ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНАҒЫ
ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

ЕВРАЗИЙСКИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Л.Н. ГУМИЛЕВА

L.N. GUMILYOV EURASIAN
NATIONAL UNIVERSITY

ХАБАРШЫ

1995 жылдың қантарынан жылына 6 рет шығады

I бөлім

№ 6 (97) · 2013

ВЕСТНИК

выходит 6 раз в год с января 1995г.

I часть

HERALD

Since 1995

I part

Астана

УДК 524.832

О.В. Разина, З.К. Макишева

Космология g-эссенции с взаимодействием типа Юкавы

(Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан)

Исследована скалярно-фермионная модель, которая является достаточно способной объяснить существующее ускоренное расширение современной Вселенной. Найдены точные аналитические решения для данной модели. Восстановлены соответствующие потенциалы. Данная модель может описывать ускоренное расширение Вселенной, так как полученные результаты удовлетворяют последним наблюдательным данным.

Ключевые слова: темная энергия, тетрада, масштабный фактор, g-эссенция

Выявление моделей, которые поспособствовали инфляционному периоду в эволюции Вселенной, является фундаментальной задачей в космологии. Были предложены несколько моделей для описания инфляционной эпохи и современного ускоренного периода: скалярные поля, экзотические уравнения состояния и космологическая постоянная [1]. Кроме того, были предложены фермионные поля как гравитационные источники расширяющейся Вселенной. В самом деле, фермионные поля могут быть причиной ускоренного периода с различными составляющими. В некоторых моделях фермионная часть играет роль инфлатона в ранний период Вселенной и темной энергии для поздней Вселенной, без необходимости космологической постоянной. В последующем сценарии период доминирующей материи постепенно превращается в период темной (фермионной) энергии, когда ускоренное расширение начинается и остается в течение остальной части эволюции системы. Эти фермионные поля были исследованы с помощью нескольких подходов численных решений, точных решений, решений "от анизотропии к изотропии"и циклической космологии (см., например, [2-5]). При рассмотрении этих моделей, одним из важных моментов является выбор фермионного потенциала.С помощью еще одного дополнительного / альтернативного подхода рассмотрим взаимодействие между скалярными и фермионными полями с потенциалом типа Юкавы [8]. Этот потенциал был предложен первоначально в физике элементарных частиц, чтобы описать поведение сильного взаимодействия в фермионах и здесь мы проверим, какую роль играет потенциал Юкавы в ранней ускоренной Вселенной. Будем использовать сигнатуру метрики $(+,-,-,-)$ и примем,что $8\pi G = c = \hbar = 1$.

Начнем с краткого обзора элементов формализма тетрады, которые используется для включения фермионных полей в динамическое искривленное пространство-времени, поскольку, как известно, формализм тетрады позволяет использовать фермионы в гравитационных моделях. В соответствии с общим ковариационным принципом, связь между тетрадой и метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ установлена через соотношение $g_{\mu\gamma} = e^a_\mu e^b_\gamma \eta_{ab}$, $a = 0,1,2,3$, где e^a_μ является тетрадой и $\eta_{\mu\nu}$ метрический тензор Минковского. Здесь латинские индексы относятся к локальной инерциальной системе отсчета, в то время как греческие индексы - к общей системе. Более того, согласно общему ковариационному принципу обычные матрицы Дирака–Паули γ^a должны быть записаны в общем виде $\Gamma^\mu = e^\mu_a \gamma^a$, эти матрицы удовлетворяют алгебре Клиффорда, т.е. $\Gamma^\mu \Gamma^\nu = 2g^{\mu\nu}$

В общем случае плотность лагранжиана плотности Дирака для фермионных полей дается в виде

$$L_{Dirac}(\psi) = \frac{1}{2}[\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi})\Gamma^\mu \psi], \tag{1}$$

где ψ и $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$ обозначают спинорное поле и сопряженное ему, соответственно, и $V(\psi)$ потенциал самодействия фермионного поля, неимеющий массу.

Для данного уравнения ковариантные производные даны в виде

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - \Omega_\mu \psi, \\ D_\mu \bar{\psi} &= \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi}\Omega_\mu, \end{aligned} \tag{2}$$

где спиновая связанность Ω_μ имеет вид

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4} g_{\rho\sigma} \left[\Gamma^\rho_{\mu\delta} - e^\rho_b (\partial_\mu e^b_\delta) \right] \Gamma^\delta \Gamma^\sigma, \tag{3}$$

где $\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}$ символы Кристоффеля.

