С.А. Алдашев, Р.Б. Сеилханова

Критерий единственности решения первой задачи Дарбу с отходом от характеристики для вырождающегося многомерного гиперболического уравнения

(*Актюбинский университет им. С.Баишева, г. Актобе*)

В монографии А.В.Бицадзе (1981г) для уравнения колебания струны изучалась задача Дарбу с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение таких задач для гиперболических уравнений. Трехмерный аналог этой задачи для волнового уравнения был предложен американским математиком, профессором М.Н.Проттером, в работе которого доказывалась единственность решения задачи. Однако в этой работе была допущена ошибка.

В данной работе получен критерий единственности решения первой задачи Дарбу с отходом от характеристики для вырождающегося многомерного гиперболического уравнения.

В [1], для уравнения колебания струны изучалась задача Дарбу с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение таких задач для гиперболических уравнений. Трехмерный аналог этой задачи для волнового уравнения предложен в [2], где доказывалась единственность решения задачи. Однако в этой работе была допущена ошибка.

В данной работе получен критерий единственности решения первой задачи Дарбу с отходом от характеристики для вырождающегося многомерного гиперболического уравнения.

Пусть D_β - конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек$(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная коноидами

$$\beta|x| = \tfrac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}, |x| = 1 - \tfrac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}$$

и плоскостью $t = 0$, где $|x|$- длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $0 > \beta = const \leq 1$, $p = const > 0$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β , обозначим через S_β, S^1 и S соответственно.

В области D_β рассмотрим вырождающееся многомерное гиперболическое уравнение

$$L_p u \equiv t^p \Delta_x u - u_{tt}, \tag{1}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

В качестве многомерного аналога задачи Дарбу с отходом от характеристики для уравнения (1) рассмотрим следующую

Задача 1.Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D_\beta}) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\mid_S = 0, u\mid_{S_\beta} = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t, r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_1 < \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}$ - система линейно независимых сферических функций порядка n,$1 \leq k \leq k_n$,$(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Тогда справедлив следующий критерий

Теорема. Решение задачи 1 $u(x,t) \equiv 0 \Leftrightarrow \beta < 1$.

Отметим, что эта теорема при $p = 0$ получена в [3].

Доказательство теоремы. Пусть $\Leftrightarrow \beta < 1$. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид ([4])

$$t^p(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u) - u_{tt} = 0 \tag{3}$$

$$\delta = -\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}),$$

$g_1 = 1$, $g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2$, $j > 1$.

Так как искомое решение задачи принадлежит классу$C(\overline{D_\beta}) \cap C^2(D_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{u_n^k}(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ - функции, подлежащие определению. Подставляя (4) в (3), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k$ ([4]), получим

$$t^p \overline{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} t^p \overline{u}_{nr}^k - \overline{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} t^p \overline{u}_n^k = 0, \lambda_n = n(n+m-2), \tag{5}$$

$$k = 1, \overline{k_n},\ n = 0, 1, ...$$

Произведя в (5) замену переменных $\overline{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r,t)$ и положив затем $r = r$, $x_0 = \frac{2}{2+p} t^{\frac{2+p}{2}}$, получим уравнение

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k \equiv u_{0,nrr}^k - u_{\alpha,nx_0x0}^k - \frac{\alpha}{x_0} u_{\alpha,nx_0}^k + \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4r^2} u_{\alpha,n}^k, \tag{6}$$

$$u_{\alpha,n}^k(r,x_0) = u_n^k[r, (\tfrac{2+p}{2} x_0)^{\frac{2}{2+p}}], 0 < \alpha = \tfrac{p}{2+p} < 1.$$

При этом краевое условие (2) запишется в виде

$$u_{\alpha,n}^k(r,0) = 0, u_{\alpha,n}^k(r,\beta r) = 0, k = \overline{1,k_n}, n = 0, 1, ... \tag{7}$$

Наряду с уравнением (6), рассмотрим уравнение

$$L_0 u_0, n^k \equiv u_{0,nrr}^k - u_{0,nx_0x_0} + \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4r^2} u_{0,n}^k. \tag{8}$$

Как доказано в [5] (см. также [6]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (6) и (8).

