D оператор, являющийся регулярным расширением L_0 относительно $\hat{L}$ (т.е. $L_0 \subset L_D \subset \hat{L}$), соответствующего задаче Дирихле, с областью определения

$$D(L_D) = \{u \in W_2^2(S) : u|_{\partial S} = 0\}$$

Теперь можем описать всевозможные корректные сужения максимального оператора $\hat{L}$ в следующем виде [1].

$$u \equiv L^{-1}f = L_D^{-1}f + (I - L_D^{-1}\hat{L})Kf, \quad \forall f \in L_2(S), \tag{2}$$

где K - произвольный ограниченный линейный оператор в $L_2(S)$, действующий в $D(\hat{L})$, т.е.$D(K) = L_2(S), \quad R(K) \subset D(\hat{L})$. Других корректных сужений для $\hat{L}$ не существуют.

Очевидно, что $L \subset \hat{L}$, но $L_0 \not\subseteq L$ в общем случае, и

$$D(L) = \{u \in D(\hat{L}) : (u - (I - L_D^{-1}\hat{L})K\hat{L}u)|_{\partial S} = 0\}. \tag{3}$$

Заметим, что L^* является корректным расширением минимального оператора L_0, т.е. $L_0 \subset L^*$ только в случае когда $Ker(L_D^{-1} + K^* - (\hat{L}K)^* L_D^{-1}) = \{0\}$, и

$$v \equiv {L^*}^{-1} g = L_D^{-1}g + K^*g - (\hat{L}K)^* L_D^{-1}g, \tag{4}$$

где ограниченность оператора $\hat{L}K$ очевидна. Других корректных расширений для L_0 в $L_2(S)$ не существуют.

Определение. Корректное сужение L, максимального оператора $\hat{L}$, будем называть вольтерровым, если L^{-1} - является вполне непрерывным и квазинильпотенным оператором.

В этом случае L^*- является вольтерровым расширением минимального оператора L_0 если существует вольтерровое корректное сужение L максимального оператора $\hat{L}$.

В частности, когда оператор K переводит $R(L_0)$ в $D(L_0)$ корректное сужения L, окажется регулярным расширением минимального оператора L_0 относительно максимального оператора $\hat{L}$, т.е.$L_0 \subset L \subset \hat{L}$. Тогда,$L^*$ также будет регулярным расширением, т.е.$L_0 \subset L^* \subset \hat{L}$, в силу симметричности оператора L_0.

Заметим, что L^{-1} будет компактным оператором, тогда и только тогда, когда компактен K. (Компактность L_D^{-1} известна).

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. Пусть оператор K, описывающий корректные сужения L максимального оператора $\hat{L}$, удовлетворяет условию гладкости

$$R(K) \subset W_2^2(S), \tag{5}$$

тогда L не может быть вольтерровой задачей, т.е. оператор L^{-1} не является квазинильпотентной.

Доказательство. Второе слагаемое в представлений (2) преобразуем используя формулу Грина [2, с.249]:

$$(I - L_D^{-1}\hat{L})Kf = Kf - L_D^{-1}\hat{L}Kf = Kf - Kf +$$

$$+ \int_{|\xi|=1} F(x,\xi)(Kf)(\xi)ds = \int_{|\xi|=1} F(x,\xi)(Kf)(\xi)ds_\xi, \tag{6}$$

где $\Im(x,\xi) = \frac{1-|x|^2}{2\pi|x-\xi|^2}$ ядро Пуассона задачи Дирихле для оператора Лапласа в круге S. Если обозначить интеграл Пуассона (6) для единичного круга через Pи оператор взятие следа на границу единичного круга S через Γ, то формула (2) приметь следующий вид:

$$L^{-1}f = L_D^{-1}f + P\Gamma Kf. \tag{7}$$

Известно, что

$$L_D^{-1} \in C_p(L_2(S)),\ L_2(S)), \quad \forall p > 1.$$

Также легко проверить, что

$$P \in C_q(L_2(\partial S)),\ L_2(S)), \quad \forall q > 2.$$

С помощью оценки s - чисел [3, с.437] можно показать, что

$$\Gamma K \in C_l(L_2(S)),\ L_2(\partial S)), \quad \forall l > \frac{4}{3}.$$

Тем самым [4, с.256] показали, что

$$P\Gamma K \in C_\alpha(L_2(S)),\ L_2(S)), \quad \frac{4}{5} < \alpha \le 1.$$

Тогда предположив, что L^{-1} вольтерров пришли бы к противоречию [5, с.269] в силу теоремы В.И.Мацаева в случае $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$, и в силу теоремы того же автора [5, с.273] в случае $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если оператор K удовлетворяет условию теоремы, то любое расширения вида (4) минимального оператора L_0 не может быть вольтерровой задачей.

Заметим, что в этом случае о гладкости области определения не можем утверждать.

Следствие 2. Если оператор K конечномерный, то нету вольтерровых сужений максимального оператора $\hat{L}$ и нету вольтерровых расширений у минимального оператора L_0.

Следствие 3. Если оператор K представим в виде $K = K_1 + K_2$, где K_1 удовлетворяет условию теоремы, а K_2 - конечномерный, то нету вольтерровых сужений максимального оператора $\hat{L}$ и нету вольтерровых расширений у минимального оператора L_0.

Следствие 4. Если оператор K удовлетворяет условию теоремы и $KR(L_0) \subset D(L_0)$, то нету вольтерровых регулярных расширений, т.е. граничных вольтерровых задач ($L_0 \subset L \subset \hat{L}$).

Замечание 1. Результаты теоремы легко обобщаются на случай любой ограниченной области с достаточно гладкой границей.

Замечание 2. Легко обобщить теорему на трехмерный случай или на пространство большой размерности.

Замечание 3. В одномерном случае использованный метод доказательства не дачт противоречие в связи с тем, что в этом случае очень много вольтерровых сужений [6] и расширений.

Замечание 4. Видно, что условию теоремы о гладкости области значения оператора K можно ослабить, заменив условию (5) на условию

$$R(K) \subset W_2^r(S), \quad r > \frac{3}{2}$$

.

Случаи, указанные в замечаниях, будут показаны в рамках другой статьи более подробно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О расширениях и сужениях операторов в банаховом пространстве. //Успехи математических наук, Т.37, є4, 1982. - С. 116-123.
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.-М.: Наука, 1976. -392 с.
3. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. -М.: Мир, 1980. -664 с.
4. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. -М.: Мир, 1966. -1064 с.
5. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов. -М.: Наука, 1965. -448 с.
6. Бияров Б.Н. О спектральных свойствах корректных сужений и расширений одного класса дифференциальных операторов. //Дисс. ... канд.физ.-мат.наук. Алма-Ата, 1989. -32 с.

Бияров Б.Н.
Вольтеррлік есептер жайлы
Белгілі француз ғалымы Ж.Адамар эллиптикалық теңдеулер үшін Коши есебінің корректі емес екенін көрсететін мысал құрған. Сол дәуірден бері эллиптикалық теңдеулер үшін вольтеррлік есеп бар не жоқ екені үлкен сұрақ болып келді. Берілген жұмыста Лаплас теңдеуіне байланысты туындайтын максимальды оператор $\hat{L}$ -дің корректі тарылулары мен минимальды оператор L_0-дің кеңеюлері арасында вольтеррлік есептердің жоқ екені дәлелденген.

Beyrov B.N.
About Volterra problems
The known French scientist J.Hadamard has constructed a well-known example, illustrating an incorrectness of the Cauchy problem for the equations of elliptic type. Since then there is a question: Whether there is Volterra a problem for the equations of elliptic type? In the given work the theorem for a wide class of correct restrictions the maximal operator $\hat{L}$ and the correct extensions of the minimal operator L_0 generated by the Laplace operator, is proved that they can not be Volterra.

Поступила в редакцию 07.05.10
Рекомендована к печати 26.05.10