Плотность лагранжиана для скалярного поля ϕ и поля с взаимодействием типа Юкавы между фермионным и скалярным полями выглядит следующим образом

$$L_{scalar}(\phi) = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi, \tag{4}$$

$$L_{Yukawa}(\phi, \psi) = -\eta \bar{\psi} \phi \psi, \tag{5}$$

где η постоянная потенциала Юкавы.

Полное действие для фермионного поля и скалярного поля, которые связаны между собой взаимодействием типа Юкавы, может быть записано как

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{1}{2} R + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \eta \bar{\psi} \phi \psi + \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi \right] - V_1(\phi) - V_2(u) \right\}, \tag{6}$$

где R скалярная кривизна, $u = \bar{\psi}\psi$.

Из уравнения Эйлера–Лагранжа получим уравнения Дирака для спинорного поля и его сопряженной пары в гравитационном поле для ψ и $\bar{\psi}$, соответственно

$$i\Gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{\partial V}{\partial \bar{\psi}} - \eta \phi \psi = 0, \tag{7}$$

$$i D_\mu \bar{\psi} \Gamma^\mu + \frac{\partial V}{\partial \psi} + \eta \bar{\psi} \phi = 0. \tag{8}$$

Аналогично уравнение Эйлера–Лагранжа для ϕ приводит к модифицированному уравнению Клейна–Гордона

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + \eta \bar{\psi} \psi = 0. \tag{9}$$

После вариации действия (6), учитывая тетраду, получим уравнения поля Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -T_{\mu\nu}, \tag{10}$$

где $T_{\mu\nu}$ тензор энергии-импульса, который является суммой фермионных и скалярных полей. Тензор энергии-импульса симметричен для фермионного поля в пространстве-времени без кручения, равен

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\bar{\psi} \Gamma^\mu D^\nu \psi + \bar{\psi} \Gamma^\nu D^\mu \psi - D^\nu \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi - D^\mu \bar{\psi} \Gamma^\nu \psi] + \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \\ - g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi - \eta \bar{\psi} \phi \psi + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \Gamma^\lambda D_\lambda \psi - D_\lambda \bar{\psi} \Gamma^\lambda \psi) - V_1(\phi) - V_2(u) \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Метрика Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{12}$$

где $a(t)$ обозначает космический масштабный фактор, и метрика обладает свойством однородности и изотропности пространственно плоской Вселенной. Для этой метрики связь между компонентами тетрады Дирака, матрицами Паули и спином равна

$$e^\mu_0 = \delta^\mu_0, \quad e^\mu_i = \frac{1}{a(t)} \delta^\mu_i, \quad \Gamma^0 = \gamma^0, \tag{13}$$

$$\Gamma^i = \frac{1}{a(t)}\gamma^i, \quad \Omega_0 = 0, \quad \Omega_i = \frac{1}{2}\dot{a}(t)\gamma^i\gamma^0, \tag{14}$$

где точка означает дифференцирование по времени. Действие (6) для случая g-эссенции с потенциалом типа Юкавы примет вид [7]

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[R + 2K(X, Y, \phi, \psi, \bar{\psi})], \tag{15}$$

где K является некоторой функцией ее аргументов, ϕ – скалярная функция, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ – фермионная функция и $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$ – сопряженная функция. Здесь

$$X = 0.5g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi, \quad Y = 0.5i[\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - (D_\mu\bar{\psi})\Gamma^\mu\psi] \tag{16}$$

являются каноническими кинетическими членами для скалярных и фермионных полей, соответственно. ∇_μ и D_μ являются ковариантными производными. Здесь фермионные поля рассматриваются как классические коммутирующие поля.

В случае метрики ФРУ (12), уравнения Фридмана, Клейн–Гордона и Дирака, соответствующие действию (15), сводятся к

$$\begin{aligned}
3H^2 - \rho &= 0, &(17)\\
2\dot{H} + 3H^2 + p &= 0, &(18)\\
K_X\ddot{\phi} + (\dot{K}_X + 3HK_X)\dot{\phi} - K_\phi &= 0, &(19)\\
K_Y\dot{\psi} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y)\psi - i\gamma^0 K_{\bar{\psi}} &= 0, &(20)\\
K_Y\dot{\bar{\psi}} + 0.5(3HK_Y + \dot{K}_Y)\bar{\psi} + iK_\psi\gamma^0 &= 0, &(21)\\
\dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0, &(22)
\end{aligned}$$

где кинетические члены (16), плотность энергии и давление имеют вид

$$X = 0.5\dot{\phi}^2, \quad Y = 0.5i(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi) \tag{23}$$