Утверждение. Если $u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ - решение задачи Коши для уравнения (8), удовлетворяющее условию

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tfrac{v_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)}, \tfrac{\partial}{\partial x_0} u_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0,$$

то при $0 < \alpha < 1$ функция

$$u_{0,n}^{k,1}(r,x_0) = \gamma_{2-\alpha+2q}(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0})^q [x_0^{1-\alpha+2q} \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}\, d\xi] \equiv \tag{9}$$

$$\equiv \gamma_{2-\alpha+2q} 2^{q-1} \Gamma(q - \frac{\alpha}{2} + 1) D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1} [\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}]$$

является решением уравнения (6) с начальными данными

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \lim_{x_0 \to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} u_{\alpha,n}^k = \nu_n^k(r)$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha = 2\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})$,$\Gamma(z)$ - гамма-функция, D_{0t}^α - оператор Римана-Лиувилля ([7]), а $q \geq 0$ - наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2 - \alpha + 2q \geq m - 1$.

Теперь будем решать задачу (6),(7).

Учитывая формулу (9), а также обратимость оператора ([7]), задача (6),(7) сводится к краевой задаче для (8) с данными

$$\frac{\partial}{\partial x_0} u_{0,n}^{k,1}(r,0)=0,\ u_{0,n}^{k,1}(r,\beta r)=0,$$

которая имеет нулевое решение ([3]).

Далее, учитывая утверждение, устанавливается, что задача (6),(7) также имеет тривиальное решение.

Таким образом, решение задачи 1 $u(x,t)\equiv 0$.

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь решение задачи 1 $u(x,t)\equiv 0$.

Покажем, что $\beta<1$. Предположим противное, т.е. $\beta=1$. В этом случае в [8] доказано, что задача 1 имеет бесчисленное множество нетривиальных решений. Это приводит к противоречию нашего предположения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981.-448 с.
2. Protter M.H. New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type. //J. Rational Mech and Analysis. 1954.Vol.3, №4. С.435-446.
3. Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости задачи Дарбу с отходом от характеристики для многомерного волнового уравнения. //Известия НАН РК, сер. физ-мат. наук., 2007, №3, С.3-7.
4. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.- М.: Физматгиз, 1962.- 254 с.
5. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. - Алматы: Гылым, 1994.- 170 с.
6. Терсенов С.А Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. - Новосибирск: НГУ, 1973.- 143 с.
7. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии.-М.: Высшая школа, 1985.- 301 с.
8. Нуржанов Ш.Т. Задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений: Дис. канд. физ-мат. наук - Алматы, 2000.- 67с.

С.А.Алдашев, Р.Б.Сеилханова

Азғындалған көп өлшемді гиперболалық теңдеуге сипаттамадан ауытқыған бірінші Дарбу есебінің шешімінің жалғыздық критериясы

А.В. Бицадзе монографиясында (1981ж) толқын теңдеуіне сипаттамадан ауытқыған Дарбу есебін зерттеген және осындай есептерді гиперболалық теңдеулерге қарастыру керектігіне көңіл аударған. Осы есептің үш өлшемдік түрі толқын теңдеуіне американдық математик, профессор М.Н. Проттер (1954 ж) ұсынды. Сол жұмыста есептің шешімі жалғыздық теоремасы дәлелденді, бірақ ол қате болып шықты.

Жұмыста азғындалған көп өлшемді гиперболалық теңдеуге сипаттамадан ауытқыған бірінші Дарбу есебінің шешімінің жалғыздық критериясы алынған.

C.A. Aldashev, R.B. Seilhanova

Criterion of uniqueness of the decision of the first problem of Darbu with a withdrawal from the characteristic for the degenerating multidimensional hyperbolic equation

A.V.Bitsadze's monographies (1981г) for the equation of fluctuation of a string the problem of Darbu with a withdrawal from the characteristic where the attention to studying of such problems for the hyperbolic equations is paid was studied. The three-dimensional analogue of this problem for the wave equation has been offered by the American mathematician, the professor M.N.Protter in which work uniqueness of the decision of a problem was proved. However in this work the error has been admitted.

In the given work the criterion of uniqueness of the decision of the first problem of Darbu with a withdrawal from the characteristic for the degenerating multidimensional hyperbolic equation is received.

Поступила в редакцию 12.03.10
Рекомендована к печати 27.05.10