и

$$\rho = 2K_X X + K_Y Y - K, \quad p = K. \tag{24}$$

В этой статье мы рассматриваем действие g-эсссенции (15) с

$$K = X + X^2 + Y - V_1(\phi) - V_2(u) - \eta\phi u. \tag{25}$$

Для лагранжиана (25) систему (17)–(22) запишем в виде

$$\begin{aligned}
3H^2 - \rho &= 0, &(26)\\
2\dot{H} + 3H^2 + p &= 0, &(27)\\
\ddot{\phi}(1 + 3\dot{\phi}^2) + 3H\dot{\phi} + 3H\dot{\phi}^3 + \eta u + V_{1\phi} &= 0, &(28)\\
\dot{\psi} + \frac{3}{2}H\psi + i\left(V_{2u}\psi + \eta\phi\psi\right)\gamma^0 &= 0, &(29)\\
\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}H\bar{\psi} - i\gamma^0\left(V_{2u}\bar{\psi} + \eta\phi\bar{\psi}\right) &= 0, &(30)\\
\dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0, &(31)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{3}{4}\dot{\phi}^4 + V_1 + V_2 + \eta\phi u, &(32)\\
p &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}\dot{\phi}^4 - V_1 - V_2 + V_{2u}u. &(33)
\end{aligned}$$

Построим точные аналитические решения для системы (11)–(22).

Значения масштабного фактора a и скалярного поля ϕ возьмем в виде

$$a = a_0 t^{\lambda}, \tag{34}$$

$$\phi = \phi_0 t^{\delta}, \tag{35}$$

где $a_0, \phi_0, \lambda, \delta$ –являются константами.

Суммируя попарно уравнения (26), (27) и (32), (33) и, приравняв полученные выражения, восстановим соответствующий потенциал V_2 для фермионного поля

$$V_2 = -\frac{3\lambda}{t^2} + \frac{3\lambda\phi_0^2\delta^2}{2(\delta-1)}t^{2(\delta-1)} + \frac{3\lambda\phi_0^4\delta^4}{4(\delta-1)}t^{4(\delta-1)} + \frac{3\eta\phi_0\lambda c}{a_0^3(\delta-3\lambda)}t^{\delta-3\lambda} + V_{20}, \tag{36}$$

где V_{20} –константа интегрирования.

Так как потенциал V_2 зависит от u, перепишем (36) в терминах u.

$$V_2(u) = 3\lambda^2\left(\frac{c}{a_0^3 u}\right)^{\frac{2}{3\lambda}} + \frac{3\lambda\phi_0^2\delta^2}{2(\delta-1)}\left(\frac{c}{a_0^3 u}\right)^{\frac{2(\delta-1)}{3\lambda}} + \frac{3\phi_0^4\delta^4\lambda}{4(\delta-1)}\left(\frac{c}{a_0^3 u}\right)^{\frac{4(\delta-1)}{3\lambda}} + \frac{3\lambda\eta\phi_0 c}{a_0^3(\delta-3\lambda)}\left(\frac{c}{a_0^3 u}\right)^{\delta-3\lambda} + V_{20} \tag{37}$$

Из формулы (28) найдем потенциал V_1 для скалярного поля

$$V_1 = -t^{2(\delta-1)}\left(\frac{\phi_0^2\delta^2(\delta-1) + 3\lambda\phi_0^2\delta^2}{2(\delta-1)}\right) - t^{4(\delta-1)}\left(\frac{3\phi_0^4\delta^4(\delta-1) + 3\lambda\phi_0^4\delta^4}{4(\delta-1)}\right) - \\ - \frac{\eta c\phi_0\delta}{a_0^3(\delta-3\lambda)}t^{\delta-3\lambda} + V_{10}, \tag{38}$$

где V_{10} –константа интегрирования.

Перепишем V_1 в терминах ϕ

$$V_1(\phi) = -\left(\frac{\phi_0^2\delta^2(\delta-1) + 3\lambda\phi_0^2\delta^2}{2(\delta-1)}\right)\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{\frac{2(\delta-1)}{\delta}} - \left(\frac{3\phi_0^4\delta^4(\delta-1) + 3\lambda\phi_0^4\delta^4}{4(\delta-1)}\right)\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{\frac{4(\delta-1)}{\delta}} - \\ - \frac{\eta c\phi_0\delta}{a_0^3(\delta-3\lambda)}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{\frac{\delta-3\lambda}{\delta}} + V_{10} \tag{39}$$

Осталось найти фермионные функции ψ и $\bar{\psi}$. Так как $\bar{\psi}$ комплексно сопряженная функция к ψ, зная ψ, легко найти $\bar{\psi}$. По определению ψ есть вектор столбец в виде

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix} \tag{40}$$

Для нахождения ψ используем формулу (28)

$$\begin{pmatrix}\dot{\psi}_0\\ \dot{\psi}_1\\ \dot{\psi}_2\\ \dot{\psi}_3\end{pmatrix} + \frac{3}{2}H\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix} + iV_{2u}\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ -\psi_2\\ -\psi_3\end{pmatrix} + i\eta\phi\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ -\psi_2\\ -\psi_3\end{pmatrix} = 0 \tag{41}$$

Решение для ψ будем искать в виде

$$\psi_j = A_j(t)e^{-iB_j(t)} \tag{42}$$

Подставив 42) в (41), получим следующее решение

$$\psi_l = \frac{c_l}{t^{1.5\lambda}} e^{iB}, \quad (l = 1, 2), \tag{43}$$

$$\psi_k = \frac{c_k}{t^{1.5\lambda}} e^{-iB}, \quad (k = 3, 4), \tag{44}$$

где c_j удовлетворяет следующему условию $c = |c_1|^2 + |c_2|^2 - |c_3|^2 - |c_4|^2$ и

$$B = \frac{2\lambda}{3\lambda - 1} t^{3\lambda - 1} - \frac{\phi_0^2 \delta^2}{2\delta + 3\lambda - 1} t^{2\delta + 3\lambda - 1} - \frac{\phi_0^4 \delta^4}{4\delta + 3\lambda - 3} t^{4\delta + 3\lambda - 3} + B_0, \tag{45}$$

где B_0 константа интегрирования.

Для этих решений уравнения параметров состояния ω, замедления q и рывка j принимают форму

$$w = -1 + \frac{2}{3\lambda}, \quad q = -1 + \frac{1}{\lambda}, \quad j = 1 - \frac{3}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}. \tag{46}$$

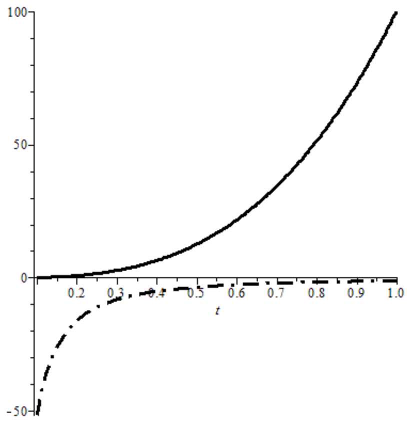

Рисунок 1.- Ускорение полей $\ddot{a}$ как функция от t при $\lambda_1 = 5$ (сплошная), $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ (пунктирная)

На рисунке 1 мы построили график зависимости ускорения $\ddot{a}$ от времени, для двух значений степенной константы масштабного фактора $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = \frac{1}{3}$. Когда ускорение отрицательно, мы имеем период преобладания излучения/материи. Когда ускорение положительно–период преобладания темной энергии. Заметим, что при $\lambda < 0$ и $\lambda > 1$ значение ускорения положительно и наша модель характеризует период преобладания темной энергии. При $0 < \lambda < 1$ значение ускорения отрицательно и наша модель характеризует период преобладания темной материи.

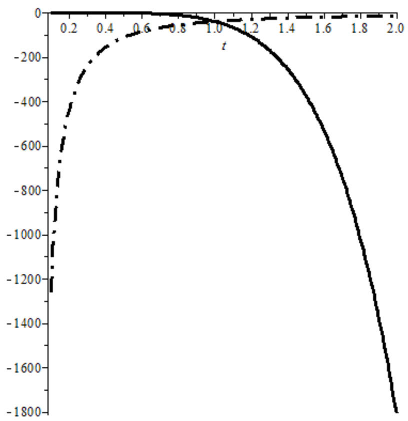

Рисунок 2.-Потенциал типа Юкавы $\eta\phi u$ как функция от t, при $\lambda_1 = 5$ (сплошная), $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ (пунктирная)

На рисунке 2 показано поведение потенциала типа Юкавы $\eta\phi u$ как функции времени для двух значений степенной константы масштабного фактора $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = \frac{1}{3}$. Поведение кривых на этом рисунке подтверждает представленные выше результаты, т.е. при различных значениях степенной константы λ вид графика потенциала типа Юкавы изменяется, так что она имеет прямое влияние на период замедления.

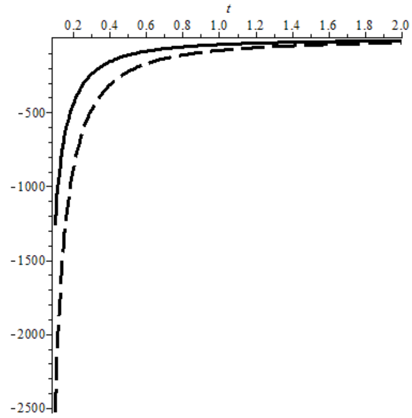

Рисунок 3.-Потенциал типа Юкавы $\eta\phi u$ как функция от t, при $\eta_1 = 5$ (сплошная), $\eta_2 = 10$ (пунктирная)

На рисунке 3 показано поведение потенциала типа Юкавы $\eta\phi u$ как функции времени для двух значений константы потенциала Юкавы $\eta_1 = 5$ и $\eta_2 = 10$. Изменение этой константы не влияет на поведение решения.

Таким образом, в этой статье мы исследовали возможности скалярно-фермионной космологии описать ускоренные режимы нашей Вселенной. Это стало возможным благодаря использованию скалярного потенциала, фермионного потенциала и потенциала типа Юкавы. Для нашей модели, можно сделать выводы, что решение модели 25) для g-эссенции с (36) может описывать ускоренное расширение Вселенной.

ЛИТЕРАТУРА

1 Peebles P. J. E. and Ratra B. *Cosmology with a time-variable cosmological constant*// Astrophys. J. Lett.–1988.–V.325.–P.17;

2 Saha B. and Boyadjiev T. *Bianchi type-I cosmology with scalar and spinor fields*// Phys. Rev. D–2004.–V.69–P.124010;

3 Ribas M. O. and Kremer G. M.*Fermion fields in Einstein-Cartan theory and the accelerated-decelerated transition in a primordial universe*// Grav. Cosm.–2010.–V.16.–P.173;

4 Kassandrov V.V. *On hierarchy and equivalence of relativistic equations formassive fields*// Grav. Cosm.–2008.–V.14.–P.53;

5 Armendariz-Picon C., and Greene P. B. *Spinors, inflaton,and non-singular cyclic cosmologies*// Gen. Relativ. Gravit.–2003.–V.35.–P.1637;

6 Kulnazarov I., Yerzhanov K., Myrzakul Sh., Tsyba P., Myrzakulov R. *G-essence with Yukawa Interactions* // Eur. Phys. J.C.–2011.–V.71.–P.1698;

7 O. Razina, P. Tsyba, I. Kulnazarov, Sh. Myrzakul, K. Yerzhanov, R. Myrzakulov. G-essence cosmologies with Yukawa type interactions // Eur. Phys. J. Plus.–2011.–V.85.–P.126;

8 Marlos O. Ribas, Fernando P. Devecchi and Gilberto M. Kremer. *Fermionic cosmologies with Yukawa type interactions*// Europhys. Lett.–2011.–V.93.–P.19002.

Разина О.В., Макишева З.К.

Канондикалық емес кинетикалық мүшелі және Юкава типті әсерлесумен скаляр-фермионды космология.

Заманауи әлемнің үдемелі кеңеюін түсіндіруге қабілетті болып табылатын скаляр-фермионды модель зерттелінді. Осы модель үщін нақты аналитикалық шешім табылады. Сәйкес келетін потенциалдар қалпына келтірілді. Бұл модель әлемнің үдемелі кеңеюін сипаттай алады, өйткені алынған нәтижелер соңғы бақылау мәліметтерін қанағаттандырады.

Түйін сөздер: күңгірт энергия, тетрада, масштабтық фактор, g-эссенция

Razina O.V., Makisheva Z.K.

Scalar-fermionic cosmology with not initial kinetic part and Yukawa type interactions

We researched the scalar-fermionic model, that can be a reason of accelerated expansion of the Universe. We found some exact analitic solutions for this model. Appropriate potentials were reduced. Our model can describe accelerated expansion, because the results we obtained sutisfy the last observational data.

Keywords: dark energy, tetrad, scale factor, g-essence

Поступила в редакцию 12.10.13

Рекомендована к печати 30.10.13

Об авторах:

Разина О.В. - доктор PhD кафедры Общая и теоретическая физика Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева

Макишева З.К. - магистрант 2 курса обучения специальность Физика кафедры Общая и теоретическая физика Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева